ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 74 за 2015 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Попков К.А.

О точном значении длины минимального единичного диагностического теста для одного класса схем

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Попков К.А. О точном значении длины минимального единичного диагностического теста для одного класса схем // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2015. № 74. 20 с.
URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2015-74

Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Российской академии наук

К. А. Попков

О точном значении длины минимального единичного диагностического теста для одного класса схем

Москва — 2015

Попков К. А.

О точном значении длины минимального единичного диагностического теста для одного класса схем

Рассматривается задача синтеза неизбыточных схем из функциональных элементов в базисе $\{\&, \vee, \neg\}$, реализующих булевы функции от n переменных и допускающих короткие единичные диагностические тесты относительно однотипных константных неисправностей на выходах элементов. Для каждой булевой функции, допускающей реализацию неизбыточной схемой, найдено минимально возможное значение длины такого теста. В частности, доказано, что оно не превосходит двух.

Ключевые слова: схема из функциональных элементов, неисправность, единичный диагностический тест

Kirill Andreevich Popkov

On an exact length value of a minimal single diagnostic test for a particular class of circuits

We consider a problem of synthesis of irredundant logic circuits in the basis $\{\&, \vee, \neg\}$ which implement Boolean functions on n variables and allow short single diagnostic tests regarding uniform constant faults on outputs of gates. For each Boolean function permitting implementation by an irredundant circuit, the minimal possible length value of such a test is found. In particular, it is proved that this value does not exceed two.

Key words: logic circuit, fault, single diagnostic test

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 14–01–00598) и программы фундаментальных исследований ОМН РАН «Алгебраические и комбинаторные методы математической кибернетики и информационные системы нового поколения» (проект «Задачи оптимального синтеза управляющих систем»).

Оглавление

Введение

В данной работе рассматривается задача синтеза легкотестируемых схем, реализующих заданные булевы функции. Логический подход к тестированию электрических схем предложен С. В. Яблонским и И. А. Чегис в [1]; этот подход также применим к тестированию схем из функциональных элементов (см. [2, 3, 4]). Пусть имеется схема из функциональных элементов S, реализующая булеву функцию $f(x_1, \dots, x_n)$. Под воздействием некоторого источника неисправностей один или несколько элементов схемы S могут перейти в неисправное состояние. В результате схема S вместо исходной функции $f(x_1, \dots, x_n)$ будет реализовывать некоторую булеву функцию $g(x_1, \dots, x_n)$, вообще говоря, отличную от f. Все такие функции $g(x_1, \dots, x_n)$, получающиеся при всевозможных допустимых для рассматриваемой задачи неисправностях элементов схемы S, называются *функциями неисправности* данной схемы.

Введём следующие определения [2, 3, 4]. *Проверяющим тестом* для схемы S называется такое множество T наборов значений переменных $x_1, \dots, x_n$, что для любой отличной от $f(x_1, \dots, x_n)$ функции неисправности схемы S в T найдётся набор $\tilde{\sigma}$, на котором $f(\tilde{\sigma}) \neq g(\tilde{\sigma})$. *Диагностическим тестом* для схемы S называется такое множество T наборов значений переменных $x_1, \dots, x_n$, что T является проверяющим тестом и, кроме того, для любых двух различных функций неисправности $g_1(x_1, \dots, x_n)$ и $g_2(x_1, \dots, x_n)$ схемы S в T найдётся набор $\tilde{\sigma}$, на котором $g_1(\tilde{\sigma}) \neq g_2(\tilde{\sigma})$. Число наборов в T называется *длиной* теста. Тест считается *минимальным*, если он имеет наименьшую возможную длину (при заданных условиях). В качестве тривиального диагностического (и проверяющего) теста длины 2^n для схемы S всегда можно взять множество T, состоящее из всех двоичных наборов длины n. Тест называется *полным*, если в схеме могут быть неисправны сколько угодно элементов, и *единичным*, если в схеме может быть неисправен только один элемент. Единичные тесты обычно рассматривают для неизбыточных схем [4], т.е. для таких схем, в которых любая допустимая неисправность любого одного элемента приводит к функции неисправности, отличной от исходной функции, реализуемой данной схемой.

Пусть зафиксирован вид неисправностей элементов, B — произвольный функционально полный базис и T — единичный диагностический тест для некоторой схемы S. Введём следующие обозначения: $D^B_{s,diagn}(T)$ — длина теста T; $D^B_{s,diagn}(S) = \min D^B_{s,diagn}(T)$, где минимум берётся по всем единичным диагностическим тестам T для схемы S; $D^B_{s,diagn}(f) = \min D^B_{s,diagn}(S)$, где минимум берётся по всем неизбыточным схемам S в базисе B, реализующим функцию f; $D^B_{s,diagn}(n) = \max D^B_{s,diagn}(f)$, где максимум берётся по всем булевым функциям f от n переменных, для которых определено значение $D^B_{s,diagn}(f)$. Функция $D^B_{s,diagn}(n)$ называется *функцией Шеннона* длины единичного диагностического теста. По аналогии с функциями $D^B_{s,diagn}$ можно ввести функции $D^B_{s,detect}$, $D^B_{c,detect}$ и $D^B_{c,diagn}$ для соответственно единичного проверяющего, полного проверяющего и полного диагностического тестов, зависящие от T, от S, от f и от n (в определениях функций $D^B_{c,detect}(f)$ и $D^B_{c,diagn}(f)$ не требуется предполагать неизбыточность схем). Так, например, $D^B_{c,detect}(n)$ — функция Шеннона длины полного проверяющего теста.

Перечислим основные результаты, касающиеся тестирования схем из функциональных элементов. Класс допустимых неисправностей функциональных элементов ограничим константными неисправностями на выходах элементов, при которых значение на выходе любого неисправного элемента становится равно некоторой булевой константе. Неисправности на выходах элементов называются однотипными константными типа p, если эта константа одна и та же для каждого неисправного элемента и равна p, и произвольными константными, если эта константа может быть равна как 0, так и 1 для каждого неисправного элемента независимо от неисправностей других элементов. Для удобства над буквой D после символов, обозначающих базис, через точку с запятой будем ставить символы «$0, 1$», «0» или «1» в случаях, когда в схемах допускаются соответственно произвольные константные неисправности, однотипные константные неисправности типа 0 или типа 1 на выходах элементов.

В работе S. M. Reddy [5] для базиса Жегалкина $B_1 = \{\&, \oplus, 1, 0\}$ была получена оценка $D^{B_1;\,0,1}_{s,detect}(n) \leqslant n + 3$. В дальнейшем результат работы [5] был обобщен С. С Колядой в [6] на случай произвольного функционально полного конечного базиса. Последний результат, в свою очередь, был впоследствии усилен Д. С. Романовым, который в [7] для любого функционально полного базиса B получил оценку $D^{B;\,0,1}_{s,detect}(n) \leqslant 4$. Ю. В. Бородиной в базисе Жегалкина B_1 удалось найти точное значение функций Шеннона $D^{B_1;\,1}_{s,detect}(n) = 1$ [8] и $D^{B_1;\,0}_{c,detect}(n) = 1$ [9] (совместно с П. А. Бородиным). Для полных проверяющих тестов Н. П. Редькин в [10, 11] для любого полного конечного базиса B получил оценку $D^{B;\,0,1}_{c,detect}(n) \leqslant 2\left(2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + 2^{\lceil \frac{n}{2} \rceil} + n\right)$; Д. С. Романов в [12] доказал, что существует базис B_2, содержащий функциональные элементы с числом входов от одного до семи, в котором $2 \leqslant D^{B_2;\,0,1}_{c,detect}(n) \leqslant 4$. В [4] (с. 113, теорема 9) с использованием идей С. В. Яблонского установлено, что для любого полного базиса B функция $D^{B;\,0,1}_{s,diagn}(n)$ асимптотически не превосходит $\frac{2^{n+1}}{n}$. Для базиса $B_0 = \{\&, \vee, \neg\}$ Н. П. Редькин в [13, 14] получил оценки $D^{B_0;\,p}_{c,detect}(n) \leqslant n$ и $D^{B_0;\,p}_{s,diagn}(n) \leqslant 2n+1$ для $p = 0, 1$. Первая из этих двух оценок впоследствии была улучшена Ю. В. Бородиной, которая в [15] установила, что $D^{B_0,\,p}_{c,detect}(n) = 2$.

