



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 89 за 2015 г.



ISSN 2071-2898 (Print)  
ISSN 2071-2901 (Online)

Галанин М.П., Глизнуцина П.В.,  
Лукин В.В., Родин А.С.

Варианты реализации  
метода множителей  
Лагранжа для решения  
двумерных контактных  
задач

**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Варианты реализации метода множителей Лагранжа для решения двумерных контактных задач / М.П.Галанин [и др.] // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2015. № 89. 27 с.  
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2015-89>

Ордена Ленина  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ  
им. М.В. Келдыша  
Российской академии наук

М.П. Галанин, П.В. Глизнуцина,  
В.В. Лукин, А.С. Родин

**Варианты реализации метода  
множителей Лагранжа для решения  
двумерных контактных задач**

**Галанин М.П., Глизнуцина П.В., Лукин В.В., Родин А.С.**

Варианты реализации метода множителей Лагранжа для решения двумерных контактных задач

Рассмотрена задача о контактном взаимодействии двух деформируемых упругих тел в двумерной постановке. Для аппроксимации упругой задачи применен метод конечных элементов на четырехугольных билинейных элементах. Для учета контактных условий реализован метод множителей Лагранжа с тремя вариантами реализации: “контакт точка — поверхность”, “контакт поверхность — поверхность” и “контакт поверхность — поверхность с подсегментами”. Проведены тестовые расчеты. Сравнительный анализ методов показал, что методы “контакт поверхность-поверхность” и “контакт поверхность — поверхность с подсегментами” позволяют получать более точные результаты, чем метод “контакт точка — поверхность”. Метод “контакт поверхность — поверхность с подсегментами” позволяет сглаживать колебания поля напряжений, однако этот эффект проявляется на ограниченном круге задач.

**Ключевые слова:** контактная задача, метод конечных элементов, метод множителей Лагранжа, метод “контакт точка — поверхность”, метод “контакт поверхность — поверхность”, метод “контакт поверхность — поверхность с подсегментами”.

**Mikhail Pavlovich Galanin, Polina Vladimirovna Gliznutsina, Vladimir Vladimirovich Lukin, Aleksandr Sergeevich Rodin**

Lagrange multiplier method implementations for two-dimensional contact problems

The two-dimensional elastic contact problem is considered. Finite element method with bilinear shape functions are used. The Lagrange multiplier method for contact conditions implementation is used in three ways: node-to-surface method, mortar method and advanced mortar method. The tests showed that the mortar method and the advanced mortar method are more accurate, than the node-to-surface method. The advanced mortar method is able to smooth the stress field fluctuations, but only in limited number of problems.

**Key words:** contact problem, finite element method, Lagrange multiplier, node-to-surface method, standart mortar method, advanced mortar method.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проекты №№ 14-01-31496, 15-01-03073).

# 1. Введение

Исследование механики контактного взаимодействия является важной проблемой при анализе характера деформирования и прочности инженерных конструкций в рамках предположений механики сплошных сред [1–4]. В машиностроении контактному взаимодействию тел уделяют особое внимание, поскольку контактное давление является одним из часто встречающихся видов силовой нагрузки на элементы конструкции и приводит к износу деталей, возникновению в конструкции концентраторов напряжений и ряду других важных с инженерной точки зрения эффектов.

Контактные задачи сложны для математического моделирования, поскольку прямой учет контактных условий на поверхности тел не всегда представляется возможным. Условия контакта включают в себя два фундаментальных условия — непроникания одного тела в другое (кинематическое условие на перемещения точек поверхности контактирующих тел) и равного силового воздействия каждого из контактирующих тел на другое (условие равенства на поверхности контакта нормальных напряжений).

Отдельной проблемой является определение контактной поверхности, поскольку контактирующие тела представлены, вообще говоря, несовпадающими на контакте конечноэлементными сетками. В этом случае алгоритм решения контактной задачи должен включать в себя блок, отвечающий за формирование численной контактной поверхности по некоторым признакам (ширина зазора между телами, знаки нормальных к поверхности контакта напряжений), набор и параметры которых могут варьироваться.

Кроме того, необходимо построить процедуру согласования силовых факторов, действующих на рассматриваемые тела, на контактной поверхности. Для случая учета контактных условий с использованием метода множителей Лагранжа такой учет производится нелокальным образом, путем добавления в функционал задачи интеграла от добавочной сеточной функции, имеющей смысл контактного давления. Разные способы аппроксимации указанного интеграла приводят к разным реализациям метода множителей Лагранжа.

Для решения контактных задач применяется целый ряд численных методов, среди которых метод множителей Лагранжа [5, 7], метод штрафов [7], метод Шварца [8, 9] и другие реже используемые (например, метод конечных элементов с использованием функций формы Эрмита).

Мы рассмотрим применение метода множителей Лагранжа, как одного из наиболее эффективных методов учета контактного взаимодействия, при решении двумерных статических задач теории упругости для системы тел.

Цель работы состоит в исследовании различных вариантов метода множителей Лагранжа для решения двумерных контактных задач.

## 2. Постановка контактной задачи

Рассмотрим постановку контактной задачи аналогично [7, 10].

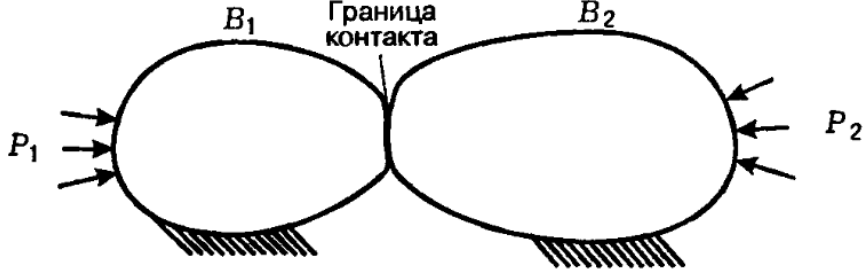


Рис. 1. Два тела, находящиеся в контакте

Пусть имеются два тела  $B_1$  и  $B_2$ , которые в результате приложенных нагрузок вступают в механический контакт (рис. 1). На контактной поверхности  $\Gamma_C$  должны быть выполнены условия непроникания одного тела в другое:

$$g^\alpha = \min_{\mathbf{x}^\beta \in \Gamma^\beta} (\mathbf{x}^\alpha - \mathbf{x}^\beta) \cdot \mathbf{n}^\alpha \geq 0, \quad \mathbf{x}^\alpha \in \Gamma^\alpha, \quad (1)$$

где  $\alpha, \beta$  — индексы контактирующих тел,  $\Gamma^\alpha$  — поверхность тела  $B_\alpha$ , обращенная к  $B_\beta$ ,  $\Gamma^\beta$  — поверхность тела  $B_\beta$ , обращенная к  $B_\alpha$ ,  $\mathbf{n}^\alpha$  — внешняя нормаль в точке  $\mathbf{x}^\alpha$  к поверхности контакта для тела  $B_\alpha$ ,  $g^\alpha$  — зазор между точкой  $\mathbf{x}^\alpha$  и телом  $B_\beta$ . Контакт возникает тогда, когда хотя бы для одной точки тела  $B_\alpha$  зазор равен нулю. Если же для всех точек  $B_\alpha$  зазор положителен, то тела не находятся в контакте.

В случае контакта на совместной границе контактирующих тел возникают распределенные поверхностные силы, обозначаемые  $\mathbf{t}$ . Нормальная и касательная составляющие распределенной контактной силы, действующей на любое из тел, имеют вид

$$t_n = \mathbf{t} \cdot \mathbf{n} \leq 0, \quad (2)$$

$$t_t = \mathbf{t} \cdot \boldsymbol{\tau}, \quad (3)$$

где  $\mathbf{n}$  — внешняя нормаль к контактной поверхности данного тела,  $\boldsymbol{\tau}$  — касательный вектор к контактной поверхности тела.

В формуле (2) нестрогое неравенство превращается в равенство при выходе тел из контакта и в строгое неравенство — при нахождении в контакте. Поэтому нормальные контактные силы могут быть только сжимающими. Касательные контактные силы могут принимать любые значения.

Опишем три варианта условий на контактной поверхности.

**Скольжение без трения.** В случае, если на контактной поверхности реализуется условие скольжения без трения, касательные контактные силы принимаются равными нулю:

$$t_t = 0. \quad (4)$$

**Прилипание.** Если на контактной поверхности имеет место прилипание, то касательные контактные силы не зависят от нормальных контактных сил, но и не равны нулю.

**Трение.** Касательные контактные силы подчиняются закону Кулона, т.е. контактирующие тела неподвижны друг относительно друга до тех пор, пока выполняется неравенство:

$$|t_t| \leq \mu_s |t_n|, \quad (5)$$

где  $\mu_s > 0$  — статический коэффициент трения. При нарушении неравенства (5) тела начинают движение друг относительно друга. Тогда касательные контактные силы подчиняются равенству

$$|t_t| = \mu_d |t_n|, \quad (6)$$

где  $\mu_d$  — динамический коэффициент трения,  $\mu_d \leq \mu_s$ . Движение будет продолжаться, пока не будет выполнено неравенство

$$|t_t| < \mu_d |t_n|, \quad (7)$$

и не начнется снова до тех пор, пока вновь не нарушится неравенство (5).

Будем рассматривать случай, когда тела исходно находились в контакте и на контактной поверхности задано условие скольжения без трения.

## 2.1. Основные соотношения математической модели

Математическая модель контактного взаимодействия упругих тел включает в себя следующие основные соотношения [11], записанные в прямоугольной декартовой системе координат  $Oxy$ .

1) Соотношения Коши:

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}\}^T = [B]\{u\}, \quad (8)$$

где  $\{\varepsilon\}$  — вектор деформаций,  $\{u\}(M) = \{u(M), v(M)\}^T$  — вектор перемещений в точке тела  $M$ , а матрица  $B$  имеет следующий вид:

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}.$$

2) Обобщенный закон Гука:

$$\{\sigma\} = \{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}\}^T = [H]\{\varepsilon - \varepsilon_0\}, \quad (9)$$

где  $\{\sigma\}$  — вектор напряжений,  $\{\varepsilon_0\}$  — вектор начальной деформации (в рассматриваемых задачах она нулевая),  $[H]$  — матрица упругих модулей, которая для плоско-деформированного состояния будет иметь следующий вид:

$$H = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2(1-\nu)} \end{bmatrix},$$

где  $E$  и  $\nu$  — модуль Юнга и коэффициент Пуассона для материала соответственно.

