



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 103 за 2016 г.



ISSN 2071-2898 (Print)  
ISSN 2071-2901 (Online)

Люпа А.А., [Трапезникова М.А.](#),  
[Чурбанова Н.Г.](#)

Моделирование  
неизотермической  
многофазной фильтрации с  
применением явных  
разностных схем

**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Люпа А.А., Трапезникова М.А., Чурбанова Н.Г. Моделирование неизотермической многофазной фильтрации с применением явных разностных схем // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2016. № 103. 20 с.  
doi:[10.20948/prepr-2016-103](https://doi.org/10.20948/prepr-2016-103)  
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2016-103>

**Ордена Ленина  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ  
имени М.В.Келдыша  
Российской академии наук**

**А.А.Люпа, М.А.Трапезникова, Н.Г.Чурбанова**

**Моделирование неизотермической  
многофазной фильтрации с применением  
явных разностных схем**

**Москва — 2016**

*Люба А.А., Трапезникова М.А., Чурбанова Н.Г.*

**Моделирование неізотермической многофазной фильтрации с применением явных разностных схем**

Работа посвящена развитию оригинальной математической модели фильтрации, построенной по аналогии с квазигазодинамической системой уравнений и допускающей реализацию явными численными методами. Модель обобщена на случай многофазного многокомпонентного флюида и учитывает возможные источники тепла. Проведены расчеты тестовых задач о течении в однородной пористой среде трехфазной жидкости.

**Ключевые слова:** течение жидкости в пористой среде, квазигазодинамическая система уравнений, явные конечно-разностные схемы

*Anastasiya Alexandrovna Lyuba, Marina Alexandrovna Trapeznikova, Natalia Gennadievna Churbanova*

**Simulation of non-isothermal multiphase filtration with application of explicit difference schemes**

The work is devoted to development of an original mathematical model of filtration constructed by analogy with the quasigasdynamic system of equations and allowing implementation via explicit numerical methods. The model is generalized to the case of multiphase multicomponent fluid and takes into account possible heat sources. Test predictions of three-phase fluid flows in homogeneous porous medium are performed.

**Key words:** fluid flow in a porous medium, quasigasdynamic system of equations, explicit finite difference schemes

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты 16-29-15095-офи\_м, 15-01-03445-а, 15-01-03654-а.

## 1. Введение

Разработка математических основ и программного обеспечения для моделирования сложных течений жидкости и газа в подземном пространстве является одной из актуальных тенденций индустриальной математики. Эти исследования направлены на развитие и внедрение концепции интеллектуальных нефтегазовых месторождений, применимы при строительстве гидротехнических сооружений, способствуют решению проблем мелиорации, а также решению экологических задач, связанных с загрязнением почвы и подземных вод. Об огромной практической значимости этих исследований свидетельствует, в частности, сборник [1]. Моделирование затрудняется тем, что течения в подземных горизонтах существенно мультимасштабны из-за большого разброса физических величин, также наблюдается большое разнообразие физических процессов — конвекция, диффузия, фазовые переходы и химические реакции. В связи с этим модели фильтрации и алгоритмы их численной реализации все еще нуждаются в совершенствовании для адекватного описания термо-гидро-механико-химических процессов с достаточной точностью при разумных вычислительных затратах [2].

Настоящая работа посвящена дальнейшему развитию оригинальной математической модели фильтрации, построенной по аналогии с квазигазодинамической системой уравнений и допускающей реализацию явными численными методами [3]. Модель обобщена на случай многофазного многокомпонентного флюида и учитывает возможные источники тепловыделения. Предпочтение отдается алгоритмам явного типа, так как они могут быть эффективно адаптированы к современным суперкомпьютерам с гибридной архитектурой, в том числе содержащим графические ускорители вычислений (GPU) [4, 5].

## 2. Математическая модель неизотермической многофазной фильтрации

На сегодняшний день среди наиболее перспективных методов вычислительной гидродинамики выделяются кинетические алгоритмы, подобные Lattice Boltzmann схемам [6] и кинетически-согласованным разностным схемам (КСРС) [7]. В основе вывода КСРС и родственной им квазигазодинамической (КГД) системы уравнений лежит принцип минимальных размеров, который состоит в том, что нет смысла рассматривать масштабы меньше некоторого характерного минимального размера [8]. Этот принцип справедлив для многих задач механики сплошной среды. Для газовой динамики, например, таким размером является длина свободного пробега молекулы. Для задач фильтрации минимальный масштаб по пространству  $l$  — это масштаб осреднения, на котором несущественна микроструктура

фильтрующей породы, то есть величина порядка сотни размеров зерен породы. Также вводится понятие минимального характерного масштаба по времени  $\tau$ : в газовой динамике это временной интервал между столкновением молекул, а в теории фильтрации этот параметр может быть интерпретирован как время установления внутреннего равновесия в объеме с характерным размером  $l$ .

В работе [9] впервые была предложена математическая модель фильтрации сжимаемой жидкости, построенная по аналогии с КГД системой уравнений с учетом принципа минимальных размеров. Уравнение неразрывности классической модели фильтрации [10, 11] было модифицировано и приобрело дополнительный диссипативный член (регуляризатор), что дало новые вычислительные возможности, в частности позволило использовать явную схему с центральными разностями для аппроксимации этого уравнения. С целью разработки логически простых и достаточно устойчивых алгоритмов модель получила дальнейшее развитие [3]. При помощи применения метода дифференциальных приближений тип уравнения неразрывности был изменен с параболического на гиперболический, что позволило повысить устойчивость соответствующей явной разностной схемы. Далее эта модель была обобщена на случай многофазного течения жидкости в пористой среде [12], в том числе с учетом возможных источников тепловыделения [13]. Модели неизотермической фильтрации весьма актуальны, поскольку они используются, например, для численного анализа современных технологий добычи высоковязкой нефти, основанных на закачке в пласт различных теплоносителей (горячей воды, пара).

Выпишем полученную систему уравнений неизотермической многофазной фильтрации. Исследуемая система включает три подвижные фазы, обозначенные индексом  $\alpha$  ( $\alpha$  принимает значения:  $w$  – жидкая водная фаза,  $n$  – жидкая углеводородная фаза, например, нефть,  $g$  – газовая фаза), а также неподвижную твердую фазу, обозначенную индексом  $r$  (пористый скелет). Считаем пористую среду недеформируемой изотропной, подвижные фазы — слабосжимаемыми, несмешивающимися и невзаимодействующими, газ — идеальным, скелет — несжимаемым.

