



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 94 за 2015 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

[Афенди́ков А.Л.](#), [Луцкий А.Е.](#),
[Меньшов И.С.](#), [Меркулов К.Д.](#),
[Пленкин А.В.](#), [Ханхасаева Я.В.](#)

Алгоритм динамической
локальной адаптации сеток
на основе вейвлет-анализа
с использованием метода
свободной границы

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Алгоритм динамической локальной адаптации сеток на основе вейвлет-анализа с использованием метода свободной границы / А.Л.Афенди́ков [и др.] // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2015. № 94. 20 с.
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2015-94>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Российской академии наук**

**А.Л. Афендиков, А.Е. Луцкий, И.С. Меншов,
К.Д. Меркулов, А.В. Пленкин, Я.В. Ханхасаева**

**Алгоритм динамической локальной
адаптации сеток на основе вейвлет-анализа
с использованием метода
свободной границы**

Москва — 2015

Афендииков А.Л., Луцкий А.Е., Меньшов И.С., Меркулов К.Д., Пленкин А.В., Ханхасаева Я.В.

Алгоритм динамической локальной адаптации сеток на основе вейвлет-анализа с использованием метода свободной границы

Для решения задач обтекания абсолютно твердого недеформируемого тела, которое в общем случае может двигаться или по предписанному закону (форсированное движение), или под действием сил реакции со стороны газа (свободное движение), используются многоуровневые декартовы сетки с динамической локальной адаптацией, которая производится на основе вейвлет-анализа решения, и метод свободной границы.

Ключевые слова: вычислительная газовая динамика, метод свободной границы, декартовы сетки, обтекание движущихся тел, В-сплайн, вейвлет.

Andrei Leonidovich Afendikov, Alexander Evgenjevich Lutsky, Igor Stanislavovich Menshov, Kirill Dmitrievich Merkulov, Andrei Valerevich Plenkin, Yana Vladislavovna Khankhasaeva

Algorithm of local mesh adaptation based on wavelet analysis with the use of free boundary method

Multiple level Cartesian mesh adaptation based on wavelet analysis is used for numerical simulation of flow past a solid nondeformable body that can move either according to some law (forced movement) or under the action of the reaction forces from the gas (free movement) using free boundary method.

Key words: computational fluid dynamics, free boundary method, Cartesian grid, flow past moving bodies, B-spline, wavelet.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, проект 14-11-00872.

Оглавление

Введение	3
1. Двумерная декартова сетка с локальной адаптацией.....	4
1.1. Формат хранения локально адаптивных сеток.....	4
1.2. Алгоритм обхода сетки и поиска соседей.....	5
1.3. Схема газодинамического расчета на неструктурированной сетке.	5
2. Индикаторы гладкости сеточного решения на основе вейвлет-анализа. .	6
2.1. Построение вейвлетных фильтров	6
2.2. Анализ на крестовом шаблоне	7
2.3. Анализ на квадратном шаблоне	8
2.4. Особенности вейвлет-анализа сеточных решений.....	9
3. Метод свободной границы.....	9
4. Результаты расчетов на локально адаптивных сетках.....	15
4.1. Стационарная геометрия	15
4.2. Нестационарная геометрия	17
Заключение	19
Список литературы.....	19

Введение

Вопрос о динамической адаптации сеток для оптимизации численного решения задач газовой динамики не нов [1-5,10]. Однако при проведении расчетов на параллельном суперкомпьютере подобная адаптация приобретает дополнительную специфику, которая делает необходимым развитие новых подходов.

В настоящей работе для анализа гладкости численного решения предлагается использовать вариант схемы Свелденса, примененной к V -сплайнам в параллелепипеде на последовательности вложенных декартовых сеток. Для обеспечения прозрачности изложения сначала рассматривается одномерный случай для равномерных сеток на отрезке. На многомерный случай конструкция переносится с помощью тензорного произведения, что

адекватно использованному в расчетах адаптированному варианту метода свободной границы на декартовых сетках.

Поскольку в данном методе адаптации используются декартовые сетки, для расчета задач обтекания применяется метод свободной границы, который также кратко описан.

1. Двумерная декартова сетка с локальной адаптацией

1.1. Формат хранения локально адаптивных сеток

Одна из наиболее трудоемких и сложных задач при использовании сеток с локальной адаптацией – это выбор оптимального формата представления данных. Для адаптации изначально структурированных декартовых сеток, где разбиение подразумевается по какому-либо заранее выбранному закону, удобно использовать различные древовидные структуры. Кроме того, для таких структур хорошо известны быстрые рекурсивные алгоритмы обхода и перестроения.

В работе представлен следующий формат описания двумерной сетки с возможностью локальной адаптации. Каждая ячейка может разбиваться только на четыре равных делением пополам по каждому из направлений. Берется первоначальная прямоугольная сетка (допустима неравномерная) размера $M \times N$ с ячейками, допускающими многоуровневое разбиение.

