



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Балашов В.А.

Численное моделирование
двумерных течений
умеренно-разреженного газа
в областях со сложной
геометрией

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Балашов В.А. Численное моделирование двумерных течений умеренно-разреженного газа в областях со сложной геометрией // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2016. № 104. 24 с. doi:[10.20948/prepr-2016-104](https://doi.org/10.20948/prepr-2016-104)
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2016-104>

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ОРДЕНА ЛЕНИНА
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М. В. КЕЛДЫША

В.А. Балашов

**Численное моделирование двумерных течений
умеренно-разреженного газа в областях
со сложной геометрией**

Москва, 2016

*В.А. Балашов*¹, Численное моделирование двумерных течений умеренно-разреженного газа в областях со сложной геометрией

Аннотация

В работе рассмотрено применение квазигидродинамической системы уравнений для моделирования двумерных изотермических течений умеренно-разреженного газа в образцах модельной пористой среды. В качестве граничных условий использованы условия скольжения Максвелла, для которых предложен способ их разностной аппроксимации и алгоритм реализации. Приведены результаты расчетов течений для трех образцов с различными значениями коэффициентов пористости и абсолютной проницаемости при различных значениях среднего давления. Отмечен правильный характер зависимости значения коэффициента проскальзывания Клинкенберга от значения абсолютной проницаемости.

Ключевые слова: квазигидродинамическая система уравнений, цифровой керн, умеренно-разреженный газ, эффект Клинкенберга, условия проскальзывания.

V.A. Balashov, Numerical simulation of two-dimensional moderately rarefied gas flow in domains with complex geometry

Abstract

Application of quasi-hydrodynamic equations for simulation of two-dimensional isothermal moderately rarefied gas flows in samples of artificial porous media is considered. Maxwell boundary conditions are used, its approximation and implementation algorithm are suggested. Results of numerical simulation of flows for three samples with different porosities and permeabilities under different averaged pressure are presented. The qualitatively right Klinkenberg slippage coefficient dependence on coefficient of absolute permeability is noted.

Key words and phrases: quasi-hydrodynamic equations, digital rock physics, rarefied gas, Klinkenberg effect, slip boundary condition.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-31-00400 мол_а).

¹ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 125047 Москва, Миусская пл., 4

1 Введение

Моделирование микро- и нанотечений в настоящее время приобретает все более актуальный характер, что связано с бурным развитием микроэлектромеханических (МЭМС) и наноэлектромеханических систем (НЭМС) различного рода: актуаторов (исполнительные механизмы), микроклапанов, различных микронасосов, микроигл, микросопел, микротурбин, акселерометров, датчиков угловых скоростей, анализаторов среды и многих других [1].

Также моделирование микротечений находит применение в так называемой технологии «цифровой керн» («digital rock physics») при исследовании фильтрационных свойств образцов горных пород методами вычислительного эксперимента. При воспроизведении натуральных экспериментов по определению газопроницаемости в соответствующей математической модели необходимо учитывать особенности течения газа в *лабораторных условиях*, для которых характерны низкие значения среднего давления по сравнению с пластовым. В частности, это приводит к увеличению наблюдаемого коэффициента проницаемости по сравнению с истинным. Зависимость коэффициента проницаемости от среднего давления называют эффектом Клинкенберга, который ввел соответствующую коррекцию [2]:

$$k = k_{\infty} \left(1 + \frac{b}{\bar{p}} \right), \quad (1)$$

где k_{∞} — коэффициент абсолютной проницаемости (или проницаемость «по жидкости»), k — (наблюдаемый) коэффициент проницаемости, полученный в эксперименте, \bar{p} — среднее давление, b — коэффициент скольжения Клинкенберга, зависящий от геометрии порового пространства и свойств фильтруемого газа. Отметим, что учет указанного эффекта является стандартной процедурой при исследовании образцов горных пород [3, приложение 4].

Причиной необычного поведения течений газов на микромасштабах является сравнительно высокая степень разреженности, характеризующаяся числом Кнудсена $\text{Kn} = \lambda/L$, где λ — длина свободного пробега, а L — характерный пространственный масштаб задачи [4].

