



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Гасилов В.А., Круковский А.Ю.,
Повещенко Ю.А., Цыгвинцев И.П.

Неявная эйлерово-
лагранжева разностная
схема трёхмерной газовой
динамики на основе
согласованных
аппроксимаций уравнений
балансов массы и импульса

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Неявная эйлерово-лагранжева разностная схема трёхмерной газовой динамики на основе согласованных аппроксимаций уравнений балансов массы и импульса / В.А.Гасилов [и др.] // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2016. № 5. 24 с. doi:[10.20948/prepr-2016-5](https://doi.org/10.20948/prepr-2016-5)
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2016-5>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Российской академии наук**

**В.А.Гасилов, А.Ю.Круковский,
Ю.А.Повещенко, И.П. Цыгвинцев**

**Неявная эйлерово-лагранжева
разностная схема трёхмерной газовой
динамики на основе согласованных
аппроксимаций уравнений балансов
массы и импульса**

Москва — 2015

В.А. Гасилов, А.Ю. Круковский, Ю.А. Повещенко, И.П. Цыгвинцев

Неявная эйлерово-лагранжева разностная схема трёхмерной газовой динамики на основе согласованных аппроксимаций уравнений балансов массы и импульса

В работе предложен вариант двухслойной эйлерово-лагранжевой разностной схемы трёхмерной газовой динамики. Уравнение баланса в исходной газодинамической системе уравнений записано в “энтропийной” форме — относительно внутренней энергии газа. Исходные уравнения неразрывности и импульса дивергентно-консервативны и аппроксимируются также консервативными балансными уравнениями. Из системы разностных уравнений получено уравнение баланса кинетической энергии, не содержащее источников (стоков) энергии разностного происхождения. Балансы кинетической и внутренней энергий преобразуются к уравнению, выражающему закон сохранения полной энергии. В соответствии с протекающими в среде физическими процессами внутренняя и кинетическая энергии могут переходить одна в другую без влияния “источниковых членов”, вызванных аппроксимационными эффектами.

Ключевые слова: газовая динамика, смешанные лагранжево-эйлеровы переменные, согласованная аппроксимация, полностью консервативная разностная схема

V.A.Gasilov, A.Yu.Krukovskiy, Yu.A.Poveschenko, I.P.Tsygvintsev

Implicit Euler-Lagrange difference scheme for three-dimensional gasdynamics calculations using concerted approximations to mass and momentum balance equations

We propose a variant of the two-stage Eulerian-Lagrangian difference scheme for gas dynamics calculations in the three-dimensional approximation. Energy balance equation in the original gas-dynamic system of equations is written in the "entropy" form – with respect to the gas medium internal energy. The initial equations of continuity and momentum are divergent-conservative, therefore they are approximated as conservative balance equations. Using the constructed difference approximations to gasdynamics equations we derive a kinetic energy balance equation that does not contain nonphysical source terms. The kinetic energy balance can be combined with that of the internal energy thus producing the equation which is a gasdynamic form of the total energy conservation law. In accordance with the physical processes occurring inside the gas flow an internal energy and kinetic energy can pass through the mutual transformations without the influence of "source terms" caused by approximation effects.

Key words: gasdynamics, arbitrary Lagrange-Euler, concerted approximation, implicit two-stage totally conservative finite-difference scheme

Работа выполнена при поддержке средствами проектов Российского фонда фундаментальных исследований: 14-01-00678, 15-07-05025 и 14-11-00699.

Введение

Данный препринт продолжает работу, изложенную в препринте [1], и является её обобщением на трёхмерный случай.

Необходимость в таком обобщении возникла вследствие большого числа практических задач, требующих проведения моделирования именно в трёхмерной постановке. Применение полностью консервативных разностных схем (ПКРС) газовой динамики (ГД) в лагранжевых переменных [2] к этим задачам позволяет получать физически содержательные и достаточно точные численные решения на разностных сетках умеренной размерности. Это свойство является весьма привлекательным при выполнении вычислительных экспериментов, включающих большие серии расчётов. Однако в трёхмерном случае проблема потери сеткой качества (выпуклости ячеек, аспектного соотношения, малости косинусов углов и т.д.) стоит даже жёстче, чем в двумерном. В качестве примера здесь можно привести простейшую задачу разлёта газовой сферы, в которой лагранжева методика не позволяет провести моделирование.

Смешанная лагранжево - эйлерова методика позволяет отойти от точного отслеживания границ раздела материалов в многослойных системах, которые активно изучаются, например, в связи с изучением проблем физики плазмы высокой плотности энергии, экстремальных состояний вещества, инерционного управляемого термоядерного синтеза и т.д. Тем самым удается избежать присущих лагранжевым сеткам чрезмерных искажений ячеек, из-за которых расчёты в двух- и трёхмерных постановках задач гидродинамики теряют точность и, в конечном итоге, смысл. Такая ситуация типична для, например, расчётов течений, подверженных гидродинамической неустойчивости. Во многих случаях вместо точного воспроизведения материальных границ целесообразно использовать возможности СЭЛ-методик для достижения компромисса между необходимостью поддержать приемлемое качество расчётной сетки и проследить взаимосвязанное движение разнородных материалов, препятствуя их избыточному нефизичному перемешиванию. Зачастую это удается осуществить при физически обоснованном управлении движением сетки.

СЭЛ-методики начали развиваться более полувека назад, и, несмотря на достаточно долгую историю их использования, они сохраняются в арсенале средств численного решения задач гидро-газодинамики и других задач механики сплошных сред. Появление высокопроизводительной техники стимулировало разработки мультифизических моделей, реализация которых в названных выше предметных областях выполняется в том числе с применением смешанных эйлерово-лагранжевых сеток. Примерно за два последних десятилетия были созданы новые эффективные коды для моделирования в области физики плазмы высокой плотности энергии [3–6]. Достаточно успешно прошли апробацию СЭЛ-методики, использованные в форме алгоритмов на

"сжимающихся сетках" [6]. Такой подход позволяет при экономном использовании вычислительных ресурсов поддерживать масштабирование расчётной области при моделировании сжатия лазерной мишени и поддерживать приемлемый уровень дискретизации.

Учёт движения сетки относительно и системы отсчёта, и движущегося вещества приводит к разностной схеме, для реализации которой требуется ввести контрольные объёмы и потоки таких величин, как масса, импульс, внутренняя и кинетическая энергии. В настоящем препринте предложен и апробирован способ пересчёта величин, позволяющий добиться полной консервативности СЭЛ-схемы на этапе корректировки разностной сетки, следующем за этапом её "лагранжева" сдвига.

Система уравнений ГД в СЭЛ-переменных

Рассмотрим трёхмерное нестационарное течение. Используя приёмы работ [7, 8], запишем систему уравнений ГД для случая декартовой системы координат посредством перехода к вспомогательным независимым переменным (α, β, γ) . Принимаем, что на отрезке времени, на котором выполняется расчёт, исходные координаты (x, y, z) в области расчёта $G(x, y, z)$ связаны с координатами (α, β, γ) некоторым достаточно гладким взаимно-однозначным отображением [9]:

$$x = x(\alpha, \beta, \gamma, t), y = y(\alpha, \beta, \gamma, t), (\alpha, \beta, \gamma) \in Q \subset R^3, t \in [0, T], \quad (1)$$

и дополнительно принимаем, что внутри области Q якобиан перехода J строго положителен:

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} > 0. \quad (2)$$

Переменные (α, β, γ) назовём опорными, или, по терминологии работ [8 – 10], СЭЛ-переменными. Мы будем считать, что вспомогательная система отсчёта "подвижная", причем скорости точек с фиксированными координатами (α, β, γ) в лабораторной системе определены локально. Компоненты скорости вспомогательной координатной системы на плоскости (x, y, z) обозначим

$$\dot{x} = \left. \frac{dx}{dt} \right|_{(\alpha, \beta, \gamma) = \text{const}}, \quad \dot{y} = \left. \frac{dy}{dt} \right|_{(\alpha, \beta, \gamma) = \text{const}}, \quad \dot{z} = \left. \frac{dz}{dt} \right|_{(\alpha, \beta, \gamma) = \text{const}}. \quad (3)$$

Вектор $\mathbf{W} = (W^x, W^y, W^z) = (u - \dot{x}, w - \dot{y}, v - \dot{z})$ представляет собой скорость газа в опорной (подвижной) системе отсчёта, связанной с координатной сеткой (α, β, γ) .