Далее каждая ячейка описывается своим уровнем (для базовой сетки размера $M \times N$ он равен нулю), виртуальным положением на этом уровне - парой параметров, показывающих, какую строку и столбец занимала бы ячейка в случае полного заполнения данного уровня. Кроме того, она имеет поле-флаг, показывающее, является ли данная ячейка конечной расчетной (листом соответствующего дерева) или подразбитой на 4 ячейки следующего уровня. Для подразбитой ячейки присутствуют указатели на потомков данной ячейки

(т.е. на те 4 ячейки, на которые подразбита данная). Для конечной ячейки эти указатели пустые, но зато есть указатель на структуру, описывающую реальную физическую ячейку. Она хранит в себе координаты ячейки и газодинамические характеристики внутри нее. В случае фиктивной ячейки (разбитой) этот указатель, естественно, нулевой.

Такой тип данных позволяет описывать адаптивные сетки совершенно различных конфигураций без использования лишней памяти.

1.2. Алгоритм обхода сетки и поиска соседей

Обход квадратного массива (матрицы) деревьев, описанных выше, осуществляется простой процедурой: мы обходим в двойном цикле по всем элементам базовой сетки. В случае, когда текущая ячейка является конечной, применяем целевую функцию к ней, в противном случае вызываем ее же для всех четырех потомков данной ячейки.

Для поиска соседей удобно использовать еще одну особенность сеток описанного формата: ячейка 1-го уровня с индексами (i, j) обязательно имеет своим родителем ячейку с индексами $([i/2], [j/2])$, где $/$ – операция целочисленного деления, а нумерация обоих индексов начинается с нуля, $i = \overline{0, M-1}; j = \overline{0, N-1}$. Тогда, например, для случая двух уровней соседей текущей ячейки по каждой из осей можно получить простым перебором на основе половинного деления и умножения индексов.

1.3. Схема газодинамического расчета на неструктурированной сетке

Если расчетная стека состоит одновременно из ячеек разных уровней, она становится неконформной и насчитывать суммарные потоки через ячейку приходится по более сложной формуле:

$$\mathbf{Q}_{lv, i, j}^{n+1} = \mathbf{Q}_{lv, i, j}^n - \frac{\Delta t}{V_{lv, i, j}} \left[\sum_{\sigma x} s_{\sigma} \mathbf{F}_{\sigma} + \sum_{\sigma y} s_{\sigma} \mathbf{F}_{\sigma} \right], \quad (1.1)$$

где $Q_{lvl,i,j}^n$ – значение вектора консервативных переменных в ячейке уровня lvl с виртуальными индексами (i, j) на этом уровне на временном шаге с номером n . Потоки, умноженные на соответствующие площади частей границы, по каждому из направлений суммируются вдоль всей границы ячейки.

При измельчении сетки всем потомкам сносится значение примитивного вектора переменных (ρ, U_x, U_y, p) , при объединении четырех ячеек в одну в качестве значения консервативного вектора переменных в ячейке берется среднее арифметическое консервативных векторов в ячейках-потомках.

2. Индикаторы гладкости сеточного решения на основе вейвлет-анализа

При работе с многоуровневыми расчетными сетками возникает потребность в индикаторах, сигнализирующих о необходимости перестроения сетки. Используемые для данной задачи алгоритмы должны быть сильно локализованы (на вход анализатора подаются только данные в самой исследуемой ячейке и нескольких ее соседях). Это связано как с многоуровневостью сетки, так и с предусмотренной параллелизацией кода. В работе предлагаются два индикатора гладкости (на крестовом и квадратном шаблонах), основанных на использовании В – вейвлетов.

2.1. Построение вейвлетных фильтров

На входе задается параметры (p, k) , где k – порядок В-сплайнов, которые используются в конструкции, а p число нулевых моментов построенного вейвлета. Напомним, что фильтр $\{\beta_i\}$ задается, как:

$$\beta_i = 2^{-k-1} \binom{k+1}{i}, \quad 0 \leq i \leq k+1.$$

Определим семейство В-сплайнов порядка k , заданных на равномерном множестве целых точек:

$$B_j^k = B^k(j, j+1, \dots, j+k, j+k+1), \quad 0 \leq j < p.$$

Определим теперь сплайн:

$$\tilde{B}^k = B^k\left(0.5 * \left(p + \left[\frac{k}{2}\right]\right), 0.5 * \left(p + \left[\frac{k}{2}\right] + 1\right), \dots, 0.5 * \left(p + \left[\frac{k}{2}\right] + k\right), 0.5 * \left(p + \left[\frac{k}{2}\right] + k + 1\right)\right).$$

Фильтр $\{\alpha_i\}$, $0 \leq i < p$ находится из условия, что функция:

$$W^k = \tilde{B}^k - \sum_{j=0}^{p-1} \alpha_j B_j^k \quad \text{имеет } p \text{ нулевых моментов. Детали рассматриваемой}$$

конструкции приведены в [19].

2.2. Анализ на крестовом шаблоне

На вход анализатора подаются данные (обычно при анализе используются только значения плотности), заданные в ячейках одного уровня (при необходимости производится осреднение или разбиение с других уровней) и порог чувствительности *thresh*. Центром креста является анализируемая ячейка. Крест передается в анализатор как два массива соответствующие вертикальной $\{y_i\}$ и горизонтальной $\{x_i\}$ частям креста. Размер креста и соответственно массивов определяется выбранным при построении фильтров порядком гладкости k и числом нулевых моментов вейвлета p : $0 \leq i < 2p + k$. При этом исследуемой ячейке соответствует индекс $v = \left\lfloor \frac{2p+k}{2} \right\rfloor$.