В данной работе будут рассматриваться только единичные диагностические тесты, в качестве неисправностей функциональных элементов — однотипные константные неисправности типа p ($p \in \{0, 1\}$) на выходах элементов, а в качестве базиса — классический базис $B_0 = \{\&, \vee, \neg\}$. Для краткости вместо $D^{B_0;\,p}_{s,diagn}(T)$, $D^{B_0;\,p}_{s,diagn}(S)$, $D^{B_0;\,p}_{s,diagn}(f)$ и $D^{B_0;\,p}_{s,diagn}(n)$ будем писать соответственно $D_p(T)$, $D_p(S)$, $D_p(f)$ и $D_p(n)$.

Формулировки и доказательства основных результатов

Выделим два возможных представления функции f:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = x_i, \tag{$*$}$$

где $i \in \{1, \ldots, n\}$;

$$f(x_1, \ldots, x_n) = K_1 \vee \ldots \vee K_m, \tag{$**$}$$

где $m \geqslant 1$ и каждое слагаемое K_j, $j = 1, \ldots, m$, имеет вид либо x_{i_j}, либо $\overline{x_{i_j}}$, либо $x_{i_j} x_{i'_j}$ для некоторых $i_j, i'_j \in \{1, \ldots, n\}$.

Отметим, что представление $(*)$ является частным случаем представления $(**)$.

Теорема 1. *Для любой булевой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$, отличной от тождественной единицы, справедливо равенство*

$$D_1(f) = \begin{cases} 0, & \text{если функция } f \text{ представима в виде } (*), \\ 1, & \text{если функция } f \text{ представима в виде } (**), \text{ но не в виде } (*), \\ 2, & \text{если функция } f \text{ не представима в виде } (**). \end{cases}$$

Если же $f \equiv 1$, то значение $D_1(f)$ не определено.

Следствие 1. *Справедливо равенство $D_1(n) = 2$.*

Доказательство теоремы 1. Вместо $D_1(f)$ для краткости будем писать $D(f)$. Пусть вначале $f \equiv 1$; S — произвольная схема, реализующая функцию f. Выход схемы S, очевидно, не может совпадать ни с одним из её входов, поэтому он является выходом некоторого функционального элемента. Тогда при неисправности этого элемента получающаяся схема по-прежнему будет реализовывать тождественную единицу, т.е. схема S избыточна. Получаем, что неизбыточных схем, реализующих функцию f, не существует и, следовательно, значение $D(f)$ не определено.

Если функция f представима в виде $(*)$, то её, очевидно, можно реализовать схемой, не содержащей функциональных элементов. У такой схемы нет ни одной функции неисправности, поэтому пустое множество для неё является единичным диагностическим тестом, откуда следует равенство $D(f) = 0$.

Пусть теперь функция f отлична от тождественной единицы, представима в виде $(**)$ и не представима в виде $(*)$. Каждое слагаемое K_j вида $\overline{x_{i_j}}$ реализуем с использованием одного инвертора, а каждое слагаемое K_j вида $x_{i_j}x_{i'_j}$ — с использованием одного конъюнктора. Затем все построенные элементы и все входы «x_{i_j}», отвечающие слагаемым K_j вида x_{i_j}, соединим цепочкой из дизъюнкторов. Очевидно, что полученная схема реализует функцию f, а единственной её функцией неисправности является тождественная единица. Отсюда следует, что данная схема неизбыточна и множество, состоящее из любого одного нулевого набора функции f (т.е. набора, на котором функция f принимает значение 0), является для этой схемы единичным диагностическим тестом длины 1. Поэтому $D(f) \leqslant 1$. С другой стороны, так как функция f не представима в виде $(*)$, то выход любой схемы, реализующей функцию f, не может совпадать ни с одним из её входов, поэтому он является выходом некоторого функционального элемента. Тогда при неисправности этого элемента получающаяся схема будет реализовывать тождественную единицу, которую надо отличить от функции f хотя бы на одном наборе, откуда следует, что $D(f) \geqslant 1$. В итоге получаем равенство $D(f) = 1$.

Пусть, наконец, функция f отлична от тождественной единицы и не представима в виде $(**)$. Докажем сначала, что $D(f) \geqslant 2$, если $D(f)$ определено. Предположим, что $D(f) \leqslant 1$. Аналогично предыдущему случаю показывается, что $D(f) \geqslant 1$, поэтому $D(f) = 1$. Пусть S — произвольная неизбыточная схема, реализующая функцию f, для которой $D(S) = D(f) = 1$. Тогда для этой схемы существует единичный диагностический тест, состоящий из одного какого-то набора $\tilde{\sigma}$. Очевидно, что в схеме S содержится выходной элемент.

Лемма 1. *В указанных предположениях функция, реализуемая на выходе любого элемента схемы S, не превосходит f.*

Доказательство. Предположим, что это не так, т.е. значение функции h, реализуемой на выходе некоторого элемента E схемы S, на каком-то наборе $\tilde{\delta}$ больше значения функции f на этом же наборе. Имеем $f(\tilde{\delta}) = 0$, $h(\tilde{\delta}) = 1$. В таком случае при переходе элемента E в неисправное состояние на наборе $\tilde{\delta}$ значение на выходе любого элемента схемы S (в том числе выходного) не изменится, и, следовательно, значение получающейся функции неисправности g схемы S на наборе $\tilde{\delta}$ будет равно $f(\tilde{\delta}) = 0$. Так как схема S неизбыточна, то $g \not\equiv f$. Далее, при неисправности выходного элемента схемы S получающаяся схема будет реализовывать тождественную единицу, причём $1 \not\equiv f$ по предположению и $1 \not\equiv g$ в силу того, что $g(\tilde{\delta}) = 0$. Таким образом, функции f, g и 1 попарно различны. На наборе $\tilde{\sigma}$ по крайней мере две из них принимают одинаковое значение, однако это противоречит тому, что $\{\tilde{\sigma}\}$ — единичный диагностический тест для схемы S. Полученное противоречие доказывает лемму 1.

Пусть $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$ — все такие входные переменные схемы S, каждая из которых подаётся в ней на вход инвертора (если таких переменных нет, полагаем $k = 0$). На выходах этих инверторов реализуются функции $\overline{x_{i_1}}, \ldots, \overline{x_{i_k}}$; каждая из них по лемме 1 не превосходит f. Поэтому

$$\overline{x_{i_1}} \vee \ldots \vee \overline{x_{i_k}} \leqslant f \tag{1}$$

(в случае $k = 0$ полагаем $\overline{x_{i_1}} \vee \ldots \vee \overline{x_{i_k}} = 0$).

Далее, пусть $x_{i_{k+1}}, \ldots, x_{i_{k+r}}$ — все такие входные переменные схемы S, каждая из которых подаётся в ней на вход какого-то дизъюнктора (если таких переменных нет, полагаем $r = 0$). На выходах этих дизъюнкторов реализуются функции, большие либо равные соответственно $x_{i_{k+1}}, \ldots, x_{i_{k+r}}$, а тогда по лемме 1 имеем $x_{i_{k+1}} \leqslant f$, …, $x_{i_{k+r}} \leqslant f$. Следовательно,

$$x_{i_{k+1}} \vee \ldots \vee x_{i_{k+r}} \leqslant f \tag{2}$$

(в случае $r = 0$ полагаем $x_{i_{k+1}} \vee \ldots \vee x_{i_{k+r}} = 0$).