Для случая $\text{Kn} < 10^{-3}$ течения газа можно моделировать с помощью уравнений Навье-Стокса с граничными условиями прилипания [5]. В ряде работ предприняты попытки модификации уравнений Навье-Стокса и/или соответствующих граничных условий таким образом, чтобы увеличить диапазон их применимости по числам Кнудсена. Примером такой модификации является замена классических условий прилипания на условия скольжения Максвелла [6—9], согласно которому скорость в непосредственной близости от стенки пропорциональна производной по нормали к поверхности от касательной составляющей скорости. Это условие для изотермических течений и

неподвижной границы можно записать в виде:

$$\mathbf{u}_\tau = \frac{2 - \sigma}{\sigma} \lambda \frac{\partial \mathbf{u}_\tau}{\partial \mathbf{n}},$$

где \mathbf{u}_τ — касательная к границе составляющая скорости, \mathbf{n} — нормаль к границе, $\sigma \lesssim 1$ — коэффициент аккомодации для скорости, или доля диффузно отраженных молекул. Уравнения Навье-Стокса с указанными условиями скольжения применимы при $10^{-3} < \text{Kn} < 10^{-1}$ [5, 10, 11].

В работах [12, 13] предложена другая модификация граничных условий — так называемые условия скольжения второго порядка:

$$\mathbf{u}_\tau = \frac{2 - \sigma}{\sigma} \lambda \frac{\partial \mathbf{u}_\tau}{\partial \mathbf{n}} + a_2 \lambda^2 \frac{\partial^2 \mathbf{u}_\tau}{\partial \mathbf{n}^2},$$

позволяющие получать согласованные с экспериментом результаты расчетов при $\text{Kn} < 0.25$ [14]. Здесь a_2 — некоторая постоянная.

В 1980-х годах как первое дифференциальное приближение кинетически-согласованных разностных схем для решения уравнений газовой динамики была построена квазигазодинамическая (КГД) система уравнений [15, 16]. Позже предложена квазигидродинамическая (КГиД) система уравнений [11]. Эти системы являются модификациями уравнений Навье-Стокса специального вида, суть которых состоит в добавлении к исходным уравнениям дополнительных малых слагаемых диссипативного характера. Эти слагаемые, с одной стороны, позволяют использовать логически простые разностные схемы, а с другой — показывают хорошее совпадение получаемых с их помощью результатов с экспериментальными данными для течений в микроканалах и вблизи шара для $\text{Kn} \sim 0.1$ [10, 11, 15–17].

Помимо различных модификаций уравнений Навье-Стокса для моделирования разреженных течений также используются методы, основанные на решении уравнения Больцмана (как детерминированные [18–21], так и методы типа Монте-Карло [22–24]), методы на основе решения вариантов уравнений Барнета [25] и тринадцати моментных уравнений Грэда [26, 27]. Также сравнительно популярными являются различные модификации метода решеточных уравнений Больцмана [28–30]. Обзоры применяемых моделей и методов в рассматриваемой области можно найти, например, в [31, 32].

Настоящая работа посвящена численному исследованию применимости КГиД системы уравнений для моделирования изотермических течений умеренно-разреженного вязкого сжимаемого газа в областях со сложной геометрией, таких как, например, поровое пространство образцов горных пород. В связи с эффектом проскальзывания и сложной геометрией расчетной области особое внимание уделено алгоритму реализации граничных условий.

Автор выражает глубокую благодарность д.ф.-м.н. Т.Г. Елизаровой и к.ф.-м.н. Е.Б. Савенкову (ИПМ им. М.В. Келдыша РАН) за плодотворные обсуждения и внимание к работе.

2 Система квазигидродинамических уравнений

КГиД система уравнений для описания изотермических течений вязкого сжимаемого газа без учета внешних сил имеет вид [11, 16]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j}_m = 0, \quad (2a)$$

$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{j}_m \otimes \mathbf{u}) + \nabla p = \nabla \cdot \mathbf{\Pi}, \quad (2b)$$

где ρ — плотность, \mathbf{u} — вектор скорости, $\mathbf{j}_m = \rho(\mathbf{u} - \mathbf{w})$ — вектор плотности потока массы, $p = c_s^2 \rho$ — давление, c_s — скорость звука, $\mathbf{\Pi} = \mathbf{\Pi}^{\text{NS}} + \mathbf{\Pi}^\tau$ — тензор вязких напряжений. При этом $\mathbf{\Pi}^{\text{NS}} = \eta [(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) - (2/3)\mathbf{I} \operatorname{div} \mathbf{u}]$ — классический тензор вязких напряжений Навье-Стокса, η — коэффициент динамической вязкости, $\mathbf{\Pi}^\tau = \rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{w}$ — регуляризующий тензор напряжений, $\mathbf{w} = (\tau/\rho)(\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla p)$, τ — малый параметр, выражение для которого принимается в виде [11, стр. 41]:

$$\tau = \frac{\eta}{p \operatorname{Sc}} = \frac{\eta}{\rho c_s^2 \operatorname{Sc}}, \quad (3)$$

где Sc — число Шмидта.