3) Дифференциальные уравнения равновесия (в отсутствии объемных сил):

$$[B]^T \{\sigma\} = \{f\}, \quad (10)$$

4) Граничные условия:

$$\begin{aligned} u(M) &= \tilde{u}(M), \quad M \in \Gamma, \\ v(M) &= \tilde{v}(M), \quad M \in \Gamma, \\ \sigma_x(N)n_x(N) &= \tilde{p}_x(N), \quad N \in \Gamma, \\ \sigma_y(N)n_y(N) &= \tilde{p}_y(N), \quad N \in \Gamma, \\ \tau_{xy}(N)n_y(N) &= \tilde{p}_{xy}(N), \quad N \in \Gamma, \end{aligned}$$

где  $\Gamma$  — поверхность рассматриваемого тела.

5) Контактные условия:

$$u_n^{(1)}|_{\Gamma_C} = u_n^{(2)}|_{\Gamma_C}, \quad (11)$$

$$\sigma_n^{(1)}|_{\Gamma_C} = \sigma_n^{(2)}|_{\Gamma_C}, \quad (12)$$

где  $u_n^{(i)}$  и  $\sigma_n^{(i)}$  — нормальные перемещения и нормальные напряжения для  $i$ -го тела,  $i = 1, 2$ ,  $\Gamma_C$  — контактная поверхность.

### 3. Численный метод

Численный алгоритм решения рассмотренной математической модели основан на методе конечных элементов (МКЭ) с четырехугольными билинейными элементами в качестве функций формы [13, 14].

Полная потенциальная энергия системы в классическом методе конечных элементов при отсутствии массовых сил имеет следующий вид [14] :

$$\Pi(u) = U(u) - W(u) = \frac{1}{2} \int_B h\{\varepsilon\}^T [H] \{\varepsilon\} dS - \int_{\Gamma} h\{u\}^T \{t\} d\Gamma, \quad (13)$$

где  $u$  — поле возможных перемещений, удовлетворяющее граничным условиям,  $U$  — потенциальная энергия деформации,  $W$  — потенциальная энергия внешних нагрузок,  $\{t\}$  — вектор поверхностных сил.

Согласно методу минимизации потенциальной энергии [14] необходимо проварьировать потенциальную энергию (13) и вариацию приравнять нулю. В рассматриваемых задачах тела имеют единичную толщину ( $h = 1$ ).

$$\begin{aligned} \delta\Pi &= \delta \left( \frac{1}{2} \int_B \{\varepsilon\}^T [H] \{\varepsilon\} dS \right) - \delta \left( \int_{\Gamma} \{u\}^T \{t\} d\Gamma \right) = \\ &= \int_B \delta\{\varepsilon\}^T [H] \{\varepsilon\} dS - \int_{\Gamma} \delta\{u\}^T \{t\} d\Gamma = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Запишем (14) в следующем виде:

$$[K]\{u\} = \{f\}, \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} [K] &= \sum_e [k]^e, \quad \{f\} = \sum_e \{f\}^e + G, \\ [k]^e &= \int_{S^e} [B_N]^T [H] [B_N] dS, \quad \{f\}^e = \int_{\Gamma^e} [N^e]^T \{p\} d\Gamma, \end{aligned}$$

$[K]$  — глобальная матрица жесткости,  $[k]^e$  — локальная матрица жесткости,  $\{f\}$  — глобальный вектор правой части,  $\{f\}^e$  — локальный вектор правой части,  $G$  — вектор узловых сил,  $[B_N] = [B][N]^T$  — матрица производных от функций формы,  $S^e$  — площадь элемента,  $\Gamma^e$  — граница, на которой задана нагрузка.

### 3.1. Учет контактных условий

При численном решении в данной работе контактные условия учитываются с помощью метода множителей Лагранжа [10].

Согласно методу множителей Лагранжа к потенциальной энергии системы двух тел, входящих в контакт (13), добавляется потенциал контактных сил вида

$$W_C = - \int_{\Gamma_C} \Lambda \cdot (x^{(1)} - x^{(2)}) d\Gamma, \quad (16)$$

где  $\Gamma_C$  — поверхность контакта между телами  $B_1$  и  $B_2$ ,  $\Lambda$  — функция множителей Лагранжа, имеющая смысл вектора поверхностных контактных сил,  $x^{(i)} = X^{(i)} + u^{(i)}$  — актуальные положения соответствующих сходственных точек тел  $i = 1, 2$  на поверхности контакта,  $X^{(i)}$  и  $u^{(i)}$  — исходные положения



и получаемые перемещения сходственных точек соответственно. Применим в этом случае метод минимизации потенциальной энергии:

$$\delta\Pi = \int_B \delta\{\varepsilon\}^T [H] \{\varepsilon\} dS - \int_\Gamma \delta\{u\}^T \{t\} d\Gamma - \int_{\Gamma_C} \delta\Lambda \cdot (u^{(1)} - u^{(2)}) d\Gamma - \int_{\Gamma_C} \Lambda \cdot (\delta u^{(1)} - \delta u^{(2)}) d\Gamma = 0. \quad (17)$$

Так как  $u$  и  $\Lambda$  независимы, то получим систему уравнений вида

$$\begin{cases} \int_S \delta\{\varepsilon\}^T [H] \{\varepsilon\} dS - \int_\Gamma \delta\{u\}^T \{t\} d\Gamma - \int_{\Gamma_C} \Lambda \cdot (\delta u^{(1)} - \delta u^{(2)}) d\Gamma = 0, \\ \int_{\Gamma_C} \delta\Lambda \cdot ((X^{(1)} + u^{(1)}) - (X^{(2)} + u^{(2)})) d\Gamma = 0. \end{cases} \quad (18)$$

Для вычисления интеграла (16) необходимо его дискретизировать. При этом дискретизируется и непрерывная функция  $\Lambda$ . В таком случае в систему (15) добавляются новые неизвестные.

Взятие интеграла (16) осуществляется следующим образом [18]. Одно из тел выбирается активным, другое — пассивным. Интегрирование проводится по сегментам граничных элементов дискретизированного активного тела, вступивших в контакт, на них же выбираются квадратурные точки, затем строятся сходственные точки на пассивном теле. Тогда (16) можно представить в следующем виде:

$$W_C = - \int_{\Gamma_C} \lambda^T \cdot (x^{(m)} - x^{(s)}) d\Gamma, \quad (19)$$

где  $x^{(m)}$  и  $x^{(s)}$  — актуальные положения сходственных точек на активном и пассивном телах соответственно,  $\lambda$  - вектор дискретизированных множителей Лагранжа,  $\Gamma_C$  — контактная поверхность на активном теле.

В общем случае используется интерполяция

$$x^{(m)} = N_\alpha(\xi) \tilde{x}_\alpha^{(m)}(t); \quad x^{(s)} = N_\beta(\xi) \tilde{x}_\beta^{(s)}(t); \quad \lambda = N_c(\xi) \tilde{\lambda}_c(t), \quad (20)$$

где  $N_\alpha, N_\beta$  — функции формы, используемые в МКЭ для получения системы (15),  $N_c$  — функции формы для дискретизации множителя Лагранжа. В зависимости от метода они могут выбираться различными способами. Рассмотрим три из них: “контакт точка — поверхность” (Node-to-surface contact), “контакт поверхность — поверхность” (Standart mortar method) и “контакт поверхность — поверхность с подсегментами” (Advanced mortar method) [18].

### 3.2. Контакт точка — поверхность

В методе “контакт точка — поверхность” функции для интерполирования функции множителей Лагранжа выбираются следующим образом:

$$N_c = \delta(\xi - \xi_c), \quad (21)$$

где  $\xi_c$  — сходственная точка на пассивном теле.

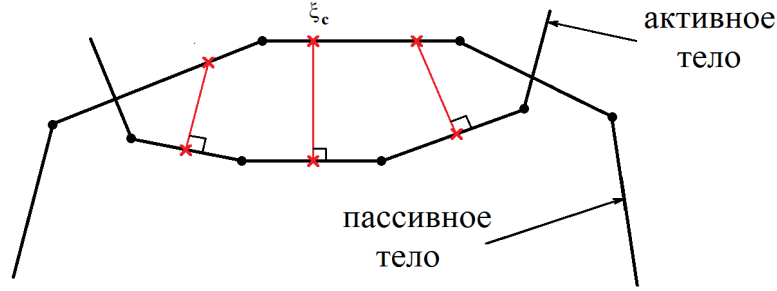


Рис. 2. Формирование пар контактных узлов (контакт точка — поверхность)

В активном теле в качестве контактного узла выбирается точка на середине элемента (рис. 2). Из этой точки на пассивное тело опускается нормаль. Контактным узлом в пассивном теле является точка пересечения опускаемой нормали и границы пассивного тела. В системе линейных алгебраических уравнений МКЭ оба контактных узла представляются как линейные комбинации близлежащих узловых точек конечноэлементной сетки.

### 3.3. Контакт поверхность — поверхность

В методе “контакт поверхность — поверхность” функции для интерполирования функции множителей Лагранжа выбираются следующим образом:

$$N_c = \delta_{c\beta} N_\beta(\xi). \quad (22)$$

В таком случае интегрирование идет по сегменту активного тела (рис. 3) и осуществляется более точно, чем в предыдущем методе. Тогда (19) можно записать в виде

$$W_C = - \sum_m \int_{\Gamma_C} \tilde{\lambda}_c^T N_c(\xi) \left[ N_\alpha(\xi) \tilde{x}_\alpha^{(m)} - N_\beta(\xi_s) \tilde{x}_\beta^{(s)} \right] d\Gamma. \quad (23)$$

В каждом узле активного тела вводится вектор  $\lambda = \{\lambda_n, \lambda_\tau\}$ .

Для интегрирования используется квадратурная формула Гаусса с четырьмя точками интегрирования на сегменте граничного элемента активного тела.

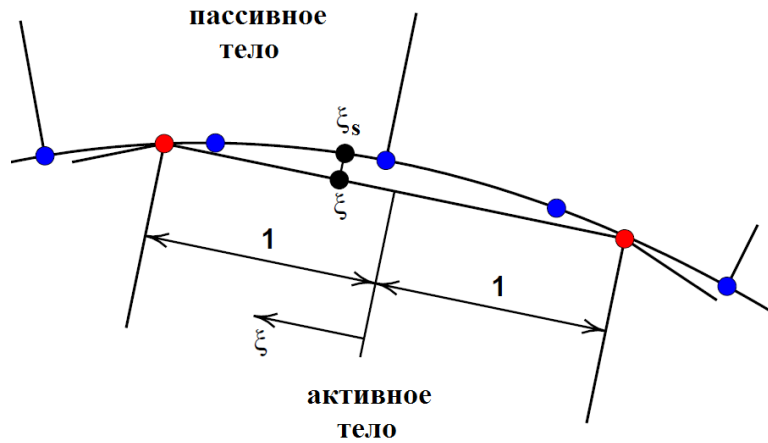


Рис. 3. Формирование пар контактных узлов (контакт поверхность — поверхность)

### 3.4. Контакт поверхность — поверхность с подсегментами

Метод “контакт поверхность — поверхность с подсегментами” имеет одно отличие от предыдущего метода — сегменты активного тела, по которому идет интегрирование, разбиваются на подсегменты таким образом, чтобы каждому подсегменту активного тела при вычислении интеграла соответствовал лишь один сегмент пассивного тела.