$$\varphi \frac{\partial(\rho_\alpha S_\alpha)}{\partial t} + \tau \frac{\partial^2(\rho_\alpha S_\alpha)}{\partial t^2} + \operatorname{div}(\rho_\alpha \mathbf{u}_\alpha) = q_\alpha + \operatorname{div} \frac{l c_\alpha}{2} \operatorname{grad}(\rho_\alpha S_\alpha), \quad (1)$$

$$\mathbf{u}_\alpha = -K \frac{k_\alpha}{\mu_\alpha} (\operatorname{grad} P_\alpha - \rho_\alpha \mathbf{g}), \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \varphi \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} S_{\alpha} E_{\alpha} + (1 - \varphi) \rho_r E_r \right] + \operatorname{div} \left( \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} H_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha} \right) = \\ = \operatorname{div} \lambda_{\text{eff}} \operatorname{grad} T + \sum_{\alpha} \operatorname{div} \frac{l c_{\alpha}}{2} \rho_{\alpha} \operatorname{grad} T, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\rho_g = \rho_{0g} \frac{P_g}{P_{0g}} \frac{T_0}{T}, \quad \rho_{\alpha} = \rho_{0\alpha} [1 + \beta_{\alpha} (P_{\alpha} - P_{0\alpha}) - \eta_{\alpha} (T - T_0)], \quad \alpha = w, n \quad (4)$$

$$\sum_{\alpha} S_{\alpha} = 1. \quad (5)$$

Здесь  $S_{\alpha}$  – насыщенность,  $P_{\alpha}$  – давление,  $\rho_{\alpha}$  – плотность,  $\mathbf{u}_{\alpha}$  – скорость фильтрации,  $T$  – температура (одинаковая для всех фаз),  $E_{\alpha}$  – внутренняя энергия,  $H_{\alpha}$  – энтальпия,  $q_{\alpha}$  – источник флюида,  $\varphi$  – пористость породы,  $K$  – абсолютная проницаемость,  $k_{\alpha}$  – относительная фазовая проницаемость,  $\mu_{\alpha}$  – динамическая вязкость,  $\mathbf{g}$  – ускорение свободного падения,  $l$  – минимальный масштаб по пространству,  $\tau$  – минимальный масштаб по времени,  $c_{\alpha}$  – скорость звука,  $\lambda_{\text{eff}}$  – эффективный коэффициент теплопроводности,  $\beta_{\alpha}$  – коэффициент изотермической сжимаемости жидкости,  $\eta_{\alpha}$  – коэффициент теплового расширения, константы  $\rho_{0\alpha}$ ,  $P_{0\alpha}$  и  $T_0$  – характерные значения соответствующих величин. Плотность породы  $\rho_r$  считается постоянной.

Система содержит: модифицированное уравнение неразрывности (1) и обобщенный закон Дарси (2) для каждой подвижной фазы, единое для всей системы уравнение сохранения энергии (3) (оно модифицировано по аналогии с КГД системой, так же как и уравнения неразрывности), уравнения состояния (4), замыкающее соотношение (5).

Уравнение (3) включает эффективный коэффициент теплопроводности:

$$\lambda_{\text{eff}} = \varphi \sum_{\alpha} S_{\alpha} \lambda_{\alpha} + (1 - \varphi) \lambda_r. \quad (6)$$

Энтальпия (в том числе энтальпия твердой фазы) вычисляется следующим образом:

$$H_{\alpha} = H_{\alpha 0} + \int_{T_0}^T C_{P\alpha}(T) dT, \quad (7)$$

где  $C_{P\alpha}$  – теплоемкость вещества при постоянном давлении.

Связь между внутренней энергией и энтальпией:

$$E_{\alpha} = H_{\alpha} - \frac{P_{\alpha}}{\rho_{\alpha}}, \quad E_r = H_r. \quad (8)$$

Зависимости от температуры коэффициентов теплопроводности  $\lambda_{\alpha}(T)$ , теплоемкостей  $C_{P\alpha}(T)$  и динамических вязкостей  $\mu_{\alpha}(T)$  находятся эмпирически. В данной работе для расчетов используем приведенные ниже приближенные формулы.

Коэффициенты теплопроводности фаз:

$$\begin{aligned} \lambda_w(T) &= 0.553 \times (1 - 0.003 \times (T - T_0)), \\ \lambda_n(T) &= 0.14 \times (1 - 0.001 \times (T - T_0)), \\ \lambda_g(T) &= 0.237 \times \left( \frac{T}{T_0} \right)^{0.82}, \\ \lambda_r(T) &= 1.0. \end{aligned} \quad (9)$$

Теплоемкости фаз при постоянном давлении:

$$\begin{aligned} C_{Pw}(T) &= 4194 - 1.15 \times (T - T_0) + 0.015 \times (T - T_0)^2, \\ C_{Pn}(T) &= 1700 - 3.4 \times (T - T_0), \\ C_{Pg}(T) &= 1000 - 0.119 \times (T - T_0), \\ C_{Pr}(T) &= 800 - 0.75 \times (T - T_0). \end{aligned} \quad (10)$$

Динамические вязкости подвижных фаз:

$$\begin{aligned} \mu_w(T) &= \frac{1}{29.21 \times T - 7506.64}, \\ \mu_n(T) &= 7.256 \times 10^{-10} \times e^{\frac{4141.9}{T}}, \\ \mu_g(T) &= 1.717 \times 10^{-5} \times \left( \frac{T}{T_0} \right)^{0.683}. \end{aligned} \quad (11)$$

В расчетах  $T_0 = 273K$ .

Приведенная модель учитывает капиллярные силы. В некоторых задачах фильтрации, например, при малых размерах области фильтрации и малых скоростях, капиллярные силы могут быть сравнимы с внешним перепадом давления, и их действием пренебречь нельзя. Капиллярные силы приводят к появлению угла смачивания на границе раздела двух фаз и к разрыву давления на этой границе. Разность фазовых давлений есть так называемое капиллярное давление. Капиллярные давления, как и относительные фазовые

проницаемости, определяются экспериментально, а для расчетов используются различные приближения, согласующиеся с экспериментальными данными. При решении системы уравнений фильтрации капиллярные давления и относительные фазовые проницаемости считаются заданными функциями насыщенных. В данной работе для описания капиллярных давлений в случае трехфазного течения жидкости выбрана приближенная модель Паркера [14]:

$$\begin{aligned} P_n - P_w = P_{cnw}(S_w) &= \frac{1}{\gamma\delta_{nw}} [(S_w)^{\frac{N}{1-N}} - 1]^{\frac{1}{N}}, \\ P_g - P_n = P_{cgn}(S_g) &= \frac{1}{\gamma\delta_{gn}} [(1 - S_{ge})^{\frac{N}{1-N}} - 1]^{\frac{1}{N}}, \end{aligned} \quad (12)$$

где  $P_{cnw}$  – капиллярное давление на границе вода-нефть, а  $P_{cgn}$  – капиллярное давление на границе нефть-газ,  $\gamma$  и  $N$  – параметры из соответствующего приближения Ван Генухтена для капиллярного давления в случае двухфазной системы вода-газ,  $\delta_{nw}$  и  $\delta_{gn}$  – известные коэффициенты поверхностного натяжения жидкостей, а эффективная насыщенность  $S_{ae}$  с учетом остаточных насыщенных  $S_{ar}$  определяется следующим образом:

$$S_{ae} = \frac{S_\alpha - S_{ar}}{1 - \sum_\alpha S_{ar}}. \quad (13)$$

В расчетах в данной работе используем следующие значения параметров:  $N = 3.25$ ,  $\gamma = 0.00048 \text{ Па}^{-1}$ ,  $\delta_{nw} = 0.67$ ,  $\delta_{gn} = 2$ . Зависимости капиллярных давлений от насыщенных изображены на рис. 1, 2.