Пренебрежём пока диссипативными процессами. При сделанных допущениях система уравнений ГД во вспомогательных переменных принимает вид [9, 11]

$$\frac{d(\rho J)}{dt} + \frac{\partial(\rho W^x, y, z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} + \frac{\partial(x, \rho W^y, z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} + \frac{\partial(x, y, \rho W^z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} = 0, \quad (4)$$

$$\frac{d(\rho u J)}{dt} + \frac{\partial(\rho u W^x, y, z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} + \frac{\partial(x, \rho u W^y, z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} + \frac{\partial(x, y, \rho u W^z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} = -\frac{\partial(P, y, z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)}, \quad (5)$$

$$\frac{d(\rho w J)}{dt} + \frac{\partial(\rho w W^x, y, z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} + \frac{\partial(x, \rho w W^y, z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} + \frac{\partial(x, y, \rho w W^z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} = -\frac{\partial(x, P, z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)}, \quad (6)$$

$$\frac{d(\rho v J)}{dt} + \frac{\partial(\rho v W^x, y, z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} + \frac{\partial(x, \rho v W^y, z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} + \frac{\partial(x, y, \rho v W^z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} = -\frac{\partial(x, y, P)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)}, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} & \frac{d(\rho \varepsilon J)}{dt} + \frac{\partial(\rho \varepsilon W^x, y, z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} + \frac{\partial(x, \rho \varepsilon W^y, z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} + \frac{\partial(x, y, \rho \varepsilon W^z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} = \\ & = -P \left(\frac{\partial(u, y, z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} + \frac{\partial(x, w, z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} + \frac{\partial(x, y, v)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} \right), \end{aligned} \quad (8)$$

$$P = P(\rho, \varepsilon). \quad (9)$$

Здесь использованы обычные обозначения плотности, давления, скорости и внутренней энергии газа — соответственно: ρ , P , $\mathbf{v}(u, w, v)$, ε .

Смысл использования опорных переменных состоит в том, что они создают дополнительные возможности для описания кинематики материальных частиц. В исходной системе уравнений (4) – (9) фигурирует скорость $\mathbf{v} = (u, w, v)$, измеряемая в некоторой фиксированной (например, лабораторной) системе отсчёта, с которой в нашем случае связана декартова координатная “сетка”. Скорость опорной системы отсчёта относительно лабораторной системы можно варьировать, подбирать по некоторому критерию, исходя из целей расчёта, способа моделирования движения газа и т.д. Такой подход позволяет “подстраивать” перемещения точек опорной системы к перемещениям материальных частиц. Например, зафиксировав для материальных (газовых) частиц их координаты (α, β, γ) , мы придаём опорным координатам смысл переменных Лагранжа.

Сетки. Дискретизация

Мы используем дискретизацию физических величин по пространству, развивавшуюся в работах [7, 8, 10] и в более поздних [9, 11, 12]. В пространстве (x, y, z) область G , занятую веществом, разобьём тремя семействами криволинейных поверхностей на криволинейную сетку с шестигранными ячейками и кусочно-гладкой границей, так называемую разностную сетку. Обозначим множество узлов разностной сетки через $\bar{\Omega}$, а множество ячеек разностной сетки — через Ω . Ячейка $\omega_{mln} \in \Omega$ своими вершинами имеет узлы с номерами (i, j, k) , $(i+1, j, k)$, $(i+1, j+1, k)$, $(i, j+1, k)$, $(i, j, k+1)$, $(i+1, j, k+1)$, $(i+1, j+1, k+1)$, $(i, j+1, k+1)$. Для разностной аппроксимации используются сеточные функции, определённые в узлах и ячейках разностной сетки. Соответствующие множества функций обозначим $H_{\bar{\omega}}$ и H_{ω} . Для записи функций $f \in H_{\bar{\omega}}$ будем использовать индексы (i, j, k) : $f_{ijk} = f \in H_{\bar{\omega}}$. Функции $g \in H_{\omega}$ будем отмечать индексами (m, l, n) : $g_{mln} \in H_{\omega}$. Для связи узловых и ячейочных функций множеств H_{ω} и $H_{\bar{\omega}}$ используем простейшую интерполяцию

$$g_{ijk} = 0.125 \sum_{s \in III_{node}(i,j,k)} g_s. \quad (10)$$

Отнесём координаты (x, y, z) и скорости (u, w, v) к узлам разностной сетки, а функции плотности ρ , давления P и внутренней энергии ε — к ячейкам разностной сетки.

Используя методы аппроксимаций на “криволинейных” в физическом пространстве сетках [7–12], мы предполагаем, что гладкое взаимно-однозначное отображение $O(G(x, y, z) \rightleftharpoons Q(\alpha, \beta, \gamma))$ переводит расчётную область $G(x, y, z)$ в единичный куб Q во вспомогательной плоскости переменных (α, β, γ) . Во вспомогательной расчётной области $G(x, y, z)$ введена подвижная сетка, состоящая из шестигранных ячеек, узлы которой образуют множество $\bar{\Omega}(x_{ijk}, y_{ijk}, z_{ijk}, i = \overline{1, N_i}, j = \overline{1, N_j}, k = \overline{1, N_k})$. Принимаем также, что сетка $\Omega(x_{ijk}, y_{ijk}, z_{ijk})$ из G взаимно однозначно переходит в прямоугольную сетку $\Omega(\alpha_i, \beta_j, \gamma_k)$ в Q с шагами $h_{\alpha} = \text{const}$, $h_{\beta} = \text{const}$, и $h_{\gamma} = \text{const}$ для всех $i = \overline{1, \dots, N_i}$, $j = \overline{1, \dots, N_j}$, $k = \overline{1, \dots, N_k}$. При этом сеточные линии $i = \text{const}$, $j = \text{const}$, $k = \text{const}$ в области $G(x, y, z)$ переходят в линии $\alpha = \alpha_i$, $\beta = \beta_j$ и $\gamma = \gamma_k$ в кубе $Q(\alpha, \beta, \gamma)$. Мы предполагаем, что для рассматриваемых нами движений сетки в лагранжевой фазе алгоритма условие взаимной однозначности выполнено.

В дальнейшем мы будем использовать как сеточные функции, определённые в ячейках сетки Ω , так и сеточные функции, определённые в узлах.

Разобьём временную ось $t_0 < t < \infty$ на отрезки длины τ_n точками $t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$, где $\tau_n = t_{n+1} - t_n$. Сеточные величины, входящие в разностную аппроксимацию

уравнений ГД, будем относить к узлам t_n этой сетки по времени. В ряде формул будут использованы безындексные обозначения [2]

$$f = f(t_n), \quad \hat{f} = f(t_{n+1}).$$

Аппроксимацию системы уравнений (4) – (9) по времени проведём в два этапа: первый — этап расчёта по лагранжевой методике, второй — этап “remeshing”, или перестройки подвижной сетки и учёта потоков массы, импульса и энергии при движении вещества относительно “сеточной” координатной системы.

Уравнения первого этапа

На первом этапе алгоритма уравнения ГД в опорной системе координат записываются при условии, что опорные координаты связаны с фиксированными материальными частицами, т.е. используется лагранжево описание движения. Соответственно, относительная скорость газа равна нулю.

Тогда в уравнениях (4) – (9) будет фигурировать субстанциональная производная по времени. Будем рассматривать трёхмерные нестационарные адиабатические течения совершенного газа. Газодинамическая система уравнений, дополненная уравнением состояния, при сделанных допущениях примет вид

$$W^x = W^y = W^z = 0, \quad \dot{x}(\alpha, \beta, \gamma) = u, \quad \dot{y}(\alpha, \beta, \gamma) = w, \quad \dot{z}(\alpha, \beta, \gamma) = v. \quad (11)$$

$$m = \rho J = \hat{\rho} \hat{J} = \text{const}, \quad (12)$$

$$m \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_L = - \frac{\partial (P, y, z)}{\partial (\alpha, \beta, \gamma)}, \quad (13)$$

$$m \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)_L = - \frac{\partial (x, P, z)}{\partial (\alpha, \beta, \gamma)}, \quad (14)$$

$$m \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)_L = - \frac{\partial (x, y, P)}{\partial (\alpha, \beta, \gamma)}, \quad (15)$$

$$m \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \right)_L = -P \left(\frac{\partial (u, y, z)}{\partial (\alpha, \beta, \gamma)} + \frac{\partial (x, w, z)}{\partial (\alpha, \beta, \gamma)} + \frac{\partial (x, y, v)}{\partial (\alpha, \beta, \gamma)} \right), \quad (16)$$

$$P = P(\rho, \varepsilon). \quad (17)$$

Приведём дифференциально-разностную форму ПКРС для системы уравнений (11)–(17), дифференциальную по пространству, разностную по времени и соответствующую неявной по времени аппроксимации

$$m = \rho J = \tilde{\rho} \tilde{J} = \text{const}, \quad (18)$$

$$M \frac{\tilde{u} - u}{\tau_n} = - \left\{ \frac{\partial(P, y, z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} \right\}^{[t]}, \quad (19)$$

$$M \frac{\tilde{w} - w}{\tau_n} = - \left\{ \frac{\partial(x, P, z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} \right\}^{[t]}, \quad (20)$$

$$M \frac{\tilde{v} - v}{\tau_n} = - \left\{ \frac{\partial(x, y, P)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} \right\}^{[t]}, \quad (21)$$

$$m \frac{\tilde{\varepsilon} - \varepsilon}{\tau_n} = - \hat{P} \left(\frac{\partial(u, y, z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} + \frac{\partial(x, w, z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} + \frac{\partial(x, y, v)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} \right)^{[t]} \quad (22)$$

$$P = P(\rho, \varepsilon). \quad (23)$$

Здесь m — масса в объёме ячейки, M — масса в объёме приузлового домена, функция, отнесённая к множеству $H_{\tilde{\omega}}$ и вычисляемая как одна восьмая суммы масс ячеек, которым инцидентен данный узел:

$$M_{ijk} = 0.125 \sum_{s \in III_{node}(i, j, k)} m_s. \quad (24)$$

Значок $[t]$ означает взвешивание по времени при аппроксимации производных по пространству. В частности, взвешивание может соответствовать случаю неявной разностной схемы или симметричной по времени аппроксимации и т.п. В работе [9] показано, как на основе аналогичной системы уравнений для двумерного случая построить разностную схему, из которой получается уравнение баланса кинетической энергии, не содержащее источников (стоков) разностного происхождения ("фиктивных" источников), величина которых локально может быть значительной, например, в областях больших градиентов или при высоком темпе вариации по времени. Кроме того, такие источники пропорциональны шагу по времени и могут