Функции для интерполирования функции множителей Лагранжа выбираются следующим образом:

$$N_c = \delta_{c\beta} N_\beta(\xi). \quad (24)$$

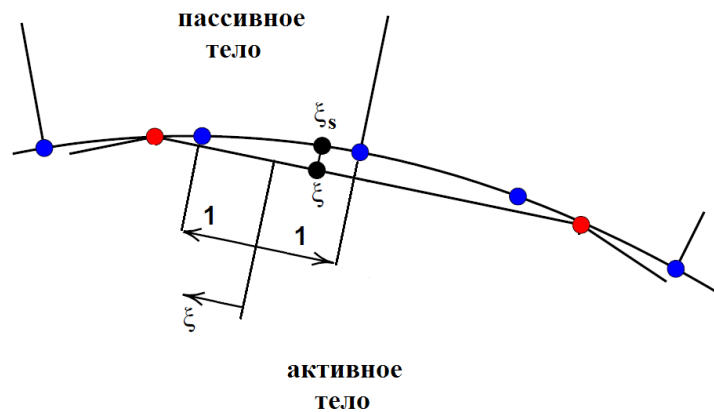


Рис. 4. Формирование пар контактных узлов (контакт поверхность — поверхность с подсегментами)

В таком случае интегрирование идет по сегменту активного тела (рис. 4) и осуществляется более точно, чем в предыдущем методе. Тогда (19) можно записать в виде

$$W_C = - \sum_m \tilde{\lambda}_c^T \left[ G_{c\alpha}^m \tilde{x}_\alpha^{(m)} - G_{c\beta}^s \tilde{x}_\beta^{(s)} \right] d\Gamma, \quad (25)$$

где

$$G_{c\alpha}^m = \int_{\Gamma_C} N_c(\xi) N_\alpha(\xi) d\Gamma I,$$

$$G_{c\beta}^m = \int_{\Gamma_C} N_c(\xi) N_\beta(\xi_s) d\Gamma I,$$

$I$  — единичная матрица.

В каждом узле активного тела вводится вектор  $\lambda = \{\lambda_n, \lambda_\tau\}$ .

Для интегрирования используется квадратурная формула Гаусса с четырьмя точками интегрирования на сегменте граничного элемента активного тела.

### 3.5. Формирование системы линейных алгебраических уравнений для МКЭ с множителями Лагранжа

Рассмотрим некоторые практические моменты реализации МКЭ с множителями Лагранжа.

Система уравнений МКЭ для двух деформируемых твердых тел, находящихся в контакте, примет вид:

$$\left( \begin{array}{cc|c} K_1 & 0 & L_1 \\ 0 & K_2 & \\ \hline & L_2 & 0 \end{array} \right) \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \Lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ G \end{pmatrix}, \quad (26)$$

где  $K_1, K_2$  — матрицы, получаемые с помощью МКЭ для упругой деформации 1-го и 2-го тела соответственно,  $U_i = \{u_1^{(i)}, \dots, u_{N_i}^{(i)}\}^T$  — вектор узловых перемещений для  $i$ -го тела,  $i = 1, 2$ ,  $F_i = \{f_1^{(i)}, \dots, f_{N_i}^{(i)}\}^T$  — вектор внешних сил для  $i$ -го тела,  $i = 1, 2$ ,  $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$  — дискретизированные множители Лагранжа,  $G = \{g_1, \dots, g_m\}$  — разрывы, соответствующие парам контактных узлов,  $m$  — число контактных пар,  $L_1, L_2$  — некоторые добавочные блоки, соответствующие множителям Лагранжа.

Блок  $L_1$  заполняется при варьировании добавочного слагаемого (16) относительно перемещений

$$\{\lambda_n, \lambda_\tau\} \int_{\Gamma_C} (\delta u^{(1)} - \delta u^{(2)}) d\Gamma. \quad (27)$$

Эти слагаемые связывают уравнения для первого и второго тела между собой.

При добавлении множителей Лагранжа общее число неизвестных численной модели увеличилось. Для добавления необходимого количества уравнений в систему заполняются блоки  $L_2$  и  $G$ , коэффициенты которого получают при варьировании добавочного слагаемого (16) относительно множителей Лагранжа

$$\delta\{\lambda_n, \lambda_\tau\} \int_{\Gamma_C} ((X^{(1)} + u^{(1)}) - (X^{(2)} + u^{(2)})) d\Gamma. \quad (28)$$

**Скольжение без трения.** В случае скольжения без трения при интегрировании каждого элемента активного тела, находящегося в контакте, вводятся два множителя Лагранжа, по одному на крайнюю точку сегмента ( $\lambda_\tau = 0$ ).

**Прилипание.** При интегрировании каждого элемента активного тела, находящегося в контакте, вводятся четыре множителя Лагранжа, по два на крайнюю точку сегмента.

**Трение.** При интегрировании каждого элемента активного тела, находящегося в контакте, в случае трения так же, как для прилипания, вводятся четыре множителя Лагранжа, по два на крайнюю точку сегмента.

## 4. Результаты тестовых расчетов

### 4.1. Задача о двух брусках из одинакового материала

В качестве тестовой решается задача о двух брусках (рис. 5). Первый брусок лежит на гладкой поверхности, второй лежит на первом. Сверху к второму бруску приложена распределенная сила  $p$ .

Параметры задачи приведены в таблице 1.

В силу симметрии задачи рассмотрим половину области. В таком случае закрепим ось симметрии системы брусков по координате  $x$  на левой границе, первый брусок по координате  $y$  — на нижней границе и ко второму брускоу сверху приложим распределенную нагрузку.

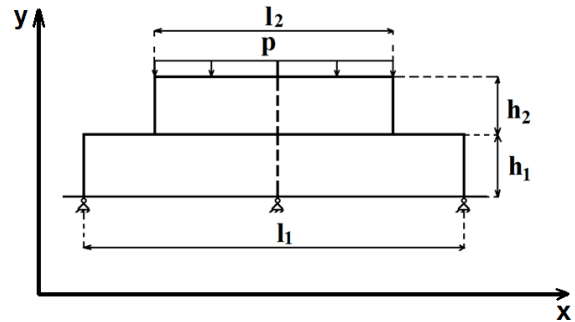


Рис. 5. Система из двух брусков

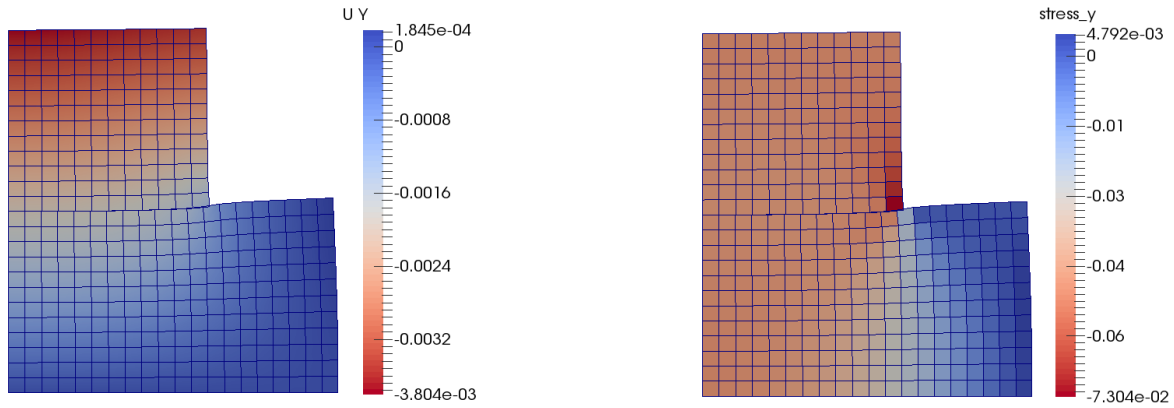
Таблица 1. Параметры задачи

$l_1$	$l_2$	$h_1$	$h_2$	$\nu_1$	$\nu_2$	$E_1$	$E_2$	$p$
10 см	6 см	3 см	3 см	0.3	0.3	70 ГПа	70 ГПа	50 МПа

Рассмотрим решение задачи двумя методами — “контакт точка — поверхность” и “контакт поверхность — поверхность”, а также сравним с решением, полученным с помощью альтернирующего метода Шварца [9].

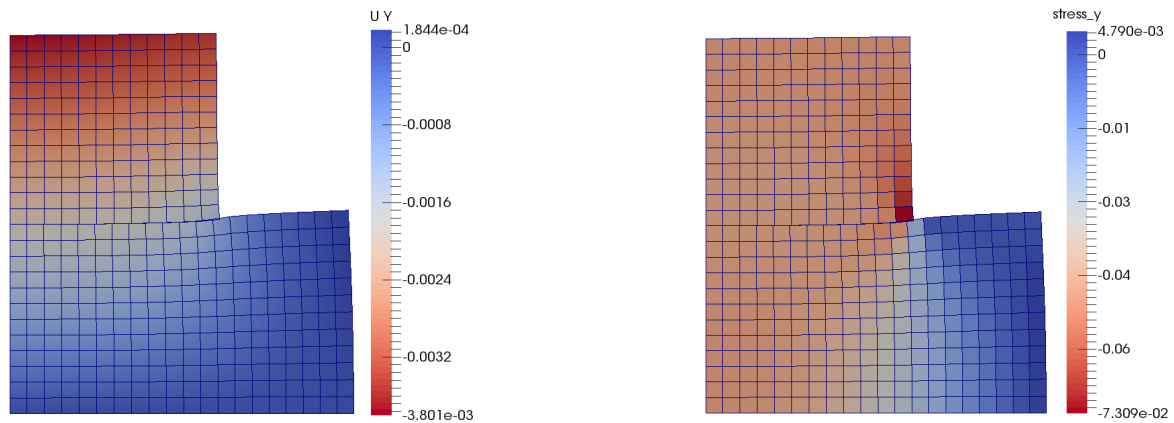
На рис. 6 – 11 представлены распределения компоненты перемещений  $u_y$  и компоненты напряжений  $\sigma_y$  для расчетов с шагами 0.25 см и 0.125 см.

На рис. 6 – 7, 9 – 10 результаты приведены на деформированной форме с коэффициентом масштабирования 100, а на рис. 8, 11 — с коэффициентом масштабирования 1. На рис. 6 – 7, 9 – 10 напряжения приведены в ГПа, а на рис. 8, 11 — в МПа.