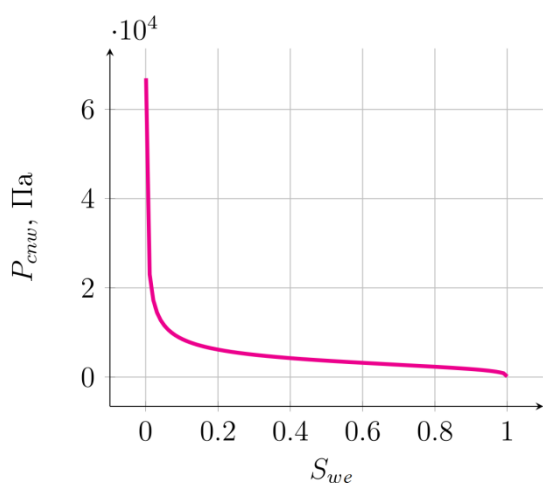


Рис. 1. Зависимость капиллярного давления на границе нефть-вода от эффективной водонасыщенности

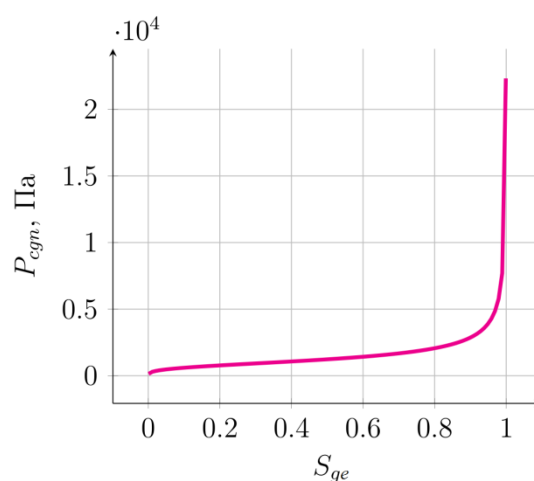


Рис. 2. Зависимость капиллярного давления на границе газ-нефть от эффективной газонасыщенности



Относительные фазовые проницаемости определяются в работе в соответствии с приближением Стоуна [15, 10]:

$$\begin{aligned} k_w(S_w) &= S_{we}^{\frac{1}{2}} \left[ 1 - \left( 1 - S_{we}^{\frac{N}{N-1}} \right)^{\frac{N-1}{N}} \right]^2, \\ k_n(S_w, S_n) &= \frac{S_{ne} k_{nw}(S_w) k_{ng}(S_n)}{(1 - S_{we})(S_{we} + S_{ne})}, \\ k_g(S_g) &= S_{ge}^{\frac{1}{2}} \left[ 1 - \left( 1 - S_{ge}^{\frac{N}{N-1}} \right)^{\frac{N-1}{N}} \right]^2. \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь используется эффективная насыщенность (10) и следующие выражения:

$$k_{nw}(S_w) = (1 - S_{we})^{\frac{1}{2}} \left( 1 - S_{we}^{\frac{N}{N-1}} \right)^{\frac{2(N-1)}{N}}, \quad k_{ng}(S_n) = S_{ne}^{\frac{1}{2}} \left( 1 - \left( 1 - S_{ne}^{\frac{N}{N-1}} \right)^{\frac{(N-1)}{N}} \right)^2. \quad (15)$$

Таким образом, относительные фазовые проницаемости воды и газа являются функциями одной переменной, а относительная фазовая проницаемость нефти – функцией двух переменных, что проиллюстрировано рисунками 3 – 5. Основные нелинейности в уравнениях фильтрации связаны именно с видом зависимостей относительных фазовых проницаемостей и капиллярных давлений от насыщенностей.

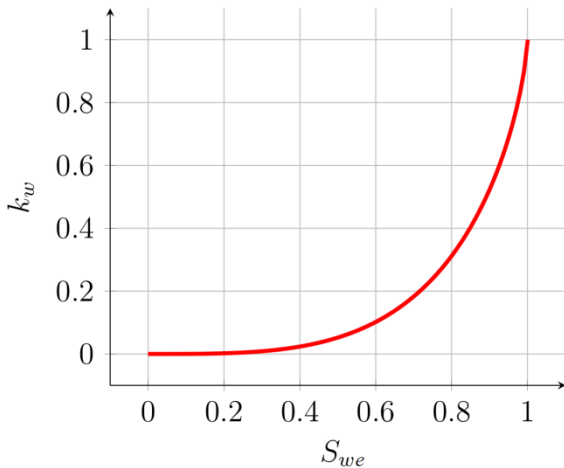


Рис. 3. Зависимость относительной фазовой проницаемости воды от эффективной водонасыщенности

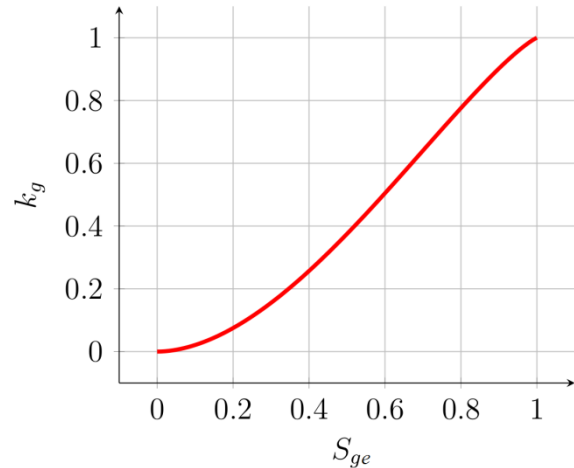


Рис. 4. Зависимость относительной фазовой проницаемости газа от эффективной газонасыщенности

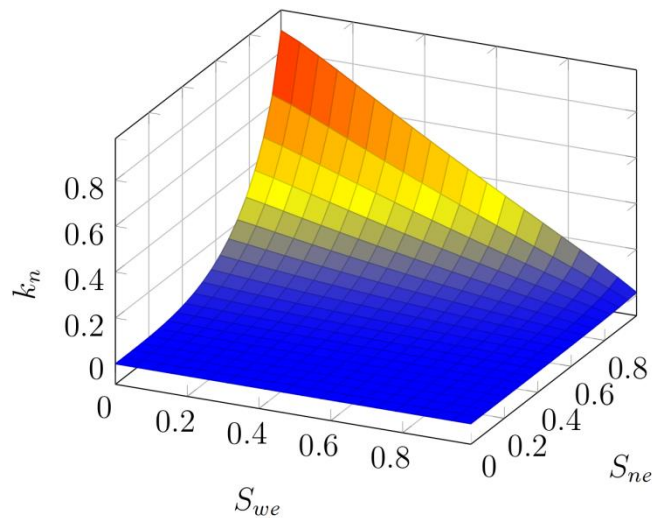


Рис. 5. Зависимость относительной фазовой проницаемости нефти от эффективных водонасыщенности и нефтенасыщенности

### 3. Вычислительный алгоритм

Представленная модель может быть реализована численно с помощью алгоритма явного типа. Задачи решаются в прямоугольных областях, разностные схемы строятся на неразнесенных ортогональных расчетных сетках. В качестве основных искомым функций выступают давление воды  $P_w$ , водонасыщенность  $S_w$ , нефтенасыщенность  $S_n$ , газонасыщенность  $S_g$  и температура  $T$ , для которых задаются начальные и граничные условия. На каждом шаге по времени вычисляются:

