



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Глизнуцина П.В., Лукин В.В.,
Родин А.С.

Реализация условия
механического контакта
упругих тел в рамках МКЭ
при различном выборе
базисных функций:
одномерный случай

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Глизнуцина П.В., Лукин В.В., Родин А.С. Реализация условия механического контакта упругих тел в рамках МКЭ при различном выборе базисных функций: одномерный случай // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2015. № 90. 25 с.

URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2015-90>

Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
им. М.В. Келдыша
Российской академии наук

П.В. Глизнуцина, В.В. Лукин, А.С. Родин

**Реализация условия механического
контакта упругих тел в рамках МКЭ
при различном выборе базисных
функций: одномерный случай**

Москва — 2015

Глизнуцина П.В., Лукин В.В., Родин А.С.

Реализация условия механического контакта упругих тел в рамках МКЭ при различном выборе базисных функций: одномерный случай

Рассмотрена задача о контактном взаимодействии двух деформируемых упругих тел в одномерной цилиндрически-симметричной постановке. Для аппроксимации упругой задачи применены методы конечных элементов на двухузловых элементах с базисными функциями Лагранжа и Эрмита. Для учета контактных условий в первом случае реализован метод множителей Лагранжа, во втором случае они учтены естественным образом. Решены тестовые контактные задачи, имеющие аналитическое решение. Проведен сравнительный анализ, показавший, что метод с использованием функций Эрмита позволяет получать более точные результаты, чем метод с использованием функций Лагранжа, но обладает намного большей вычислительной сложностью.

Ключевые слова: контактная задача, метод конечных элементов, метод множителей Лагранжа, базисные функции Лагранжа, базисные функции Эрмита.

Polina Vladimirovna Gliznutsina, Vladimir Vladimirovich Lukin, Aleksandr Sergeevich Rodin

Mechanical contact conditions implementation in FEM algorithms with different basis functions sets: one-dimensional case

The one-dimensional axisymmetric approximation for the elastic contact problem is considered. Finite element method algorithms with Lagrange and Hermite basic functions are used. In the first case the Lagrange multiplier method for contact conditions implementation is used. In the second case the contact conditions are implemented in the natural way. Test contact problems with analytical solutions are solved. The tests showed that FEM algorithm with Hermite basis functions is more accurate, than Lagrange one. On the other hand, algorithm with Hermite basis functions has a much higher computational complexity.

Key words: contact problem, finite element method, Lagrange multiplier, Lagrange basic functions, Hermite basic functions.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проекты №№ 14-01-31496, 15-01-03073).

1. Введение

Механика контактных взаимодействий является важным разделом механики сплошных сред и находит применение в различных областях науки и техники. В машиностроении контактное взаимодействие тел уделяют особое внимание, поскольку контактное давление является одним из основных видов силовой нагрузки на элементы конструкции. Адекватный учет процессов, происходящих в зоне контакта, позволяет провести правильную оценку прочности и долговечности деталей и сделать вывод об экономической целесообразности использования рассматриваемой конструкции. Основные достижения в области механики контактных взаимодействий сделаны в работах И.Я.Штаермана [1], К.Джонсона [2], В.А.Бабешко [3] и других.

Численное моделирование контакта двух тел порождает ряд проблем. В частности, необходимо на численном уровне выполнить контактные условия двух типов — кинематические (отсутствие зазора между поверхностями контактирующих тел) и силовые (равенство нормальных к контактной поверхности компонент тензоров напряжений в телах).

Кинематические контактные условия в большинстве случаев численного анализа контактного взаимодействия тел можно учесть в явном виде, так как в качестве неизвестных обычно выбираются перемещения, и соответствующее условие переходит (в отсутствие трения) в условие равенства нормальных компонент перемещений на контактной поверхности.

Силовые контактные условия содержат производные численного решения и могут быть выполнены только в некотором слабом смысле — в виде равенства интегральных средних от нормальных напряжений на контактной поверхности. Это обстоятельство не позволяет включать данные условия, например, в дискретизованную систему уравнений метода конечных элементов (МКЭ) явным образом — это приведет к потере точности численного решения. Для учета силовых условий в этом случае приходится применять дополнительные приемы.

Для решения контактных задач применяются различные численные методы, в том числе:

- 1) метод множителей Лагранжа [4], [5], [6];
- 2) метод штрафов [6];
- 3) метод с использованием функций формы Эрмита;
- 4) метод Шварца [7], [8], [9].

В работе описаны некоторые из них.

Целью работы является сравнение метода множителей Лагранжа и модификации метода конечных элементов с использованием базисных функций Эрмита на примере решения квазиодномерной задачи радиального контакта двух труб. В центре внимания находится способ реализации контактных условий.

2. Постановка задачи

В качестве базового примера рассмотрим конструкцию из двух труб, соединенных с натягом (рис. 1), нагруженную так, что внешняя и внутренняя нагрузки являются осесимметричными. Считаем, что торцы труб закреплены, поэтому осевые перемещения во всей области равны нулю. Массовые и осевые силы отсутствуют. В силу сделанных предположений задача рассмотрена в одномерной осесимметричной постановке.

Введем следующие обозначения: r_0 , r_1 — внутренний и внешний радиусы первой трубы соответственно; r_2 , r_3 — внутренний и внешний радиусы второй трубы соответственно; \mathbf{u} — вектор перемещения; $\boldsymbol{\varepsilon}$ — тензор деформации; $\boldsymbol{\sigma}$ — тензор напряжений; p_1 , p_2 — внутреннее и внешнее давления; ν_1 , ν_2 — коэффициенты Пуассона первой и второй трубы соответственно; G_1 , G_2 — модули сдвига первой и второй трубы соответственно. Будем рассматривать случай $r_1 = r_2$.

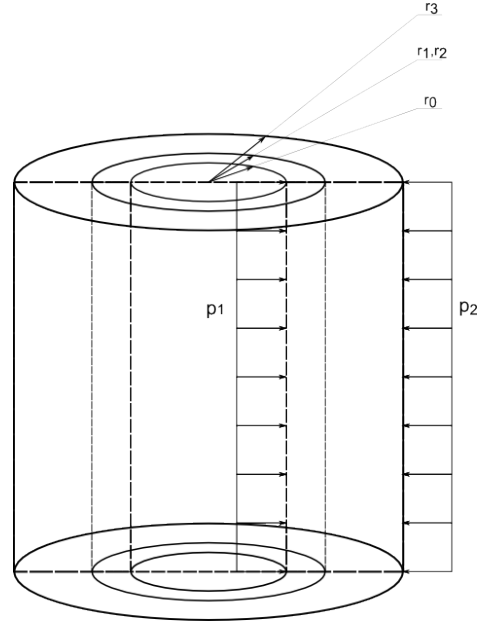


Рис. 1. Конструкция из двух труб, соединенных с натягом

2.1. Математическая модель

Математическая модель механики деформируемого упругого тела состоит из следующих базовых соотношений (везде далее предполагается суммирование по повторяющимся индексам) [10].

1) Тензор малых деформаций Коши

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (1)$$

где $u_i = u_i(\mathbf{x}, t)$ — компоненты вектора перемещений сплошной среды в точке пространства $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$ в момент времени t . ε_{ij} — компоненты тензора деформаций.

2) Закон Гука

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad (2)$$

где σ_{ij} — компоненты тензора напряжений, C_{ijkl} — компоненты тензора упругих коэффициентов.

3) Дифференциальные уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + b_i = 0, \quad (3)$$

где σ_{ij} — компоненты тензора напряжений, b_i — компоненты вектора объемных сил.

4) Кинематические (условия на перемещения) и силовые (условия на напряжения) граничные условия в различных комбинациях.

Будем использовать цилиндрическую систему координат (r, θ, z) . С учетом сделанных предположений об осевой симметрии и одномерности задачи основные соотношения принимают следующий вид [10].

1) Компоненты тензора малых деформаций Коши

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r}. \quad (4)$$

Остальные компоненты тензора деформаций равны нулю.

2) Обобщенный закон Гука.