Вертикальная компонента перемещений

Вертикальная компонента напряжений

Рис. 6. Контакт точка — поверхность, шаг  $h = 0.25$ 

Вертикальная компонента перемещений

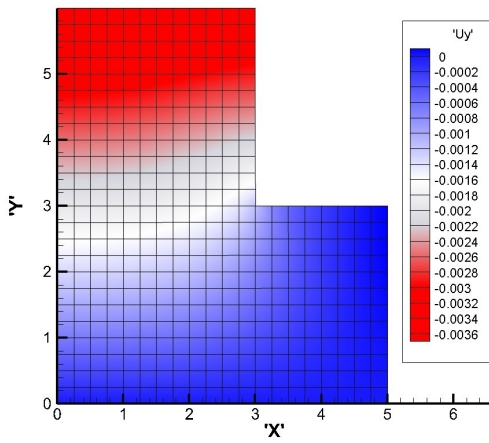
Вертикальная компонента напряжений

Рис. 7. Контакт поверхность — поверхность, шаг  $h = 0.25$ 

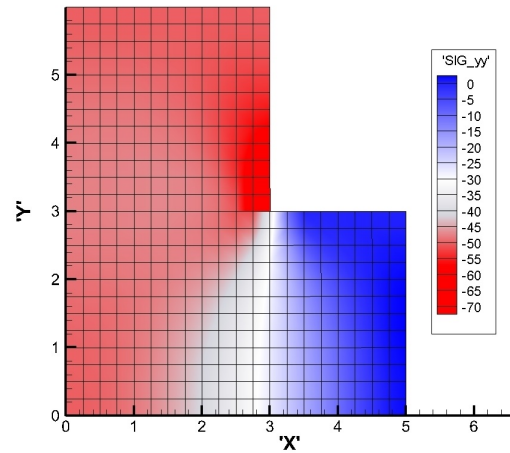
В исходной конфигурации сетки для двух тел совпадают на поверхности контакта. После деформирования они смещаются друг относительно друга. Оба тела сжимаются в вертикальном направлении и расширяются в горизонтальном.

В силу геометрии задачи вертикальные компоненты перемещений и напряжений на контактной поверхности близки к соответствующим нормальным компонентам перемещений и напряжений. В угловой точке в аналитическом решении имеют место бесконечные нормальные напряжения. С уменьшением шага численно получаемые значения нормальных напряжений растут по модулю.

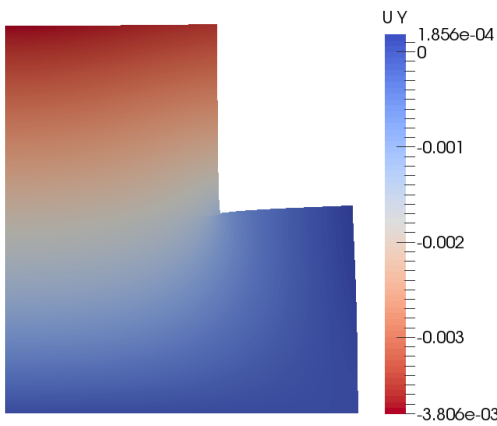
Различие в данных, получаемых двумя первыми методами, невелико — в пятом знаке после запятой (0.1 процента). Однако можно увидеть, что второй



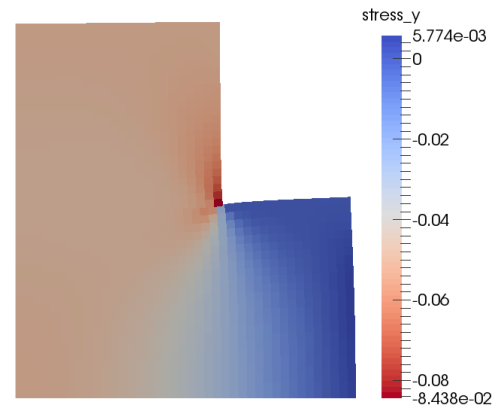
Вертикальная компонента перемещений



Вертикальная компонента напряжений

Рис. 8. Альтернирующий метод Шварца, шаг  $h = 0.25$ 

Вертикальная компонента перемещений



Вертикальная компонента напряжений

Рис. 9. Контакт точка — поверхность, шаг  $h = 0.125$ 

метод лучше отражает физические свойства задачи, чем первый, так как он позволяет получать значения нормальных напряжений в угловой точке более близкими к “аналитической бесконечности”.

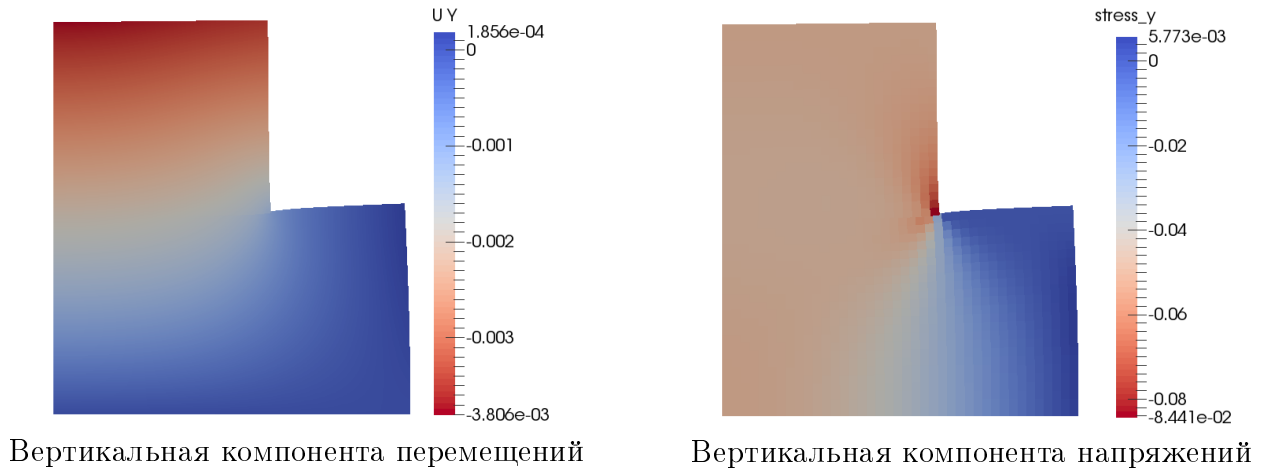
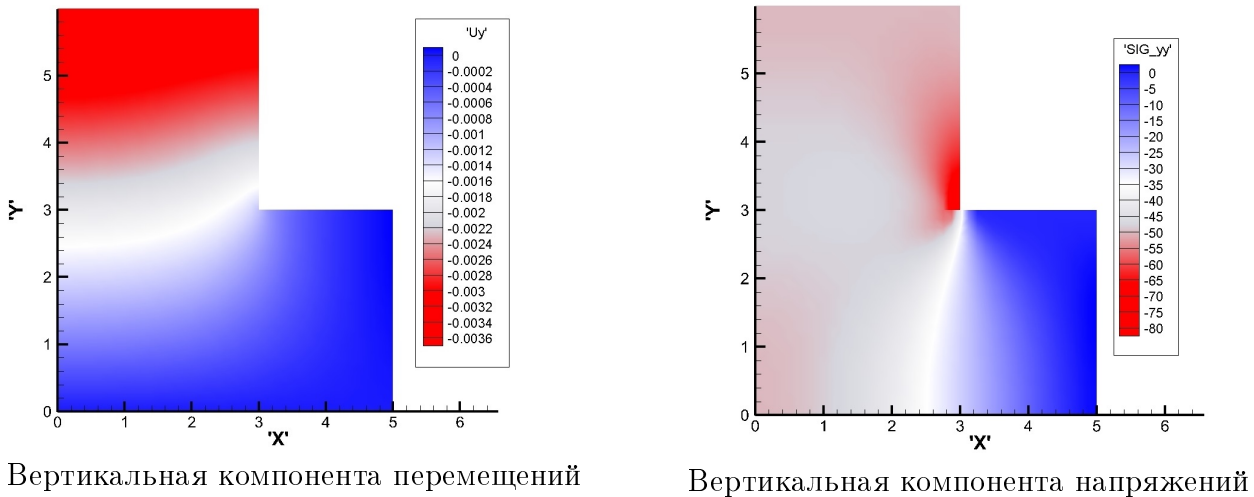
Результаты, полученные в обоих методах, близки к результатам, полученным с помощью альтернирующего метода Шварца.

На рис. 12 – 15 приведены распределения компоненты перемещений  $u_y$  и компоненты напряжений  $\sigma_y$ , полученные в расчетах с шагами  $h = 0.25$  и  $h = 0.125$ .

Черным цветом дано распределение соответствующей величины вдоль границы контакта для первого тела, красным дано распределение соответствующей величины вдоль границы контакта для второго тела.

Как видно на графиках, вертикальные перемещения и напряжения на контактной поверхности у обоих тел близки друг к другу, следовательно, близки и нормальные перемещения и напряжения. Но имеет место сингулярность решения в угловой точке верхнего тела.

С уменьшением шага сетки решение становится более точным. Напряже-

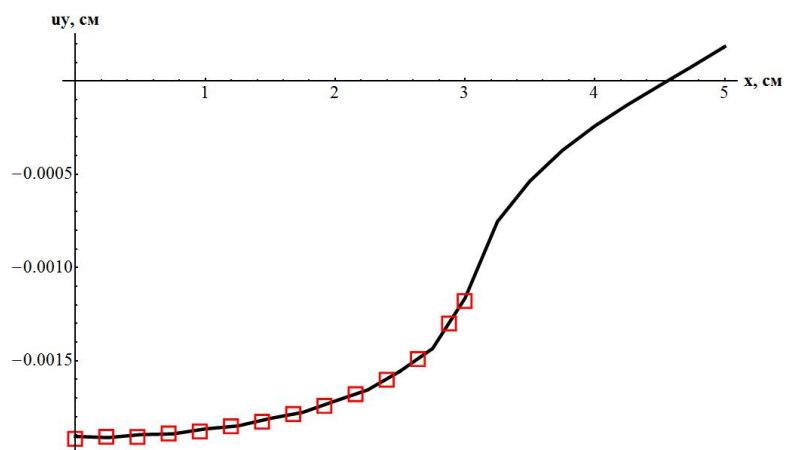
Рис. 10. Контакт поверхность — поверхность, шаг  $h = 0.125$ Рис. 11. Альтернирующий метод Шварца, шаг  $h = 0.125$ 

ния в угловой точке растут по модулю, однако и ширина полосы отклонения уменьшается.