Далее в работе будем рассматривать двумерный случай.

Будем считать, что на границе с твердой поверхностью выполнены следующие условия, из которых два последних — условия скольжения Максвелла:

$$\frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad u_\tau = \frac{2 - \sigma}{\sigma} \lambda \frac{\partial u_\tau}{\partial \mathbf{n}}, \quad u_n = 0, \quad (4)$$

где \mathbf{n} — единичная нормаль к поверхности, u_n — нормальная к поверхности составляющая скорости, а u_τ — касательная. Отметим, что из первого и последнего условий следует условие отсутствия потока массы через границу $\mathbf{j}_m \cdot \mathbf{n} = 0$. Для двумерного случая в декартовых координатах последние два условия можно переписать в виде

$$\begin{cases} u_x = \frac{2 - \sigma}{\sigma} \lambda \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} n_x + \frac{\partial u_x}{\partial y} n_y \right), & u_y = -u_x \frac{n_x}{n_y} & \text{если } n_y \neq 0, \\ u_y = \frac{2 - \sigma}{\sigma} \lambda \frac{\partial u_y}{\partial x}, & u_x = 0 & \text{если } n_y = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Далее везде положим $\sigma = 1$.

Длину свободного пробега будем вычислять по формуле Чепмена [7]:

$$\lambda = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta}{p} \sqrt{\mathcal{R}T} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta}{\rho c_s}, \quad (6)$$

где \mathcal{R} — газовая постоянная, T — температура.

3 Геометрическая модель расчетной области

Во всех расчетах будем использовать декартову ортогональную сетку с равными шагами по пространству $h_x = h_y = h$. Будем считать, каждая ячейка расчетной области относится либо к пустотному пространству (*активная ячейка*, т.е. там может «течь» газ), либо к породе (*неактивная ячейка*). Таким образом, если сопоставить неактивным ячейкам черный цвет, а активным — белый, то мы получим бинарное «пиксельное» (а в трехмерном случае «воксельное») изображение расчетной области. В свою очередь, самому изображению соответствует некоторый бинарный массив.

Подобная геометрическая модель применяется в рамках технологии «цифровой керн»: соответствующий бинарный массив получается в результате последовательного применения компьютерной томографии исследуемого образца горной породы и специальных алгоритмов сегментирования [33].

4 Численный алгоритм

В данном разделе выписана используемая разностная схема и алгоритмы реализации граничных условий. Используются обозначения из работы [34].

4.1 Разностная схема

Сперва выпишем разностную схему для *внутренних* узлов сетки. Пусть $\Omega = (0, L_x) \times (0, L_y)$ — область расчета. На $[0, L_x]$ введем равномерную сетку $\bar{\omega}_{xh}$ с шагом $h_x = h$ с узлами $h/2 = x_1 < x_2 < \dots < x_{N_x} = L_x - h/2$. Пусть ω_{xh} состоит из ее внутренних узлов x_m , $2 \leq m \leq N_x - 1$. Введем вспомогательную *двойственную* сетку $\bar{\omega}_{xh}^*$ с узлами $x_{m+1/2} = (x_m + x_{m+1})/2$, $0 \leq m \leq N_x$. Будем считать, что ω_{xh}^* состоит из ее внутренних узлов $x_{m+1/2}$, $1 \leq m \leq N_x - 1$. Аналогично вводятся сетки с шагом $h_y = h$ на $[0, L_y]$. Таким образом, сетка $\bar{\omega}_{xh} \times \bar{\omega}_{yh}$ содержит центры расчетных ячеек, центры граней лежат на сетках $\bar{\omega}_{xh} \times \bar{\omega}_{yh}^*$ и $\bar{\omega}_{xh}^* \times \bar{\omega}_{yh}$, а угловые узлы — на сетке $\bar{\omega}_{xh}^* \times \bar{\omega}_{yh}^*$.