накапливаться в процессе счета по времени. Балансы кинетической и внутренней энергий для схемы (18) – (23) преобразуются к уравнению, выражающему закон сохранения полной энергии. Это означает, что схема, аппроксимирующая уравнения (18) – (23), обладает свойством полной консервативности [2]. При этом в соответствии с происходящими физическими процессами внутренняя и кинетическая энергии могут переходить одна в другую без влияния “источниковых” аппроксимационных эффектов. Схему работы [9] мы приводить не будем, примем, однако, что на лагранжевом этапе нашей схемы в СЭЛ-переменных используется аналогичная ей трёхмерная разностная схема.

Уравнения второго этапа

На этапе расчёта конвективных потоков, обусловленного, как говорилось выше, коррекцией сетки (будем этот этап для краткости называть “ремешингом”, remeshing — см. [10]), вычисляются изменения параметров газа в её узлах и ячейках при изменении координат (α, β, γ) материальных частиц, остающихся в точках физического пространства с фиксированными значениями их физических координат (x, y, z) .

Ремешинг выглядит как конвекция газа в “сеточной” системе отсчёта, с которой связаны координаты (α, β, γ) и которая “сдвигается” в лабораторной системе, а частицы газа, соответственно, сдвигаются относительно “сеточной” системы со скоростью $\mathbf{W}(\alpha, \beta, \gamma)$. Уравнения дифференциально-разностной схемы этого этапа вычислений имеют вид

$$\frac{\hat{m} - m}{\tau_n} + \frac{\partial(\tilde{\rho}W^x, \tilde{y}, \tilde{z})}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} + \frac{\partial(\tilde{x}, \tilde{\rho}W^y, \tilde{z})}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} + \frac{\partial(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{\rho}W^z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} = 0, \quad (25)$$

$$\frac{\hat{m}\hat{u} - m\tilde{u}}{\tau_n} + \frac{\partial(\tilde{\rho}\tilde{u}W^x, \tilde{y}, \tilde{z})}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} + \frac{\partial(\tilde{x}, \tilde{\rho}\tilde{u}W^y, \tilde{z})}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} + \frac{\partial(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{\rho}\tilde{u}W^z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} = 0, \quad (26)$$

$$\frac{\hat{m}\hat{w} - m\tilde{w}}{\tau_n} + \frac{\partial(\tilde{\rho}\tilde{w}W^x, \tilde{y}, \tilde{z})}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} + \frac{\partial(\tilde{x}, \tilde{\rho}\tilde{w}W^y, \tilde{z})}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} + \frac{\partial(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{\rho}\tilde{w}W^z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} = 0, \quad (27)$$

$$\frac{\hat{m}\hat{v} - m\tilde{v}}{\tau_n} + \frac{\partial(\tilde{\rho}\tilde{v}W^x, \tilde{y}, \tilde{z})}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} + \frac{\partial(\tilde{x}, \tilde{\rho}\tilde{v}W^y, \tilde{z})}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} + \frac{\partial(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{\rho}\tilde{v}W^z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} = 0, \quad (28)$$

$$\frac{\hat{m}\hat{\varepsilon} - m\tilde{\varepsilon}}{\tau_n} + \frac{\partial(\tilde{\rho}\tilde{\varepsilon}W^x, \tilde{y}, \tilde{z})}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} + \frac{\partial(\tilde{x}, \tilde{\rho}\tilde{\varepsilon}W^y, \tilde{z})}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} + \frac{\partial(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{\rho}\tilde{\varepsilon}W^z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} = 0, \quad (29)$$

$$W^x = \frac{\hat{x} - \tilde{x}}{\tau_n}, \quad W^y = \frac{\hat{y} - \tilde{y}}{\tau_n}, \quad W^z = \frac{\hat{z} - \tilde{z}}{\tau_n}, \quad (30)$$

$$\hat{m} = \hat{\rho} \hat{J}. \quad (31)$$

Отметим, что на лагранжевом этапе расчёта массы в ячейках подвижной сетки не меняются (т.е. $\tilde{m} = m$). Сложив разностные уравнения первого этапа с соответствующими разностными уравнениями второго этапа и приведя подобные члены, мы получим суммарную аппроксимацию исходных уравнений ГД с первым порядком по времени.

ПКРС в СЭЛ-переменных

Дифференциальные уравнения второго этапа (25) – (31), аналогично [11], будем записывать в потоковой форме. Величины, полученные после расчёта лагранжевого этапа, будем обозначать «тильдой», а величины, полученные после этапа учёта конвекции, будем обозначать символом «шляпка».

Уравнение баланса массы в ячейке запишем в форме

$$\frac{\hat{m} - m}{\tau_n} + \sum_{\Gamma_{abcd} \in \mathcal{M}_{cell}(m,l,n)} f_{abcd} = 0, \quad (32)$$

где $m = m_{mln}$ — масса в ячейке (m, l, n) , f_{abcd} — поток массы через грань, которой на локальном шаблоне ячейки инцидентны узлы с номерами a, b, c, d (см. рис. 1). Это уравнение является базовым для уравнений второго этапа, поскольку функции потоков других величин выражаются через потоки массы f .

Уравнение аппроксимировано на шаблоне ячейки \mathcal{M}_{cell} (см. рис. 1).

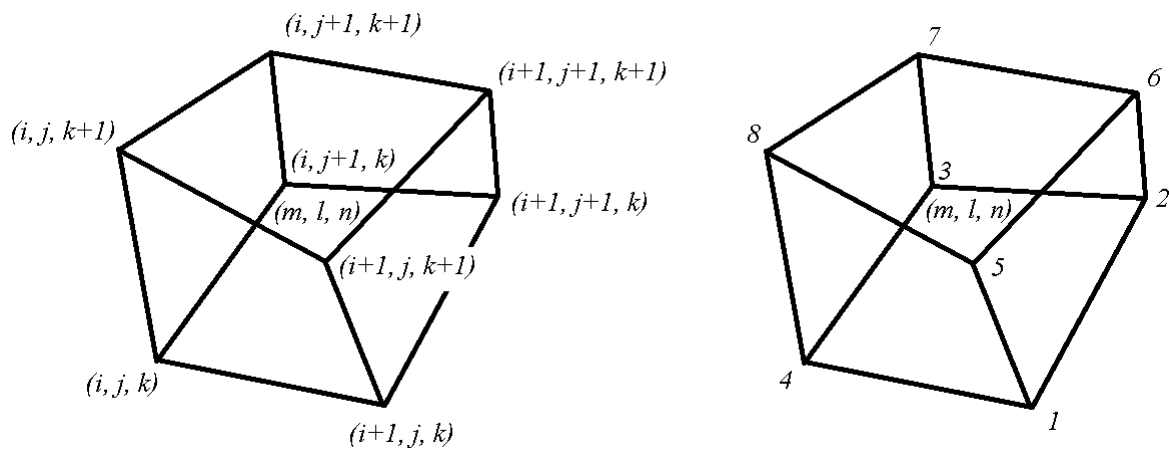


Рис.1. Шаблон $\mathcal{M}_{cell}(m, l, n)$ ячейки (m, l, n) . Слева – глобальная, справа – локальная нумерация узлов.

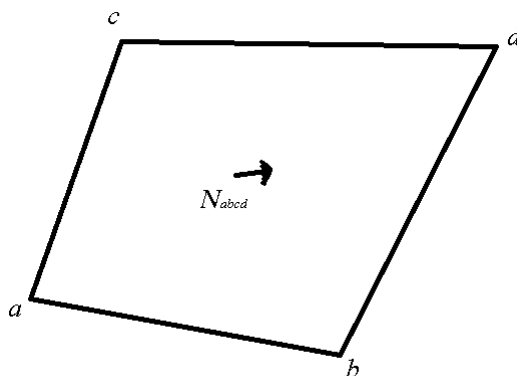


Рис.2. Локальная нумерация грани и нормали ячейки.

На рис. 2 показана локальная нумерация граней ячейки (m, l, n) — с помощью четырёх инцидентных грани узлов сетки. Теми же номерами помечаются нормали N_{abcd} к рёбрам ячейки (m, l, n) и потоки массы через эти грани f_{abcd} .