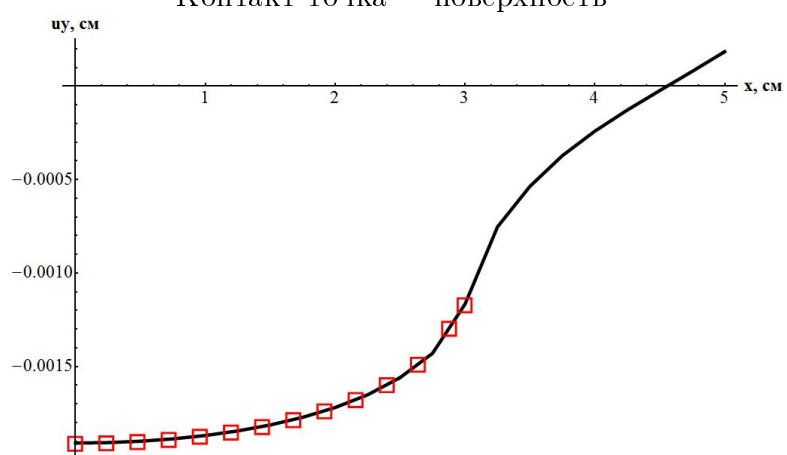
Рассмотрим эту задачу при несовпадении сеток на контактной поверхности. Шаг сетки для нижнего тела возьмем 0.08 см, шаг сетки для верхнего 0.1 см. На рис. 16 показаны получаемые напряжения. Черным цветом дано распределение соответствующей величины на контактной поверхности для нижнего тела, красным — распределение соответствующей величины на контактной поверхности для верхнего тела.

Как видно на графиках, метод “контакт точка — поверхность” дает расхождение напряжений на всей контактной поверхности. Метод “контакт поверхность — поверхность” дает практическое совпадение контактных напряжений нижнего и верхнего тела в центре системы брусков, однако, ближе к угловой точке появляются колебания, причем их амплитуда больше, чем в методе “контакт точка — поверхность”.

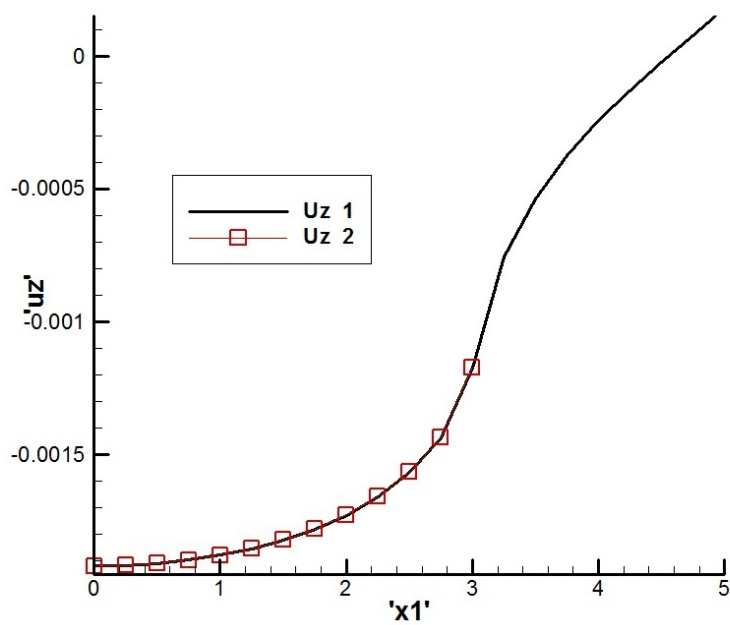




Контакт точка — поверхность



Контакт поверхность — поверхность



Альтернирующий метод Шварца

Рис. 12. Зависимость вертикальной компоненты перемещений от координаты  $x$ , шаг  $h = 0.25$

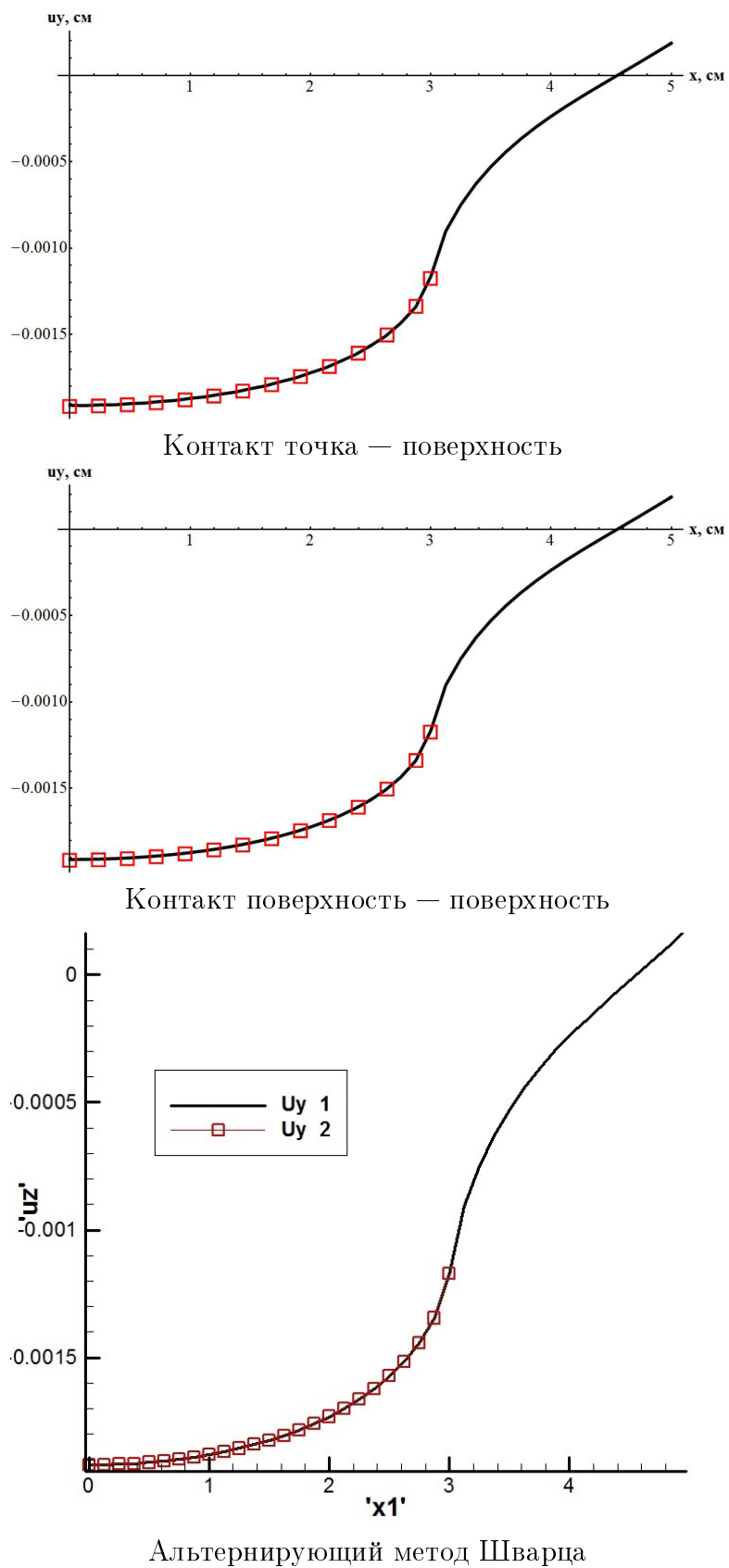
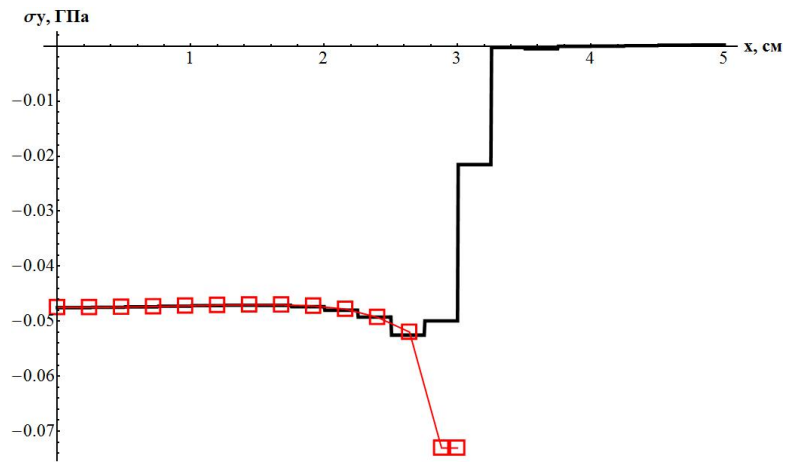
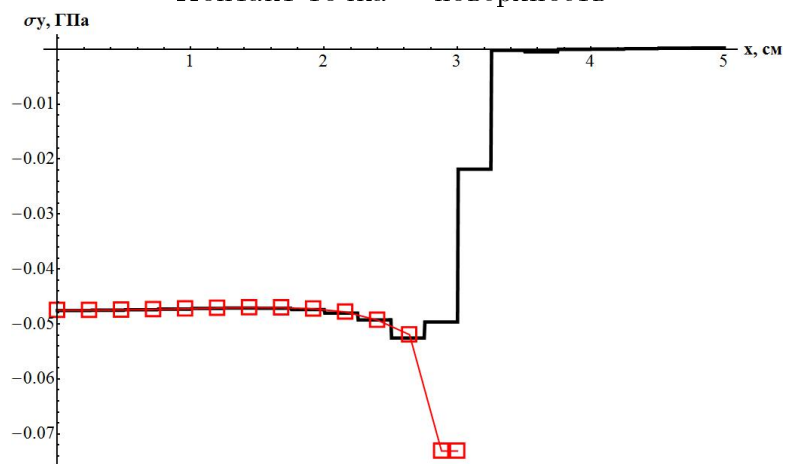


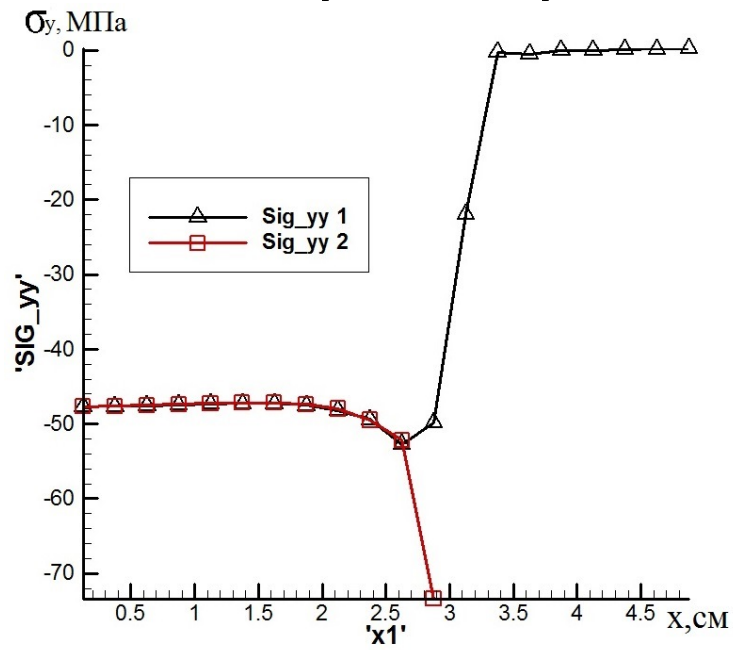
Рис. 13. Зависимость вертикальной компоненты перемещений от координаты  $x$ , шаг  $h = 0.125$