1. давления нефти  $P_n$  и газа  $P_g$  через давление воды  $P_w$  и капиллярные давления (12);
2. плотности фаз  $\rho_\alpha$  из уравнений состояния (4);
3. скорости фильтрации фаз на основании закона Дарси (2) независимо по всем измерениям, предварительно определяются относительные фазовые проницаемости (14)-(15) и динамические вязкости фаз (11);
4. произведение  $\rho_\alpha S_\alpha$  для всех фаз на следующем шаге по времени с помощью трехслойной явной разностной схемы, аппроксимирующей уравнения неразрывности (1), при этом используются центральные разности для аппроксимации конвективных членов;
5. коэффициенты теплопроводности (9) и значения теплоемкостей фаз (10), эффективный коэффициент теплопроводности (6), а также энтальпия (7);
6. внутренняя энергия, а именно

$$E = \varphi \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} S_{\alpha} E_{\alpha} + (1 - \varphi) \rho_r E_r, \quad (16)$$

на следующем шаге по времени из уравнения (3) явным численным методом;

7. основные искомые функции на следующем шаге по времени с помощью решения локально в каждой расчетной точке системы нелинейных алгебраических уравнений методом Ньютона.

Уравнения этой системы получены на основе уравнений состояния (4), замыкающего соотношения (5) и выражения для внутренней энергии (16) с учетом (8). При решении тестовых задач было установлено, что достаточно выполнять семь итераций метода Ньютона. В ходе каждой итерации определяются:

$$\begin{aligned}
F_1 &= \rho_w(P_w, T) S_w - \rho_w S_w, \\
F_2 &= \rho_n(P_w + P_{cnw}(S_w), T) S_n - \rho_n S_n, \\
F_3 &= \rho_g(P_w + P_{cnw}(S_w) + P_{cgn}(S_g), T) S_g - \rho_g S_g, \\
F_4 &= \varphi (S_w (\rho_w(P_w, T) H_w(T) - P_w) + \\
&+ S_n (\rho_n(P_w + P_{cnw}(S_w), T) H_n(T) - P_w - P_{cnw}(S_w)) + \\
&+ S_g (\rho_g(P_w + P_{cnw}(S_w) + P_{cgn}(S_g), T) H_g(T) - P_w - P_{cnw}(S_w) - P_{cgn}(S_g))) + \\
&+ (1 - \varphi) \rho_r H_r - E, \\
F_5 &= S_w + S_n + S_g - 1,
\end{aligned} \tag{17}$$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial P_w} & \frac{\partial F_1}{\partial S_w} & \frac{\partial F_1}{\partial S_n} & \frac{\partial F_1}{\partial S_g} & \frac{\partial F_1}{\partial T} \\ \frac{\partial F_2}{\partial P_w} & \frac{\partial F_2}{\partial S_w} & \frac{\partial F_2}{\partial S_n} & \frac{\partial F_2}{\partial S_g} & \frac{\partial F_2}{\partial T} \\ \frac{\partial F_3}{\partial P_w} & \frac{\partial F_3}{\partial S_w} & \frac{\partial F_3}{\partial S_n} & \frac{\partial F_3}{\partial S_g} & \frac{\partial F_3}{\partial T} \\ \frac{\partial F_4}{\partial P_w} & \frac{\partial F_4}{\partial S_w} & \frac{\partial F_4}{\partial S_n} & \frac{\partial F_4}{\partial S_g} & \frac{\partial F_4}{\partial T} \\ \frac{\partial F_5}{\partial P_w} & \frac{\partial F_5}{\partial S_w} & \frac{\partial F_5}{\partial S_n} & \frac{\partial F_5}{\partial S_g} & \frac{\partial F_5}{\partial T} \end{pmatrix}, \tag{18}$$

тогда

$$\begin{pmatrix} P_w \\ S_w \\ S_n \\ S_g \\ T \end{pmatrix}^{new} = \begin{pmatrix} P_w \\ S_w \\ S_n \\ S_g \\ T \end{pmatrix} - A^{-1} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Многопроцессорная реализация алгоритма основана на принципе геометрического параллелизма. В этом случае расчетная область разбивается на подобласти, счет в которых происходит одновременно на разных процессорах, и на каждом слое по времени выполняются обмены данными на внутренних границах подобластей.

#### 4. Многокомпонентная модель фильтрации

Для адекватного моделирования сложных фильтрационных процессов, в частности происходящих в пластах при извлечении углеводородов, необходимо учитывать многокомпонентный состав фаз и межфазный массообмен отдельными компонентами [16, 17, 10, 11]. В связи с этим предлагается обобщить представленную в разделе 2 модель, построенную по аналогии с КГД системой уравнений, на случай многофазной многокомпонентной фильтрации. Для этого нужно перейти от законов сохранения для фаз к законам сохранения для компонентов и определить недостающие замыкающие соотношения.

Под компонентом понимают отдельное химическое соединение (чистый компонент) или их смесь (псевдокомпонент). Пусть в рассматриваемой системе  $n_a$  — число фаз, а  $n_c$  — число компонентов. Обычно количество фаз — не более четырех (вода, нефть, газ, твердая фаза), а количество компонентов может быть произвольным. Один и тот же компонент может присутствовать в разных фазах. Например, водный компонент является чистым компонентом (состоит из одного химического соединения — воды) и может находиться в водной, нефтяной и газовой фазах. Будем считать, что компоненты твердой фазы не могут присутствовать в подвижных фазах и, наоборот, — компоненты подвижных фаз не могут содержаться в твердой фазе. В дальнейшем, говоря о компонентах, будем подразумевать компоненты подвижных фаз.

Фазы различны по составу — компоненты в них содержатся в разных количествах. Относительное количество компонента в сложной системе может быть выражено либо в массовых, либо в молярных концентрациях. При решении задач, требующих учета химических реакций, как, например, при моделировании высокотехнологичных физико-химических методов повышения нефтеотдачи пластов, удобнее оперировать понятием количества вещества и, соответственно, говорить о молярной концентрации [18]. На данном этапе

исследований авторы статьи не рассматривают подобные задачи, в качестве одной из основных искомым функций выбирается массовая концентрация.

Выпишем закон сохранения массы для  $j$ -го компонента, модифицировав его по аналогии с КГД системой и уравнением неразрывности (1):

$$\begin{aligned} \varphi \frac{\partial}{\partial t} \left( \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} S_{\alpha} C_{j\alpha} \right) + \tau \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} S_{\alpha} C_{j\alpha} \right) + \sum_{\alpha} \operatorname{div}(\rho_{\alpha} C_{j\alpha} \mathbf{u}_{\alpha}) = \\ = Q_j + \sum_{\alpha} \operatorname{div} \frac{l c_{\alpha}}{2} \operatorname{grad}(\rho_{\alpha} S_{\alpha} C_{j\alpha}). \end{aligned} \quad (20)$$

Здесь  $C_{j\alpha} = m_{j\alpha}/m_{\alpha}$  – массовая концентрация  $j$ -го компонента в фазе  $\alpha$ ,  $Q_j$  – источник  $j$ -го компонента,  $j = 1, \dots, n_c$ . Уравнение (20) учитывает только конвективный массоперенос, диффузионный поток  $j$ -го компонента в фазе  $\alpha$  не учитывается.