Пусть теперь $(x_{i_{k+r+1}}, x_{i_{k+r+2}}), \ldots, (x_{i_{k+r+2s-1}}, x_{i_{k+r+2s}})$ — все такие неупорядоченные пары входных переменных схемы S, что обе переменные из каждой пары подаются в ней на входы какого-то одного и того же конъюнктора (если таких пар переменных нет, полагаем $s = 0$). На выходах этих конъюнкторов реализуются функции $x_{i_{k+r+1}} x_{i_{k+r+2}}, \ldots,$ $x_{i_{k+r+2s-1}} x_{i_{k+r+2s}}$, каждая из которых по лемме 1 не превосходит f. Поэтому

$$x_{i_{k+r+1}} x_{i_{k+r+2}} \vee \ldots \vee x_{i_{k+r+2s-1}} x_{i_{k+r+2s}} \leqslant f \tag{3}$$

(в случае $s = 0$ полагаем $x_{i_{k+r+1}} x_{i_{k+r+2}} \vee \ldots \vee x_{i_{k+r+2s-1}} x_{i_{k+r+2s}} = 0$).

Отметим, что хотя бы одно из чисел k, r, s больше нуля, так как на все входы любого «верхнего» элемента схемы S, т.е. элемента, имеющего минимальный номер при некоторой монотонной нумерации вершин в этой схеме, обязаны подаваться переменные.

Из (1)–(3) получаем соотношение $f' \leqslant f$, где

$$f' = \overline{x_{i_1}} \vee \ldots \vee \overline{x_{i_k}} \vee x_{i_{k+1}} \vee \ldots \vee x_{i_{k+r}} \vee x_{i_{k+r+1}} x_{i_{k+r+2}} \vee \ldots \vee x_{i_{k+r+2s-1}} x_{i_{k+r+2s}}. \quad (4)$$

Если $f' \equiv f$, то функция f представима в виде $(**)$, что противоречит предположению рассматриваемого случая. Поэтому $f' < f$, т.е. существует такой набор $\tilde{\pi}$, что $f'(\tilde{\pi}) = 0$, $f(\tilde{\pi}) = 1$. Тогда значение на выходе выходного элемента схемы S на наборе $\tilde{\pi}$ равно 1. Из этого следует существование в схеме S такого элемента E_1, что на наборе $\tilde{\pi}$ значение на его выходе равно 1, а значение на выходе любого элемента, расположенного в схеме S выше элемента E_1 (если такой элемент существует) равно 0. (Считаем, что элемент E_2 расположен в схеме S выше элемента E_1, если в ней существует ориентированный путь от E_2 к E_1). Возможны семь случаев.

1. Элемент E_1 — инвертор, и его вход соединён в схеме S с выходом какого-то функционального элемента E_2. Пусть на выходе элемента E_2 в схеме S реализуется функция φ, тогда на выходе элемента E_1 реализуется функция $\overline{\varphi}$. Из леммы 1 следует, что $\varphi \leqslant f$ и $\overline{\varphi} \leqslant f$, а тогда $1 \equiv \varphi \vee \overline{\varphi} \leqslant f$, т.е. $f \equiv 1$. Противоречие.

2. Элемент E_1 — инвертор, и его вход соединён в схеме S со входом этой схемы, отвечающим некоторой переменной x_i. Тогда в силу выбора элемента E_1 на наборе $\tilde{\pi}$ в схеме S значение на выходе этого элемента равно единице, следовательно, на этом наборе $x_i = 0$. Но $i \in \{i_1, \ldots, i_k\}$ по определению этих индексов, а тогда $f'(\tilde{\pi}) = 1$ в силу (4). Противоречие.

3. Элемент E_1 — конъюнктор или дизъюнктор, и оба его входа соединены в схеме S с выходами функциональных элементов. В этом случае в силу выбора элемента E_1 на наборе $\tilde{\pi}$ в схеме S значение на обоих входах элемента E_1 равно нулю, а значение на его выходе — единице, что невозможно.

4. Элемент E_1 — конъюнктор, и один его вход (без ограничения общности левый) соединён в схеме S с выходом функционального элемента, а другой — со входом схемы S, отвечающим некоторой переменной x_i. Тогда в силу выбора элемента E_1 на наборе $\tilde{\pi}$ в схеме S значение на левом входе элемента E_1 равно нулю, а значение на его выходе — единице, что невозможно.

5. Элемент E_1 — дизъюнктор, и один его вход (без ограничения общности левый) соединён в схеме S с выходом функционального элемента, а другой — со входом схемы S, отвечающим некоторой переменной x_i. Тогда в силу выбора элемента E_1 на наборе $\tilde{\pi}$ в схеме S значение на левом входе элемента E_1 равно нулю, а значение на его выходе — единице,

следовательно, на этом наборе $x_i = 1$. Но $i \in \{i_{k+1}, \ldots, i_{k+r}\}$ по определению этих индексов, а тогда $f'(\tilde{\pi}) = 1$ в силу (4). Противоречие.

6. Элемент E_1 — конъюнктор, и оба его входа соединены в схеме S со входами этой схемы, отвечающими каким-то переменным x_i, $x_{i'}$. Тогда в силу выбора элемента E_1 на наборе $\tilde{\pi}$ в схеме S значение на выходе этого элемента равно единице, следовательно, на этом наборе $x_i = x_{i'} = 1$. Но $(i, i') \in \{(i_{k+r+1}, i_{k+r+2}), \ldots, (i_{k+r+2s-1}, i_{k+r+2s})\}$ по определению этих индексов, а тогда $f'(\tilde{\pi}) = 1$ в силу (4). Противоречие.

7. Элемент E_1 — дизъюнктор, и оба его входа соединены в схеме S со входами этой схемы. Тогда в силу выбора элемента E_1 на наборе $\tilde{\pi}$ в схеме S значение на выходе этого элемента равно единице, следовательно, на этом наборе значение хотя бы одной из двух входных переменных схемы S, подающихся на входы элемента E_1, равно единице (обозначим эту переменную через x_i). Но $i \in \{i_{k+1}, \ldots, i_{k+r}\}$ по определению этих индексов, а тогда $f'(\tilde{\pi}) = 1$ в силу (4). Противоречие.

Во всех случаях получено противоречие, значит, исходное предположение было неверно и $D(f) \geqslant 2$, если $D(f)$ определено.

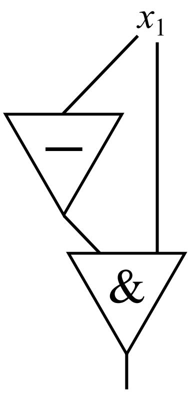

Рис. 1

Докажем теперь, что $D(f)$ определено и $D(f) \leqslant 2$. Если $f \equiv 0$, то функцию f можно реализовать схемой S, изображённой на рис. 1. У такой схемы есть две функции неисправности — тождественная единица и x_1, каждая из которых отличается от функции f. Отсюда следует, что схема S неизбыточна; множество $\{(0), (1)\}$, очевидно, является для неё единичным диагностическим тестом длины 2, поэтому $D(f) \leqslant 2$ и в этом случае теорема 1 доказана. Далее будем считать, что $f \not\equiv 0$. Рассмотрим произвольную тупиковую дизъюнктивную нормальную форму (д.н.ф.) функции f. Пусть $x_{i_1}^{\sigma_1}, \ldots, x_{i_l}^{\sigma_l}$ — все попарно различные входящие в неё слагаемые ранга 1 (если таких слагаемых нет, полагаем $l = 0$). Так как $f \not\equiv 1$, то все индексы $i_1, \ldots, i_l$ попарно различны. Без ограничения общности $i_1 = 1$, …, $i_l = l$. Поскольку рассматриваемая д.н.ф. тупиковая, все её слагаемые, кроме $x_1^{\sigma_1}, \ldots, x_l^{\sigma_l}$, содержат только переменные из множества $\{x_{l+1}, \ldots, x_n\}$. Это означает, что функция f представима в виде

$$f(x_1, \ldots, x_n) = x_1^{\sigma_1} \vee \ldots \vee x_l^{\sigma_l} \vee \hat{f}(x_{l+1}, \ldots, x_n) \tag{5}$$

(в случае $l = 0$ полагаем $x_1^{\sigma_1} \vee \ldots \vee x_l^{\sigma_l} = 0$), где булева функция $\hat{f}$ зависит от $n-l$ переменных $x_{l+1}, \ldots, x_n$. При этом $n-l \geqslant 2$, так как функция f отлична от тождественной единицы и не представима в виде $(**)$. Через $\tilde{1}$ обозначим набор длины $n-l$, состоящий из одних единиц. Рассмотрим два случая.