В данной задаче считаем, что осевая сила отсутствует, поэтому $\sigma_z = 0$. Тогда, учитывая (4), компоненты тензора напряжений примут вид:

$$\sigma_r = \frac{2G}{1-2\nu} \left((1-\nu) \frac{\partial u}{\partial r} + \nu \frac{u}{r} \right), \quad (5)$$

$$\sigma_\theta = \frac{2G}{1-2\nu} \left(\nu \frac{\partial u}{\partial r} + (1-\nu) \frac{u}{r} \right). \quad (6)$$

3) Дифференциальное уравнение равновесия (массовые силы отсутствуют по условию задачи):

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0. \quad (7)$$

Подставив в (7) выражения для напряжений из (5), получим уравнение Ламе:

$$\frac{2G(1-\nu)}{1-2\nu} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r^2} u \right) = 0, \quad (8)$$

Контактное взаимодействие двух деформируемых твердых тел описывается двумя уравнениями Ламе, контактными и граничными условиями. Уравнения Ламе для каждого тела имеют следующий вид:

$$\frac{2G_1(1-\nu_1)}{1-2\nu_1} \left(\frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial r} - \frac{1}{r^2} u^{(1)} \right) = 0, \quad (9)$$

$$\frac{2G_2(1-\nu_2)}{1-2\nu_2} \left(\frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u^{(2)}}{\partial r} - \frac{1}{r^2} u^{(2)} \right) = 0. \quad (10)$$

На контактной границе тел должны выполняться следующие условия для перемещений и напряжений:

$$u^{(1)}(r_1) = u^{(2)}(r_2), \quad (11)$$

$$\sigma_r(r_1) = \sigma_r(r_2). \quad (12)$$

3. Численные методы

Для численного решения задачи (9) – (12) воспользуемся методом конечных элементов [11].

Применим два варианта указанного метода:

1) В качестве функций формы выберем функции Лагранжа. Для учета контактных условий воспользуемся методом множителей Лагранжа.

2) В качестве функций формы выберем функции Эрмита. В этом случае контактные условия можно рассматривать аналогично стандартным граничным условиям. Никаких дополнительных приемов не требуется.

3.1. Метод множителей Лагранжа

Опишем общую схему метода множителей Лагранжа на примере следующей задачи [6]. На точечную массу m на пружине жесткостью k действует сила тяжести (рис. 2). Отклонение тела ограничено твердой преградой.

Потенциальную энергию такой системы можно записать в следующем виде:

$$\Pi(u) = \frac{1}{2}ku^2 - mgu. \quad (13)$$

Ограничение на движение тела со стороны твердой преграды выразим неравенством

$$c(u) = h - u \geq 0. \quad (14)$$

Выполнение неравенства (14) исключает проникание тела в преграду. Если $c(u) > 0$, то между телом и твердой преградой есть зазор. Если $c(u) = 0$, то зазор отсутствует.

Согласно методу множителей Лагранжа для учета ограничений используем модифицированную энергию системы

$$\Pi_L(u, \lambda) = \frac{1}{2}ku^2 - mgu + \lambda c(u). \quad (15)$$

где λ – множитель Лагранжа.

В соответствии с принципом минимума потенциальной энергии первая вариация $\delta\Pi$ должна быть равна 0. При этом вариации u и λ являются независимыми. В результате получим систему

$$\begin{cases} ki\delta u - mg\delta u - \lambda\delta u = 0 \\ c(u)\delta\lambda = 0 \end{cases} \quad (16)$$

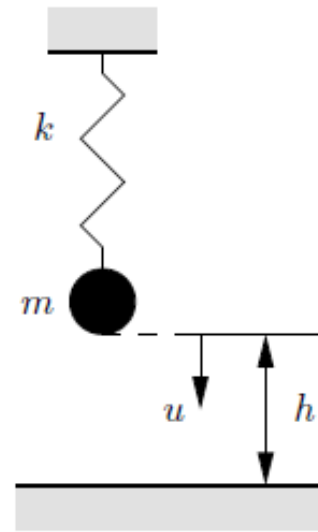


Рис. 2. Тело с пружиной

или в силу произвольности вариаций u и λ

$$\begin{cases} ku - mg - \lambda = 0 \\ c(u) = 0 \end{cases} \quad (17)$$

Первое уравнение (17) является уравнением равновесия для точечной массы, включающим в себя силы реакции опоры при наличии контакта тела с твердой преградой. Второе уравнение описывает кинематическое условие контакта: $u = h$. Таким образом, в приведенной постановке функционал варьируется без дополнительных ограничений, а множитель Лагранжа λ является независимой переменной, имеющей смысл силы реакции опоры R_N

$$\lambda = kh - mg = R_N. \quad (18)$$

Заметим, что для данной силы всегда выполняется неравенство $R_N \leq 0$, то есть контактная сила может быть только сжимающей.

Применим рассмотренный подход к задаче контактного взаимодействия двух деформируемых тел в одномерной осесимметричной постановке.

Введем на отрезках $[r_0, r_1]$ и $[r_2, r_3]$ равномерные сетки с шагом h :

$$\begin{aligned} \omega_h^{(1)} &= x_i : x_i = r_0 + ih, \quad i = \overline{0, N_1}. \\ \omega_h^{(2)} &= x_i : x_i = r_2 + ih, \quad i = \overline{0, N_2}. \end{aligned}$$

Приближенное решение задачи (9) – (12) представим в виде [12]:

$$u_h^{(\alpha)} = \sum_{j=0}^{N_\alpha} u_j^{(\alpha)} \phi_j, \quad \alpha = 1, 2, \quad (19)$$

где N_α — количество точек сетки для тела α , $u_i^{(\alpha)}$ — значения перемещения в узлах сетки, $\{\phi_i\}^{(\alpha)}$ — наборы базисных функций, имеющие следующий вид [12]:

$$\phi_i^{(\alpha)}(x) = \begin{cases} 1 + \frac{x - x_i^{(\alpha)}}{h}, & x_i^{(\alpha)} - h \leq x \leq x_i^{(\alpha)}, \\ 1 - \frac{x - x_i^{(\alpha)}}{h}, & x_i^{(\alpha)} \leq x \leq x_i^{(\alpha)} + h, \\ 0, & |x - x_i^{(\alpha)}| > h. \end{cases} \quad (20)$$

Потенциальная энергия деформируемого тела в задаче, описываемой уравнением (8), имеет вид:

$$\Pi = \int_V (\sigma_r \varepsilon_r + \sigma_\theta \varepsilon_\theta) r dV. \quad (21)$$

Для контактной задачи (9) – (12) построим модифицированную потенциальную энергию, учитывающую наличие ограничений на контакте:

$$\Pi_L = \sum_{\alpha=1}^2 \Pi^{(\alpha)} + \int_{\Gamma} \lambda g(u) d\Gamma, \quad (22)$$

где λ – множитель Лагранжа, $g(u)$ – зазор между контактирующими телами, $\Pi^{(\alpha)}$ – потенциальная энергия тела α .

Метод множителей Лагранжа заключается в минимизации построенного функционала (22). Для этого приравняем нулю первую вариацию потенциальной энергии:

$$\begin{aligned} \delta\Pi_L &= \delta \left(\sum_{\alpha=1}^2 \Pi^{(\alpha)} + \int_{\Gamma} \lambda g(u) d\Gamma \right) = \\ &= \sum_{\alpha=1}^2 \delta \int_{V_{\alpha}} \left(\sigma_r^{(\alpha)} \delta\varepsilon_r^{(\alpha)} + \sigma_{\theta}^{(\alpha)} \delta\varepsilon_{\theta}^{(\alpha)} \right) r dV + \int_{\Gamma} (\delta\lambda g(u) + \lambda \delta g(u)) d\Gamma. \end{aligned} \quad (23)$$

С учетом соотношений для деформаций (4) и соотношений для напряжений (5) получаем

$$\begin{aligned} \delta\Pi_L &= \sum_{\alpha=1}^2 \left(\int_{V_{\alpha}} \frac{2G_{\alpha}}{1-2\nu_{\alpha}} \left((1-\nu_{\alpha}) \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial r} + \nu_{\alpha} \frac{u^{(\alpha)}}{r} \right) \delta \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial r} r dV + \right. \\ &+ \left. \int_{V_{\alpha}} \frac{2G_{\alpha}}{1-2\nu_{\alpha}} \left(\nu_{\alpha} \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial r} + (1-\nu_{\alpha}) \frac{u^{(\alpha)}}{r} \right) \delta \frac{u^{(\alpha)}}{r} r dV \right) + \int_{\Gamma} (\delta\lambda g(u) + \lambda \delta g(u)) d\Gamma. \end{aligned} \quad (24)$$