Вычисляем преобразование:

$$c_m^x = \sum_{j=0}^{k+1} \beta_j x_{2m+j}, \quad 0 \leq m < p.$$

Затем определяем величину:

$$r_x = x_v - \sum_{j=0}^{p-1} \alpha_j c_j^x.$$

Аналогично вычисляем r_y .

Если $(|r_x| > thresh) \vee (|r_y| > thresh)$, то считаем, что гладкость в ячейке нарушается и ячейку следует разбить.

2.3. Анализ на квадратном шаблоне

На вход анализатора подаются данные, заданные в ячейках одного уровня и порог чувствительности $thresh$. Центром квадрата является анализируемая ячейка. Квадрат передается в анализатор как матрица $\{x_{i,j}\}$. Размер матрицы определяется выбранным при построении фильтров порядком гладкости k и числом нулевых моментов вейвлета p : $0 \leq i < 2p+k$, $0 \leq j < 2p+k$. При этом исследуемой ячейке соответствует индекс (v,v) , где $v = \left\lfloor \frac{2p+k}{2} \right\rfloor$.

Вычисляем преобразование:

$$c_{i,m} = \sum_{j=0}^{k+1} \beta_j x_{i,2m+j}, \quad 0 \leq m < p, \quad 0 \leq i < 2p+k.$$

Затем преобразование:

$$c_{i,p} = x_{i,v} - \sum_{j=0}^{p-1} \alpha_j c_{i,j}.$$

Далее проводим обработку по столбцам:

$$r_{q,m} = \sum_{j=0}^{k+1} \beta_j c_{2q+j,m}, \quad 0 \leq q < p, \quad 0 \leq m \leq p.$$

$$r_{p,p} = c_{v,p} - \sum_{j=0}^{p-1} \alpha_j c_{j,p}.$$

Если $\left(|r_{p,p}| > thresh \right) \vee \left(|r_{v,p}| > thresh \right) \vee \left(|r_{p,v}| > thresh \right)$, то считаем, что гладкость в ячейке нарушается и ячейку следует разбить.

2.4. Особенности вейвлет-анализа сеточных решений

Реализованный программный модуль вейвлет-анализа сеточного решения позволяет раскладывать решение по базису из вейвлетов разных порядков (где под порядком подразумевается степень сплайна) с различным числом нулевых моментов. Кроме того, результаты анализа очень чувствительны к величине погрешности $thresh$ (числа-порога, начиная с которого мы полагаем коэффициенты разложения равными нули). Естественно предполагать, что величина $thresh$ должна быть, например, порядка пространственного шага h , что соответствует точности решения полученного методом первого порядка. Расчеты показывают, что лучшие результаты получаются при величинах в несколько раз меньше шага сетки, например $2h/3, h/2, h/3, h/4$.

3. Метод свободной границы

Для реализации граничных условий не протекания при использовании декартовой сетки, не связанной с геометрией тела, используется метод свободной границы (МСГ) [12, 13]. Кратко опишем основные положения этого метода для системы уравнений Эйлера.

Пусть $\Omega = \Omega(t)$ является областью, занятой движущимся телом, $\Gamma = \partial\Omega$ – его граница. Тогда уравнения Эйлера описывают течение газа в области $\mathcal{R}^3 \setminus \Omega$. Граничным условием для этих уравнений служит соотношение

$$u_k n_k = U_s, \mathbf{x} \in \Gamma \quad (3.1)$$

где $\mathbf{n} = (n_k)$ – вектор единичной внешней к Ω нормали, $\mathbf{u} = (u_k)$ – вектор скорости газа, U_s – нормальная компонента вектора скорости тела.

Уравнения Эйлера сжимаемой жидкости имеют следующий вид:

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}_k}{\partial x_k} = 0, \quad (3.2)$$

где подразумевается суммирование по индексу координатного направления k ,

$\mathbf{q} = (\rho, \rho u_m, \rho E)^T$ – вектор консервативных переменных,

$\mathbf{f}_k = (\rho u_k, \rho u_k u_m + \delta_{km} p, \rho u_k H)^T$ – векторы потоков,

$m = 1, 2, 3$, δ_{km} – символ Кронекера, ρ , u_k , p – плотность, компоненты вектора скорости и давление соответственно, $E = e + 0.5 u_k u_k$, $H = e + p/\rho$ – удельные полная энергия и энтальпия. Система уравнений (3.2) замыкается уравнением состояния, связывающим термодинамические параметры среды, которое в настоящей работе берется в форме уравнения состояния идеального совершенного газа с показателем адиабаты γ : $p = (\gamma - 1)\rho e$. В расчетах, которые будут представлены ниже, показатель адиабаты берется для случая воздуха, $\gamma = 1.4$.