I. Пусть $\hat{f}(\tilde{1}) = 1$. Построим схему S, реализующую функцию f и состоящую из семи подсхем (см. рис. 2). В случае $l \geqslant 1$ на входы подсхемы S_1 подаются переменные $x_1, \ldots, x_l$; на её l выходах реализуются функции $x_1^{\sigma_1}, \ldots, x_l^{\sigma_l}$, причём, если $\sigma_i = 1$, $i \in \{1, \ldots, l\}$, то вход подсхемы S_1, отвечающий переменной x_i, считаем её выходом, а если $\sigma_i = 0$, то входная переменная x_i подаётся на вход инвертора, выход которого считаем выходом подсхемы S_1. При $l = 0$ подсхема S_1 пуста.

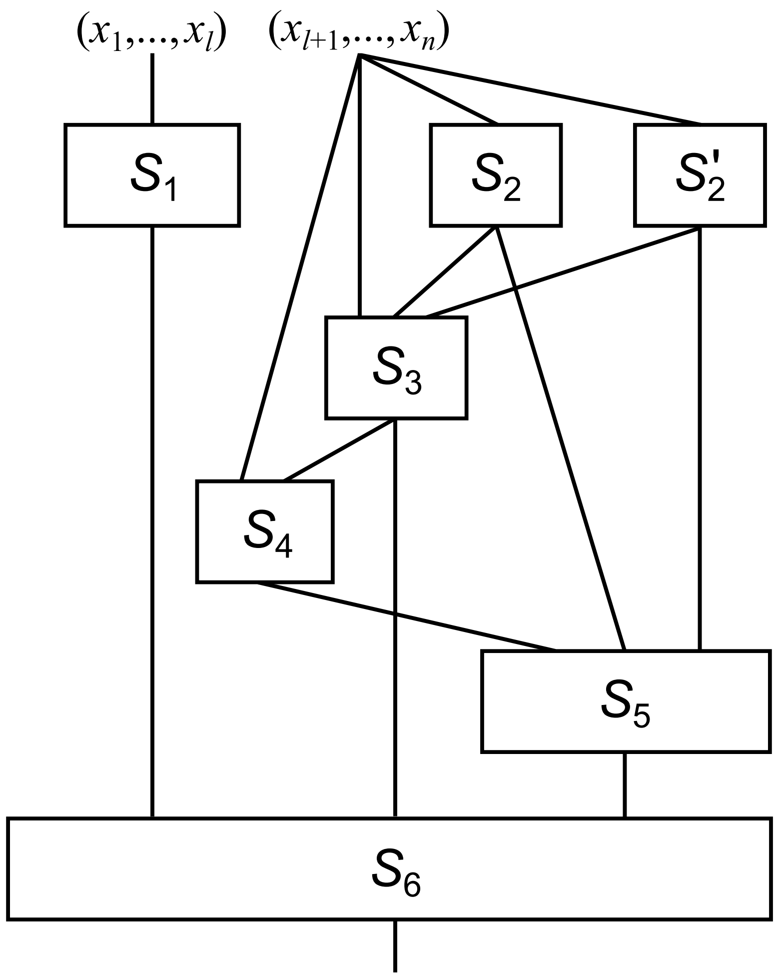

Рис. 2

На входы подсхем S_2 и S_2' подаются переменные $x_{l+1}, \ldots, x_n$; каждая из этих подсхем содержит $n-l$ инверторов и реализует отрицания всех указанных переменных. (Всего в подсхемах S_2 и S_2' содержатся $2(n-l)$ инверторов.)

Через K обозначим конъюнкцию $x_{l+1} \& \ldots \& x_n$. Пусть некоторая тупиковая д.н.ф. функции $\hat{f}'(x_{l+1}, \ldots, x_n) = \hat{f}(x_{l+1}, \ldots, x_n) \& \overline{K}$ содержит m слагаемых $K_1, \ldots, K_m$ (если $\hat{f}' \equiv 0$, то $m = 0$ и полагаем $K_1 \vee \ldots \vee K_m = 0$). Тогда $\hat{f}' = K_1 \vee \ldots \vee K_m$. Из (5), определения слагаемых $x_{i_1}^{\sigma_1}, \ldots, x_{i_l}^{\sigma_l}$ и неравенства $\hat{f}' \leqslant \hat{f}$ следует, что ранг каждой из элементарных конъюнкций $K_1, \ldots, K_m$ не меньше двух. В случае $m \geqslant 1$ на входы подсхемы S_3 подаются переменные $x_{l+1}, \ldots, x_n$ и выходы подсхем S_2, S_2'. Для каждого слагаемого K_j, $j = 1, \ldots, m$, в подсхеме S_3 содержатся две непересекающиеся цепочки из конъюнкторов C_j и C_j'. На входы цепочки C_j (C_j') подаются все те переменные из $x_{l+1}, \ldots, x_n$ и их отрицания, реализованные на выходах подсхемы S_2 (соответственно S_2'), которые входят в слагаемое K_j; при этом на левый вход верхнего конъюнктора обеих цепочек подаётся отрицание какой-то переменной из $x_{l+1}, \ldots, x_n$; в слагаемое K_j входит хотя бы одно такое отрицание, так как $K_j(\tilde{1}) \leqslant \hat{f}'(\tilde{1}) = \hat{f}(\tilde{1}) \& \& \overline{K(\tilde{1})} = 1 \& 0 = 0$. Каждая из цепочек C_j и C_j', очевидно, реализует K_j. Кроме того, для каждого $j \in \{1, \ldots, m\}$ в подсхеме S_3 содержится конъюнктор E_j, входы которого соединены с выходами цепочек C_j и C_j'. На выходе этого конъюнктора также реализуется K_j. При $m = 0$ подсхема S_3 пуста.

Подсхема S_4 служит (как будет видно из дальнейшего) для контроля исправности элементов из подсхемы S_3. В случае $m \geqslant 1$ на входы подсхемы S_4 подаются переменные $x_{l+1}, \ldots, x_n$ и выходы всех конъюнкторов из цепочек C_j, C_j' подсхемы S_3, $j = 1, \ldots, m$. Для каждого конъюнктора E из цепочки C_j (C_j') в подсхеме S_4 содержится конъюнктор E', один из входов которого соединён с выходом элемента E, а на другой его вход подаётся та переменная x_i из $x_{l+1}, \ldots, x_n$, отрицание которой подаётся на левый вход верхнего конъюнктора цепочки C_j (соответственно C_j'). Легко видеть, что функция, реализуемая на выходе элемента E', представляет собой конъюнкцию некоторых переменных и отрицаний переменных из $x_{l+1}, \ldots, x_n$, причём в неё входят x_i и $\overline{x_i}$, откуда следует, что она тождественно равна нулю. Все такие конъюнкторы E' будем считать выходными элементами подсхемы S_4. Тогда на всех выходах подсхемы S_4 реализуются тождественные нули. При $m = 0$ подсхема S_4 пуста.

Подсхема S_5 представляет собой цепочку из дизъюнкторов, входы которой соединяются со всеми выходами подсхем S_2, S_2' и S_4. Легко видеть, что на выходе этой цепочки реализуется функция $\overline{x_{l+1}} \vee \ldots \vee \overline{x_n}$.

Выход указанной цепочки соединяется со входом инвертора I. На выходе этого инвертора, который мы будем считать единственным выходом подсхемы S_5, реализуется функция $\overline{\overline{x_{l+1}} \vee \ldots \vee \overline{x_n}} = x_{l+1} \& \ldots \& x_n = K$.