Так как приближенное решение задачи имеет вид (19), представим (24) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \delta\Pi_L &= \sum_{\alpha=1}^2 \int_{V_{\alpha}} \sum_{i=0}^{N_{\alpha}} \sum_{j=0}^{N_{\alpha}} \left(\frac{2G_{\alpha}}{1-2\nu_{\alpha}} \left((1-\nu_{\alpha}) u_i^{(\alpha)} \frac{\partial \phi_i^{(\alpha)}}{\partial r} + \nu_{\alpha} u_i^{(\alpha)} \frac{\phi_i^{(\alpha)}}{r} \right) \delta u_j^{(\alpha)} \frac{\partial \phi_j^{(\alpha)}}{\partial r} + \right. \\ &+ \left. \frac{2G_{\alpha}}{1-2\nu_{\alpha}} \left(\nu_{\alpha} u_i^{(\alpha)} \frac{\partial \phi_i^{(\alpha)}}{\partial r} + (1-\nu_{\alpha}) u_i^{(\alpha)} \frac{\phi_i^{(\alpha)}}{r} \right) \delta u_j^{(\alpha)} \frac{\phi_j^{(\alpha)}}{r} \right) r dV + \\ &+ \int_{\Gamma} (\delta\lambda g(u) + \lambda \delta g(u)) d\Gamma = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\alpha=1}^2 \frac{2G_{\alpha}}{1-2\nu_{\alpha}} \int_{V_{\alpha}} \sum_{i=0}^{N_{\alpha}} \sum_{j=0}^{N_{\alpha}} \left((1-\nu_{\alpha}) \left(r \frac{\partial \phi_i^{(\alpha)}}{\partial r} \frac{\partial \phi_j^{(\alpha)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \phi_i^{(\alpha)} \phi_j^{(\alpha)} \right) + \right. \\
&\quad \left. + \nu_{\alpha} \left(\phi_i^{(\alpha)} \frac{\partial \phi_j^{(\alpha)}}{\partial r} + \phi_j^{(\alpha)} \frac{\partial \phi_i^{(\alpha)}}{\partial r} \right) \right) u_i^{(\alpha)} \delta u_j^{(\alpha)} dV + \int_{\Gamma} (\delta \lambda g(u) + \lambda \delta g(u)) d\Gamma = 0.
\end{aligned} \tag{25}$$

Тогда система линейных алгебраических уравнений примет вид $(\delta_{j,N^1}$ и $\delta_{j,0}$ — символ Кронекера)

$$\begin{aligned}
&\frac{2G_1}{1-2\nu_1} \int_{V_1} \sum_{i=0}^{N_1} \left((1-\nu_1) \left(r \frac{\partial \phi_i^{(1)}}{\partial r} \frac{\partial \phi_j^{(1)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \phi_i^{(1)} \phi_j^{(1)} \right) + \right. \\
&\quad \left. + \nu_1 \left(\phi_i^{(1)} \frac{\partial \phi_j^{(1)}}{\partial r} + \phi_j^{(1)} \frac{\partial \phi_i^{(1)}}{\partial r} \right) \right) u_i^{(1)} dV + \delta_{j,N^1} \lambda = 0, j = 0, N^1, \tag{26}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{2G_2}{1-2\nu_2} \int_{V_2} \sum_{i=0}^{N_2} \left((1-\nu_2) \left(r \frac{\partial \phi_i^{(2)}}{\partial r} \frac{\partial \phi_j^{(2)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \phi_i^{(2)} \phi_j^{(2)} \right) + \right. \\
&\quad \left. + \nu_2 \left(\phi_i^{(2)} \frac{\partial \phi_j^{(2)}}{\partial r} + \phi_j^{(2)} \frac{\partial \phi_i^{(2)}}{\partial r} \right) \right) u_i^{(2)} dV - \delta_{j,0} \lambda = 0, j = 0, N^2, \tag{27}
\end{aligned}$$

$$\int_{\Gamma} g(u) d\Gamma = 0. \tag{28}$$

3.2. Метод с использованием функций формы Эрмита

В рамках метода конечных элементов контактные условия (3) могут быть учтены прямым образом. Для этого при построении приближенного решения будем использовать не только узловые значения неизвестной функции, но и значения ее первой производной по пространству:

$$u_h^{(\alpha)} = \sum_{j=0}^{N_{\alpha}} \left(u_j^{(\alpha)} \phi_j^{(\alpha)} + u_j'^{(\alpha)} \psi_j^{(\alpha)} \right), \tag{29}$$

где N_{α} — количество точек сетки для тела α , $u_j^{(\alpha)}, u_j'^{(\alpha)}$ — некоторые коэффициенты, $\{\phi_i\}^{(\alpha)}, \{\psi_j\}^{(\alpha)}$ — наборы базисных функций. Такие наборы базисных

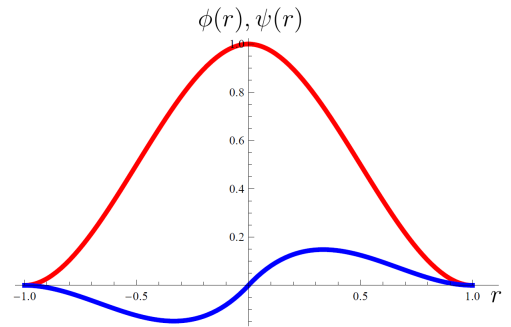


Рис. 3. Функции формы Эрмита

функций называются функциями Эрмита и имеют следующий вид [11]:

$$\phi_i^{(\alpha)}(x) = \begin{cases} \frac{\left(h + x - x_i^{(\alpha)}\right)^2 (h - 2x + 2x_i^{(\alpha)})}{h^3}, & x_i^{(\alpha)} - h \leq x \leq x_i^{(\alpha)}, \\ \frac{(h - x + x_i^{(\alpha)})^2 (h + 2x - 2x_i^{(\alpha)})}{h^3}, & x_i^{(\alpha)} \leq x \leq x_i^{(\alpha)} + h, \\ 0, & |x - x_i^{(\alpha)}| > h. \end{cases} \quad (30)$$

$$\psi_i^{(\alpha)}(x) = \begin{cases} \frac{(x - x_i^{(\alpha)})(h + x - x_i^{(\alpha)})^2}{h^2}, & x_i^{(\alpha)} - h \leq x \leq x_i^{(\alpha)}, \\ \frac{(x - x_i^{(\alpha)})(h - x + x_i^{(\alpha)})^2}{h^2}, & x_i^{(\alpha)} \leq x \leq x_i^{(\alpha)} + h, \\ 0, & |x - x_i^{(\alpha)}| > h, \end{cases} \quad (31)$$

где h — шаг сетки.

Функции формы Эрмита изображены на рис. 3. Функции ϕ изображены красным цветом, функции ψ — синим.

Согласно методу Бубнова—Галеркина, рассмотрим следующую систему:

$$\frac{2G_1(1 - \nu_1)}{1 - 2\nu_1} \int_{V^{(1)}} \left(\frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial r} - \frac{1}{r^2} u_1 \right) \omega dV = 0 \quad (32)$$

$$\frac{2G_2(1 - \nu_2)}{1 - 2\nu_2} \int_{V^{(2)}} \left(\frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u^{(2)}}{\partial r} - \frac{1}{r^2} u^{(2)} \right) \omega dV = 0. \quad (33)$$

Поскольку перемещения зависят только от r , можем заменить интеграл по объему на интеграл по r .

$$\begin{aligned} 2\pi \frac{2G_1(1 - \nu_1)}{1 - 2\nu_1} \int_{r_0}^{r_1} \left(\frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial r} - \frac{1}{r^2} u_1 \right) \omega r dr &= 0 \\ 2\pi \frac{2G_2(1 - \nu_2)}{1 - 2\nu_2} \int_{r_2}^{r_3} \left(\frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u^{(2)}}{\partial r} - \frac{1}{r^2} u^{(2)} \right) \omega r dr &= 0. \end{aligned} \quad (34)$$

Согласно методу Бубнова-Галеркина, в качестве пробных функций выбираются базисные. Тогда система (34) после упрощения будет иметь следующую