Каждая подвижная фаза в целом характеризуется своей скоростью фильтрации, все компоненты данной фазы имеют ту же скорость фильтрации. Поэтому в качестве уравнения движения в многокомпонентной модели используем обобщенный закон Дарси (2), определяющий фазовую скорость.

Также остается справедливым для многофазной многокомпонентной жидкости модифицированное уравнение сохранения энергии (3), поскольку температура считается одинаковой для всех компонентов.

Особенностью указанных уравнений в многокомпонентном случае является зависимость плотности и вязкости фаз от компонентного состава (концентраций компонентов). Функции  $\rho_{\alpha} = \rho_{\alpha}(P_{\alpha}, T, C_{j\alpha})$ ,  $\mu_{\alpha} = \mu_{\alpha}(P_{\alpha}, T, C_{j\alpha})$  считаются известными, например, плотности могут быть вычислены с помощью уравнений состояния (Пенга-Робинсона, Редлиха-Квонга-Соаве), а вязкости — на основе известных аналитических формул, например, корреляции Лоренца-Брея-Кларка [17].

Энтальпия фазы определяется по энтальпиям компонентов:

$$H_{\alpha} = \sum_j H_{j\alpha}. \quad (21)$$

Капиллярные давления и относительные фазовые проницаемости по-прежнему считаются заданными функциями насыщенностей, например, в виде (12)-(15).

Помимо соотношения (5) для насыщенностей фаз выполняются аналогичные соотношения для концентраций компонентов в фазах:

$$\sum_{j=1}^{n_c} C_{j\alpha} = 1, \quad \alpha = 1, \dots, n_{\alpha}. \quad (22)$$

По сравнению с моделью многофазной фильтрации число неизвестных функций возросло, в частности, за счет рассмотрения массовых концентраций компонентов, поэтому для замыкания системы уравнений в многокомпонентном случае необходимо использовать дополнительные соотношения. В качестве таковых могут использоваться константы фазового равновесия:

$$\frac{C_{j\alpha}}{C_{j\beta}} = K_{j\alpha\beta}(T, P, C_{j\gamma}), \quad \alpha, \beta, \gamma = 1, \dots, n_\alpha, \quad j = 1, \dots, n_c, \quad (23)$$

которые вычисляются по законам термодинамики исходя из гипотезы о существовании в каждой точке пористой среды локального термодинамического равновесия и при решении задач фильтрации считаются явно заданными функциями [17, 18].

## 5. Тестовые расчеты

В качестве тестовых задач рассмотрим неизотермические задачи о течении в однородной пористой среде трехфазной трехкомпонентной жидкости в простейшем случае. Будем считать пористость и абсолютную проницаемость постоянными во всей расчетной области, флюид состоящим из водного  $w$ , нефтяного  $n$  и газового  $g$  компонентов, причем жидкая водная, жидкая углеводородная и газовая фазы образованы только соответствующими компонентами, массопереноса между фазами не происходит. В расчетах используем модель, представленную в разделе 2, реализованную с помощью алгоритма из раздела 3.

### Задача о закачке газа под давлением

Эта задача демонстрирует влияние нагрева на процесс фильтрации в полубесконечной области. Постановка является одномерной, течение происходит в горизонтальном направлении слева направо из-за разности давлений на концах рассматриваемого единичного отрезка: на левой границе идет закачка газа под давлением. Сравниваются результаты расчетов при разных граничных условиях для температуры.

Начальные условия:

$$S_w = 0.4, \quad S_n = 0.3, \quad S_g = 0.3, \quad P_w = P_{\text{атм}}, \quad T = 285\text{K}. \quad (24)$$

Граничные условия для насыщенностей и давления:

$$\begin{aligned}
 S_w|_{x=0} &= 0.15, & \frac{\partial S_w}{\partial x}|_{x=1} &= 0, \\
 S_n|_{x=0} &= 0.15, & \frac{\partial S_n}{\partial x}|_{x=1} &= 0, \\
 P_w|_{x=0} &= 1.1 \cdot P_{\text{атм}}, & P_w|_{x=1} &= P_{\text{атм}}.
 \end{aligned}
 \tag{25}$$

Два варианта граничных условий для температуры:

$$T|_{x=0} = T|_{x=1} = 285K \tag{26}$$

или

$$T|_{x=0} = 320K, \quad \frac{\partial T}{\partial x}|_{x=1} = 0. \tag{27}$$

Результаты расчетов представлены на рис. 6 – рис. 13 в виде распределения насыщенностей и температуры на разные моменты времени. Можно видеть, что благодаря нагреванию процесс фильтрации происходит быстрее, изменяется форма графиков насыщенностей. Распределение давления также меняется, хотя и незначительно (различия в 4-5 знака).

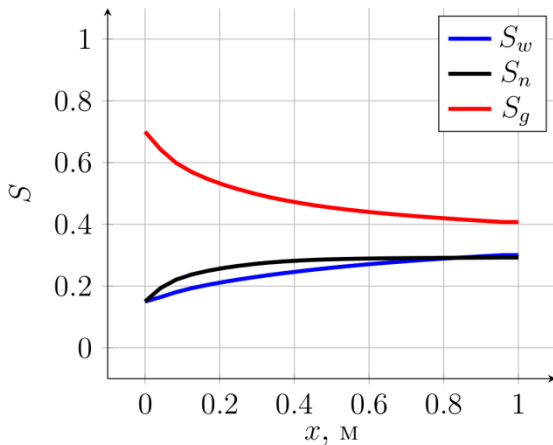


Рис. 6. Насыщенности,  $t = 5000$  с, граничные условия (26)

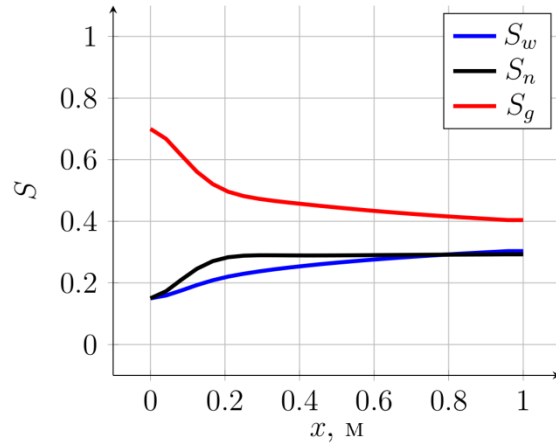


Рис. 7. Насыщенности,  $t = 5000$  с, граничные условия (27)

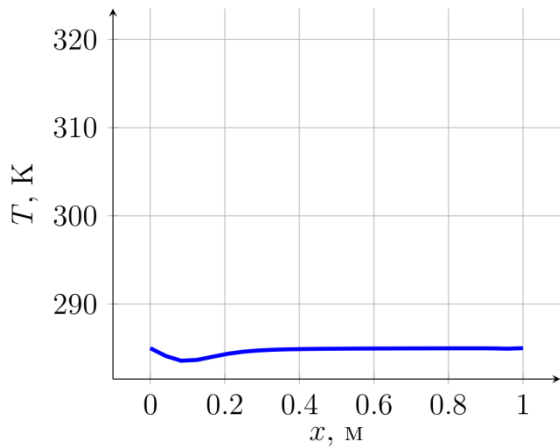


Рис. 8. Температура,  $t = 5000$  с, граничные условия (26)