Подсхема S_6 представляет собой цепочку из дизъюнкторов, входы которой соединяются со всеми выходами подсхемы S_1, с выходами элементов E_j, $j = 1, \ldots, m$, из подсхемы S_3 (при $m \geqslant 1$) и с выходом инвертора I из подсхемы S_5. Легко видеть, что на выходе этой цепочки в силу соотношений $\hat{f}(\tilde{1}) = 1$, $K \leqslant \hat{f}$, $K \equiv \hat{f}K$ и (5) реализуется функция

$$
\begin{gathered}
x_1^{\sigma_1} \vee \ldots \vee x_l^{\sigma_l} \vee K_1 \vee \ldots \vee K_m \vee K = x_1^{\sigma_1} \vee \ldots \vee x_l^{\sigma_l} \vee \hat{f}' \vee K \\
= x_1^{\sigma_1} \vee \ldots \vee x_l^{\sigma_l} \vee \hat{f}\overline{K} \vee K \equiv x_1^{\sigma_1} \vee \ldots \vee x_l^{\sigma_l} \vee \hat{f}\overline{K} \vee \hat{f}K \equiv x_1^{\sigma_1} \vee \ldots \vee x_l^{\sigma_l} \vee \hat{f} = f.
\end{gathered}
$$

Выход указанной цепочки будем считать выходом всей схемы S (в случае $l = m = 0$ этот выход совпадёт с выходом подсхемы S_5). Тогда схема S реализует функцию f.

Найдём все возможные функции неисправности схемы S. Если неисправен какой-то элемент в одной из подсхем S_1, S_6, инвертор I в подсхеме S_5 или какой-то элемент E_j, $j \in \{1, \ldots, m\}$, в подсхеме S_3, то функция неисправности схемы S в силу вида подсхемы S_6 и того, что любой элемент подсхемы S_1 является выходным, равна тождественной единице. Если неисправен какой-то дизъюнктор в подсхеме S_5 или какой-то элемент в подсхеме S_4, то в силу вида подсхемы S_5 и того, что любой элемент подсхемы S_4 является выходным, на вход инвертора I будет подаваться тождественная единица, значит, на его выходе будет реализован тождественный нуль. Тогда функция неисправности схемы S будет равна $x_1^{\sigma_1} \vee \ldots \vee x_l^{\sigma_l} \vee K_1 \vee \ldots \vee K_m = x_1^{\sigma_1} \vee \ldots \vee x_l^{\sigma_l} \vee \hat{f}'$.

Пусть неисправен какой-то элемент E в цепочке C_j (или C_j') из подсхемы S_3. Тогда на выходе этой цепочки вместо K_j реализуется некоторая булева функция K_j', причём $K_j' \geqslant K_j$. С другой стороны, на выходе цепочки C_j' (соответственно C_j) по-прежнему реализуется функция K_j, а значит, на выходе конъюнктора E_j реализуется функция $K_j \& K_j' = K_j$. Далее, выход неисправного элемента E соединён с одним из входов некоторого конъюнктора E' из подсхемы S_4, на другой вход которого подаётся какая-то переменная x_i из $x_{l+1}, \ldots, x_n$. Поэтому на выходе элемента E' реализуется функция $1 \& x_i = x_i$. Она подаётся на некоторый вход цепочки из дизъюнкторов в подсхеме S_5, а какой-то другой вход этой цепочки по построению соединён с выходом подсхемы S_2, на котором реализуется функция $\overline{x}_i$. Отсюда следует, что на выходе указанной цепочки, т.е. на входе инвертора I, реализуется тождественная единица. Тогда на выходе элемента I реализуется тождественный нуль, а на выходе всей схемы S — функция $x_1^{\sigma_1} \vee \ldots \vee x_l^{\sigma_l} \vee K_1 \vee \ldots \vee K_m = x_1^{\sigma_1} \vee \ldots \vee x_l^{\sigma_l} \vee \hat{f}'$.

Наконец, пусть неисправен какой-то инвертор в подсхеме S_2 (или S_2'). Тогда на выходе каждой цепочки C_j (соответственно C_j') из подсхемы S_3 реализуется некоторая булева функция K_j'', причём $K_j'' \geqslant K_j$. С другой стороны, на выходе цепочки C_j' (соответственно C_j) по-прежнему реализуется функция K_j, а значит, на выходе конъюнктора E_j реализуется функция $K_j \& K_j'' = K_j$. Далее, выход неисправного инвертора соединён с некоторым входом цепочки из дизъюнкторов в подсхеме S_5, поэтому на её выходе, т.е. на входе инвертора I, реализуется тождественная единица. Тогда на выходе элемента I реализуется тождественный нуль, а на выходе всей схемы S — функция $x_1^{\sigma_1} \vee \ldots \vee x_l^{\sigma_l} \vee K_1 \vee \ldots \vee K_m = x_1^{\sigma_1} \vee \ldots \vee x_l^{\sigma_l} \vee \hat{f}'$.

В итоге получаем, что у схемы S есть только две функции неисправности — тождественная единица и $g = x_1^{\sigma_1} \vee \ldots \vee x_l^{\sigma_l} \vee \hat{f}' = x_1^{\sigma_1} \vee \ldots \vee x_l^{\sigma_l} \vee (\hat{f} \& \overline{x_{l+1} \& \ldots \& x_n})$. На наборе $\tilde{u} = (\overline{\sigma_1}, \ldots, \overline{\sigma_l}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{n-l})$ значение функции g равно нулю и отличается от значений каждой из функций f, 1 в силу (5) и равенства $\hat{f}(\tilde{1}) = 1$. С другой стороны, функцию f можно отличить от тождественной единицы на любом её нулевом наборе $\tilde{v}$. Следовательно, схема S неизбыточна и множество $\{\tilde{u}, \tilde{v}\}$ для неё является единичным диагностическим тестом длины 2, откуда $D(f) \leqslant 2$. В случае I теорема 1 доказана.

II. Пусть $\hat{f}(\tilde{1}) = 0$. Построим схему S, реализующую функцию f и состоящую из восьми подсхем (см. рис. 3). Подсхемы S_1, S_2 и S_2' полностью совпадают с соответствующими подсхемами схемы S из случая 1. Пусть некоторая тупиковая д.н.ф. функции $\hat{f}(x_{l+1}, \ldots, x_n)$ содержит m слагаемых $K_1, \ldots, K_m$. Если $\hat{f} \equiv 0$, то из (5) следует, что функция f представима в виде $(**)$, что невозможно. Поэтому $m \geqslant 1$. Тогда $\hat{f} = K_1 \vee \ldots \vee K_m$, причём из (5) и определения слагаемых $x_{i_1}^{\sigma_1}, \ldots, x_{i_l}^{\sigma_l}$ следует, что ранг каждой из элементарных конъюнкций $K_1, \ldots, K_m$ не меньше двух. Заметим, что в каждую такую конъюнкцию хотя бы одна переменная входит с отрицанием, так как $\hat{f}(\tilde{1}) = 0$. Это обстоятельство позволяет построить подсхему S_3 схемы S в точности как соответствующую подсхему в случае 1. В частности, в построенной подсхеме S_3 можно выделить цепочки конъюнкторов C_j и C_j' и конъюнкторы E_j, $j = 1, \ldots, m$, реализующие слагаемые K_j.

Подсхемы S_4 и S_5 служат (как будет видно из дальнейшего) для контроля исправности элементов из подсхем S_2 и S_2', а также элементов в цепочках C_j и C_j' из подсхемы S_3. Пусть $K = x_{l+1} \& \ldots \& x_n$. Подсхема S_4 представляет собой две непересекающиеся цепочки C и C' из конъюнкторов, на входы каждой из которых подаются переменные $x_{l+1}, \ldots, x_n$

(напомним, что $n - l \geqslant 2$), причём переменная x_{l+1} подаётся на левый вход верхнего конъюнктора каждой из этих цепочек. На выходе каждой из цепочек C, C', очевидно, реализуется функция K.