Контакт точка — поверхность

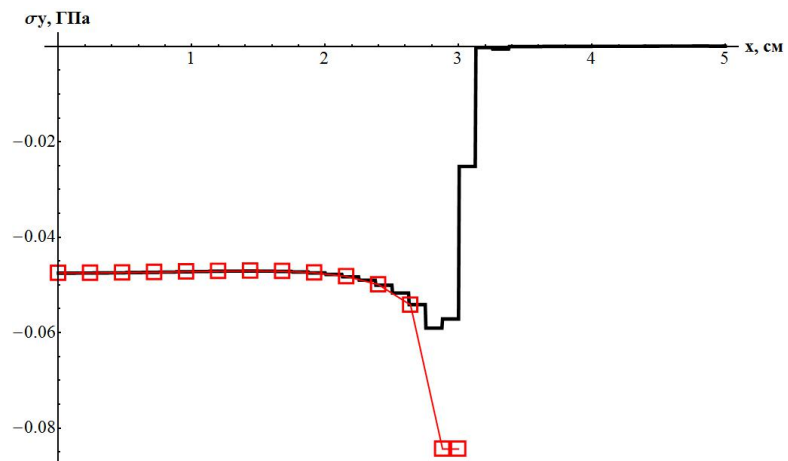


Контакт поверхность — поверхность

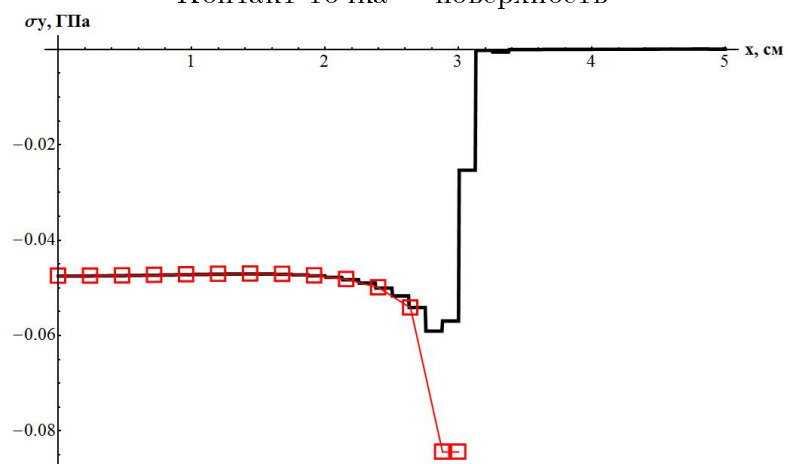


Альтернирующий метод Шварца

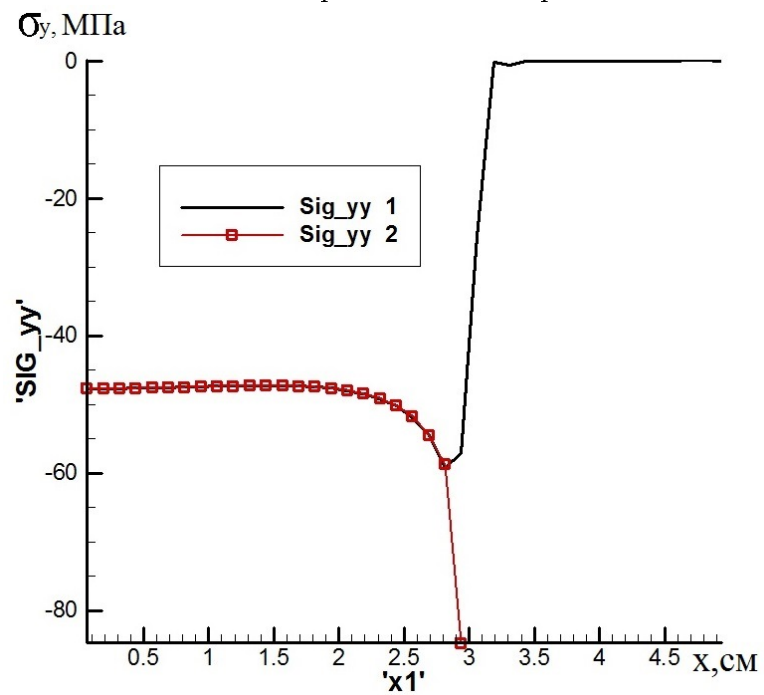
Рис. 14. Зависимость вертикальной компоненты напряжений от координаты  $x$ , шаг  $h = 0.25$



Контакт точка — поверхность

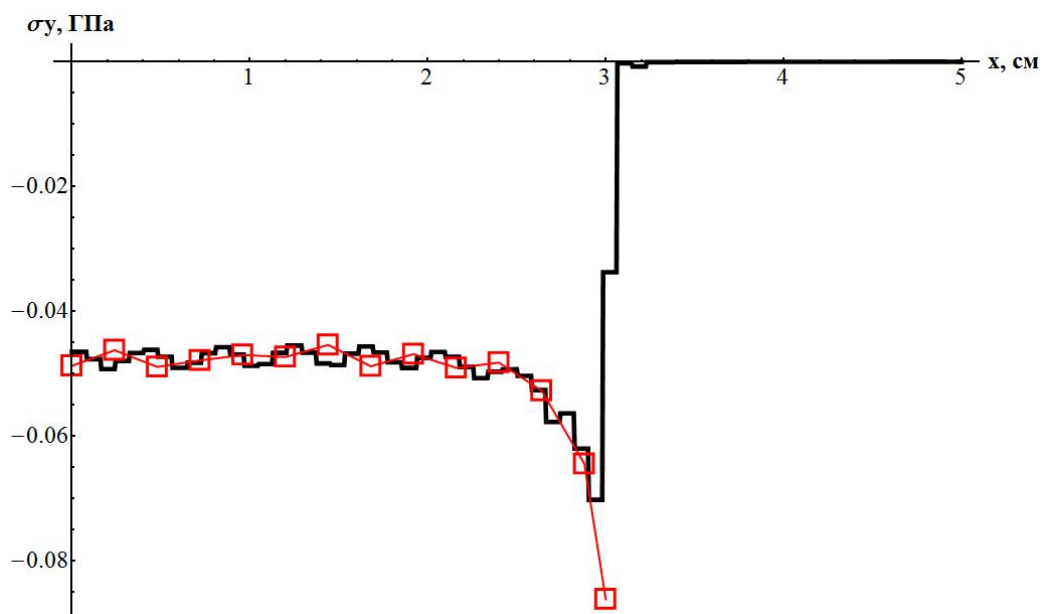


Контакт поверхность — поверхность

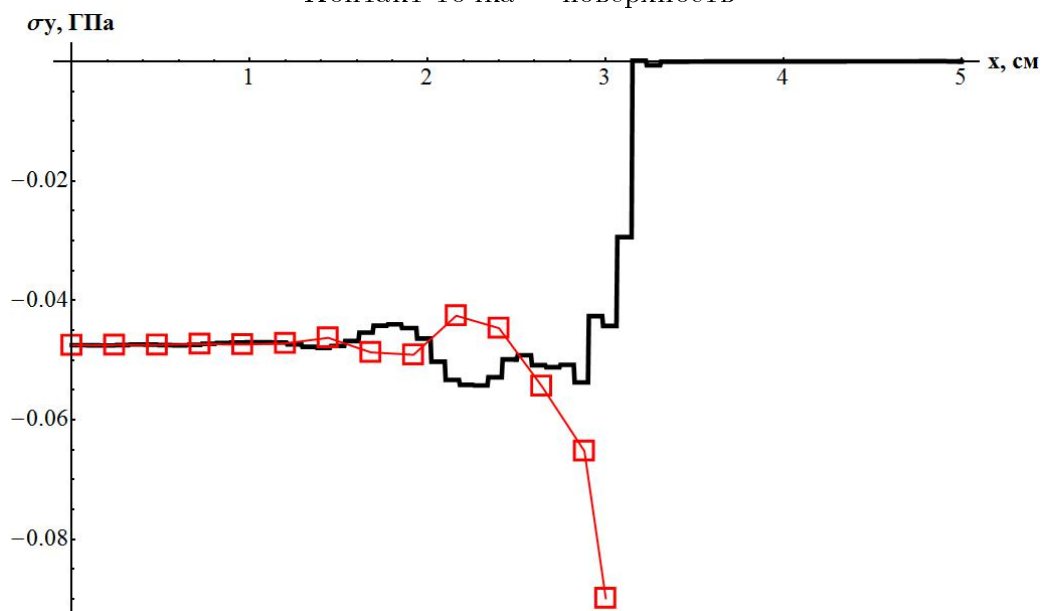


Альтернирующий метод Шварца

Рис. 15. Зависимость вертикальной компоненты напряжений от координаты  $x$ , шаг  $h = 0.125$



Контакт точка — поверхность



Контакт поверхность — поверхность

Рис. 16. Зависимость вертикальной компоненты напряжений от координаты  $x$ 

## 4.2. Задача о двух брусках из разных материалов

Рассмотрим аналогичную задачу с более жестким нижним телом. Параметры задачи приведены в таблице 2.

Таблица 2. Параметры задачи

$l_1$	$l_2$	$h_1$	$h_2$	$\nu_1$	$\nu_2$	$E_1$	$E_2$	$p$
10 см	6 см	3 см	3 см	0.3	0.3	700 ГПа	70 ГПа	50 МПа

Аналогично предыдущему примеру рассмотрим половину области. В таком случае закрепим ось симметрии системы брусков по координате  $x$  на левой границе, первый брусок по координате  $y$  — на нижней границе и ко второму брускоку сверху приложим распределенную нагрузку.

Рассмотрим эту задачу при несовпадении сеток на контактной поверхности. Шаг сетки для нижнего тела примем 0.08 см, шаг сетки для верхнего — 0.1 см.

На рис. 17, 18 представлены распределения компоненты перемещений  $u_y$  и компоненты напряжений  $\sigma_y$  на деформированной форме с коэффициентом масштабирования 10. В силу геометрии задачи эти величины на контактной поверхности близки к соответствующим нормальным компонентам перемещений и напряжений.