Пусть $H(\omega)$ — множество функций, областью определения которых является сетка ω . Для $v \in H(\bar{\omega}_{xh})$ и $u \in H(\bar{\omega}_{xh}^*)$ введем операторы сеточного усреднения $s_x : H(\bar{\omega}_{xh}) \rightarrow H(\omega_{xh}^*)$, $s_x^* : H(\bar{\omega}_{xh}^*) \rightarrow H(\bar{\omega}_{xh})$ и разностного дифференцирования $\delta_x : H(\bar{\omega}_{xh}) \rightarrow H(\omega_{xh}^*)$, $\delta_x^{\circ} : H(\bar{\omega}_{xh}) \rightarrow H(\omega_{xh})$, $\delta_x^* : H(\bar{\omega}_{xh}^*) \rightarrow H(\bar{\omega}_{xh})$ по формулам:

$$(s_x v)_{m-1/2} = \frac{v_{m-1} + v_m}{2}, \quad (s_x^* u)_m = \frac{u_{m-1/2} + u_{m+1/2}}{2}, \quad (\delta_x^{\circ} v)_m = \frac{v_{m+1} - v_{m-1}}{2h},$$

$$(\delta_x v)_{m-1/2} = \frac{v_m - v_{m-1}}{h}, \quad (\delta_x^* u)_m = \frac{u_{m+1/2} - u_{m-1/2}}{h}.$$

Аналогично определяются $s_y, s_y^*, \delta_y, \delta_y^\circ, \delta_y^*$. Отметим, что $\delta_x^\circ = \delta_x^* s_x, \delta_y^\circ = \delta_y^* s_y$.

Пусть $\delta_t : H(\bar{\omega}_{xh} \times \bar{\omega}_{yh}) \rightarrow H(\bar{\omega}_{xh} \times \bar{\omega}_{yh})$ — оператор разностного дифференцирования по времени:

$$\delta_t v = \frac{v^{n+1} - v^n}{\Delta t}, \quad \text{где } \Delta t \text{ — шаг по времени.}$$

Тогда разностная схема для (2), предложенная в [16], примет вид:

$$\delta_t \rho + \delta_x^* j_{mx} + \delta_y^* j_{my} = 0, \quad (7a)$$

$$\delta_t(\rho u_x) + \delta_x^*(j_{mx} s_x u_x) + \delta_y^*(j_{my} s_y u_x) = \delta_x^* \Pi_{xx} + \delta_y^* \Pi_{yx}, \quad (7b)$$

$$\delta_t(\rho u_y) + \delta_x^*(j_{mx} s_x u_y) + \delta_y^*(j_{my} s_y u_y) = \delta_x^* \Pi_{xy} + \delta_y^* \Pi_{yy}, \quad (7c)$$

где дискретизации для $\Pi_{xx}^{NS}, \Pi_{xy}^{NS}, \Pi_{xx}^\tau, \Pi_{xy}^\tau, j_{mx}$ определены на сетке $\bar{\omega}_{xh}^* \times \bar{\omega}_{yh}$:

$$j_{mx} = (s_x \rho)(s_x u_x - w_x), \quad w_x = \tau^{(x)} \left[(s_x u_x) \delta_x u_x + (s_x u_y) \delta_y^\circ s_x u_x + \frac{\delta_x p}{s_x \rho} \right],$$

$$\Pi_{xx}^{NS} = \frac{4}{3} \eta \delta_x u_x - \frac{2}{3} \eta \delta_y^\circ s_x u_y, \quad \Pi_{xx}^\tau = (s_x \rho)(s_x u_x) w_x,$$

$$\Pi_{xy}^{NS} = \eta \delta_y^\circ s_x u_x + \eta \delta_x u_y, \quad \Pi_{xy}^\tau = (s_x \rho)(s_x u_x) w_y^{(x)},$$

$$w_y^{(x)} = \tau^{(x)} \left[(s_x u_x) \delta_x u_y + (s_x u_y) \delta_y^\circ s_x u_y + \frac{\delta_y s_x p}{s_x \rho} \right], \quad \tau^{(x)} = \frac{\eta}{(s_x \rho) c_s^2 \text{Sc}},$$