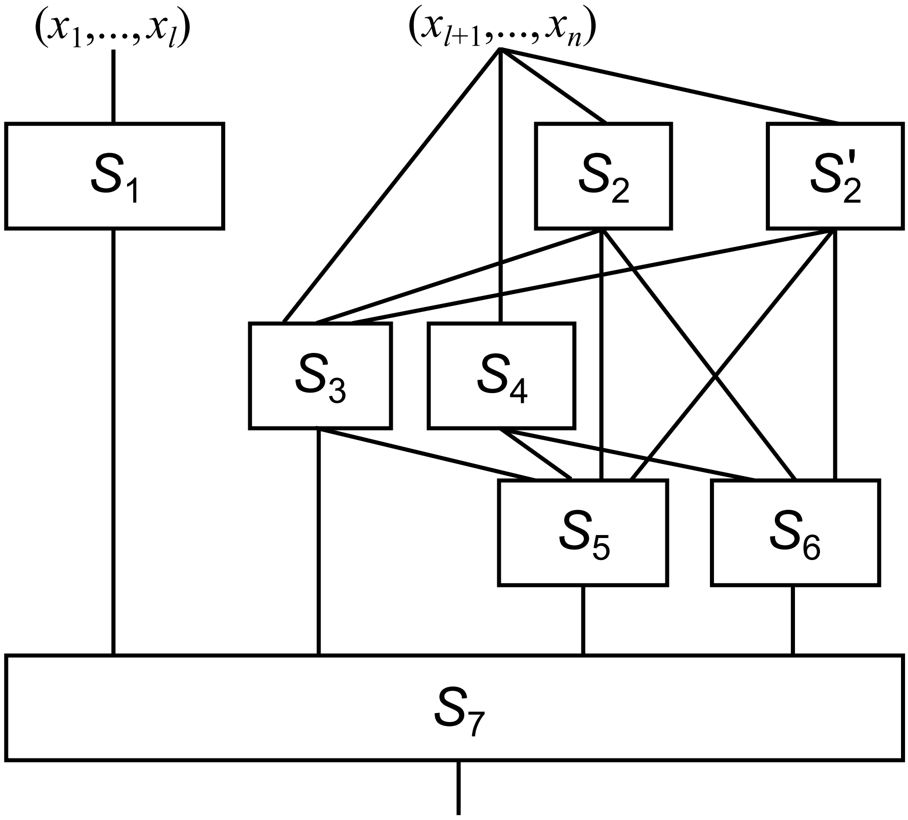

Рис. 3

Входы подсхемы S_5 соединяются с выходами подсхем S_2, S_2', цепочек C и C' из подсхемы S_4, а также всех конъюнкторов из цепочек C_j, C_j' подсхемы S_3, $j = 1, \ldots, m$. Для каждого элемента E, принадлежащего одной из подсхем S_2, S_2' или цепочке C_j (C_j') подсхемы S_3, в подсхеме S_5 содержатся конъюнктор E', один из входов которого соединён с выходом элемента E, а другой — с выходом цепочки C подсхемы S_4, и конъюнктор E'', один из входов которого соединён с выходом элемента E', а другой — с выходом цепочки C' подсхемы S_4. Легко видеть, что функция, реализуемая на выходе элемента E'', представляет собой конъюнкцию некоторых переменных и отрицаний переменных из $x_{l+1}, \ldots, x_n$ и функции K, причём в эту конъюнкцию входит отрицание хотя бы одной такой переменной, откуда следует, что данная функция тождественно равна нулю. Все такие конъюнкторы E'' будем считать выходными элементами подсхемы S_5. Тогда на всех выходах подсхемы S_5 реализуются тождественные нули.

Подсхема S_6 служит (как будет видно из дальнейшего) для контроля исправности элементов из подсхемы S_4. Входы подсхемы S_6 соединяются с выходами всех конъюнкторов из цепочек C, C' подсхемы S_4, а также с выходом инверторов I и I', реализующих функцию $\overline{x_{l+1}}$, из подсхем соответственно S_2 и S_2'. Для каждого конъюнктора $\hat{E}$, принадлежащего одной из цепочек C, C', в подсхеме S_6 содержатся конъюнктор $\hat{E}'$, один из входов которого соединён с выходом элемента $\hat{E}$, а другой — с выходом элемента I, и конъюнктор $\hat{E}''$, один из входов которого соединён с выходом элемента $\hat{E}'$, а другой — с выходом элемента I'. Легко видеть, что функция, реализуемая на выходе элемента $\hat{E}''$, представляет собой конъюнкцию функции $\overline{x_{l+1}}$ и некоторых переменных из $x_{l+1}, \ldots, x_n$, причём в неё входит x_{l+1}, поэтому данная функция тождественно равна нулю. Все такие конъюнкторы $\hat{E}''$ будем считать выходными элементами подсхемы S_6. Тогда на всех выходах подсхемы S_6 реализуются тождественные нули.

Подсхема S_7 представляет собой цепочку из дизъюнкторов, входы которой соединяются со всеми выходами подсхем S_1, S_5, S_6 и с выходами элементов E_j, $j = 1, \ldots, m$, из подсхемы S_3. Легко видеть, что на выходе этой цепочки реализуется функция $x_1^{\sigma_1} \vee \ldots \vee x_l^{\sigma_l} \vee K_1 \vee \ldots \vee K_m = x_1^{\sigma_1} \vee \ldots \vee$ $\vee x_l^{\sigma_l} \vee \hat{f} = f$ в силу (5). Выход указанной цепочки будем считать выходом всей схемы S. Тогда схема S реализует функцию f.

Найдём все возможные функции неисправности схемы S. Если неисправен какой-то элемент в одной из подсхем S_1, S_7, один из выходных элементов подсхем S_5, S_6 или какой-то элемент E_j, $j = 1, \ldots, m$, в подсхеме S_3, то функция неисправности схемы S в силу вида подсхемы S_7 и того, что любой элемент подсхемы S_1 является выходным, равна тождественной единице. Пусть неисправен один из конъюнкторов E' в подсхеме S_5 (см. описание этой подсхемы). Выход этого элемента соединён с одним из входов конъюнктора E'', другой вход которого соединён с выходом цепочки C'. Поэтому на выходе элемента E'' будет реализована функция $1\&K = K$, которая будет подаваться на один из входов подсхемы S_7. Тогда функция неисправности схемы S будет равна $x_1^{\sigma_1} \vee \ldots \vee x_l^{\sigma_l} \vee$ $\vee K_1 \vee \ldots \vee K_m \vee K = x_1^{\sigma_1} \vee \ldots \vee x_l^{\sigma_l} \vee \hat{f} \vee K = f \vee K$ в силу (5).

Пусть неисправен один из конъюнкторов $\hat{E}'$ в подсхеме S_6 (см. описание этой подсхемы). Выход этого элемента соединён с одним из входов конъюнктора $\hat{E}''$, другой вход которого соединён с выходом инвертора I'. Поэтому на выходе элемента $\hat{E}''$ будет реализована функция $1\&$ $\&\overline{x_{l+1}} = \overline{x_{l+1}}$, которая будет подаваться на один из входов подсхемы S_7. Тогда функция неисправности схемы S будет равна $x_1^{\sigma_1} \vee \ldots \vee x_l^{\sigma_l} \vee K_1 \vee \ldots \vee$ $\vee K_m \vee \overline{x_{l+1}} = x_1^{\sigma_1} \vee \ldots \vee x_l^{\sigma_l} \vee \hat{f} \vee \overline{x_{l+1}} = f \vee \overline{x_{l+1}}$ в силу (5).