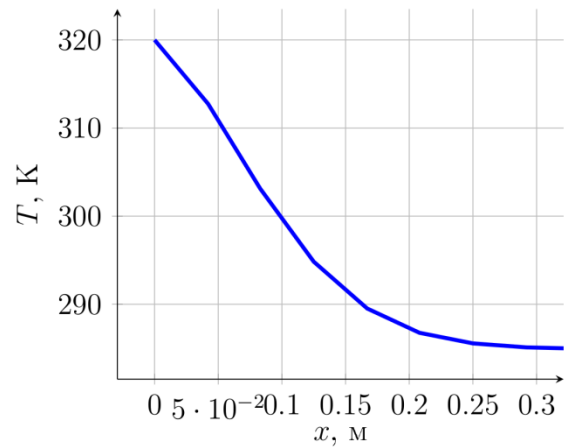


Рис. 9. Температура,  $t = 5000$  с, граничные условия (27)

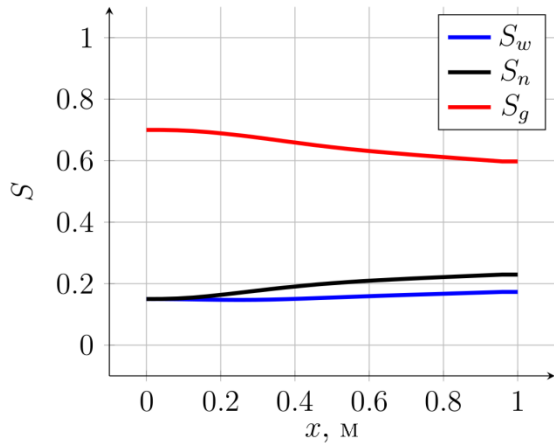


Рис. 10. Насыщенности,  $t = 25000$  с, граничные условия (26)

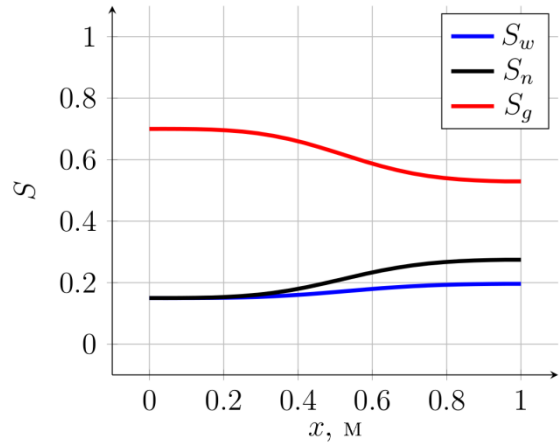


Рис. 11. Насыщенности,  $t = 25000$  с, граничные условия (27)

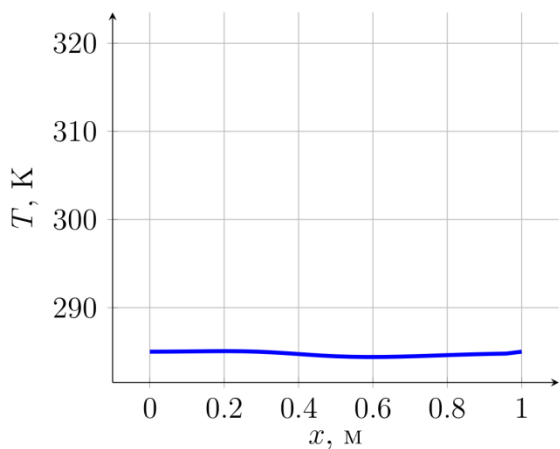


Рис. 12. Температура,  $t = 25000$  с, граничные условия (26)

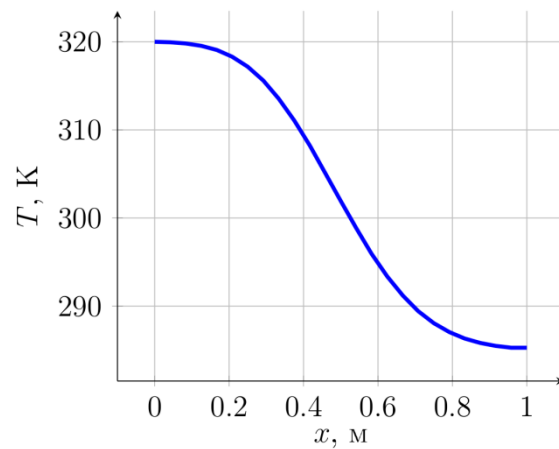


Рис. 13. Температура,  $t = 25000$  с, граничные условия (27)



### 3D задача просачивания с источником на границе

Рассмотрим трехмерную область пористой среды, имеющую форму куба, верхняя поверхность открыта, нижняя грань — непроницаема, через боковые грани может происходить просачивание. В начальный момент времени водой занято лишь 10 % области, а для нефти и газа задано периодическое распределение. Ось  $Oy$  направлена снизу вверх.

На верхней грани в углу расположен источник горячей воды, который занимает девятую часть поверхности. Действует сила тяжести — для большей наглядности ускорение свободного падения положено равным  $98 \text{ м/с}^2$ . Квадратная расчетная сетка состоит из  $N_x \times N_y \times N_z$  ячеек.

Начальные условия:

$$\begin{aligned}
 S_w &= 0.1, \\
 S_n(x, y, z) &= 0.4 + 0.1 \cdot \sin^2(x \cdot N_x + y \cdot N_y + z \cdot N_z), \\
 S_g(x, y, z) &= 0.4 + 0.1 \cdot \cos^2(x \cdot N_x + y \cdot N_y + z \cdot N_z), \\
 P_w &= P_{\text{атм}}, \\
 T &= 285 \text{ K}.
 \end{aligned} \tag{28}$$

Граничные условия:

$$\begin{aligned}
 T|_{y=1, 0 < x < 0.33, 0 < z < 0.33} &= 320 \text{ K}, \\
 P|_{y=1, 0 < x < 0.33, 0 < z < 0.33} &= P_{\text{атм}}, \\
 P_\alpha|_{y=0} &\text{ определяется из условия } (\mathbf{u}_\alpha \cdot \vec{n})|_{y=0} = 0, \\
 S_w|_{y=1, 0 < x < 0.33, 0 < z < 0.33} &= 0.6, \\
 S_n|_{y=1, 0 < x < 0.33, 0 < z < 0.33} &= 0.05,
 \end{aligned} \tag{29}$$

на остальных граничных поверхностях нормальные составляющие потоков  $T, S_w, S_n, P_w$  равны нулю.

Результаты расчетов изображены на рис. 14 – рис. 23: приведены распределения давления, температуры и насыщенностей трех фаз на два различные момента времени. Видео (рис. 24) иллюстрирует динамику процесса просачивания. Можно видеть, что фронты от источника распространяются по области, около нижней границы происходит накопление воды, вода постепенно вытесняет нефть и газ через боковые и верхнюю грани.