а для $\Pi_{yx}^{NS}, \Pi_{yy}^{NS}, \Pi_{yx}^\tau, \Pi_{yy}^\tau, j_{my}$ — на сетке $\bar{\omega}_{xh} \times \bar{\omega}_{yh}^*$:

$$j_{my} = (s_y \rho)(s_y u_y - w_y), \quad w_y = \tau^{(y)} \left[(s_y u_x) \delta_x^\circ s_y u_y + (s_y u_y) \delta_y u_y + \frac{\delta_y p}{s_y \rho} \right],$$

$$\Pi_{yx}^{NS} = \eta \delta_y u_x + \eta \delta_x^\circ s_y u_y, \quad \Pi_{yx}^\tau = (s_y \rho)(s_y u_y) w_x^{(y)},$$

$$\Pi_{yy}^{NS} = \frac{4}{3} \eta \delta_y u_y - \frac{2}{3} \eta \delta_x^\circ s_y u_x, \quad \Pi_{yy}^\tau = (s_y \rho)(s_y u_y) w_y,$$

$$w_x^{(y)} = \tau^{(y)} \left[(s_y u_x) \delta_x^\circ s_y u_x + (s_y u_y) \delta_y u_x + \frac{\delta_x s_y p}{s_y \rho} \right], \quad \tau^{(y)} = \frac{\eta}{(s_y \rho) c_s^2 \text{Sc}}.$$

4.2 Алгоритм реализации граничных условий

Теперь выпишем разностную схему для аппроксимации условий (5) в *граничных* узлах сетки. Будем считать, что, например, левое ребро, центр которого принадлежит сетке $\bar{\omega}_{xh}^* \times \bar{\omega}_{yh}$, рассматриваемой расчетной ячейки является граничным. Тогда соответствующая схема примет вид

$$\begin{aligned} j_{mx} &= 0, & \Pi_{xy}^{NS} &= \eta \delta_x u_y, & \Pi_{xx}^\tau &= 0, \\ w_x = u_x &= 0, & \Pi_{xx}^{NS} &= \frac{4}{3} \eta \delta_x u_x - \frac{2}{3} \eta \delta_y^*(u_y)_{a2}, & \Pi_{xy}^\tau &= 0, \\ w_y^{(x)} &= \tau^{(x)} \left[(u_y)_{a1} \delta_x^*(u_y)_{a2} + \frac{c_s^2 \delta_y^* \rho_{a2}}{\rho_{a1}} \right], & \tau^{(x)} &= \frac{\eta}{\rho_{a1} c_s^2 S c}. \end{aligned}$$

В случае остальных ребер схема выписывается аналогично. Видно, что для расчета необходимы значения в узлах сетки $\bar{\omega}_{xh}^* \times \bar{\omega}_{yh}^*$ (т.е. концах соответствующих граничных ребер). Для их вычисления ниже представлены алгоритмы 1 и 2. Забегая вперед, отметим, что в выписанной разностной схеме нижним индексом $a1$ помечены параметры, значения которых вычислены в алгоритме 1, а индексом $a2$ — в алгоритме 2.

Рассмотрим некоторую *активную* ячейку расчетной области вместе с семью соседними (см. рис. 1). Каждой ячейке (а точнее, ее геометрическому центру) из рассматриваемой группы сопоставим в соответствие пару целых индексов, как показано на рис. 1. Тогда центрам ребер будут соответствовать пары индексов, в которых ровно один полуцелый индекс, а концам ребер — в которых оба индекса полуцелые.

На основе типов соседних ячеек для данной ячейки введем матрицу *активности* a_{ij} размером 3×3 , где $i, j \in \{0, 1, 2\}$. Если ячейка с индексами (i, j) относится к твердой стенке (т.е. является неактивной), тогда $a_{ij} = 0$, в противном случае $a_{ij} = 1$. Например, для расчетной ячейки, показанной вместе с соседними ячейками на рис. 1 (серый цвет соответствует неактивным ячейкам, белый — активным), матрица активности имеет вид:

$$(a_{ij}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Заметим, что для всех ячеек, участвующих в расчете, $a_{11} = 1$, а сама матрица активности будет буквально соответствовать конфигурации ячеек, если ее симметрично отразить относительно второй строки.