Отметим, что, как обычно принято при составлении балансных уравнений методом контрольного объёма [13], на гранях ячейки используются внешние нормали. Поток f_{abcd} вычисляется по обычной формуле

$$f_{abcd} = (\mathbf{W}_{abcd} \cdot \mathbf{N}_{abcd}) \langle \rho \rangle_{abcd}, \quad (33)$$

где \mathbf{W}_{abcd} — вектор относительной скорости переноса, относящийся к центру грани Γ_{abcd} :

$$\mathbf{W}_{abcd} = \frac{1}{4} (W_a^x + W_b^x + W_c^x + W_d^x, W_a^y + W_b^y + W_c^y + W_d^y, W_a^z + W_b^z + W_c^z + W_d^z),$$

\mathbf{N}_{abcd} — вектор нормали к грани Γ_{abcd} , равный по величине площади этой грани.

В дальнейшем, для простоты формул, будем называть грань Γ_{abcd} гранью Γ_p ($p = abcd$). Тогда (33) можно переписать в виде

$$f_p = (\mathbf{W}_p \cdot \mathbf{N}_p) \langle \rho \rangle_p. \quad (33')$$

Значение плотности $\langle \rho \rangle_p$ на грани соответствует плотности в одной из двух прилегающих к грани ячеек, а именно, той ячейки, откуда идёт поток вещества через эту грань. Такой алгоритм соответствует методу “донорных ячеек” [13] и обеспечивает в (25)–(30) первый порядок аппроксимации конвективных потоков.

Очевидно, что уравнение (25) обеспечивает консервативность схемы по массе (оно дивергентно-консервативно). Порядок аппроксимации потоков массы f_p можно повысить, для чего существует много возможностей [14], но

это потребует расширения шаблона аппроксимации. Здесь мы используем одну из самых простых и распространённых аппроксимаций потоков массы, поскольку, как будет показано далее, основной результат нашей работы в виде конструкции ПКРС от конкретной аппроксимации массовых потоков не зависит.

Для практических вычислений полезно ввести наряду с (32) уравнение для изменения объёмов ячеек:

$$\frac{\hat{V}_{mln} - \tilde{V}_{mln}}{\tau_n} + \sum_{\Gamma_p \in III_{cell}(m,l,n)} \Theta_p = 0, \quad (34)$$

где поток объёма через соответствующую грань ячейки строится по “донорному” принципу:

$$\Theta_p = (\mathbf{w}_p \cdot \tilde{\mathbf{N}}_p).$$

В нашем случае поток объёма связан с потоком массы простой формулой:

$$f_p = \Theta_p \langle \rho \rangle_p. \quad (35)$$

Уравнение изменения импульса

Уравнения переноса импульса (27) – (28) аппроксимируются в приузловом объёме разностной сетки на шаблоне $III_{node}(i, j, k)$ (см. рис. 3).

$$\begin{aligned} \frac{\hat{M}_{ijk} \hat{u}_{ijk} - M_{ijk} \tilde{u}_{ijk}}{\tau_n} + \sum_{\Gamma_p \in III_{node}(i,j,k)} F_p^{Mu} &= 0, \\ \frac{\hat{M}_{ijk} \hat{w}_{ijk} - M_{ijk} \tilde{w}_{ijk}}{\tau_n} + \sum_{\Gamma_p \in III_{node}(i,j,k)} F_p^{Mw} &= 0, \\ \frac{\hat{M}_{ijk} \hat{v}_{ijk} - M_{ijk} \tilde{v}_{ijk}}{\tau_n} + \sum_{\Gamma_p \in III_{node}(i,j,k)} F_p^{Mv} &= 0. \end{aligned} \quad (36)$$

Здесь мы не будем пока конкретизировать вид разностных потоков импульса. Отметим только, что потоки импульса F_p^{Mu} , F_p^{Mw} и F_p^{Mv} в уравнениях (36) вычисляются таким образом, чтобы обеспечить консервативность схемы по импульсам. На любой грани, разделяющей два приузловых объёма, поток вычисляется по общей формуле, независимо от того, для какого приузлового объёма проводятся вычисления. Результат вычисления приписывается данной грани. В соответствии с направлениями внешних нормалей к приузловым объёмам, скалярное произведение нормали на поток будет одинаково по величине, но разных знаков для объёмов, которым эта грань инцидентна. Другими словами, вклад от данного потока в один объём будет

положительным, а в примыкающий — отрицательным. При суммировании эти потоки дадут ноль, что и требуется для соблюдения консервативности разностного уравнения импульсов.

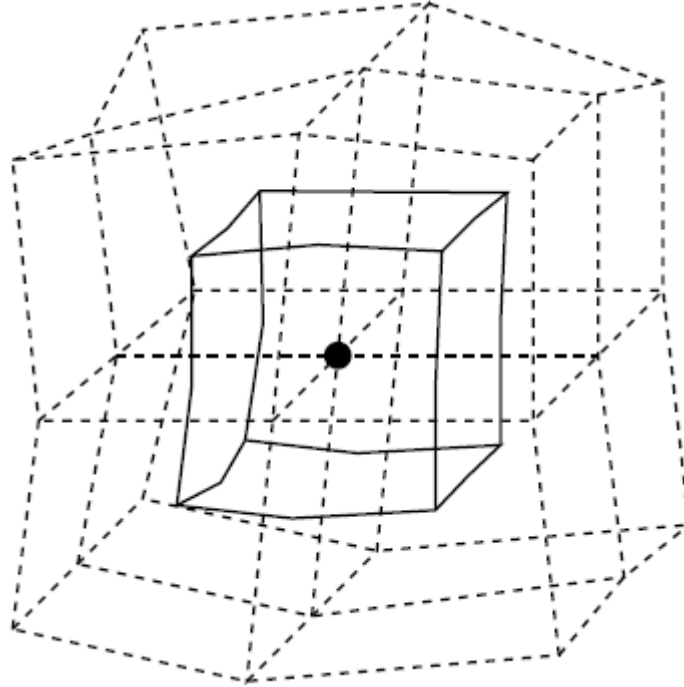


Рис.3. Контрольный объём узла. Пунктиром отмечены рёбра инцидентных узлу ячеек, шаблон $\mathcal{W}_{node}(i, j, k)$ состоит из граней контрольного объёма.

Конкретный вид потоков F_p^{Mu} , F_p^{Mw} и F_p^{Mv} будет уточнён далее при рассмотрении уравнения баланса кинетической энергии.

Уравнение изменения удельной внутренней энергии

Аппроксимируем уравнение переноса внутренней энергии в ячейке разностной сетки на шаблоне \mathcal{W}_{cell} :

$$\frac{\hat{m}_{mln}(\hat{\varepsilon})_{mln} - m_{mln}(\tilde{\varepsilon})_{mln}}{\tau_n} + \sum_{\Gamma_p \in \mathcal{W}_{cell}(m,l,n)} \Phi_p = 0, \quad (37)$$

где, как и ранее, суммирование происходит по граням контрольного объёма — ячейки (m, l, n) , $\Phi_p = \Theta_p \langle \rho \varepsilon \rangle_p$, а проекции на грани значения величины внутренней энергии $\langle \rho \varepsilon \rangle_p$ вычисляются по формуле, аналогичной приведённой выше для проекции плотности — $\langle \rho \rangle_p$.

Условие полной консервативности разностной схемы

Согласно [10], процедура “ремешинга” состоит в сдвиге узлов сетки (если это требуется) с тех позиций, которые они занимали после лагранжева этапа расчёта, на некоторые новые позиции, определяемые в соответствии с выбранной стратегией расчёта. Ремешинг обычно вызван необходимостью улучшения качества расчётной сетки. В частности, в результате ремешинга узлы сетки можно вернуть на те позиции, которые они занимали в начале расчёта временного шага. В последнем случае полный расчётный цикл одного шага по времени можно рассматривать как двухэтапный алгоритм реализации разностной схемы эйлера типа.