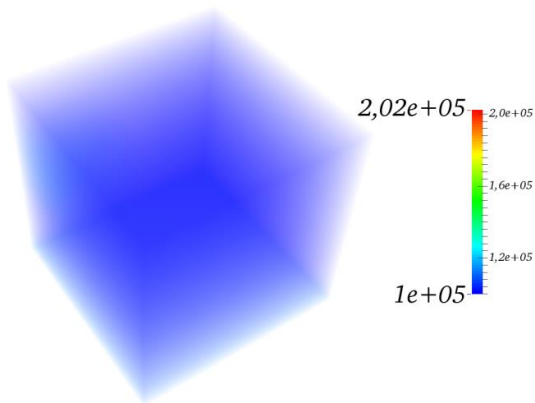


Рис. 14. Давление  $P_w$ ,  $t = 200$  с

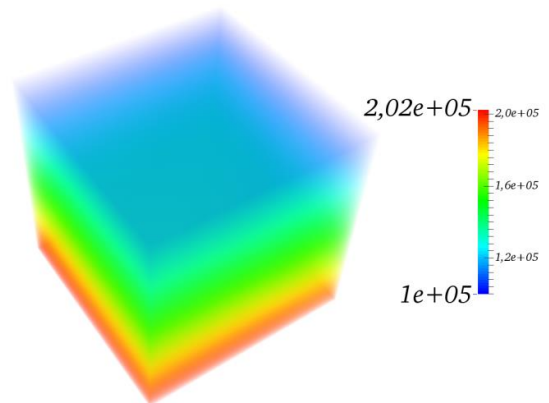


Рис. 15. Давление  $P_w$ ,  $t = 2000$  с

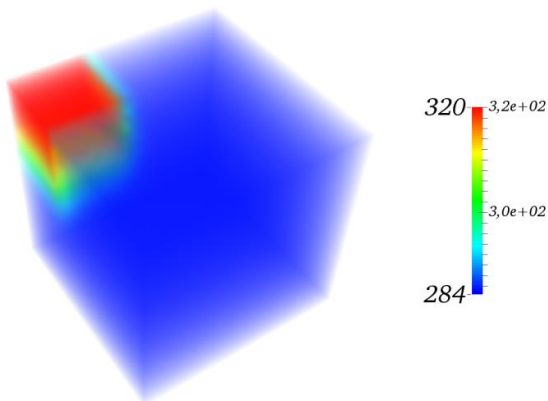


Рис. 16. Температура,  $t = 200$  с

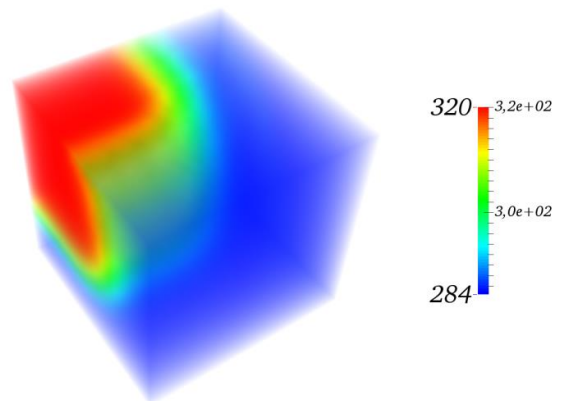


Рис. 17. Температура,  $t = 2000$  с

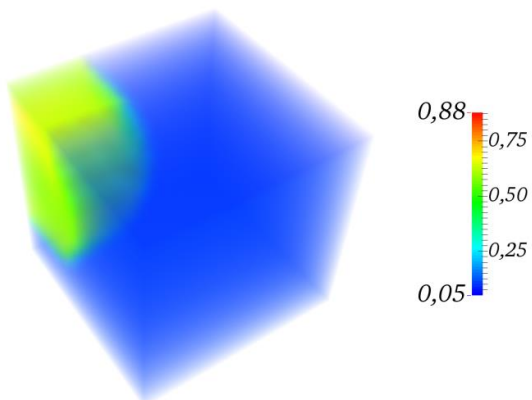


Рис. 18. Насыщенность  $S_w$ ,  $t = 200$  с

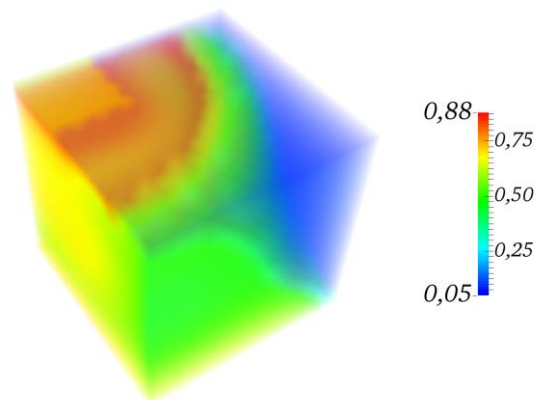


Рис. 19. Насыщенность  $S_w$ ,  $t = 2000$  с

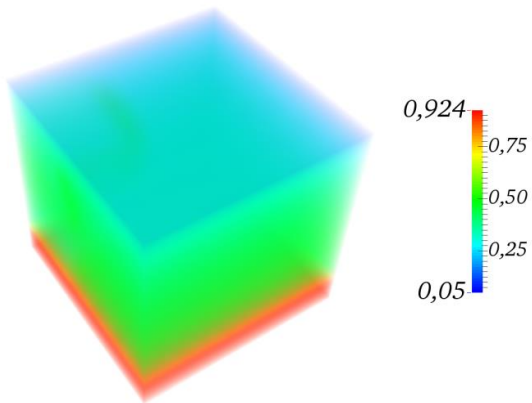


Рис. 20. Насыщенность  $S_n$ ,  $t = 200$  с

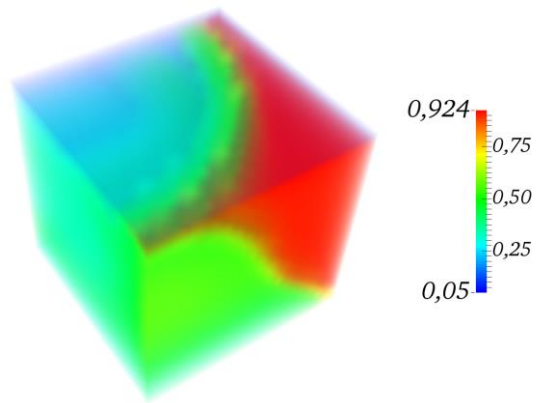


Рис. 21. Насыщенность  $S_n$ ,  $t = 2000$  с

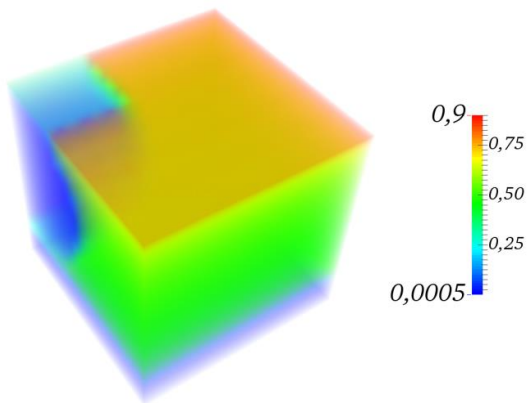


Рис. 22. Насыщенность  $S_g$ ,  $t = 200$  с

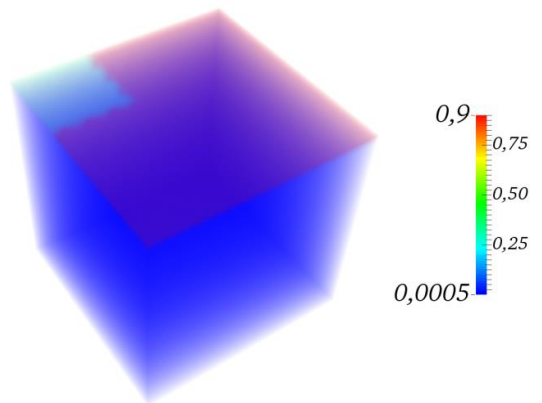
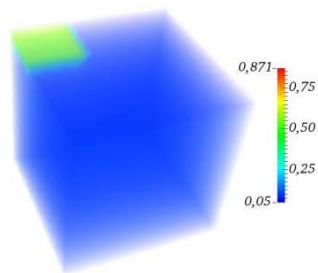
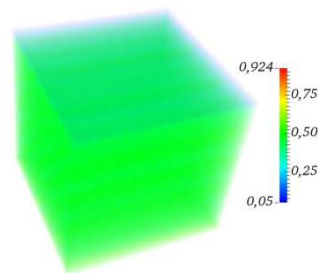


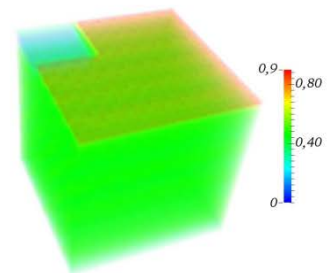
Рис. 23. Насыщенность  $S_g$ ,  $t = 2000$  с



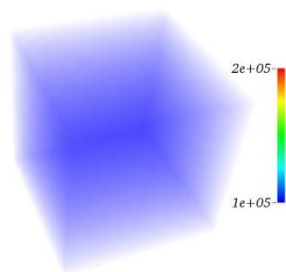
Насыщенность водной фазы



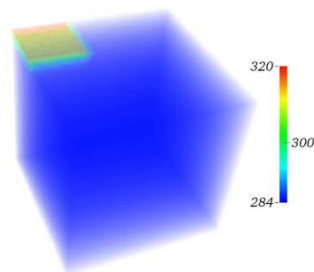
Насыщенность нефтяной фазы



Насыщенность газовой фазы



Давление



Температура

Рис. 24. (Видео) Динамика процесса просачивания

## 6. Заключение

Описанный подход к моделированию течений в пористых средах в дальнейшем предполагается использовать для решения прикладных задач добычи углеводородов, в том числе слабоподвижной нефти, вязкость которой существенно зависит от температуры. Поскольку при решении таких задач необходимо учитывать межфазный массообмен, построенная по аналогии с КГД системой уравнений многофазная многокомпонентная модель представляется перспективной. Предложенный алгоритм явного типа эффективно адаптируется к современным вычислительным системам сверхвысокой производительности.

## Библиографический список

- [1] Simulation of Flow in Porous Media: Applications in Energy and Environment / P. Bastian et al. (Eds.), Radon Series on Computational and Applied Mathematics, Vol. 12, De Gruyter, Berlin, 2013.
- [2] Thermo-Hydro-Mechanical-Chemical Processes in Fractured Porous Media: Modelling and Benchmarking. Benchmarking Initiatives / O. Kolditz et al. (Eds.), Springer, 2016. – doi:10.1007/978-3-319-29224-3
- [3] Четверушкин Б.Н., Морозов Д.Н., Трапезникова М.А., Чурбанова Н.Г., Шильников Е.В. Об одной схеме для решения задач фильтрации // Математическое моделирование. – 2010. – Т.22, №4. – С. 99-109.
- [4] Морозов Д.Н., Трапезникова М.А., Четверушкин Б.Н., Чурбанова Н.Г. Моделирование задач фильтрации на гибридных вычислительных системах // Математическое моделирование. – 2012. – Т.24, №10. – С. 33-39.