Будем считать, что нормаль в угловых узлах направлена как показано на рис. 1. Для вычисления координат нормали в угловом узле с индексами (k, l)

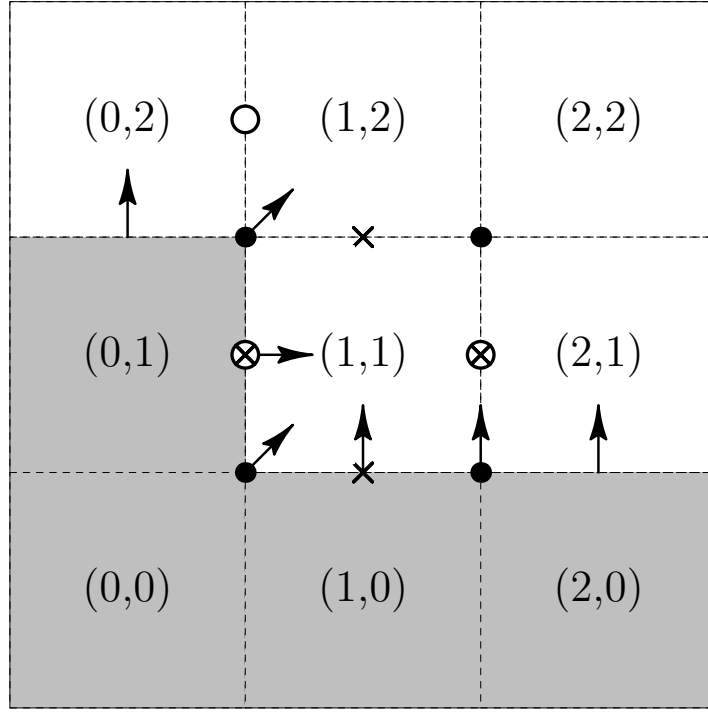


Рис. 1. В центре находится рассматриваемая активная ячейка. Серым цветом обозначены неактивные соседние ячейки, стрелками показаны нормали к границе в соответствующих узлах.

воспользуемся следующим выражением:

$$\mathbf{n}_{k,l} = a_{k-\frac{1}{2},l-\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} + a_{k+\frac{1}{2},l-\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + a_{k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + a_{k-\frac{1}{2},l+\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Введем матрицу B и вектор-столбец \mathbf{a} :

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}(i,j) = [a_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \quad a_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \quad a_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \quad a_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}]^T,$$

где индексы i и j — полуцелые. Тогда $\mathbf{n}_{k,l} = B\mathbf{a}(k,l)$.

Пусть даны матрица активности ячейки a_{ij} и значения u_x , u_y и ρ в центрах ячеек, то есть в точках с целыми индексами (эти узлы принадлежат основной сетке). Пусть $\text{mlt}(\mathbf{v})$ — функция, ставящая в соответствие некоторому вектору \mathbf{v} произведение его компонент. В алгоритме 1 описано вычисление параметров течения в центрах верхнего и нижнего ребер текущей ячейки (в узлах с индексами $(1, 1/2)$, $(1, 3/2)$), причем алгоритм годен как для вычисления во внутренних узлах, так и в граничных. Алгоритм для вычисления значений параметров в узлах с индексами $(1/2, 1)$, $(3/2, 1)$, на рис. 1 обозначенных значками « \otimes », совершенно аналогичен алгоритму 1.

Алгоритм 2 описывает вычисление значений параметров течения в вершинах расчетной ячейки, т.е. в узлах с индексами $(1/2, 1/2)$, $(1/2, 3/2)$, $(3/2, 3/2)$,

Алгоритм 1 Вычисление значений параметров в узлах с индексами $(1, 1/2), (1, 3/2)$, на рис. 1 обозначенных значками «X»

```
1:  $i = 1$ 
2: for  $k = 0$  to  $2$  do
3:    $j = (k + 1)/2$ 
4:   if  $a_{ik} = 0$  {соседняя ячейка является неактивной} then
5:      $\rho_{ij} = \rho_{11}$ 
6:     вычисляем  $\lambda$  по формуле (6)
7:      $(u_y)_{ij} = 0, (u_x)_{ij} = (u_x)_{11}\lambda/(\lambda + 0.5h)$ 
8:   else
9:      $\rho_{ij} = (s_y\rho)_{ij}, (u_x)_{ij} = (s_y u_x)_{ij}, (u_y)_{ij} = (s_y u_y)_{ij}$ 
10:  end if
11:   $k = k + 2$ 
12: end for
```

$(3/2, 1/2)$. В строке 5 рассмотрен случай, когда все 4 ячейки, инцидентные рассматриваемому узлу, являются активными. Тогда значения параметров в нем вычисляются усреднением соответствующих значений из всех четырех ячеек. На рис. 1 такой узел имеет индексы $(3/2, 3/2)$. В строке 7 рассмотрен в известном смысле вырожденный случай, когда две ячейки «соприкасаются» только по одной вершине. В данной работе считаем, что в этом случае эти ячейки не сообщаются. Строки 15–20 необходимы на тот случай, когда для вычислений в строках 22, 24 понадобится значение скорости в точке, ранее не рассмотренной. Это имеет место для узла с индексами $(1/2, 3/2)$ в случае конфигурации ячеек, представленной на рис. 1: для вычисления скорости в этом узле необходимо значение скорости в $(1, 3/2)$, которое вычисляется в первом алгоритме, и значение в узле с индексами $(1/2, 2)$, на рис. 1 помеченного символом «O», которое ранее не было найдено.