Разностная схема сохранит свойство полной консервативности, если на этапе “ремешинга” конвективные потоки массы, импульса и удельной внутренней энергии плазмы будут аппроксимированы так, чтобы не менялись суммы соответствующих величин по расчётной области:

$$\Delta E_u^{kin} = \sum_{ijk} \left(\hat{M}_{ijk} \frac{\hat{u}_{ijk}^2}{2} - M_{ijk} \frac{\tilde{u}_{ijk}^2}{2} \right) = 0, \quad (38)$$

$$\Delta E_w^{kin} = \sum_{ijk} \left(\hat{M}_{ijk} \frac{\hat{w}_{ijk}^2}{2} - M_{ijk} \frac{\tilde{w}_{ijk}^2}{2} \right) = 0, \quad (39)$$

$$\Delta E_v^{kin} = \sum_{ijk} \left(\hat{M}_{ijk} \frac{\hat{v}_{ijk}^2}{2} - M_{ijk} \frac{\tilde{v}_{ijk}^2}{2} \right) = 0, \quad (40)$$

$$\Delta E^{int} = \sum_{mln} \left(\hat{m}_{mln} (\hat{\varepsilon})_{mln} - m_{mln} (\tilde{\varepsilon})_{mln} \right) = 0. \quad (41)$$

Для доказательства полной консервативности второго этапа нашей схемы суммарной аппроксимации и формулировки условий, при которых выполнено это свойство, предварительно, наряду с уравнением изменения массы ячейки (32), будем рассматривать уравнение изменения массы в приузловом домене M_{ijk} в виде

$$\frac{\hat{M}_{ijk} - M_{ijk}}{\tau_n} + \sum_{\Gamma_{a'b'c'd'} \in \Pi_{node}(i,j,k)} F_{a'b'c'd'} = 0, \quad (42)$$

$$\frac{\hat{M}_{ijk} - M_{ijk}}{\tau_n} + \sum_{\Gamma_q \in \Pi_{node}(i,j,k)} F_q = 0, \quad q = \overline{1,6}; \quad q \equiv a', b', c', d', \quad (42')$$

где поток массы узла связан с потоком массы ячейки соотношением

$$F_{a'b'c'd'} = \frac{1}{8} (f_{a'}^- + f_{a'}^+ + f_{b'}^- + f_{b'}^+ + f_{c'}^- + f_{c'}^+ + f_{d'}^- + f_{d'}^+). \quad (43)$$

Поток $F_{a'b'c'd'}$ в формуле (43) вычисляется путём осреднения потоков массы через те грани ячеек сетки, которые во вспомогательной плоскости оказываются параллельными грани $\Gamma_{a'b'c'd'}$ приузлового домена, а верхние значки “-” и “+” обозначают соответственно грани с меньшими и большими значениями вспомогательной координаты “ α ”, “ β ” или “ γ ”, в зависимости от того, как расположены их образы на вспомогательной плоскости (см. [1]).

Доказательство полной консервативности второго этапа сводится к получению условий, при которых из уравнения неразрывности (32) (а также аналогичных ему уравнений (34) и (42)), уравнений движения (36) и уравнения энергии (37) следует выполнение соотношений (38) – (41) по сохранению кинетической и внутренней энергий системы.

Заметим, что соотношение (41) по сохранению внутренней энергии автоматически следует из уравнения (37) при суммировании его по всей расчётной области.

Доказательства выполнения соотношений (38) – (40) проведём в следующей последовательности.

Выпишем соотношения, при которых из уравнения неразрывности в форме (42') и уравнений движения (36) следуют уравнения для приращения кинетической энергии в узле после этапа “ремешинга” (remeshing). С этой целью разностное уравнение баланса массы в приузловом объёме узла (i, j, k) умножим на $(-0.5\hat{u}_{ijk}\tilde{u}_{ijk})$, на $(-0.5\hat{w}_{ijk}\tilde{w}_{ijk})$ и на $(-0.5\hat{v}_{ijk}\tilde{v}_{ijk})$, уравнения баланса компонент импульса для того же узла умножим на $0.5(\hat{u}_{ijk} + \tilde{u}_{ijk})$, на $0.5(\hat{w}_{ijk} + \tilde{w}_{ijk})$ и на $0.5(\hat{v}_{ijk} + \tilde{v}_{ijk})$, а после сложим попарно получившиеся уравнения. После этого левые части получившихся уравнений нетрудно привести к выражениям разностных производных по времени, которые в сумме можно трактовать как аппроксимацию производной по времени от кинетической энергии газа на этапе “ремешинга”

$$\frac{\hat{M}_{ijk} - M_{ijk}}{\tau_n} \left(-\frac{\hat{u}_{ijk}\tilde{u}_{ijk}}{2} \right) + \frac{\hat{M}_{ijk}\hat{u}_{ijk} - M_{ijk}\tilde{u}_{ijk}}{\tau_n} \left(\frac{\hat{u}_{ijk} + \tilde{u}_{ijk}}{2} \right) = \frac{\hat{M}_{ijk}\hat{u}_{ijk}^2 - M_{ijk}\tilde{u}_{ijk}^2}{2\tau_n}, \quad (44)$$

$$\frac{\hat{M}_{ijk} - M_{ijk}}{\tau_n} \left(-\frac{\hat{w}_{ijk}\tilde{w}_{ijk}}{2} \right) + \frac{\hat{M}_{ijk}\hat{w}_{ijk} - M_{ijk}\tilde{w}_{ijk}}{\tau_n} \left(\frac{\hat{w}_{ijk} + \tilde{w}_{ijk}}{2} \right) = \frac{\hat{M}_{ijk}\hat{w}_{ijk}^2 - M_{ijk}\tilde{w}_{ijk}^2}{2\tau_n}. \quad (45)$$

$$\frac{\hat{M}_{ijk} - M_{ijk}}{\tau_n} \left(-\frac{\hat{v}_{ijk}\tilde{v}_{ijk}}{2} \right) + \frac{\hat{M}_{ijk}\hat{v}_{ijk} - M_{ijk}\tilde{v}_{ijk}}{\tau_n} \left(\frac{\hat{v}_{ijk} + \tilde{v}_{ijk}}{2} \right) = \frac{\hat{M}_{ijk}\hat{v}_{ijk}^2 - M_{ijk}\tilde{v}_{ijk}^2}{2\tau_n}. \quad (46)$$

Уравнение для изменения кинетической энергии приузлового объёма имеет вид

$$\begin{aligned} & \frac{\hat{M}_{ijk} \hat{u}_{ijk}^2 - M_{ijk} \tilde{u}_{ijk}^2}{2\tau_n} + \frac{\hat{M}_{ijk} \hat{w}_{ijk}^2 - M_{ijk} \tilde{w}_{ijk}^2}{2\tau_n} + \frac{\hat{M}_{ijk} \hat{v}_{ijk}^2 - M_{ijk} \tilde{v}_{ijk}^2}{2\tau_n} = \\ & - \left(\frac{\hat{u}_{ijk} \tilde{u}_{ijk}}{2} + \frac{\hat{w}_{ijk} \tilde{w}_{ijk}}{2} + \frac{\hat{v}_{ijk} \tilde{v}_{ijk}}{2} \right) \sum_{\Gamma_q \in III_{node}(i,j,k)} F_q + \\ & + \left(\frac{\hat{u}_{ijk} + \tilde{u}_{ijk}}{2} \right) \sum_{\Gamma_q \in III_{node}(i,j,k)} F_q^{Mu} + \left(\frac{\hat{w}_{ijk} + \tilde{w}_{ijk}}{2} \right) \sum_{\Gamma_q \in III_{node}(i,j,k)} F_q^{Mw} + \left(\frac{\hat{v}_{ijk} + \tilde{v}_{ijk}}{2} \right) \sum_{\Gamma_q \in III_{node}(i,j,k)} F_q^{Mv}. \end{aligned} \quad (47)$$

Соотношения (38) – (40) будут выполняться при следующих условиях на связь потоков массы, фигурирующих в уравнении неразрывности (42') с потоками импульсов в уравнениях движения (36) во всех приузловых объёмах:

$$F_q^{MU} \left(\frac{\hat{U}_{ijk} + \tilde{U}_{ijk}}{2} - \frac{\hat{U}_{q'} + \tilde{U}_{q'}}{2} \right) = F_q \left(\frac{\hat{U}_{ijk} \tilde{U}_{ijk} - \hat{U}_{q'} \tilde{U}_{q'}}{2} \right), \quad (48)$$

где $U = u, w, v$. Отсюда следует, что

$$F_q^{MU} = \begin{cases} 0, & \text{при } \hat{U}_{ijk} = \hat{U}_{q'} \text{ и } \tilde{U}_{ijk} = \tilde{U}_{q'}, \\ F_q \frac{1}{2} \frac{\hat{U}_{ijk} \tilde{U}_{ijk} - \hat{U}_{q'} \tilde{U}_{q'}}{U_{ijk}^{(0.5)} - U_{q'}^{(0.5)}}, & \end{cases}, \quad (49)$$

где $q' = \overline{1,6}$, $U_{q'}|_{q=1} = U_{i+1jk}$, $U_{q'}|_{q=2} = U_{ij+1k}$, $U_{q'}|_{q=3} = U_{i-1jk}$, $U_{q'}|_{q=4} = U_{ij-1k}$, $U_{q'}|_{q=5} = U_{ijk-1}$, $U_{q'}|_{q=6} = U_{ijk+1}$.