- [5] Chetverushkin, Boris N.; Churbanova, Natalia G.; Kuleshov, Andrey A.; Lyupa, Anastasiya A.; Trapeznikova, Marina A. Application of kinetic approach to porous medium flow simulation in environmental hydrology problems on high-performance computing systems // RJNAMM. – 2016. – Vol. 31 (4). – P. 187-196. – doi:10.1515/rnam-2016-0019
- [6] Succi, S. The lattice Boltzmann equation in fluid dynamics and beyond. – Clarendon Press, Oxford, 2001.
- [7] Четверушкин Б.Н. Кинетически-согласованные схемы в газовой динамике. – М.: Изд-во МГУ, 1999.
- [8] Четверушкин Б.Н. К вопросу об ограничении снизу на масштабы в механике сплошной среды / Время, хаос, математические проблемы, Вып.4. – М.: Изд-во МГУ, 2009, С. 75-96.
- [9] Трапезникова М.А., Белоцерковская М.С., Четверушкин Б.Н. Аналог кинетически-согласованных схем для моделирования задачи фильтрации // Математическое моделирование. – 2002. – Т.14, №10. – С. 69-76.

- [10] Азиз Х., Сеттари Э. Математическое моделирование пластовых систем. – М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004.
- [11] Басниев К.С., Дмитриев Н.М., Каневская Р.Д., Максимов В.М. Подземная гидромеханика: Учебник для вузов. – М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005.
- [12] Морозов Д.Н., Трапезникова М.А., Четверушкин Б.Н., Чурбанова Н.Г. Использование явных схем для моделирования процесса двухфазной фильтрации // Математическое моделирование. – 2011. – Т. 23, № 7. – С. 52-60.
- [13] Люпа А.А., Морозов Д.Н., Трапезникова М.А., Четверушкин Б.Н., Чурбанова Н.Г. Моделирование трехфазной фильтрации явными методами на гибридных вычислительных системах // Математическое моделирование. – 2014. – Т. 26, № 4. – С. 33-43.
- [14] Parker, J.C.; Lenhard, R.J.; Koppusami, T. A parametric model for constitutive properties governing multiphase flow in porous media // Water Resources Research. – 1987. – Vol. 23 (4). – P. 618-624.
- [15] Helmig, R. Multiphase flow and transport processes in the subsurface – A contribution to the modeling of hydrosystems. – Springer, 1997.
- [16] Маскет М. Физические основы технологии добычи нефти. – М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004.
- [17] Chen Z. Reservoir Simulation: Mathematical Techniques in Oil Recovery. – SIAM, Philadelphia, 2007.
- [18] Композиционная неизотермическая модель фильтрации в пористой среде с учетом химических реакций и активной твердой фазы / В.Е. Борисов [и др.] // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. – 2013. – №91. – 32 с. – URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2013-91>

## Оглавление

1. Введение.....	3
2. Математическая модель неизотермической многофазной фильтрации .....	3
3. Вычислительный алгоритм .....	9
4. Многокомпонентная модель фильтрации .....	11
5. Тестовые расчеты.....	13
6. Заключение .....	19
Библиографический список.....	19