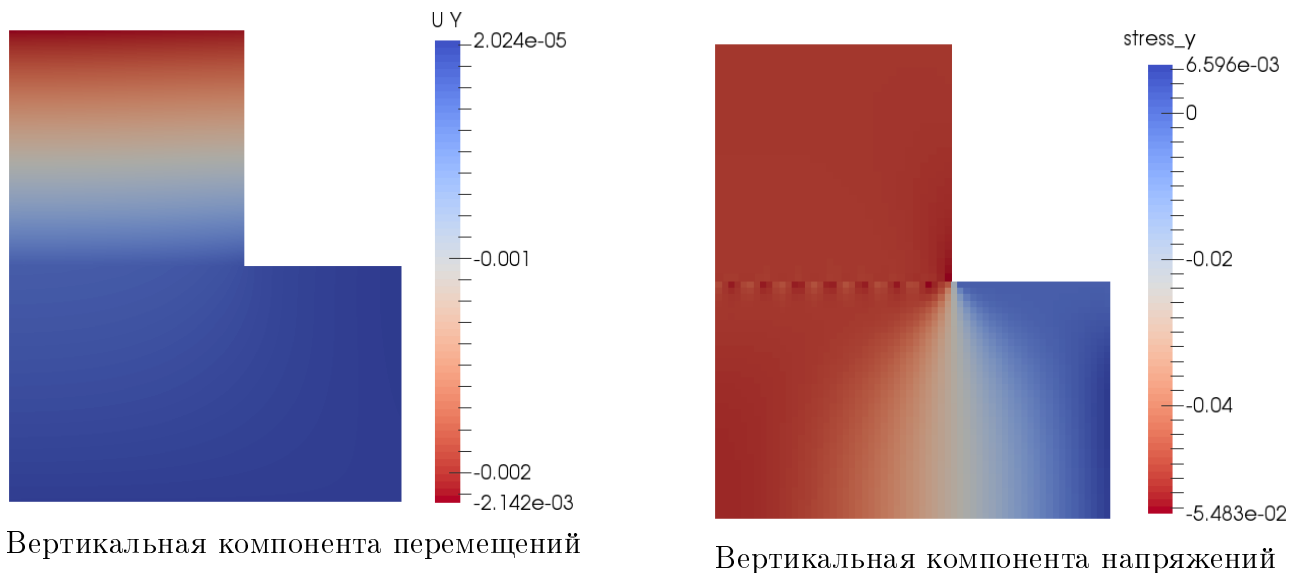


Рис. 17. Контакт точка — поверхность

На рис. 19 показаны получаемые напряжения. Черным цветом дано распределение соответствующей величины на контактной поверхности для нижнего тела, красным — распределение соответствующей величины на контактной поверхности для верхнего тела.

В исходной конфигурации сетки для двух тел совпадают на поверхности контакта. После деформирования они смещаются относительно друг друга. Оба тела сжимаются в вертикальном направлении и расширяются в горизонтальном.

Как видно на графиках, в методе “контакт точка — поверхность” наблюдаются колебания с приблизительно неизменяющейся амплитудой на всей контактной границе, а в методе “контакт поверхность — поверхность” ближе к центру симметрии задачи колебания незначительны, но в окрестности особой точки колебания растут и их амплитуда больше, чем в методе “контакт точка — поверхность”. Метод “контакт поверхность — поверхность с подсегментами” получает аналогичные результаты.

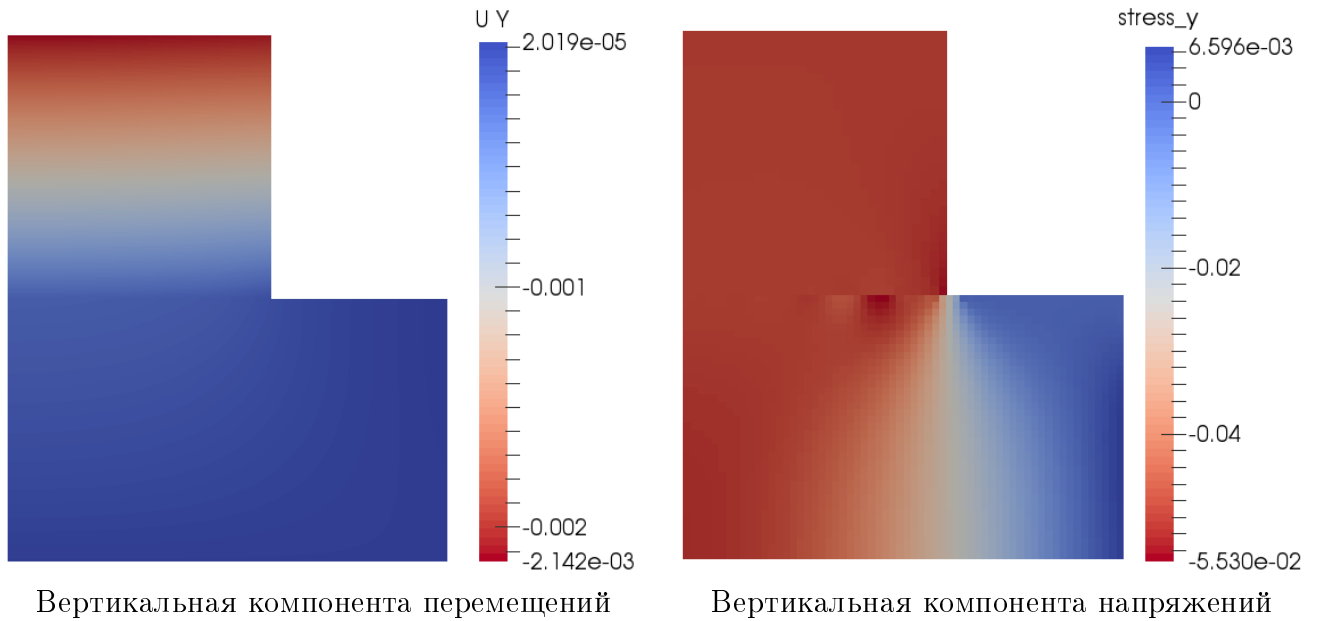


Рис. 18. Контакт поверхность — поверхность

### 4.3. Задача об одинаковых брусках из разных материалов с неравномерной сеткой

Для того, чтобы показать различие методов “контакт поверхность — поверхность” и “контакт поверхность — поверхность с подсегментами”, проведем тестовый расчет для следующей задачи (рис. 20). Первый брусок лежит на гладкой поверхности, второй лежит на первом. Сверху к второму бруски приложена распределенная сила  $p$ .

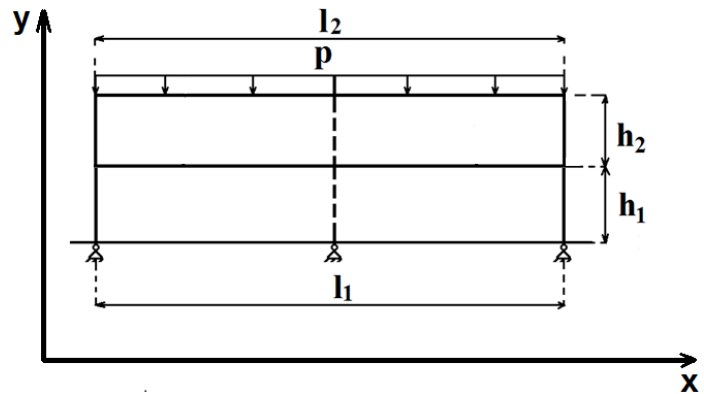


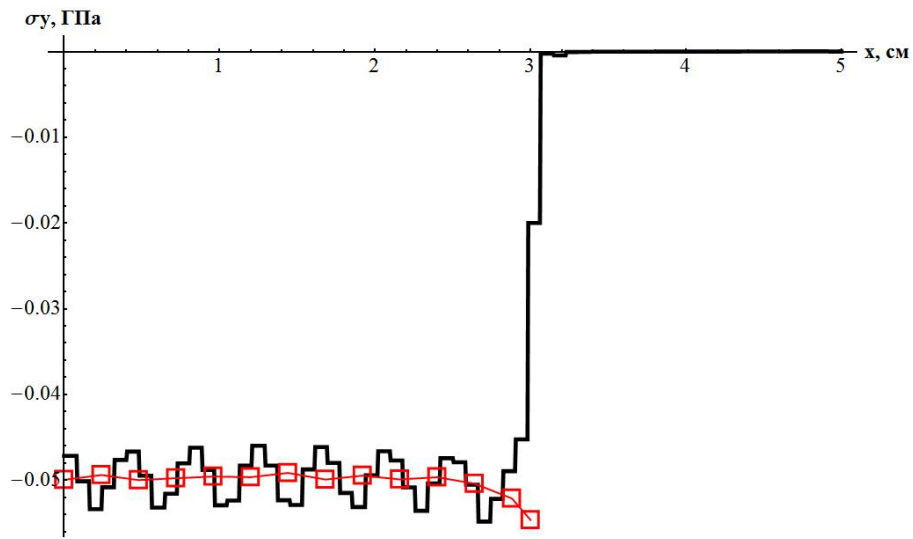
Рис. 20. Система из двух брусков

Параметры задачи приведены в таблице 3.

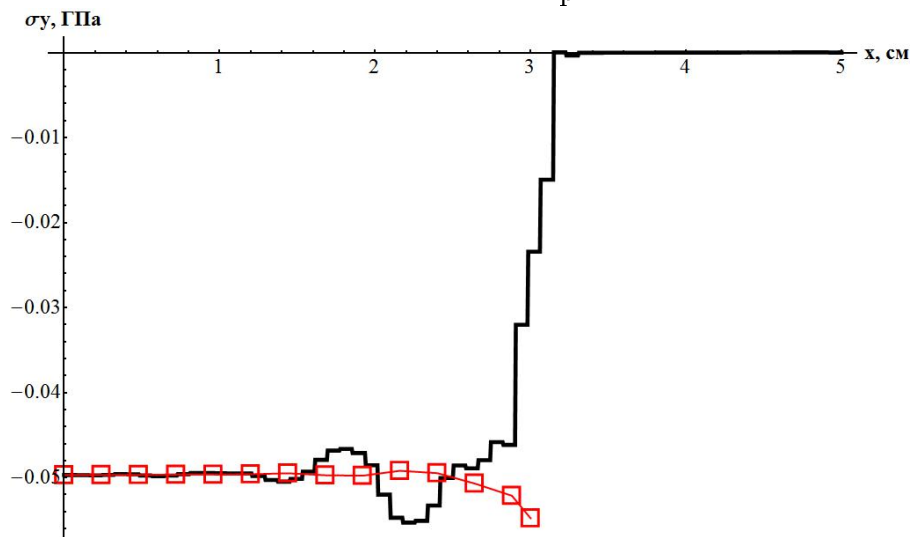
В силу симметрии задачи рассмотрим половину области. В таком случае закрепим ось симметрии системы брусков по координате  $x$  на левой границе, первый брусок по координате  $y$  — на нижней границе и ко второму бруски сверху приложим распределенную нагрузку.