Для согласования аппроксимаций потоков массы и импульса возможен и другой подход [12], в котором полусуммы скоростей, на которые домножаются компоненты потока импульса, берутся при осреднении не по времени, а по пространству, между соседними узлами, которые служат центрами смежных узловых доменов. Аналогично дело обстоит с аппроксимациями квадратов скоростей, на которые домножаются потоки массы. Соответствующие формулы балансных соотношений для внутренней энергии, аналогичные (44) – (46), имеют вид

$$\frac{\hat{M}_{ijk} - M_{ijk}}{\tau_n} \left(- \frac{[u_{ijk}^{(\theta)}]^2}{2} \right) + \frac{\hat{M}_{ijk} \hat{u}_{ijk} - M_{ijk} \tilde{u}_{ijk}}{\tau_n} u_{ijk}^{(\theta)} = \frac{\hat{M}_{ijk} \hat{u}_{ijk}^2 - M_{ijk} \tilde{u}_{ijk}^2}{2\tau_n}, \quad (50)$$

$$\frac{\hat{M}_{ijk} - M_{ijk}}{\tau_n} \left(- \frac{[w_{ijk}^{(\theta)}]^2}{2} \right) + \frac{\hat{M}_{ijk} \hat{w}_{ijk} - M_{ijk} \tilde{w}_{ijk}}{\tau_n} w_{ijk}^{(\theta)} = \frac{\hat{M}_{ijk} \hat{w}_{ijk}^2 - M_{ijk} \tilde{w}_{ijk}^2}{2\tau_n}, \quad (51)$$

$$\frac{\hat{M}_{ijk} - M_{ijk}}{\tau_n} \left(-\frac{[v_{ijk}^{(\theta)}]^2}{2} \right) + \frac{\hat{M}_{ijk} \hat{v}_{ijk} - M_{ijk} \tilde{v}_{ijk}}{\tau_n} v_{ijk}^{(\theta)} = \frac{\hat{M}_{ijk} \hat{v}_{ijk}^2 - M_{ijk} \tilde{v}_{ijk}^2}{2\tau_n}, \quad (52)$$

$$\begin{aligned} u_{ijk}^{(\theta)} &= \theta \hat{u}_{ijk} + (1-\theta) \tilde{u}_{ijk}, & w_{ijk}^{(\theta)} &= \theta \hat{w}_{ijk} + (1-\theta) \tilde{w}_{ijk}, \\ v_{ijk}^{(\theta)} &= \theta \hat{v}_{ijk} + (1-\theta) \tilde{v}_{ijk}, & \theta &= \frac{\sqrt{\hat{M}_{ijk}}}{\sqrt{\hat{M}_{ijk}} + \sqrt{M_{ijk}}}. \end{aligned} \quad (53)$$

На границе приузлового домена (i, j, k) потоки импульса связаны с потоками массы через ту же границу соотношениями

$$F_q^{MU} = F_q U_q^{(\theta)}, \quad U_q^{(\theta)} = 0.5(U_q^{(\theta)} + U_{q'}^{(\theta)}),$$

где индекс q' определён выше.

Рассматриваемые нами подходы позволяют аппроксимировать кинетическую энергию в узле неотрицательной сеточной функцией.

Алгоритм расчёта

Полная двухэтапная система трёхмерных разностных газодинамических уравнений (32) – (37), хотя и является неявной, позволяет провести вычисления второго этапа в частично явной форме. После определения значений потоков масс в объёмах ячеек и приузловых доменов, а также потоков объёмов в соответствии с (33), (35) и (42) новые значения масс и удельной внутренней энергии в ячейках сетки вычисляются явно из уравнений (32) и (37). Уравнения для новых значений скоростей (36) решаются итерационно, до выполнения условия на значения новых скоростей

$$|U^{s+1} - U^s| \leq \varepsilon_v |U^s| + \varepsilon_0, \quad (54)$$

где s — номер итерации, а ε_v и ε_0 — абсолютная и относительная погрешности расчёта соответственно.

Следует отметить, что эти итерации в общем случае не являются сходящимися. Удобным критерием для проверки сходимости итераций служит отличие интегральной кинетической энергии на шаге итерации от значения, предшествующего процедуре перестройки сетки: если итерации сходятся, оно монотонно уменьшается. Если же итерации расходятся, следует либо уменьшить шаг по времени, либо разбить процедуру перестройки сетки на несколько стадий, либо в части узлов вычислять значения скорости по неконсервативной методике (например, аппроксимируя F_q^{MU} «против потока» или вычисляя скорости \tilde{U} путём интерполяции значений \hat{U}).

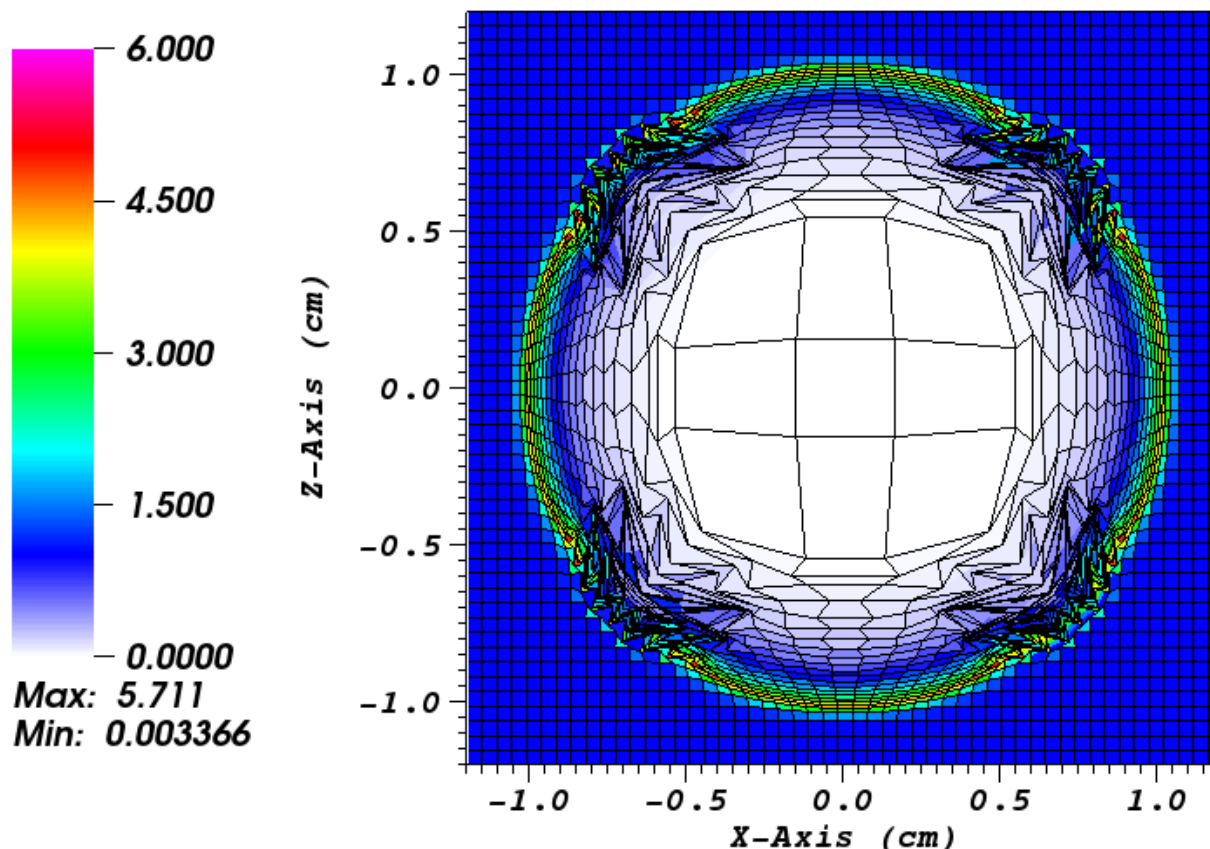


Рис.4. Распределение плотности и сетка в xz-срезе трёхмерного расчёта точечного взрыва. Перестройки сетки нет.

Демонстрационный расчёт

С помощью программного комплекса 3DLINE [15], в котором была реализована описываемая методика, был проведён демонстрационный расчёт. Рассматривалась классическая задача о точечном сильном взрыве [16]. В качестве вещества использовался идеальный газ с показателем адиабаты $7/5$.

На рис. 4 представлены сетка и расчётное распределение плотности в срезе плоскостью, проходящей через эпицентр, полученные в лагранжевом расчёте без перестройки. Зависимость плотности от расстояния до эпицентра взрыва в целом хорошо согласуется с аналитической (с учётом влияния искусственной вязкости и конечных размеров области начального энерговыделения), но в области, где ударная волна распространяется под углом к сетке, качество сетки сильно страдает, и часть ячеек выбивается из общей зависимости.