Суть метода свободной границы сводится к замене решения краевой задачи для однородной системы уравнений Эйлера в части пространства, ограниченной поверхностью тела, решением неоднородной системы во всем пространстве. Исходная система уравнений модифицируется путем добавления в правую часть некоторого вектора \mathbf{F}_w , который далее называется компенсационным потоком:

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}_k}{\partial x_k} = -\mathbf{F}_w. \quad (3.3)$$

По своей структуре модификация уравнений (3.3) напоминает штрафные функции, которые используются в методе погруженной границы (Immersed boundary method) [14]. По сути же, это разные подходы. Штрафные функции являются объемными и никак не учитывают подсеточную структуру геометрии. Компенсационные потоки, напротив, определяются на поверхности, задающей

геометрию объекта, и вычисляются, как будет видно ниже, с учетом геометрических характеристик объекта на подсеточном уровне.

Система модифицированных уравнений (3.3) решается во всем пространстве \mathcal{R}^3 , а компенсационный поток \mathbf{F}_w подбирается таким образом, чтобы сужение решения уравнения (3) в \mathcal{R}^3 на область $\mathcal{R}^3 \setminus \Omega$ в точности совпадало с решением исходной краевой задачи. В работе [12] предлагается выражение для компенсационного потока \mathbf{F}_w , которое обеспечивает выполнение этого условия:

$$\mathbf{F}_w = \left(\begin{array}{c} \rho(u_k n_k - U_s) \\ \rho(u_k n_k - U_s) u_m + (p - p_w) n_m \\ \rho(u_k n_k - U_s) E + p u_k n_k - p_w U_s \end{array} \right) \delta(\mathbf{x}, \Gamma), \quad (3.4)$$

где $\delta(\mathbf{x}, \Gamma)$ обозначает обобщенную функцию Дирака поверхности Γ , определяемую соотношением

$$\int_V \delta(\mathbf{x}, S) \varphi(\mathbf{x}) dV = \int_{V \cap \Gamma} \varphi(\mathbf{x}) dS, \quad \forall V \in \mathcal{R}^3. \quad (3.5)$$

Величина p_w в уравнениях (3.4) представляет собой мгновенную реакцию жесткой стенки на воздействие со стороны потока жидкости. Для случая идеального газа с показателем адиабаты γ эта реакция определяется в зависимости от знака нормальной компоненты относительной скорости следующим образом.

Если $(u_k n_k - U_s) < 0$, то давление стенки p_w соответствует давлению за фронтом формирующейся ударной волны и определяется по формуле [15]:

$$p_w = p \left[1 + \frac{\gamma(\gamma+1)}{4} M^2 + \sqrt{\gamma^2 M^2 + \frac{\gamma^2(\gamma+1)^2}{16} M^4} \right]. \quad (3.6)$$

В противном случае $(u_k n_k - U_s) > 0$ формируется волна разрежения, и давление стенки имеет вид

$$p_w = p \left[1 - \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right]^{\frac{2\gamma}{\gamma - 1}}. \quad (3.7)$$

Здесь M обозначает относительное число Маха, $M = (u_k n_k - U_s) / a$, где a – скорость звука.

Отметим, что выбор компенсационного потока в форме соотношений (3.4)-(3.5) не является единственным с математической точки зрения. Наверное, можно указать другие формы правой части, при которых краевое условие (3.3) будет также выполняться. Наш выбор основан на естественном физическом обосновании. Поток \mathbf{F}_w моделируется двумя составляющими. Первая компенсирует протекающие через поверхность Γ массу, импульс и энергию, а вторая определяет реакцию стенки и соответствующую ей работу.

При численной реализации МСГ предполагается, что поверхность Γ , задающая геометрию тела, представляется набором дискретных элементов

$\Gamma = \bigcup_j \Gamma_j$. В большинстве случаев это плоские многогранники или треугольные

пространственные элементы. Ячейки декартовой сетки разбиваются границей тела на три типа: жидкостные – те, которые полностью находятся вне Γ , твердые, лежащие целиком внутри Γ и, соответственно, пересекаемые. Пересекаемые ячейки наряду с расчетным вектором определяются также подсеточной структурой геометрии тела. В настоящей работе мы используем линейное восполнение, которое задается объемной долей, занимаемой жидкостью в пересекаемой ячейке, ω_f , и вектором внешней нормали (направленной в сторону жидкости) \mathbf{n}_f , $|\mathbf{n}_f| = s_f$, где s_f – площадь плоского элемента, аппроксимирующего пересечения счетной ячейки с поверхностью Γ .

Эти параметры вычисляются при анализе пересечения счетной ячейки с элементами поверхности Γ_j . Вектор нормали вычисляется осреднением единичных нормалей элементов с весовыми коэффициентами, равными

площадям пересечения: $\mathbf{n}_f = \mathbf{n}_j s_j$, $s_j = \text{area}(\Gamma_j \cap C)$, где C обозначает область ячейки сетки. Объемную долю ω_f в пересекаемой ячейке можно приближенно вычислить через средние расстояния от жидких вершин ячейки, d^+ , и, соответственно, от твердых вершин, d^- , до плоскости, нормальной к \mathbf{n}_f и проходящей через опорную точку \mathbf{x}_0 :

$$\omega_f = d^+ / (d^+ + d^-). \quad (3.8)$$

Опорная точка определяется по центрам элементов поверхности \mathbf{x}_j

$$\mathbf{x}^j = \frac{|\mathbf{n}^{j-1}| \mathbf{x}^{j-1} + \mathbf{x}_j s_j}{|\mathbf{n}^{j-1}| + s_j}, \quad \mathbf{n}^j = \sum_{k=1}^j \mathbf{n}_k s_k, \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}^M, \quad (3.9)$$

где M – число элементов поверхности Γ .