ЩИЙ ВИД:

$$\begin{aligned} \frac{2G_1(1-\nu_1)}{1-2\nu_1} \int_{r_0}^{r_1} \left(\frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial r} - \frac{1}{r^2} u^{(1)} \right) \phi r dr &= 0, \\ \frac{2G_1(1-\nu_1)}{1-2\nu_1} \int_{r_0}^{r_1} \left(\frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial r} - \frac{1}{r^2} u^{(1)} \right) \psi r dr &= 0, \\ \frac{2G_2(1-\nu_2)}{1-2\nu_2} \int_{r_2}^{r_3} \left(\frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u^{(2)}}{\partial r} - \frac{1}{r^2} u^{(2)} \right) \phi r dr &= 0, \\ \frac{2G_2(1-\nu_2)}{1-2\nu_2} \int_{r_2}^{r_3} \left(\frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u^{(2)}}{\partial r} - \frac{1}{r^2} u^{(2)} \right) \psi r dr &= 0. \end{aligned}$$

Учитывая (29), получим

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u^{(1)}}{\partial r} \phi_i r \right) \Big|_{r_0}^{r_1} - \sum_{j=0}^N \left(\int_{r_1}^{r_2} \left(u_j^{(1)} \frac{\partial \phi_j}{\partial r} + u_j^{(1)'} \frac{\partial \psi_j}{\partial r} \right) \frac{\partial \phi_i}{\partial r} r dr + \right. \\ \left. + \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r} \left(u_j^{(1)} \frac{\partial \phi_j}{\partial r} + u_j^{(1)'} \frac{\partial \psi_j}{\partial r} \right) \phi_i dr \right) = 0, \quad (35) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^N \left(\int_{r_0}^{r_1} \left(u_j^{(1)} \frac{\partial \phi_j}{\partial r} + u_j^{(1)'} \frac{\partial \psi_j}{\partial r} \right) \frac{\partial \psi_i}{\partial r} r dr + \right. \\ \left. + \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r} \left(u_j^{(1)} \frac{\partial \phi_j}{\partial r} + u_j^{(1)'} \frac{\partial \psi_j}{\partial r} \right) \psi_i dr \right) = 0, \quad i = 0, \dots, N_1, \quad (36) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u^{(2)}}{\partial r} \phi_i r \right) \Big|_{r_2}^{r_3} - \sum_{j=0}^N \left(\int_{r_1}^{r_2} \left(u_j^{(2)} \frac{\partial \phi_j}{\partial r} + u_j^{(2)'} \frac{\partial \psi_j}{\partial r} \right) \frac{\partial \phi_i}{\partial r} r dr + \right. \\ \left. + \int_{r_2}^{r_3} \frac{1}{r} \left(u_j^{(2)} \frac{\partial \phi_j}{\partial r} + u_j^{(2)'} \frac{\partial \psi_j}{\partial r} \right) \phi_i dr \right) = 0, \quad (37) \end{aligned}$$

$$\sum_{j=0}^N \left(\int_{r_2}^{r_3} \left(u_j^{(2)} \frac{\partial \phi_j}{\partial r} + u_j^{(2)'} \frac{\partial \psi_j}{\partial r} \right) \frac{\partial \psi_i}{\partial r} r dr + \int_{r_2}^{r_3} \frac{1}{r} \left(u_j^{(2)} \frac{\partial \phi_j}{\partial r} + u_j^{(2)'} \frac{\partial \psi_j}{\partial r} \right) \psi_i dr \right) = 0, \quad i = 0, \dots, N_2. \quad (38)$$

Введем следующие обозначения:

$$\phi_1(r, r_i) = \frac{(h + r - r_i)^2 (h - 2r + 2r_i)}{h^3},$$

$$\phi_2(r, r_i) = \frac{(h - r + r_i)^2 (h + 2r - 2r_i)}{h^3},$$

$$\psi_1(r, r_i) = \frac{(r - r_i)(h + r - r_i)^2}{h^2},$$

$$\psi_2(r, r_i) = \frac{(r - r_i)(h - r + r_i)^2}{h^2}.$$

Матрицу системы линейных алгебраических уравнений (36) запишем в виде:

$$K_1 = \begin{pmatrix} K_{11} & 0 & K_{12} & 0 \\ K_{gc1} & K_{gc2} & 0 & 0 \\ 0 & K_{13} & 0 & K_{14} \\ K_{21} & 0 & K_{22} & 0 \\ K_{gc3} & K_{gc4} & K_{gc5} & K_{gc6} \\ 0 & K_{23} & 0 & K_{24} \end{pmatrix},$$

где матрицы $K_{ij}, i = 1, 2, j = 1, \dots, 4$ и матрица $K_{gck}, k = 1, \dots, 6$ имеют следующий вид:

$$K_{k1}(G_1, \nu_1, r_i) = \begin{pmatrix} B_{k2} & C_k & 0 & \dots & 0 \\ A_k & B_{kj} & C_k & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & \dots & A_k & B_{kj} & C_k \\ 0 & \dots & 0 & A_k & B_{k1} \end{pmatrix},$$

где $r_i = r_0 + (i - 1)h, i = 1, \dots, n_1$ — номер строки. Здесь и дальше предполагается суммирование по индексу j : $B_{kj}(G_1, \nu_1, r_i) = B_{k1}(G_1, \nu_1, r_i) + B_{k2}(G_1, \nu_1, r_i)$.

$$K_{k2}(G_1, \nu_1, r_i) = \begin{pmatrix} G_{k2} & E_k & 0 & \cdots & 0 \\ D_k & G_{kj} & E_k & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & \cdots & D_k & G_{kj} & E_k \\ 0 & \cdots & 0 & D_k & G_{k1} \end{pmatrix},$$

где $r_i = r_0 + (i - 1)h$, $i = 1, \dots, n_1$ — номер строки.

$$K_{k3}(G_2, \nu_2, r_i) = \begin{pmatrix} B_{k2} & C_k & 0 & \cdots & 0 \\ A_k & B_{kj} & C_k & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & \cdots & A_k & B_{kj} & C_k \\ 0 & \cdots & 0 & A_k & B_{k1} \end{pmatrix},$$

где $r_i = r_2 + (i - 1)h$, $i = 1, \dots, n_2$ — номер строки.

$$K_{k4}(G_2, \nu_2, r_i) = \begin{pmatrix} G_{k2} & E_k & 0 & \cdots & 0 \\ D_k & G_{kj} & E_k & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & \cdots & D_k & G_{kj} & E_k \\ 0 & \cdots & 0 & D_k & G_{k1} \end{pmatrix},$$

где $r_i = r_2 + (i - 1)h$, $i = 1, \dots, n_2$ — номер строки.

$$K_{gc1} = (0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1),$$

$$K_{gc2} = (-1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0),$$

$$K_{gc3} = \left(0 \quad \cdots \quad 0 \quad \frac{2G_1\nu_1}{(1 - 2\nu_1)r_1} \right),$$

$$K_{gc4} = \left(-\frac{2G_2\nu_2}{(1 - 2\nu_2)r_1} \quad \cdots \quad 0 \quad 0 \right),$$

$$K_{gc5} = \left(0 \quad \cdots \quad 0 \quad \frac{2G_1(1 - \nu_1)}{(1 - 2\nu_1)} \right),$$

$$K_{gc6} = \left(-\frac{2G_2(1 - \nu_2)}{(1 - 2\nu_2)} \quad \cdots \quad 0 \quad 0 \right).$$

$$A_1(G, \nu, r_i) = \frac{2Gr}{1 - 2\nu} \int_{r_i-h}^{r_i} \left(\left((1 - \nu) \frac{\partial \phi_2(r, r_i - h)}{\partial r} + \frac{\nu}{r} \phi_2(r, r_i - h) \right) \frac{\partial \phi_1(r, r_i)}{\partial r} + \right. \\ \left. + \left(\nu \frac{\partial \phi_2(r, r_i - h)}{\partial r} + \frac{1 - \nu}{r} \phi_2(r, r_i - h) \right) \frac{1}{r} \phi_1(r, r_i) \right) dr, \quad (39)$$