На рис. 5 и 6 представлены результаты, полученные с использованием следующей перестройки сетки:

$$\tilde{x} = \frac{x_0}{r_0} r(t, r_0), \quad \tilde{y} = \frac{y_0}{r_0} r(t, r_0), \quad \tilde{z} = \frac{z_0}{r_0} r(t, r_0),$$

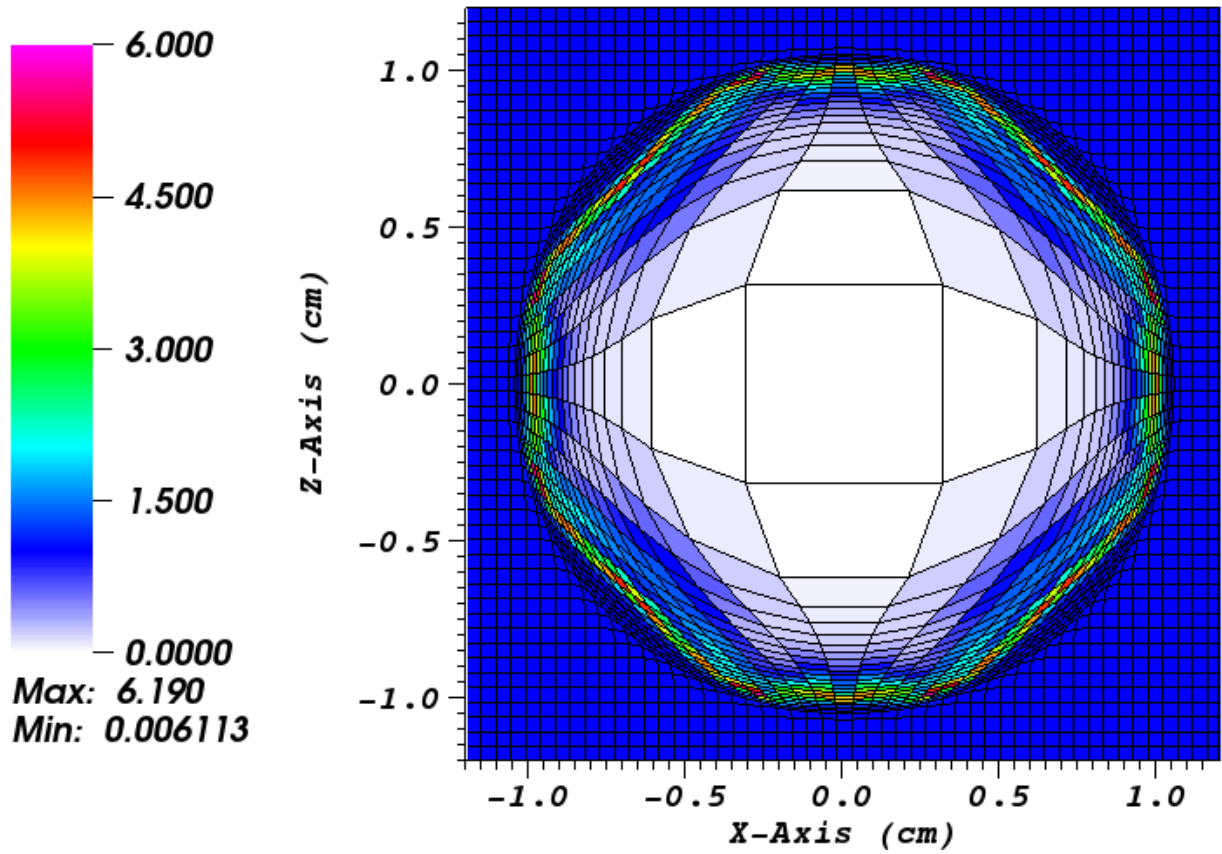


Рис. 5. При перестройке сетки скорости вычисляются линейной интерполяцией.

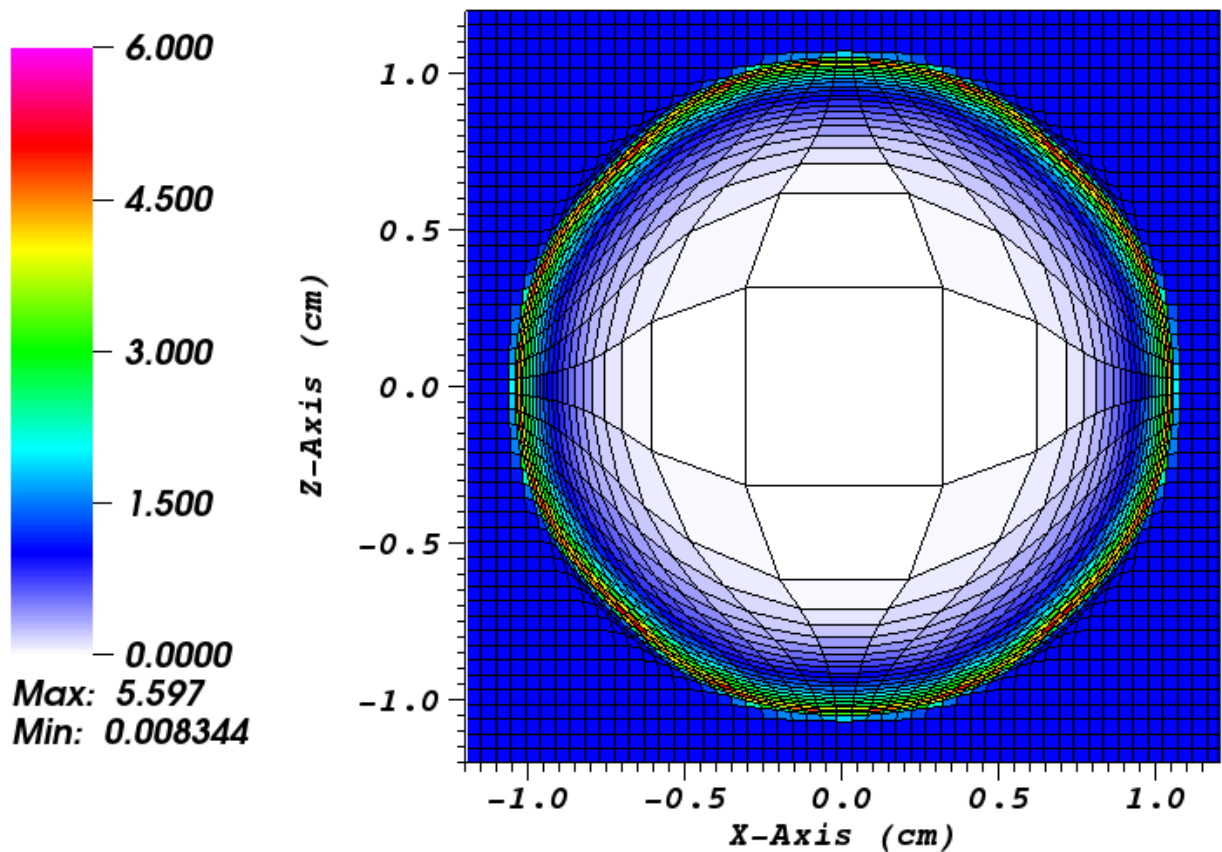


Рис. 6. При перестройке сетки скорости вычисляются по настоящей методике.

где (x_0, y_0, z_0) — координаты узла в начальный момент времени, $r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}$, а функция $r(t, r_0)$ вычисляется по формуле

$$r(t, r_0) = \begin{cases} R^{5/6} r_0^{1/6}, & r_0 < R(t), \\ r_0, & r_0 \geq R(t), \end{cases}$$

где $R(t)$ — расстояние от эпицентра до фронта ударной волны. Показатель степени $1/6$ был выбран исходя из известной предельной степени сжатия газа за фронтом ударной волны.

В расчёте, представленном на рис. 5, вычисление скоростей после смещения узлов осуществлялось линейной интерполяцией в тетраэдрах. Вследствие этого сферическая симметрия разлёта оказалась нарушена, а также возник существенный дисбаланс энергии: до 40% от изначально вложенной в газ энергии оказалось утеряно в процессе переинтерполяции скорости. Рассматриваемая в настоящем препринте методика этими недостатками не обладает (см. рис. 6), хотя и требует существенно больших затрат вычислительного времени.

Заключение

Отметим важную особенность, отличающую данный алгоритм учёта конвективных потоков для уравнений в СЭЛ-переменных от ранее разработанных алгоритмов. Конструкция уравнений разностной схемы такова, что путём преобразований из них получается сеточное уравнение баланса кинетической энергии (40), в котором фигурирует неотрицательная величина

$$\hat{E}_{kin} = \sum_{ijk} \left(\hat{M}_{ijk} \frac{\hat{u}_{ijk}^2}{2} + \hat{M}_{ijk} \frac{\hat{w}_{ijk}^2}{2} + \hat{M}_{ijk} \frac{\hat{v}_{ijk}^2}{2} \right). \quad (55)$$

Для схем, построенных, например, в [9] с использованием «каскадного» представления конвективных производных, получены разностные аналоги энергобалансов, в которые входит кинетическая энергия, выраженная через сеточные функции, определённые на двух временных слоях:

$$\hat{E}_{kin} = \sum_{ijk} \left(\hat{M}_{ijk} \frac{\hat{u}_{ijk} u_{ijk}}{2} + \hat{M}_{ijk} \frac{\hat{w}_{ijk} w_{ijk}}{2} + \hat{M}_{ijk} \frac{\hat{v}_{ijk} v_{ijk}}{2} \right). \quad (56)$$

Из (56) следует, что вычисленное по сеточным векторам скорости значение “разностной” кинетической энергии может быть отрицательно.

В работах [17] и [18] представленные результаты анализа устойчивости неявной разностной схемы лагранжева этапа подтверждают целесообразность неявности схем для определённого круга прикладных задач.