Дискретизация системы уравнений (3.3) проводится в два этапа с применением метода разделения по физическим процессам. На первом этапе выполняется интегрирование однородной системы на всем множестве сеточных ячеек по численной схеме С.К. Годунова второго порядка точности с подсеточной интерполяционной реконструкцией типа MUSCL [18]:

$$\mathbf{q}_i^* = \mathbf{q}_i^n - \Delta t \left(\frac{\Delta \mathbf{F}_k(\tilde{\mathbf{z}})}{h_k} \right)_i; \quad (3.10)$$

$$\mathbf{F}_{k,i+1/2} = \mathbf{F}_k(\tilde{\mathbf{z}}_i^+, \tilde{\mathbf{z}}_{i+1}^-).$$

Таким образом, решение на этом этапе, \mathbf{q}_i^* , описывает изменение газодинамических параметров на временном шаге в соответствии с моделью Эйлера, но без учета влияния поверхности тела на параметры течения.

На втором этапе полученное решение корректируется компенсационным потоком правой части. Вывод соответствующих дискретных уравнений мы получим из физических соображений, упомянутых выше.

Беря решение \mathbf{q}_i^* в качестве начальных данных, проинтегрируем однородную систему уравнений Эйлера по жидкостной части счетной ячейки:

$$V_i \frac{d\omega_f \mathbf{q}_i}{dt} = - \sum_{\sigma \in f} \mathbf{F}_\sigma s_\sigma + \mathbf{F}_p s_f, \quad (3.11)$$

где $\mathbf{F}_p = (0, p_w n_m, p_w U_s)^T$ – численный поток на стенке, суммирование в правой части ведется по граням ячейки, полностью или частично находящимся в жидкости, s_σ – площадь жидкостной части грани. Поскольку на этом этапе учитывается только влияние стенки, потоки на гранях \mathbf{F}_σ вычисляются по значениям \mathbf{q}_i^* из ячейки.

Используя свойство консервативности потока, уравнение (3.11) можно переписать в виде

$$V_i \frac{d\omega_f \mathbf{q}_i}{dt} = -\mathbf{F}_c s_f + \mathbf{F}_p s_f \quad (3.12)$$

с потоком $\mathbf{F}_c = (\rho(u_k n_k - U_s), \rho(u_k n_k - U_s) u_m + p n_m, \rho(u_k n_k - U_s) E + p U_s)^T$ и $V_i = h_1 h_2 h_3$. Сумма потоков в правой части как раз дает введенный выше компенсационный поток, $\mathbf{F}_w = \mathbf{F}_c - \mathbf{F}_p$.

Для интегрирования по времени уравнения (3.12) мы берем неявную схему, чтобы не накладывать жесткие ограничения на шаг по времени из-за объемной доли ω_f , которая в некоторых пересекаемых ячейках может быть, вообще говоря, сколь угодно малой величиной. Это приводит к следующей системе дискретных уравнений:

$$\omega_f^{n+1} \mathbf{q}_i^{n+1} = \omega_f^* \mathbf{q}_i^* - \frac{\Delta t s_f}{V_i} \mathbf{F}_w(\mathbf{q}_i^{n+1}). \quad (3.13)$$

Объединяя (3.10) и (3.13), приходим к следующей численной схеме:

$$\omega_f^{n+1} \mathbf{q}_i^{n+1} = \omega_f^* \mathbf{q}_i^n - \Delta t \omega_f^* \left(\frac{\Delta \mathbf{F}_k(\tilde{\mathbf{z}})}{h_k} \right)_i - \frac{\Delta t s_f}{V_i} \mathbf{F}_w(\mathbf{q}_i^{n+1}), \quad (3.14)$$

$$\mathbf{F}_{k,i+1/2} = \mathbf{F}_k(\tilde{\mathbf{z}}_i^+, \tilde{\mathbf{z}}_{i+1}^-),$$

Решение нелинейной системы уравнений (3.14) находится безматричным методом приближенной факторизации LU-SGS [16, 17]. Этот метод экономичен и сводится к прямому и обратному циклам по счетным ячейкам, которые фактически реализуют явную схему.

4. Результаты расчетов на локально адаптивных сетках

4.1. Стационарная геометрия. Обтекание неподвижного тела

Решалась задача обтекания клина с углом 20° при скорости набегающего потока $M=3$ с 5 и 8 уровнями сетки, и проводилось сравнение с аналитическим решением. Для представления клина использовался метод свободной границы. Базовая сетка имела 50×50 ячеек, таким образом, наименьшая ячейка в 5-уровневой сетке эквивалентна ячейке в сетке 800×800 , а наименьшая ячейка в 8-уровневой сетке – ячейке в сетке 6400×6400 . Адаптация производилась по плотности. При вейвлет анализе использовался крестовой шаблон. Результаты представлены на рис. 1 и 2.