$$\begin{aligned}
B_{1j}(G, \nu, r_i) &= \frac{2Gr}{1-2\nu} \int_{a_j}^{b_j} \left(\left((1-\nu) \frac{\partial \phi_j(r, r_i)}{\partial r} + \frac{\nu}{r} \phi_j(r, r_i) \right) \frac{\partial \phi_j(r, r_i)}{\partial r} + \right. \\
&\quad \left. + \left(\nu \frac{\partial \phi_j(r, r_i)}{\partial r} + \frac{1-\nu}{r} \phi_j(r, r_i) \right) \frac{1}{r} \phi_j(r, r_i) \right) dr, j = 1, 2, \\
&\quad a_1 = r_i - h, b_1 = a_2 = r_i, b_2 = r_i + h, \quad (40)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_1(G, \nu, r_i) &= \frac{2Gr}{1-2\nu} \int_{r_i}^{r_i+h} \left(\left((1-\nu) \frac{\partial \phi_1(r, r_i+h)}{\partial r} + \frac{\nu}{r} \phi_1(r, r_i+h) \right) \frac{\partial \phi_2(r, r_i)}{\partial r} + \right. \\
&\quad \left. + \left(\nu \frac{\partial \phi_1(r, r_i+h)}{\partial r} + \frac{1-\nu}{r} \phi_1(r, r_i+h) \right) \frac{1}{r} \phi_2(r, r_i) \right) dr, \quad (41)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_1(G, \nu, r_i) &= \frac{2Gr}{1-2\nu} \int_{r_i-h}^{r_i} \left(\left((1-\nu) \frac{\partial \psi_2(r, r_i-h)}{\partial r} + \frac{\nu}{r} \psi_2(r, r_i-h) \right) \frac{\partial \phi_1(r, r_i)}{\partial r} + \right. \\
&\quad \left. + \left(\nu \frac{\partial \psi_2(r, r_i-h)}{\partial r} + \frac{1-\nu}{r} \psi_2(r, r_i-h) \right) \frac{1}{r} \phi_1(r, r_i) \right) dr, \quad (42)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{1j}(G, \nu, r_i) &= \frac{2Gr}{1-2\nu} \int_{a_j}^{b_j} \left(\left((1-\nu) \frac{\partial \psi_j(r, r_i)}{\partial r} + \frac{\nu}{r} \psi_j(r, r_i) \right) \frac{\partial \phi_j(r, r_i)}{\partial r} + \right. \\
&\quad \left. + \left(\nu \frac{\partial \psi_j(r, r_i)}{\partial r} + \frac{1-\nu}{r} \psi_j(r, r_i) \right) \frac{1}{r} \phi_j(r, r_i) \right) dr, j = 1, 2, \\
&\quad a_1 = r_i - h, b_1 = a_2 = r_i, b_2 = r_i + h, \quad (43)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_1(G, \nu, r_i) &= \frac{2Gr}{1-2\nu} \int_{r_i}^{r_i+h} \left(\left((1-\nu) \frac{\partial \psi_1(r, r_i+h)}{\partial r} + \frac{\nu}{r} \psi_1(r, r_i+h) \right) \frac{\partial \phi_2(r, r_i)}{\partial r} + \right. \\
&\quad \left. + \left(\nu \frac{\partial \psi_1(r, r_i+h)}{\partial r} + \frac{1-\nu}{r} \psi_1(r, r_i+h) \right) \frac{1}{r} \phi_2(r, r_i) \right) dr, \quad (44)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_2(G, \nu, r_i) &= \frac{2Gr}{1-2\nu} \int_{r_i-h}^{r_i} \left(\left((1-\nu) \frac{\partial \phi_2(r, r_i-h)}{\partial r} + \frac{\nu}{r} \phi_2(r, r_i-h) \right) \frac{\partial \psi_1(r, r_i)}{\partial r} + \right. \\
&\quad \left. + \left(\nu \frac{\partial \phi_2(r, r_i-h)}{\partial r} + \frac{1-\nu}{r} \phi_2(r, r_i-h) \right) \frac{1}{r} \psi_1(r, r_i) \right) dr, \quad (45)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{2j}(G, \nu, r_i) &= \frac{2Gr}{1-2\nu} \int_{a_j}^{b_j} \left(\left((1-\nu) \frac{\partial \phi_j(r, r_i)}{\partial r} + \frac{\nu}{r} \phi_j(r, r_i) \right) \frac{\partial \psi_j(r, r_i)}{\partial r} + \right. \\
&\quad \left. + \left(\nu \frac{\partial \phi_j(r, r_i)}{\partial r} + \frac{1-\nu}{r} \phi_j(r, r_i) \right) \frac{1}{r} \psi_j(r, r_i) \right) dr, \quad j = 1, 2, \\
&\quad a_1 = r_i - h, b_1 = a_2 = r_i, b_2 = r_i + h, \quad (46)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_2(G, \nu, r_i) &= \frac{2Gr}{1-2\nu} \int_{r_i}^{r_i+h} \left(\left((1-\nu) \frac{\partial \phi_1(r, r_i+h)}{\partial r} + \frac{\nu}{r} \phi_1(r, r_i+h) \right) \frac{\partial \psi_2(r, r_i)}{\partial r} + \right. \\
&\quad \left. + \left(\nu \frac{\partial \phi_1(r, r_i+h)}{\partial r} + \frac{1-\nu}{r} \phi_1(r, r_i+h) \right) \frac{1}{r} \psi_2(r, r_i) \right) dr, \quad (47)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_2(G, \nu, r_i) &= \frac{2Gr}{1-2\nu} \int_{r_i-h}^{r_i} \left(\left((1-\nu) \frac{\partial \psi_2(r, r_i-h)}{\partial r} + \frac{\nu}{r} \psi_2(r, r_i-h) \right) \frac{\partial \psi_1(r, r_i)}{\partial r} + \right. \\
&\quad \left. + \left(\nu \frac{\partial \psi_2(r, r_i-h)}{\partial r} + \frac{1-\nu}{r} \psi_2(r, r_i-h) \right) \frac{1}{r} \psi_1(r, r_i) \right) dr, \quad (48)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{2j}(G, \nu, r_i) &= \frac{2Gr}{1-2\nu} \int_{a_j}^{b_j} \left(\left((1-\nu) \frac{\partial \psi_j(r, r_i)}{\partial r} + \frac{\nu}{r} \psi_j(r, r_i) \right) \frac{\partial \psi_j(r, r_i)}{\partial r} + \right. \\
&\quad \left. + \left(\nu \frac{\partial \psi_j(r, r_i)}{\partial r} + \frac{1-\nu}{r} \psi_j(r, r_i) \right) \frac{1}{r} \psi_j(r, r_i) \right) dr, \quad j = 1, 2, \\
&\quad a_1 = r_i - h, b_1 = a_2 = r_i, b_2 = r_i + h, \quad (49)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_2(G, \nu, r_i) &= \frac{2Gr}{1-2\nu} \int_{r_i}^{r_i+h} \left(\left((1-\nu) \frac{\partial \psi_1(r, r_i+h)}{\partial r} + \frac{\nu}{r} \psi_1(r, r_i+h) \right) \frac{\partial \psi_2(r, r_i)}{\partial r} + \right. \\
&\quad \left. + \left(\nu \frac{\partial \psi_1(r, r_i+h)}{\partial r} + \frac{1-\nu}{r} \psi_1(r, r_i+h) \right) \frac{1}{r} \psi_2(r, r_i) \right) dr. \quad (50)
\end{aligned}$$

4. Результаты тестовых расчетов

Для тестирования описанных методов решена задача с параметрами, приведенными в таблице 1. Можно показать, что аналитическое решение задачи

Таблица 1. Параметры задачи

r_0	r_1	r_2	r_3	G_1	G_2	ν_1	ν_2	p_1	p_2
0.2 мм	0.6 мм	0.6 мм	1.2 мм	76 ГПа	86 ГПа	0.1	0.3	10 МПа	20 МПа

аналогично полученному в [15] для случая толстостенной трубы, и имеет следующий вид:

$$\begin{cases} u^{(1)} = A_1 r + \frac{B_1}{r} \\ u^{(2)} = A_1 r + \frac{B_2}{r}, \end{cases} \quad (51)$$

где A_1, B_1, A_2, B_2 — константы, которые для заданных параметров равны

$$A_1 = -15.8312, \quad B_1 = -0.233247, \quad A_2 = -21.6056, \quad B_2 = -2.31203. \quad (52)$$

Матрицы решаемых систем линейных алгебраических уравнений хранятся в формате CSR (Compressed Sparse Row) [16]. Решение СЛАУ проводится методом LU-разложения.

На всех графиках далее красным обозначается аналитическое решение, синим — часть численного решения, соответствующая внутренней трубе, зеленым — часть численного решения, соответствующая внешней трубе.

4.1. Метод множителей Лагранжа

На графиках 4 – 7 приведены распределения перемещений и напряжений для шагов $h = 0.1$ и $h = 0.005$.