Пусть неисправен какой-то элемент E в цепочке C_j (или C_j') из подсхемы S_3. Тогда на выходе этой цепочки вместо K_j реализуется некоторая булева функция K'_j, причём $K'_j \geqslant K_j$. С другой стороны, на выходе цепочки C'_j (соответственно C_j) по-прежнему реализуется функция K_j, а значит, на выходе конъюнктора E_j реализуется функция $K_j \& K'_j = K_j$. Далее, выход неисправного элемента E соединён с одним из входов некоторого конъюнктора E' из подсхемы S_5, другой вход которого соединён с выходом цепочки C подсхемы S_4. Поэтому на выходе элемента E' реализуется функция $1 \& K = K$. Она подаётся на один из входов некоторого конъюнктора E'' из подсхемы S_5, а другой его вход соединён с выходом цепочки C' подсхемы S_4, на котором реализуется функция K. Отсюда следует, что и на выходе элемента E'' реализуется функция K, которая будет подаваться на один из входов подсхемы S_7. В результате рассматриваемой неисправности функции, реализуемые на выходах элементов, расположенных в цепочке C_j (C'_j) ниже элемента E, изменятся и на некоторых выходах подсхемы S_5, отличных от выхода элемента E'', возможно, будут реализованы ненулевые булевы функции, но все они, как нетрудно видеть, не превосходят K. Поэтому функция неисправности схемы S будет равна $x_1^{\sigma_1} \vee \ldots \vee x_l^{\sigma_l} \vee K_1 \vee \ldots \vee K_m \vee K = x_1^{\sigma_1} \vee \vee \ldots \vee x_l^{\sigma_l} \vee \hat{f} \vee K = f \vee K$ в силу (5).

Пусть неисправен какой-то элемент $\hat{E}$ в цепочке C (или C') из подсхемы S_4. Тогда на выходе этой цепочки вместо K реализуется некоторая булева функция K'. С другой стороны, на выходе цепочки C' (соответственно C) по-прежнему реализуется функция K, а значит, на выходе каждого конъюнктора E'' из подсхемы S_5 по построению реализуется функция, представляющая собой конъюнкцию некоторых переменных и отрицаний переменных из $x_{l+1}, \ldots, x_n$ и функций K и K', причём в неё входит отрицание хотя бы одной такой переменной. Отсюда и из того, что $K = x_{l+1} \& \ldots \& x_n$, следует, что указанная функция тождественно равна нулю. Далее, выход неисправного элемента $\hat{E}$ соединён с одним из входов некоторого конъюнктора $\hat{E}'$ из подсхемы S_6, другой вход которого соединён с выходом инвертора I из подсхемы S_2, реализующего функцию $\overline{x_{l+1}}$. Поэтому на выходе элемента $\hat{E}'$ реализуется функция $1 \& \overline{x_{l+1}} = \overline{x_{l+1}}$. Она подаётся на один из входов некоторого конъюнктора $\hat{E}''$ из подсхемы S_6, а другой его вход соединён с выходом инвертора I', на котором реализуется функция $\overline{x_{l+1}}$. Отсюда следует, что и на выходе элемента $\hat{E}''$ реализуется функция $\overline{x_{l+1}}$, которая будет подаваться на один из входов подсхемы S_7. В результате рассматриваемой неисправности функции, реализуемые на выходах элементов, расположенных в цепочке C (C') ниже элемента $\hat{E}$, изменятся и на некоторых выходах подсхемы S_6, отличных от выхода элемента $\hat{E}''$, возможно, будут реализованы ненулевые булевы функции, но все они, как нетрудно видеть, не превосходят $\overline{x_{l+1}}$. Поэтому функция неисправности схемы S

будет равна $x_1^{\sigma_1} \vee \ldots \vee x_l^{\sigma_l} \vee K_1 \vee \ldots \vee K_m \vee \overline{x_{l+1}} = x_1^{\sigma_1} \vee \ldots \vee x_l^{\sigma_l} \vee \hat{f} \vee \overline{x_{l+1}} = f \vee \overline{x_{l+1}}$ в силу (5).

Пусть, наконец, неисправен какой-то инвертор E в одной из подсхем S_2, S_2'. Тогда на выходе каждой цепочки C_j (соответственно C_j') из подсхемы S_3 реализуется некоторая булева функция K_j'', причём $K_j'' \geqslant K_j$. С другой стороны, на выходе цепочки C_j' (соответственно C_j) попрежнему реализуется функция K_j, а значит, на выходе конъюнктора E_j реализуется функция $K_j \& K_j'' = K_j$. Далее, выход неисправного инвертора E соединён с одним из входов некоторого конъюнктора E' из подсхемы S_5, другой вход которого соединён с выходом цепочки C подсхемы S_4. Поэтому на выходе элемента E' реализуется функция $1 \& K = K$. Она подаётся на один из входов некоторого конъюнктора E'' из подсхемы S_5, а другой его вход соединён с выходом цепочки C' подсхемы S_4, на котором реализуется функция K. Отсюда следует, что и на выходе элемента E'' реализуется функция K, которая будет подаваться на один из входов подсхемы S_7. В результате рассматриваемой неисправности функции, реализуемые на выходах элементов, расположенных в цепочках C_j (C_j'), $j = 1, \ldots, m$, из подсхемы S_3 ниже элемента E, изменятся и на некоторых выходах подсхемы S_5, отличных от выхода элемента E'', возможно, будут реализованы ненулевые булевы функции, но все они, как нетрудно видеть, не превосходят K. Следовательно, если элемент E отличен от инверторов I, I', то функция неисправности схемы S будет равна $x_1^{\sigma_1} \vee \ldots \vee x_l^{\sigma_l} \vee K_1 \vee \ldots \vee K_m \vee K = x_1^{\sigma_1} \vee \ldots \vee x_l^{\sigma_l} \vee \hat{f} \vee K = f \vee K$ в силу (5). Если E — это инвертор I, то его выход по построению соединён также с одним из входов каждого элемента $\hat{E}'$ из подсхемы S_6, другой вход которого соединён с выходом некоторого элемента $\hat{E}$ из подсхемы S_4. На выходе элемента $\hat{E}$, как следует из вида подсхемы S_4, реализуется конъюнкция $\hat{K}$ некоторых переменных из $x_{l+1}, \ldots, x_n$, в которую обязательно входит x_{l+1}. Тогда на выходе элемента $\hat{E}'$ будет реализована функция $1 \& \hat{K} = \hat{K}$. Она будет подаваться на один из входов некоторого элемента $\hat{E}''$ из подсхемы S_6, а другой его вход соединён с выходом инвертора I', на котором реализуется функция $\overline{x_{l+1}}$. Отсюда следует, что на выходе элемента $\hat{E}''$ будет реализована функция $\hat{K} \& \overline{x_{l+1}} \equiv 0$, так как в $\hat{K}$ входит переменная x_{l+1} без отрицания. Аналогично можно показать, что если элемент E совпадает с инвертором I', то на выходе каждого выходного элемента $\hat{E}''$ подсхемы S_6 будет реализована функция $\hat{K} \& \overline{x_{l+1}} \& 1 \equiv 0$. Значит, если неисправный элемент E — это один из инверторов I, I', то на всех выходах подсхемы S_6 будет реализованы тождественные нули и функция неисправности схемы S будет равна $x_1^{\sigma_1} \vee \ldots \vee x_l^{\sigma_l} \vee K_1 \vee \ldots \vee K_m \vee K = x_1^{\sigma_1} \vee \ldots \vee x_l^{\sigma_l} \vee \hat{f} \vee K = f \vee K$ в силу (5).

В итоге получаем, что у схемы S есть только три функции неисправности — тождественная единица, $g_1 = f \vee K = x_1^{\sigma_1} \vee \ldots \vee x_l^{\sigma_l} \vee \hat{f} \vee (x_{l+1} \& \ldots \& \& x_n)$ и

$$g_2 = f \vee \overline{x_{l+1}} = x_1^{\sigma_1} \vee \ldots \vee x_l^{\sigma_l} \vee \overline{x_{l+1}} \vee \hat{f}. \qquad (6)$$

Заметим, что на наборе $\tilde{u} = (\overline{\sigma_1}, \ldots, \overline{\sigma_l}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{n-l})$ значение функции f равно нулю в силу (5) и равенства $f(\tilde{1}) = 0$; в то же время, $g_1(\tilde{u}) = 0 \vee 0 \vee 1 = 1$, поэтому $g_1 \not\equiv f$. Кроме того, $g_2 \not\equiv f$, поскольку $x_{i_1}^{\sigma_1}, \ldots, x_{i_l}^{\sigma_l}$ — все попарно различные слагаемые ранга 1, входящие в некоторую тупиковую д.н.ф. функции f, а в любую тупиковую д.н.ф. функции g_2 в силу (6) входит также слагаемое $\overline{x_{l+1}}$. Получаем, что все функции неисправности схемы S отличаются от функции f, т.е. эта схема неизбыточна. Далее, пусть $\tilde{v}$ — любой двоичный набор длины n, на котором значения функций f и g_2 различаются. Так как $g_2 = f \vee \overline{x_{l+1}} \geqslant f$, то $f(\tilde{v}) = 0$, $g_2(\tilde{v}) = 1$. Тогда $(l+1)$-й разряд набора $\tilde{v}$ равен нулю, поэтому $g_1(\tilde{v}) = f(\tilde{v}) \vee K(\tilde{v}) = 0$. Заметим также, что $g_2(\tilde{u}) = f(\tilde{u}) \vee 0 = 0$. В таком случае на наборе $\tilde{v}$ каждую из функций f, g_1 можно отличить от каждой из функций g_2, 1, а на наборе $\tilde{u}$ функцию f можно отличить от функции g_1, а функцию g_2 — от тождественной единицы. Поэтому множество $\{\tilde{u}, \tilde{v}\}$ является единичным диагностическим тестом длины 2 для схемы S, откуда следует неравенство $D(f) \leqslant 2$. Теорема 1 доказана.