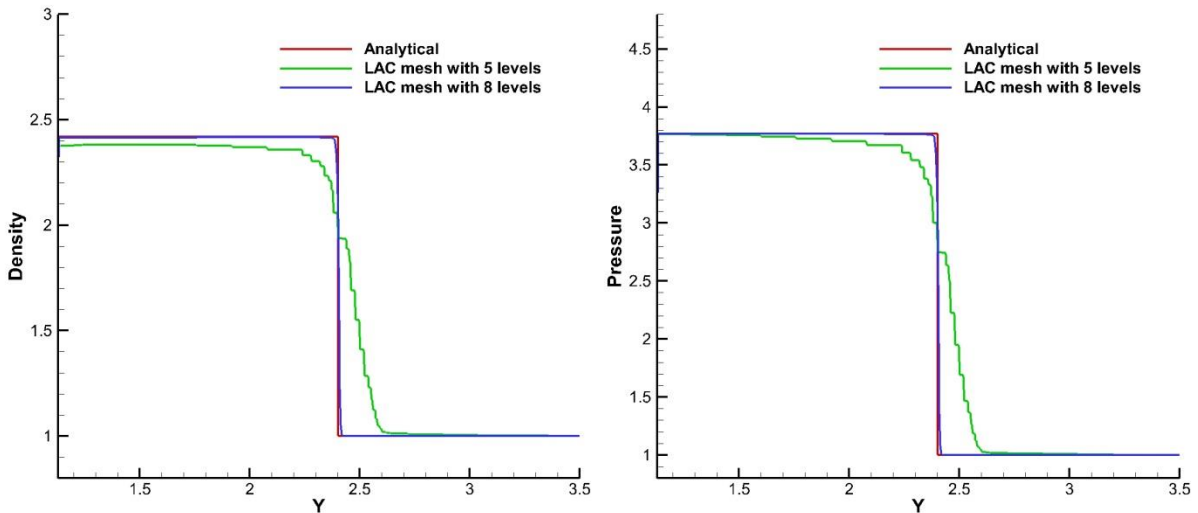


Рис. 1. Графики плотности (слева) и давления (справа) для аналитического решения (красная линия), расчетов на сетке с 5 (зеленая) и 8 (синяя) уровнями.

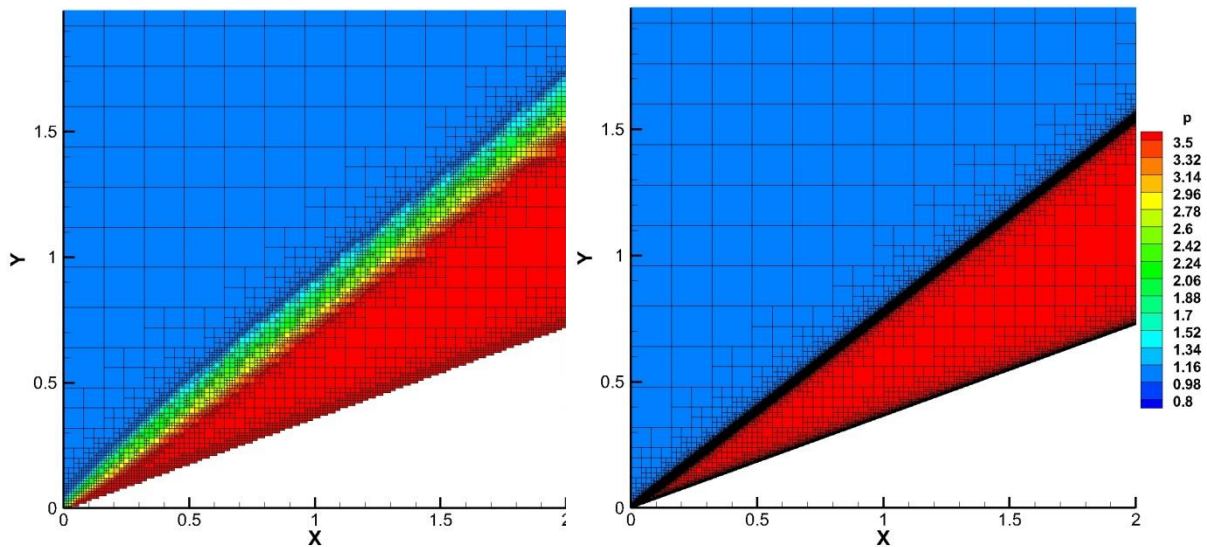


Рис. 2. Распределения давления для расчетов на сетке с 5 уровнями (слева) и 8 уровнями (справа).

Как и ожидалось, расчет на сетке с 8 уровнями ближе к аналитическому решению, чем расчет на 5 уровнях (рис. 1). Расчет на 5-уровневой сетке несколько размывает ударную волну (рис. 1 и 2). Как видно на рис. 2, адаптация происходит как к решению, так и к геометрии.

Также проводились расчеты на сетке с 5 уровнями при различных порогах обнуления вейвлетных коэффициентов.