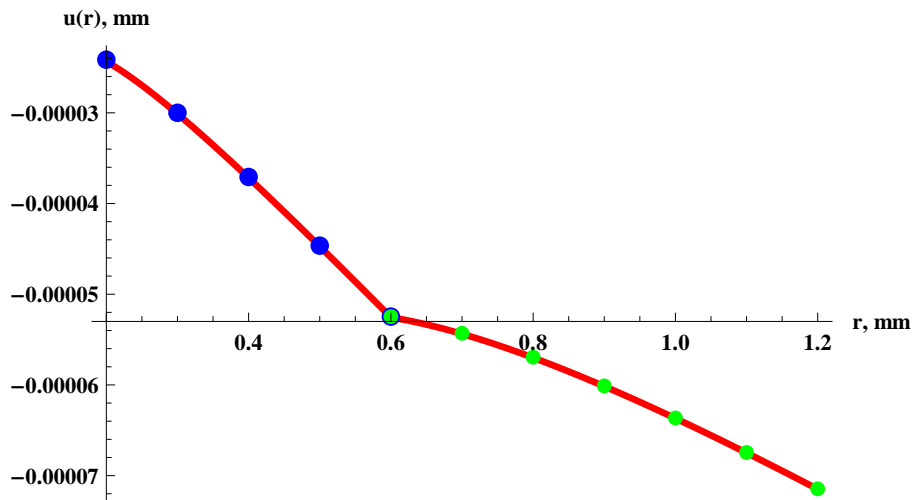


Рис. 4. Зависимость перемещений от радиуса, шаг $h = 0.1$

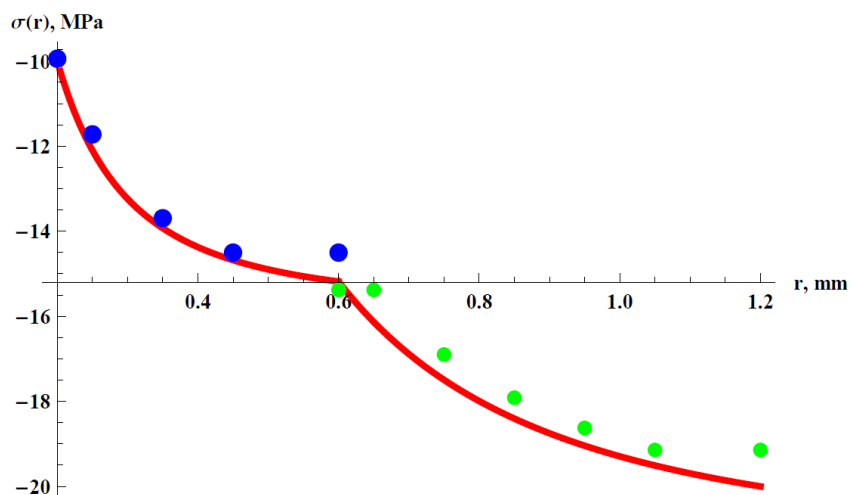


Рис. 5. Зависимость радиальных напряжений от радиуса, шаг $h = 0.1$

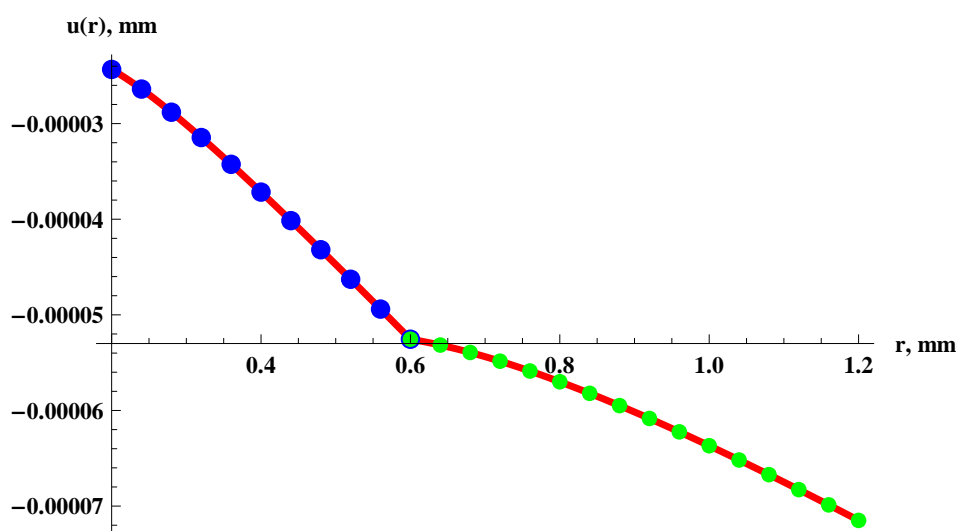


Рис. 6. Зависимость перемещений от радиуса, шаг $h = 0.005$

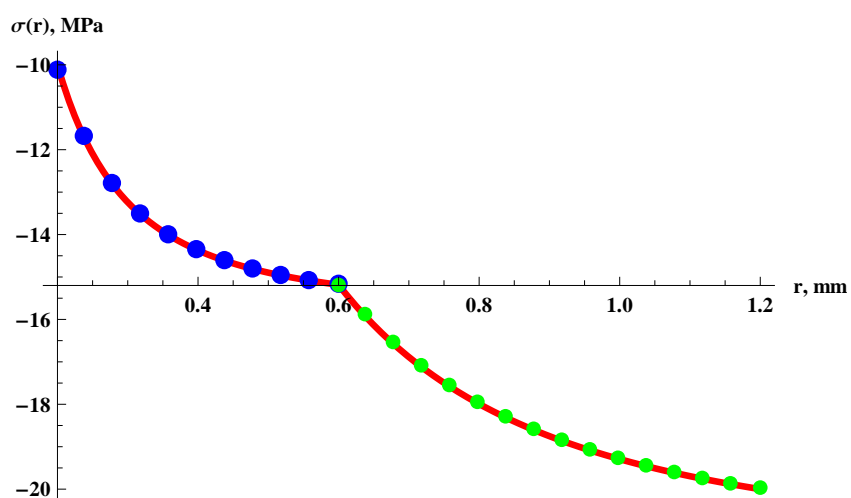


Рис. 7. Зависимость радиальных напряжений от радиуса, шаг $h = 0.005$

При крупном шаге в решении наблюдается разрыв напряжений на месте контакта (рис. 5). При уменьшении шага разрыв уменьшается, но все равно имеет место, как видно на рис. 8. В целом решение сходится к аналитическому.

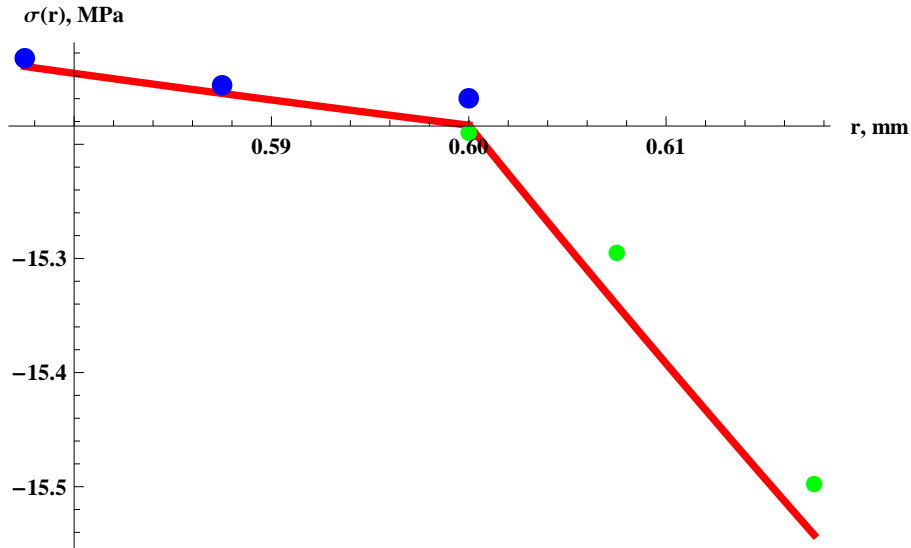


Рис. 8. Зависимость напряжений от радиуса, шаг $h = 0.005$, место разрыва нормальных напряжений

Расчет абсолютной погрешности произведен по формуле:

$$\delta = \max_{i=1..N^{(\alpha)}} |u_{true,i}^{(\alpha)} - u_{meas,i}^{(\alpha)}|, \quad (53)$$

где u_{true} — истинное (аналитическое) значение решения в точке, а u_{meas} — полученное (численное).

Полученная абсолютная погрешность приведена в таблице 2, отношение последовательных погрешностей для определения порядка метода показаны в таблице 3.