Выделим ещё одно возможное представление функции f:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = D_1 \& \ldots \& D_m, \qquad (***)$$

где $m \geqslant 1$ и каждый множитель D_j, $j = 1, \ldots, m$, имеет вид либо x_{i_j}, либо $\overline{x_{i_j}}$, либо $x_{i_j} \vee x_{i'_j}$ для некоторых $i_j, i'_j \in \{1, \ldots, n\}$.

Отметим, что представление $(*)$ является частным случаем представления $(***)$.

Два двоичных набора длины n называются противоположными, если они различаются во всех компонентах.

Теорема 2. *Для любой булевой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$, отличной от тождественного нуля, справедливо равенство*

$$D_0(f) = \begin{cases} 0, & \text{если функция } f \text{ представима в виде } (*), \\ 1, & \text{если функция } f \text{ представима в виде } (***), \text{ но не в виде } (*), \\ 2, & \text{если функция } f \text{ не представима в виде } (***). \end{cases}$$

Если же $f \equiv 0$, то значение $D_0(f)$ не определено.

Следствие 2. *Справедливо равенство $D_0(n) = 2$.*

Доказательство теоремы 2. Если $f \equiv 0$, то по аналогии с разбором случая $f \equiv 1$ в теореме 1 можно показать, что значение $D_0(f)$ не определено. Пусть $f \not\equiv 0$. Тогда двойственная к f булева функция f^* отлична от тождественной единицы. Пусть S^* — такая неизбыточная схема в базисе B_0, реализующая функцию f^*, что $D_1(S^*) = D_1(f^*)$, а S — схема, получающаяся из схемы S^* заменой всех конъюнкторов на дизъюнкторы, а дизъюнкторов — на конъюнкторы. Тогда по принципу двойственности (см., например, [16], с. 19, утверждение 3) схема S реализует функцию f. Пусть T^* — единичный диагностический тест для схемы S^* длины $D_1(S^*)$; T — множество двоичных наборов, противоположных наборам из T^*; g — произвольная функция неисправности схемы S, получающаяся при неисправности типа 0 некоторого её элемента. Тогда при неисправности типа 1 соответствующего элемента схемы S^* функция неисправности схемы S^* по принципу двойственности будет равна двойственной к g булевой функции g^*. Так как T^* — единичный диагностический (а значит, и проверяющий) тест для неизбыточной схемы S^*, то функция g^* отличается от функции f^* хотя бы на одном наборе $\tilde{\sigma}^*$ из T^*. Пусть $\tilde{\sigma}$ — противоположный к $\tilde{\sigma}^*$ набор. Тогда $\tilde{\sigma} \in T$ и $g(\tilde{\sigma}) = \overline{g^*(\tilde{\sigma}^*)} = f^*(\tilde{\sigma}^*) = \overline{f(\tilde{\sigma})}$, т.е. функция g отличается от функции f на каком-то наборе из множества T. Отсюда следует, что схема S неизбыточна и множество T для неё является единичным проверяющим тестом, причём $|T| = D_1(T^*) = D_1(S^*) = D_1(f^*)$. Аналогично показывается, что любые две различные функции неисправности g_1 и g_2 схемы S отличаются друг от друга хотя бы на одном наборе из множества T, откуда следует, что T — единичный диагностический тест для схемы S. Следовательно, $D_0(f) \leqslant |T| = D_1(f^*)$ (в частности, $D_0(f)$ определено). Аналогично при $f^* \not\equiv 1$, т.е. при $f \not\equiv 0$, можно доказать неравенство $D_1(f^*) \leqslant D_0((f^*)^*) = D_0(f)$. Получаем, что $D_0(f) = D_1(f^*)$ для любой булевой функции f, отличной от тождественного нуля, а в таком случае требуемое равенство для величины $D_0(f)$ следует из теоремы 1. Достаточно лишь заметить, что если функция f представима в виде $(*)$ или $(***)$, то функция f^* представима в виде соответственно $(*)$ или $(**)$, и наоборот. Теорема 2 доказана.

Следствия 1 и 2 уточняют оценки $D_1(n) \leqslant 2n + 1$ и $D_0(n) \leqslant 2n + 1$ из [14].

Список литературы

1. Чегис И. А., Яблонский С. В. Логические способы контроля работы электрических схем // Труды МИАН. — 1958. — Т. 51. — С. 270–360.

2. Яблонский С. В. Надежность и контроль управляющих систем // Материалы Всесоюзного семинара по дискретной математике и ее приложениям. — М.: МГУ. — 1986. — С. 7–12.

3. Яблонский С. В. Некоторые вопросы надежности и контроля управляющих систем // Математические вопросы кибернетики. Вып. 1. — М.: Наука, 1988. — С. 5–25.

4. Редькин Н. П. Надежность и диагностика схем. — М.: Изд-во МГУ, 1992.

5. Reddy S. M. Easily testable realization for logic functions // IEEE Trans. Comput. — 1972. — v. 21. — N1. — P. 124–141.

6. Коляда С. С. Верхние оценки длины проверяющих тестов для схем из функциональных элементов. — Дисс. на соиск. уч. ст. к.ф.-м.н. — М., 2013. — 77 с.

7. Романов Д. С. Метод синтеза легкотестируемых схем, допускающих единичные проверяющие тесты константной длины // Дискретная математика. — 2014. — Т. 26, вып. 2. — С. 100–130.

8. Бородина Ю. В. О синтезе легкотестируемых схем в случае однотипных константных неисправностей на выходах элементов // Вестник Московского университета. Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика. — 2008. — №1. — С. 40–44.

9. Бородина Ю. В., Бородин П.А. Синтез легкотестируемых схем в базисе Жегалкина при константных неисправностях типа 0 на выходах элементов // Дискретная математика. — 2010. — Т. 22, вып. 3. — С. 127–133.

10. Редькин Н. П. О полных проверяющих тестах для схем из функциональных элементов // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. — 1986. — №1. — С. 72–74.

11. Редькин Н. П. О полных проверяющих тестах для схем из функциональных элементов // Математические вопросы кибернетики. Вып. 2. — М.: Наука, 1989. — С. 198–222.

12. Романов Д. С. О синтезе схем, допускающих полные проверяющие тесты константной длины относительно произвольных константных неисправностей на выходах элементов // Дискретная математика. — 2013. — Т. 25, вып. 2. — С. 104–120.

13. Редькин Н. П. О схемах, допускающих короткие тесты // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. — 1988. — №2. — С. 17–21.

14. Редькин Н. П. О единичных диагностических тестах для однотипных константных неисправностей на выходах функциональных элементов // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. — 1992. — №5. — С. 43–46.

15. Бородина Ю. В. О схемах, допускающих единичные тесты длины 1 при константных неисправностях на выходах элементов // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. — 2008. — №5. — С. 49–52.

16. Угольников А. Б. Классы Поста. Учебное пособие. — М.: Изд-во ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ, 2008.