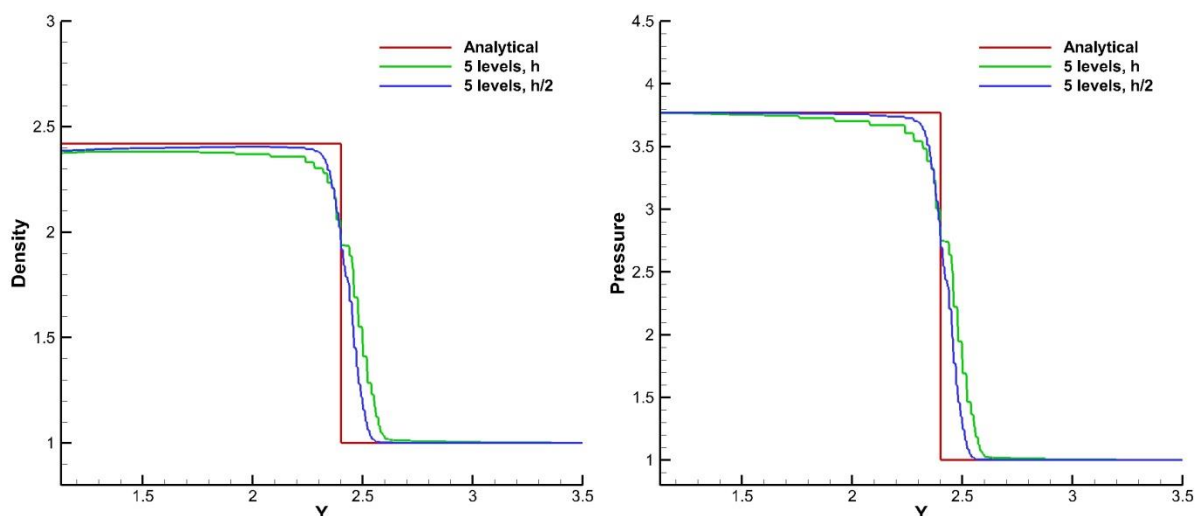


Рис. 3. Графики плотности (слева) и давления (справа) для аналитического решения (красная линия), расчетов на сетке с 5 уровнями с порогом, равным h (зеленая) и $h/2$ (синяя).

Чем меньше порог, тем больше мелких ячеек, соответственно, тем точнее расчет, что и проиллюстрировано на рис. 3.

4.2. Нестационарная геометрия. Обтекание движущегося тела

Были проведены расчеты обтекания клина, движущегося со скоростью $0.1M$ навстречу набегающему потоку. Таким образом, решение при скорости набегающего потока $M=3$ и движении клина со скоростью $0.1M$, должно совпадать с решением для скорости набегающего потока $M=3.1$ при неподвижном клине, что и иллюстрирует рис. 4.

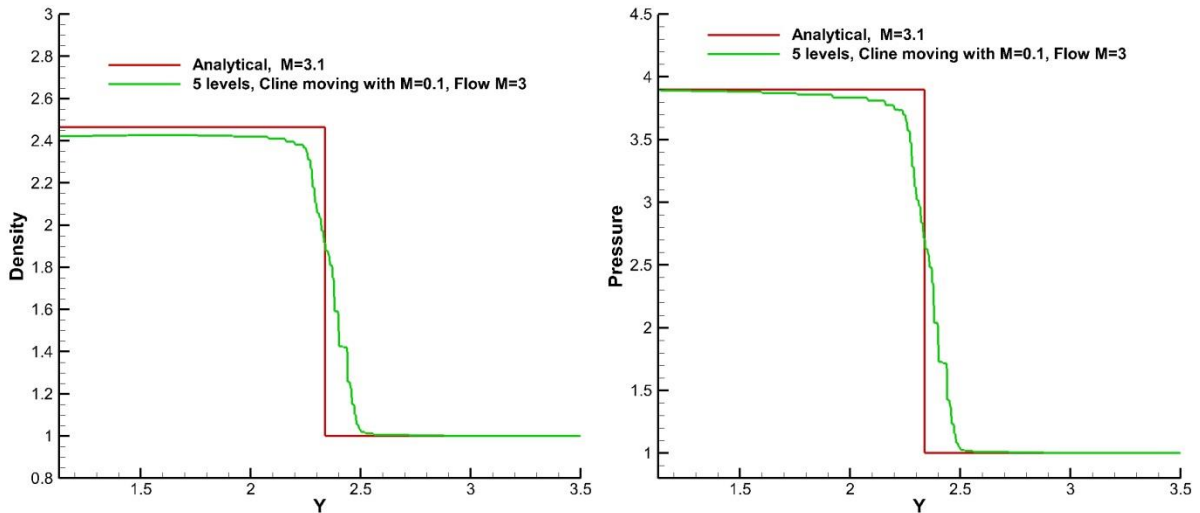


Рис. 4. Графики плотности (слева) и давления (справа) для аналитического решения с $M=3.1$ (красная линия) и расчета на сетке с 5 уровнями при скорости набегающего потока $M=3$ и скорости клина $M=0.1$ (зеленая).