Таблица 2. Погрешности перемещений и напряжений

h	погрешность перемещений, мм	погрешность напряжений, МПа
0.1	$1.93697 \cdot 10^{-7}$	0.754814
0.05	$5.18968 \cdot 10^{-8}$	0.419577
0.01	$2.09679 \cdot 10^{-9}$	0.0919832
0.005	$4.96788 \cdot 10^{-10}$	0.0465545

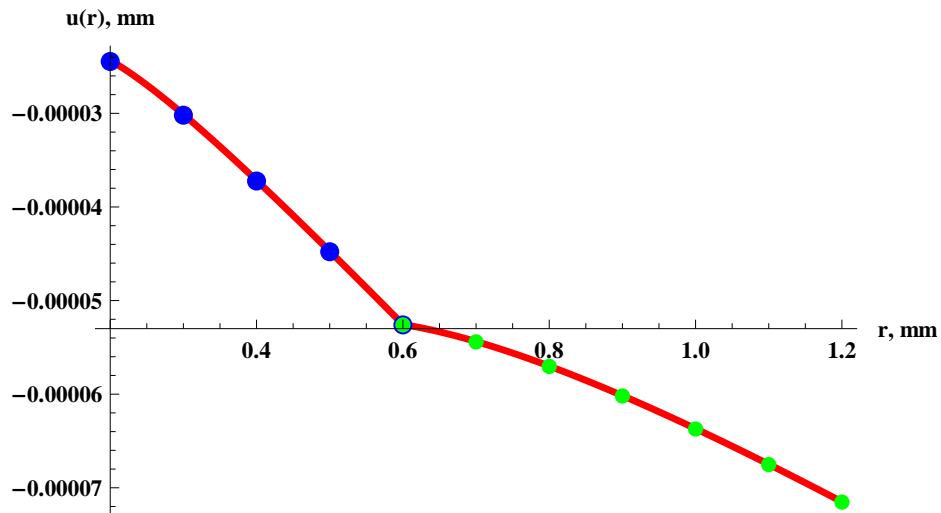
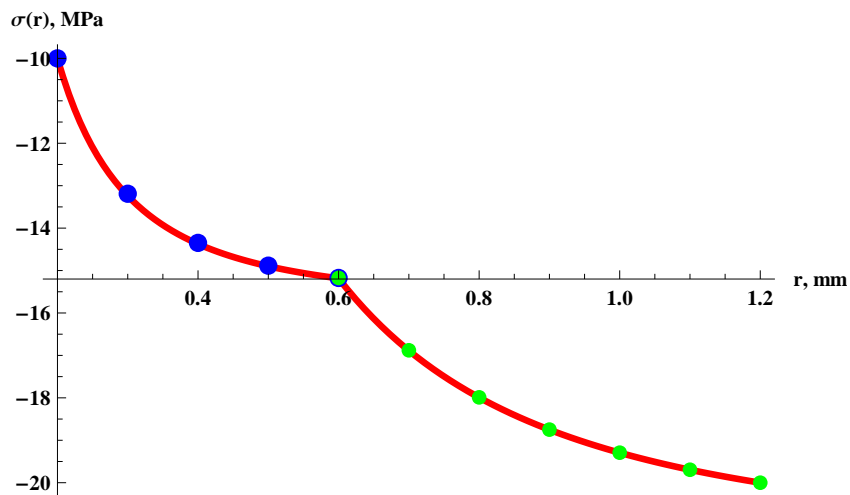
Метод имеет второй порядок по перемещениям и первый по напряжениям.

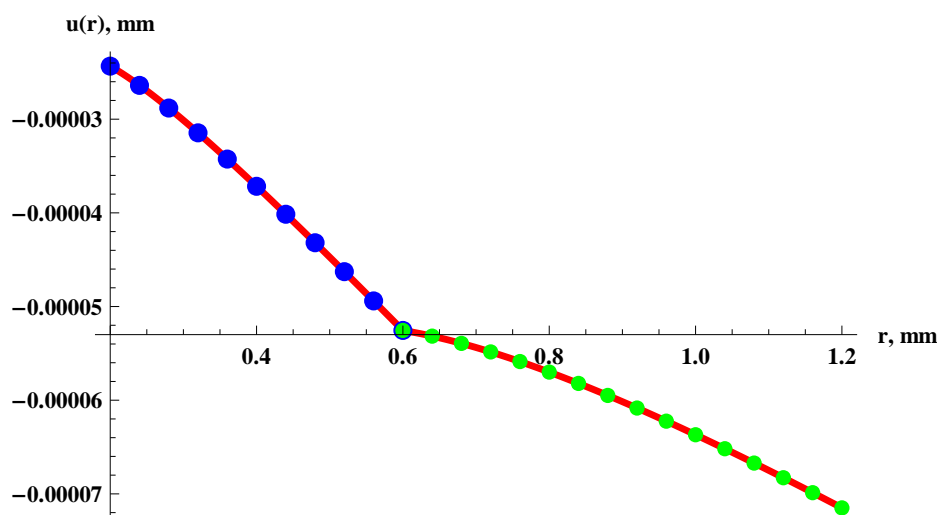
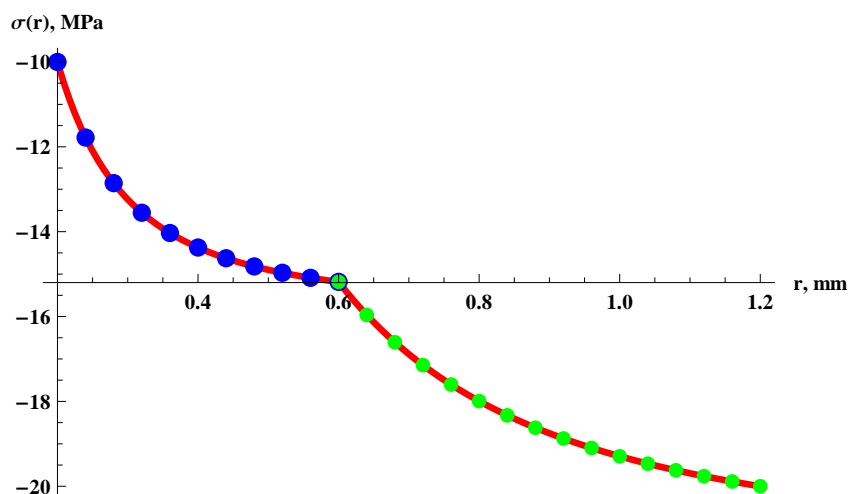
Таблица 3. Отношение погрешностей

отношение шагов	отношение погрешностей перемещений	отношение погрешностей напряжений
$0.1/0.05 = 2$	3.73235	1.79899
$0.05/0.01 = 5$	24.7506	4.56145
$0.01/0.005 = 2$	4.22069	1.97582

4.2. Метод с использованием функций формы Эрмита

На графиках 9 – 12 приведены распределения перемещений и напряжений для шагов $h = 0.1$ и $h = 0.005$.

Рис. 9. Зависимость перемещений от радиуса, шаг $h = 0.1$ Рис. 10. Зависимость радиальных напряжений от радиуса, шаг $h = 0.1$

Рис. 11. Зависимость перемещений от радиуса, шаг $h = 0.005$ Рис. 12. Зависимость радиальных напряжений от радиуса, шаг $h = 0.005$

Полученная абсолютная погрешность приведена в таблице 4, отношения последовательных погрешностей для определения порядка метода показаны в таблице 5.

Таблица 4. Погрешность перемещений и напряжений

h	погрешность перемещений, мм	погрешность напряжений, МПа
0.1	$1.21403 \cdot 10^{-7}$	0.0495328
0.05	$2.25032 \cdot 10^{-8}$	0.0119479
0.01	$3.03212 \cdot 10^{-10}$	0.000168
0.005	$7.27303 \cdot 10^{-11}$	0.000031256

Метод позволяет получать перемещения и напряжения с фактическим порядком точности 2.5.