5 О расчете коэффициента проницаемости

В данном разделе опишем методику проведения вычислительного эксперимента по определению значения коэффициента проницаемости k .

Рассмотрим некоторый образец пористой среды длиной L_x , шириной L_z и высотой L_y . Будем считать, что на входе $x = 0$ и выходе $x = L_x$ из расчетной области фиксированы значения давления p_1 и p_2 , а на остальных сторонах стоят твердые стенки. Тогда можно считать, что газ преимущественно течет вдоль направления Ox . Выражение для массового расхода через сечение A ,

Алгоритм 2 Вычисление значений параметров течения в узлах с индексами $(1/2, 1/2)$, $(1/2, 3/2)$, $(3/2, 3/2)$, $(3/2, 1/2)$, на рис. 1 обозначенными символами «●»

```

1: for  $l = 1/2$  to  $l = 3/2$  do
2:   for  $k = 1/2$  to  $k = 3/2$  do
3:      $[n_x, n_y]^T = B\mathbf{a}(k, l)$ 
4:     if  $n_x = 0$  and  $n_y = 0$  then
5:       if  $\text{mlt}(\mathbf{a}(k, l)) = 1$  then {т.е. все 4 ячейки, инцидентные данному узлу, активны}
6:          $\rho_{kl} = (s_x s_y \rho)_{kl}$ ,  $(u_x)_{kl} = (s_x s_y u_x)_{kl}$ ,  $(u_y)_{kl} = (s_x s_y u_y)_{kl}$ 
7:       else {вырожденный случай}
8:          $(u_x)_{kl} = (u_y)_{kl} = 0$ ,  $\rho_{kl} = \rho_{11}$ 
9:       end if
10:    else
11:       $m_x = 0.5 \text{ sign } n_x$ ,  $m_y = 0.5 \text{ sign } n_y$ 
12:       $\rho_{kl} = \rho_{k+m_x, l+m_y}$  {соответствует условию  $\partial\rho/\partial\mathbf{n} = 0$ }
13:      вычисляем  $\lambda$  по формуле (6)
14:       $n_x = n_x / \|\mathbf{n}\|$ ,  $n_y = n_y / \|\mathbf{n}\|$ 
15:      if  $m_x \neq 0$  and  $m_x + k \neq 1$  then
16:         $(u_x)_{k+m_x, l} = (s_y u_x)_{k+m_x, l}$ ,  $(u_y)_{k+m_x, l} = (s_y u_y)_{k+m_x, l}$ 
17:      end if
18:      if  $m_y \neq 0$  and  $m_y + l \neq 1$  then
19:         $(u_x)_{k, l+m_y} = (s_y u_x)_{k, l+m_y}$ ,  $(u_y)_{k, l+m_y} = (s_y u_y)_{k, l+m_y}$ 
20:      end if
21:      if  $n_y \neq 0$  then
22:         $(u_x)_{kl} = \lambda \frac{(u_x)_{k+m_x, l} |n_x| + (u_x)_{k, l+m_y} |n_y|}{\lambda(|n_x| + |n_y|) + 0.5h}$ ,  $(u_y)_{kl} = -(u_x)_{kl} \frac{n_x}{n_y}$ 
23:      else
24:         $u_x = 0$ ,  $(u_y)_{kl} = \frac{(u_y)_{k+m_x, l} \lambda}{\lambda + 0.5h}$ 
25:      end if
26:    end if
27:     $k = k + 1$ 
28:  end for
29:   $l = l + 1$ 
30: end for

```

перпендикулярное направлению Ox , имеет вид

$$Q_m = \int_A j_{mx} dydz.$$

Коэффициент проницаемости определяется на основании закона Дарси, записанного для массового расхода Q_m для случая одномерного прямолинейно-параллельного фильтрационного потока совершенного газа [35, стр. 67]:

$$Q_m = \frac{k(p_1^2 - p_2^2)|A|}{2\eta c_s^2 L_x}, \quad (9)$$

где $|A|$ — площадь сечения A .