Таблица 3. Параметры задачи

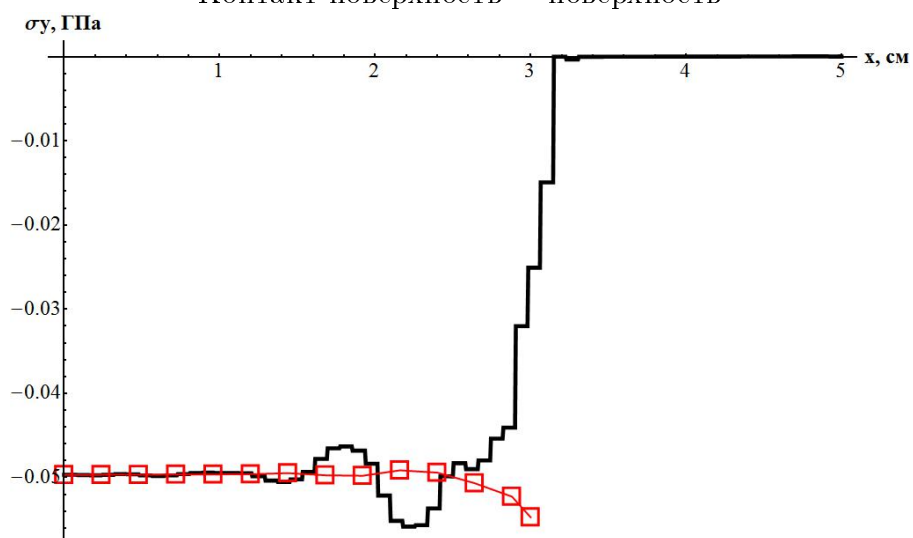
$l_1$	$l_2$	$h_1$	$h_2$	$\nu_1$	$\nu_2$	$E_1$	$E_2$	$p$
10 см	10 см	3 см	3 см	0.3	0.3	700 ГПа	70 ГПа	50 МПа



Контакт точка — поверхность



Контакт поверхность — поверхность



Контакт поверхность — поверхность с подсегментами

Рис. 19. Зависимость вертикальной компоненты напряжений от координаты  $x$

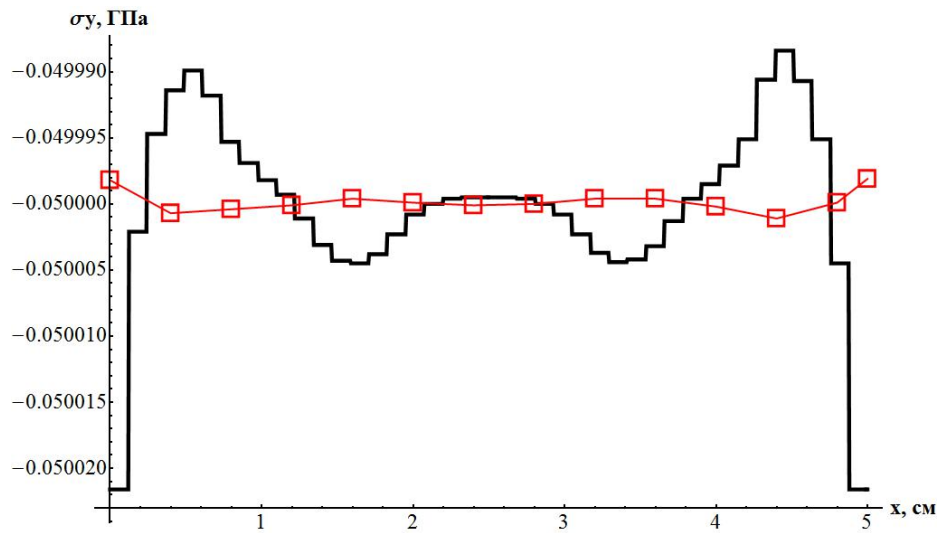


Рассмотрим эту задачу при несовпадении сеток на контактной поверхности. Шаг сетки для нижнего тела примем 0.12 см, шаг сетки для верхнего — 0.15 см (рис. 21).

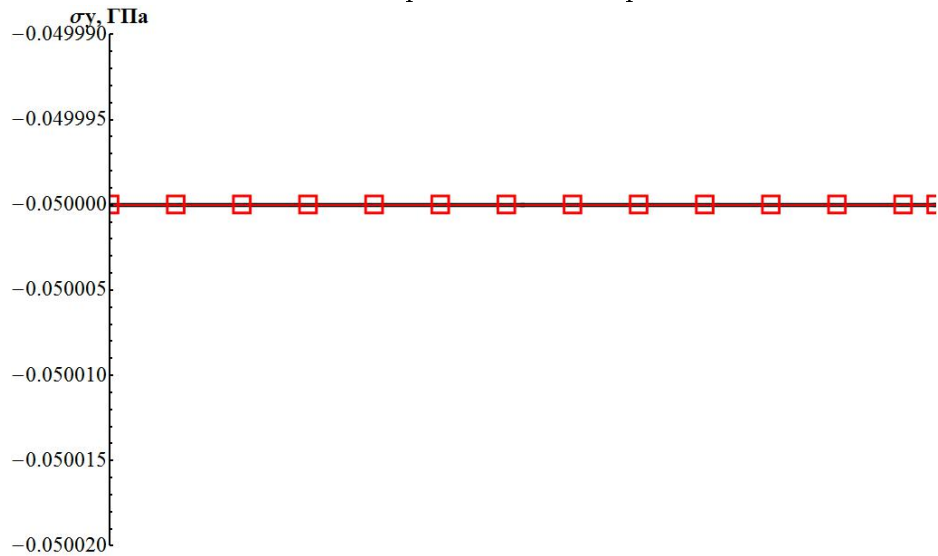


Рис. 21. Слой элементов на контактной поверхности

На рис. 22 показаны получаемые напряжения. Черным цветом дано распределение соответствующей величины на контактной поверхности для нижнего тела, красным — распределение соответствующей величины на контактной поверхности для верхнего тела.



Контакт поверхность — поверхность



Контакт поверхность — поверхность с подсегментами

Рис. 22. Зависимость вертикальной компоненты напряжений от координаты  $x$

Аналитическое решение задачи для вертикальной компоненты напряжений  $\sigma_y = p$ . Как видно на графиках, в методе “контакт поверхность — по-

верхность” наблюдаются колебания. В методе “контакт поверхность — поверхность с подсегментами” колебания отсутствуют, а полученные результаты очень близки к аналитическому решению.

## 5. Заключение

Рассмотрен метод моделирования контактных задач с условием скольжения без трения на контактной поверхности. Для численного решения задачи использован метод конечных элементов с билинейными функциями формы, для учета контактных условий выбран метод множителей Лагранжа с тремя вариантами реализации: “контакт точка — поверхность”, “контакт поверхность — поверхность” и “контакт поверхность — поверхность с подсегментами”.

Как показали результаты, метод множителей Лагранжа позволяет получать вполне удовлетворительные результаты. Метод “контакт поверхность — поверхность” более точно отражает физические свойства задач, чем метод “контакт точка — поверхность”. Однако при несовпадении сеток на контактной границе в обоих методах появляются колебания нормальных напряжений на границе контакта. В методе “контакт точка — поверхность” наблюдаются колебания с приблизительно неизменяющейся амплитудой на всей контактной границе, а в методе “контакт поверхность — поверхность” ближе к центру симметрии задачи колебания незначительны, но в области особой точки колебания растут и их амплитуда больше, чем в методе “контакт точка — поверхность”. Метод “контакт поверхность — поверхность с подсегментами” позволяет сглаживать колебания, однако этот эффект проявляется на ограниченном круге задач.

## Список литературы

- [1] Штаерман И. Я. Контактная задача теории упругости. М.-Л.: Гостехиздат. 1949. 270 с.
- [2] Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. М.: Мир, 1989. 510 с.
- [3] Бабешко В.А. Статические и динамические контактные задачи со сцеплением // ПММ. 1975. Т. 39, вып. 3. С. 505–512.
- [4] Бураго Н.Г., Кукуджанов В.Н. Обзор контактных алгоритмов // Известия РАН, МТТ, 2005. № 1. С. 45-87.
- [5] Papadopoulos P., Solberg J.M. A Lagrange Multiplier Method for the Finite Element Solution of Frictionless Contact Problems // Math. Comp. Modelling, 1998, v. 28, p. 373–84.

- [6] Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 1999. 592 с.
- [7] Wriggers P. Computational Contact Mechanics. Springer, 2006. 521 p.
- [8] Цвик Л.Б. Принцип поочередности в задачах о сопряжении и контакте твердых деформируемых тел. // Прикладная механика. 1980. Т. 16, № 1. С. 13–18.
- [9] Галанин М.П., Лукин В.В. Родин А.С., Станкевич И.В. Применение метода Шварца для моделирования контактного взаимодействия системы тел // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2015. Т. 55, № 8. С. 1429-1444.
- [10] Коробейников С.Н. Нелинейное деформирование твердых тел. Новосибирск: СО РАН, 2000. 262 с.
- [11] Демидов С.П. Теория упругости. М.: Высш. школа, 1979. 432 с.
- [12] Баландин М.Ю., Шурина Э.П. Методы решения СЛАУ большой размерности. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2000. 70 с.
- [13] Сагдеева Ю.А., Копысов С.П., Новиков А.К. Введение в метод конечных элементов. Ижевск: Изд-во “Удмуртский университет”, 2011. 44 с.
- [14] Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975, 543 с.
- [15] Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., 1996. 708 с.
- [16] Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. М.: Наука, 1975. 576 с.
- [17] Галанин М.П., Савенков Е.Б. Методы численного анализа математических моделей. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2010. 591 с.
- [18] Robert L. Taylor. Finite element solution of contact problems from: 1974 to 2004 [Электронный ресурс]: Режим доступа: <http://www.ce.berkeley.edu/~rlt/presentations/hughes.pdf> (дата обращения: 09.06.2015)

## Содержание

<b>1. Введение</b>	<b>3</b>
<b>2. Постановка контактной задачи</b>	<b>4</b>
2.1. Основные соотношения математической модели . . . . .	5
<b>3. Численный метод</b>	<b>6</b>
3.1. Учет контактных условий . . . . .	7
3.2. Контакт точка — поверхность . . . . .	9
3.3. Контакт поверхность — поверхность . . . . .	9
3.4. Контакт поверхность — поверхность с подсегментами . . . . .	10
3.5. Формирование системы линейных алгебраических уравнений для МКЭ с множителями Лагранжа . . . . .	11
<b>4. Результаты тестовых расчетов</b>	<b>12</b>
4.1. Задача о двух брусках из одинакового материала . . . . .	12
4.2. Задача о двух брусках из разных материалов . . . . .	20
4.3. Задача об одинаковых брусках из разных материалов с неравномерной сеткой . . . . .	22
<b>5. Заключение</b>	<b>25</b>
<b>Список литературы</b>	<b>25</b>