Как можно увидеть на графиках, метод с использованием функций Эр-

Таблица 5. Отношение погрешностей

отношение шагов	отношение погрешностей перемещений	отношение погрешностей напряжений
$0.1/0.05 = 2$	5.39492	4.14573
$0.05/0.01 = 5$	74.2161	71.1185
$0.01/0.005 = 2$	4.16899	5.37497

мита позволяет уже на шаге $h = 0.1$ получать вполне удовлетворительные результаты. К тому же он позволяет получать напряжения с тем же порядком, что и перемещения, и без разрыва на поверхности контакта, в отличие от метода множителей Лагранжа. Это связано с тем, что функции Эрмита позволяют получать достаточно точные значения не только перемещений, но и их производных. При использовании стандартных КЭ (с базисными функциями Лагранжа) компоненты тензоров деформации и напряжений являются постоянными в пределах ячейки сетки. Таким образом, напряжения, полученные первым методом, нельзя отнести непосредственно к граничным узлам, они характеризуют некие средние значения в прилегающих к границе ячейкам сетки, поэтому на графиках, показанных на рис. 5, 8, существуют разрывы по напряжениям (должны совпадать контактные давления на границе, но напряжения в приграничных зонах могут отличаться). Во втором методе вычисленные напряжения относятся непосредственно к узлам сетки, поэтому на графиках рис. 10, 12 на контактной границе разрывов в напряжениях нет, поскольку выполнено соответствующее граничное условие.

4.3. Вычислительная сложность алгоритмов

Как показано в предыдущем разделе, метод с использованием функций формы Эрмита значительно точнее, чем метод множителей Лагранжа. Оценим вычислительную сложность алгоритмов. Для этого вычислим количество операций умножения и деления чисел с плавающей запятой и затраченное время.

Для сравнения вычислительной сложности алгоритмов приведены таблицы 6 и 7.

Как видно из результатов, метод с использованием функций формы Эрмита требует значительно больших затрат по числу операций и по времени, чем метод множителей Лагранжа.

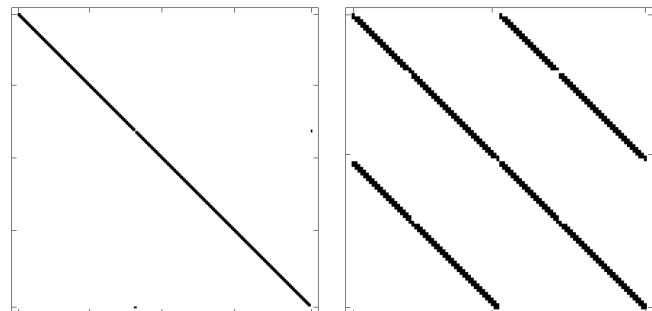
Значительная разница во времени решения системы линейных алгебраических уравнений объясняется следующим. Для решения СЛАУ производится LU -разложение исходной матрицы, записанной в формате хранения разреженных матриц CSR (Compressed Sparse Row). В случае метода множителей Лагранжа матрица является трехдиагональной, добавление новых ненулевых элементов в матрицу происходит не часто.

Таблица 6. Количество затраченных операций

	Метод множителей Лагранжа	Метод с использованием функций формы Эрмита
h	0.1	
Заполнение матрицы	4792	30812
Решение СЛАУ	107	1083
h	0.05	
Заполнение матрицы	9532	65132
Решение СЛАУ	203	4954
h	0.01	
Заполнение матрицы	47452	339692
Решение СЛАУ	979	357666
h	0.005	
Заполнение матрицы	94852	682892
Решение СЛАУ	1949	2651716

При применении метода с функциями Эрмита матрица СЛАУ более заполненная, добавление новых элементов при LU -разложении происходит значительно чаще. Операция добавления нового элемента в разреженную матрицу предполагает раздвигание границ массивов и их пересчет, и, следовательно, занимает значительное время.

На рис. 13 представлены структуры матриц СЛАУ для обоих методов.



Метод
множителей
Лагранжа

Метод с исп.
функций формы
Эрмита

Рис. 13. Структуры матриц СЛАУ

5. Заключение

В работе рассмотрено численное решение задачи контактного взаимодействия упругих тел с помощью метода множителей Лагранжа и функций Эрмита. С помощью данных методов решена тестовая задача радиального контакта двух труб.

Как показали результаты, метод с использованием функций формы Лагранжа первого порядка и множителей Лагранжа для учета контактных условий имеет второй порядок точности по перемещениям и первый порядок точности по напряжениям. При этом решается система из $(n+1)$ линейных алгебраических уравнений, где n — количество точек сетки. Матрица системы линейных алгебраических уравнений — разреженная, хранение происходит в формате CSR.

Таблица 7. Затраченное время

	Метод множителей Лагранжа	Метод с использованием функций формы Эрмита
h	0.1	
Заполнение матрицы	0.00369	0.00458
Решение СЛАУ	0.00335	0.01532
h	0.05	
Заполнение матрицы	0.00428	0.00474
Решение СЛАУ	0.00945	0.02942
h	0.01	
Заполнение матрицы	0.03394	0.00721
Решение СЛАУ	0.06582	1.24364
h	0.005	
Заполнение матрицы	0.12538	0.00958
Решение СЛАУ	0.13909	15.5326

Метод с использованием функций формы Эрмита имеет экспериментальный порядок точности 2.5 и по перемещениям, и по напряжениям. Но для этого решается система из $2n$ линейных уравнений (матрица системы также является разреженной). При использовании данного метода можно получить вполне удовлетворительное решение уже при шаге $h = 0.1$, в отличие от метода с множителями Лагранжа. Однако вычислительная сложность метода с использованием функций Эрмита значительно больше, чем в методе с множителями Лагранжа.

Рассмотренные особенности реализации данных численных методов при решении одномерной задачи позволяют сделать выводы о возможных трудностях при переходе к решению многомерных контактных задач. Метод множителей Лагранжа вполне успешно используется для задач такого класса. Как и в одномерном случае, одним из его главных достоинств является сравнительно небольшое увеличение вычислительных затрат для учета контакта, а одним из главных недостатков — получение не очень точных значений контактных давлений на грубых сетках. Использование в многомерных задачах метода с функциями Эрмита приводит к резкому увеличению вычислительной сложности решения, так как даже в двумерном случае в каждом узле сетки придется искать не две, а шесть переменных (перемещение по оси x , перемещение по оси y и 4 производные). Поэтому хотя данный метод является более точным и свободен от некоторых недостатков метода множителей Лагранжа, он практически не применяется для решения многомерных задач.

Список литературы

- [1] Штаерман И. Я. Контактная задача теории упругости. М.-Л.: Гостехиздат, 1949. 270 с.
- [2] Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. М.: Мир, 1989. 510 с.
- [3] Бабешко В.А. Статические и динамические контактные задачи со сцеплением // ПММ. 1975. Т. 39, вып. 3. С. 505–512.
- [4] Бураго Н.Г., Кукуджанов В.Н. Обзор контактных алгоритмов // Известия РАН, МТТ, 2005. № 1. С. 45–87.
- [5] Papadopoulos P., Solberg J.M. A Lagrange Multiplier Method for the Finite Element Solution of Frictionless Contact Problems // Math. Comp. Modelling. 1998. Vol. 28. Pp. 373–84.
- [6] Wriggers P. Computational Contact Mechanics. Springer, 2006. 521 p.
- [7] Цвик Л.Б. Принцип поочередной непрерывности при решении задач теории поля по частям // Докл. АН СССР. 1978. Т. 243, вып. 1. С.74–77.
- [8] Цвик Л.Б. Принцип поочередности в задачах о сопряжении и контакте твердых деформируемых тел // Прикладная механика. 1980. Т. 16, № 1. С. 13–18.
- [9] Галанин М.П., Лукин В.В., Родин А.С., Станкевич И.В. Применение метода Шварца для моделирования контактного взаимодействия системы тел // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2015. Т. 55, № 8. С. 1429–1444.
- [10] Демидов С.П. Теория упругости. М.: Высш. школа, 1979. 432 с.
- [11] Галанин М.П., Савенков Е.Б. Методы численного анализа математических моделей. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2010. 591 с.
- [12] Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. 543 с.
- [13] Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., 1996. 708 с.
- [14] Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. М.: Наука, 1975. 576 с.
- [15] Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 1999. 592 с.
- [16] Баландин М.Ю., Шурина Э.П. Методы решения СЛАУ большой размерности. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2000. 70 с.

Содержание

1. Введение	3
2. Постановка задачи	4
2.1. Математическая модель	4
3. Численные методы	6
3.1. Метод множителей Лагранжа	6
3.2. Метод с использованием функций формы Эрмита	9
4. Результаты тестовых расчетов	15
4.1. Метод множителей Лагранжа	16
4.2. Метод с использованием функций формы Эрмита	19
4.3. Вычислительная сложность алгоритмов	21
5. Заключение	22
Список литературы	24