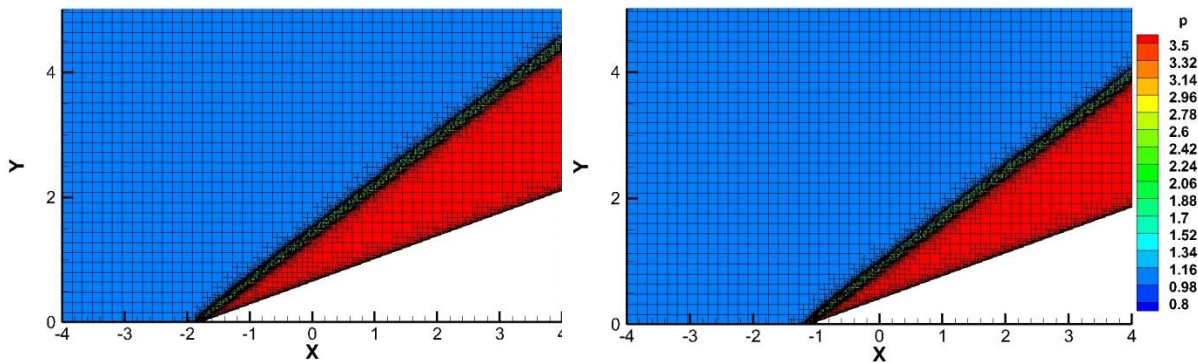


Рис. 5. Распределения давления для расчетов на сетке с 5 уровнями при движущемся клине с $M=0.1$ в различные моменты времени.

Заключение

Проведенные расчеты продемонстрировали высокую эффективность и точность предложенного алгоритма. Локальность метода анализа гладкости сеточного решения является предпосылкой простоты и эффективности реализации алгоритма на параллельных вычислительных системах. В дальнейшем планируется проведение более сложных расчетов обтекания движущихся тел в трехмерной постановке.

Список литературы

1. *F. Bramkamp, Ph. Lamby, and S. Mueller.* An adaptive multiscale finite volume solver for unsteady an steady state flow computations. *Сотр. Phys.*, 197(2):460-490, 2004.
2. *A. Harten.* Multiresolution algorithms for the numerical solution of hyperbolic conservation laws. *Comm. Pure Appl. Math.*, 48(12):1305-1342, 1995.
3. *A. Harten.* Multiresolution representation of data: A general framework. *SIAM J. Numer. Anal.*, 33(3):1205-1256, 1996.
4. *G. Zumbusch.* Parallel multilevel methods. Adaptive mesh refinement and loadbalancing *Advances in Numerical Mathematics.* Teubner, Wiesbaden, 2003.
5. *S. Osher and R. Sanders.* Numerical approximations to nonlinear conservation laws with locally varying time and space grids. *Math. Сотр.*, 41:321-336, 1983
6. *P.G. Lemaire.* Ondelettes à localisation exponentielle *J. Math. Pure Appl.* **67**, 227-236 (1988)
7. *G. Battle.* A block spin construction of ondelettes, Part I: Lemari'e functions. *Comm. Math. Phys.*, Vol.110, 601-615 (1987)
8. *Chui C.K.*, An introduction to wavelets, wavelet analysis and its applications, Vol 1, Academic Press, Massachusetts, 1992.

9. G. Plonka and M. Tasche. On the computation of periodic spline wavelets. *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, 2:1–14, 1995.
10. O.V. Vasilyev. Solving multi-dimensional evolution problems with localized structures using second generation wavelets. *Int. J. Comp. Fluid Dyn.* 17:151–168, 2003.
11. W. Sweldens. The lifting scheme: a custom-design construction of biorthogonal wavelets. *Appl. Comput. Harmon. Anal.* 3:186–200, 1996
12. И.С. Меньшов, М.А. Корнев, Метод свободной границы для численного решения уравнений газовой динамики в областях с изменяющейся геометрией // *Матем. моделирование*, 26:5 (2014), с. 99–112.
13. И.С. Меньшов, П.В. Павлухин, Численное решение задач газовой динамики на декартовых сетках с применением гибридных вычислительных систем // *Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша*. 2014. № 92, 24 с.
14. O. Boiron, G. Chiavassa, R. Donat, A high-resolution penalization method for large Mach number flows in the presence of obstacles // *Computers & Fluids*, 38 (2009), p. 703 – 714.
15. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, *Гидродинамика*. 3-е изд. М.: Наука. 1986. 736 с.
16. I. Menshov, Y. Nakamura, An implicit advection upwind splitting scheme for hypersonic air flows in thermochemical nonequilibrium // *Collection of technical papers of 6th Int. Symp. on CFD, Lake Tahoe, Nevada*. 1995. p. 815-821.
17. A. Jameson, E. Turkel, Implicit schemes and LU decomposition // *Math. of Comp.*, v.37, № 156 (1981), p. 385-397.
18. W. K. Anderson, J. L. Thomas, B. Van Leer, Comparison of finite volume flux vector splitting for the Euler equations // *AIAA J.*, 24:9 (1986), p. 1453-1460.
19. А.Л.Афендииков, К.Д.Меркулов, А.В.Пленкин Динамическая локальная адаптация сеток на основе вейвлет-анализа в задачах газовой динамики // *Препринты ИПМ им.М.В.Келдыша*. 2014. № 99. 26 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2014-99>