Что касается прикладных моделей плотной импульсной плазмы, изучаемой в экспериментах на лазерных и электрофизических установках, то они чаще

всего строятся на основе одножидкостного приближения (см, напр., [19 – 21]). Если изучаются высокоскоростные плазменные течения, в ряде случаев может возникнуть необходимость учесть неравновесности по температурам ионной и электронной компонент плазмы. Кроме того, в плазме сильное влияние может оказывать электронная, а в определённых условиях — и ионная теплопроводность. Соответствующие уравнения в “двухтемпературном” приближении [19] можно записать аналогично исходной системе (4) – (9)

$$\frac{d(\rho J)}{dt} + \frac{\partial(\rho W^x, y, z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} + \frac{\partial(x, \rho W^y, z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} + \frac{\partial(x, y, \rho W^z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} = 0, \quad (57)$$

$$\frac{d(\rho u J)}{dt} + \frac{\partial(\rho u W^x, y, z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} + \frac{\partial(x, \rho u W^y, z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} + \frac{\partial(x, y, \rho u W^z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} = -\frac{\partial(P, y, z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)}, \quad (58)$$

$$\frac{d(\rho w J)}{dt} + \frac{\partial(\rho w W^x, y, z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} + \frac{\partial(x, \rho w W^y, z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} + \frac{\partial(x, y, \rho w W^z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} = -\frac{\partial(x, P, z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)}, \quad (59)$$

$$\frac{d(\rho v J)}{dt} + \frac{\partial(\rho v W^x, y, z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} + \frac{\partial(x, \rho v W^y, z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} + \frac{\partial(x, y, \rho v W^z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} = -\frac{\partial(x, y, P)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)}, \quad (60)$$

$$\begin{aligned} \frac{d(\rho \varepsilon_e J)}{dt} + \frac{\partial(\rho \varepsilon_e W^x, y, z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} + \frac{\partial(x, \rho \varepsilon_e W^y, z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} + \frac{\partial(x, y, \rho \varepsilon_e W^z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} = J(Q_T + Q_{ei}) - \\ - P_e \left(\frac{\partial(u, y, z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} + \frac{\partial(x, w, z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} + \frac{\partial(x, y, v)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} \right) - \left(\frac{\partial(\Pi_e^x, y, z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} + \frac{\partial(x, \Pi_e^y, z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} + \frac{\partial(x, y, \Pi_e^z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} \right), \end{aligned} \quad (61)$$

$$\begin{aligned} \frac{d(\rho \varepsilon_i J)}{dt} + \frac{\partial(\rho \varepsilon_i W^x, y, z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} + \frac{\partial(x, \rho \varepsilon_i W^y, z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} + \frac{\partial(x, y, \rho \varepsilon_i W^z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} = -JQ_{ei} \\ - P_i \left(\frac{\partial(u, y, z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} + \frac{\partial(x, w, z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} + \frac{\partial(x, y, v)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} \right) - \left(\frac{\partial(\Pi_i^x, y, z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} + \frac{\partial(x, \Pi_i^y, z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} + \frac{\partial(x, y, \Pi_i^z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} \right), \end{aligned} \quad (62)$$

$$P = P_e(\rho, \varepsilon_e) + P_i(\rho, \varepsilon_i) + q. \quad (63)$$

Здесь использованы обычные обозначения плотности, давления и скорости — соответственно, ρ , P , $\mathbf{v}(u, w, v)$. В используемой нами форме записи “газ” состоит из электронов и ионов со своими давлениями $P_{e,i}$ и удельными внутренними энергиями $\varepsilon_{e,i}$.

Обсуждение процессов теплопередачи в высокотемпературных средах, выражения для потоков тепла электронов и ионов $\mathbf{\Pi}_{e,i} = (\Pi_{e,i}^x, \Pi_{e,i}^y, \Pi_{e,i}^z)$, источников членов Q_T в уравнении энергобаланса плазмы, описание теплообмена между электронами и ионами Q_{ei} , давление искусственной вязкости q можно найти в [15, 18] и многих других публикациях, посвящённых физике высокотемпературной плазмы. В контексте данной работы важен тот факт, что, как видно по структуре уравнений (57) – (63), полностью консервативная разностная схема для них может быть построена с помощью точно такого согласования потоков массы и импульса, как и в рассмотренной выше однотемпературной модели.

Работа выполнена при поддержке средствами проектов Российского фонда фундаментальных исследований: 14-01-00678, 15-07-05025 и 14-11-00699.

Список литературы

1. Гасилов В.А., Круковский А.Ю., Повещенко Ю.А., Цыгвинцев И.П., Бойков Д.С. Неявная двухслойная лагранжево-эйлерова разностная схема газовой динамики на основе согласованных аппроксимаций уравнений балансов массы и импульса. // Препринты ИПМ им.М.В.Келдыша. 2015. №38. С. 1-22.
2. Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные методы решения задач газовой динамики. М.: Наука, 1992.
3. Marinak M., Kerbel G., Koning J., Patel M., Sepke S., McKinley M., O'Brien M., Procassini R., and Munro D. Advances in hydra and its applications to simulations of inertial confinement fusion targets. In Proceedings of the 2011 International Fusion Sciences and Applications Conference (IFSA 2013), volume 59 of IFSA, page 3011. EPJ Web of Conferences, 2013.
4. Langery Steven H., Karliny Ian, Marinaky Marty. Performance Characteristics of HYDRA — a Multi-Physics simulation code from LLNL. Report of the Lawrence Livermore National Laboratory, Livermore, US. Project tracking codes 13-ERD-055 and 13-FS-002 (LLNL-CONF-635776). 5 p.
5. Orban Chris, Fatenejad Milad, Chawla Sugreev, Wilks Scott and Lamb Donald. A Radiation-Hydrodynamics Code Comparison for Laser-Produced Plasmas: FLASH versus HYDRA and the Results of Validation Experiments arXiv:1306.1584v1 [physics.plasm-ph] 7 Jun 2013.
6. Woo K. M. et Al. Three-Dimensional Simulations of the Deceleration Phase of Inertial Fusion Implosions Using DEC3D. In: 57th Annual Meeting of the American Physical Society Division of Plasma Physics Savannah, GA 16–20 November 2015. 13 p.
7. Schultz W.D. Two-Dimensional Lagrangian Hydrodynamic Difference Equations // Methods of Computational Physics. New York: Academic Press, 1964. V.3.

8. Franck R.M. and Lazarus R.B. Mixed Eulerian-Lagrangian method. In: *Methods in Computational Physics, Vol. 3: Fundamental methods in Hydrodynamics*, Alder B, Fernbach S and Rotenberg M (eds). Academic Press: New York, 1964; pp. 47–67.
9. Головизнин В.М., Самарский А.А., Фаворский А.П. Вариационный принцип получения уравнений магнитной гидродинамики в смешанных эйлерово-лагранжевых переменных. // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **21**:2 (1981), 409–422.
10. Hirt C.W., Amsden A.A., Cook J.L. An arbitrary Lagrangian-Eulerian computing method for all flow speeds. *Journal of Computational Physics*, 1974, v. 14, № 3, pp. 227 – 253.
11. Головизнин В.М., Рязанов М.А., Самарский А.А., Чернов С.Ю. Двумерная полностью консервативная разностная схема газовой динамики в смешанных эйлерово-лагранжевых переменных. // *Препринты ИПМ им.М.В.Келдыша*. 1985. №11.
12. Колдоба А.В., Кузнецов О.А., Повещенко Ю.А., Попов Ю.П. Об одном подходе к расчёту задач газовой динамики с переменной массой квазичастицы. // *Препринты ИПМ им.М.В.Келдыша*. 1980. №157.
13. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1980.
14. Wesseling Pieter. *Principles of Computational Fluid Dynamics*. Springer: Springer series in computational mathematics, 2001.
15. Круковский А.Ю., Новиков В.Г., Цыгвинцев И.П. Программа 3DLINe: моделирование воздействия несоосного лазерного импульса на оловянную каплю // *Препринты ИПМ им.М.В.Келдыша*. 2015. № 63. С. 1-24.
16. Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П. *Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений*. М.: Наука, 1966.
17. Ткаченко С.И., Гасилов В.А., Круковский А.Ю., Ольховская О.Г., Цыгвинцев И.П. Вычислительная модель и результаты численного анализа электровзрыва тонких алюминиевых проводников. *Mathematica Montisnigri. Podgorica, Montenegro – V. XXVIII*, 2013.
18. Гасилов В.А., Гуськов С.Ю., Захаров С.В., Круковский А.Ю., Новикова Т.П. Математическая модель и метод расчёта имплозии электродинамически ускоряемой плазмы. *Препринт ФИАН, №29*, 1999 г.
19. Дюдерштадт Дж., Мозес Г. *Инерциальный термоядерный синтез*. Пер. с англ. М.: Энергоатомиздат, 1984.
20. *Ядерный синтез с инерционным удержанием*. / Под ред. Б.Ю.Шаркова. М.: Физматлит, 2005.
21. Орешкин В.И. *Излучение высокотемпературной плазмы. Пинч-эффект*, LAP LAMBERT Academic Publishing, 2013, ISBN: 978-3-659-33619-5.

Оглавление

Введение.....	3
Система уравнений ГД в СЭЛ-переменных	4
Сетки. Дискретизация	6
Уравнения первого этапа.....	7
Уравнения второго этапа.....	9
ПКРС в СЭЛ-переменных	10
Уравнение изменения импульса	12
Уравнение изменения удельной внутренней энергии	13
Условие полной консервативности разностной схемы	14
Алгоритм расчёта	17
Демонстрационный расчёт	18
Заключение.....	20
Список литературы.....	22