Если принять, что ширина образца $L_z = 1$ м, геометрия расчетной области и величина j_{mx} не зависят от z , то для Q_m через сечение A получим:

$$Q_m = \int_0^{L_y} \int_0^{L_z} j_{mx} dz dy = L_z \int_0^{L_y} j_{mx} dy = \int_0^{L_y} j_{mx} dy.$$

В дискретном случае будем вычислять значение массового расхода как среднее по всем сечениям образца вдоль исследуемого направления:

$$Q_m = \frac{1}{N_x} \sum_{k,l} (j_{mx})_{k,l} h.$$

Расчет проводится до тех пор, пока коэффициент проницаемости не перестанет меняться.

Обозначим k — коэффициент проницаемости, полученный с учетом эффекта проскальзывания, а k_∞ — без учета, т.е. с условиями прилипания.

6 Примеры расчетов

6.1 Течение в микроканале

Рассмотрим изотермическое течение умеренно-разреженного газа в микроканале высотой L_y , длиной L_x и шириной L_z , причем ширина канала много больше высоты $L_z \gg L_y$. Будем считать, что все параметры не зависят от координаты z , а z -компоненты векторов и тензоров равны нулю. Таким образом, течение двумерно. Пусть на входе и выходе из канала фиксированы значения давления p_1 и p_2 ($p_1 > p_2$) соответственно, а на верхней и нижней стенках канала выполнены условия скольжения Максвелла:

$$\left(u_x - \frac{2 - \sigma}{\sigma} \lambda \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \Big|_{y=0} = 0, \quad \left(u_x + \frac{2 - \sigma}{\sigma} \lambda \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \Big|_{y=L_y} = 0.$$

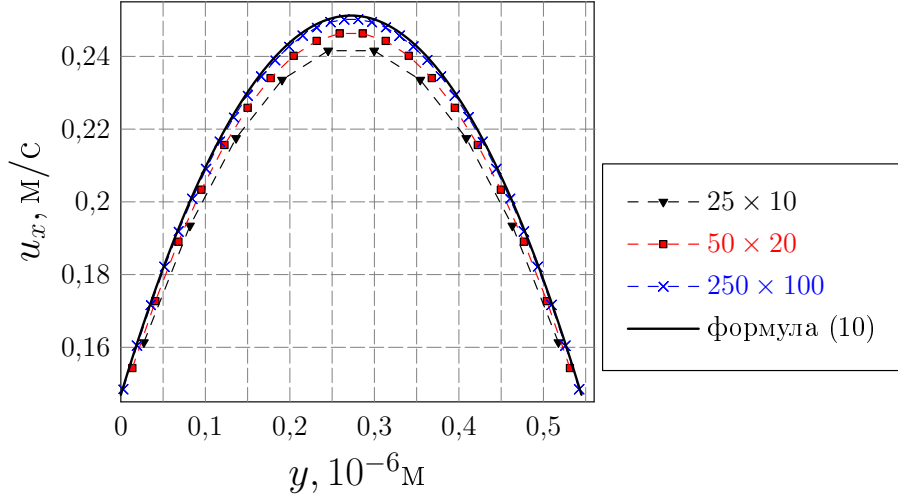


Рис. 2. Распределения компоненты скорости u_x , полученные в расчетах на различных сетках и по формуле (10).

Если считать, что градиент давления достаточно мал, чтобы на малом участке канала в первом приближении плотность газа можно было считать постоянной, а длина свободного пробега λ вычисляется по формуле Чепмена (6), то для распределения компоненты скорости u_x и массового расхода Q_m справедливы выражения [11, стр. 154]:

$$u_x(y) = -\frac{1}{2\eta} \frac{p_2 - p_1}{L_x} \left[y(L_y - y) + \frac{2 - \sigma}{\sigma} \lambda L_y \right], \quad (10)$$

$$Q_m = \frac{L_z L_y^3 p_2^2}{8\eta \mathcal{R} T L_x} \left[\frac{(p_1/p_2)^2 - 1}{3} + 4 \frac{2 - \sigma}{\sigma} \text{Kn}_2 \left(\frac{p_1}{p_2} - 1 \right) + \frac{16}{\pi S_c} \text{Kn}_2^2 \ln \frac{p_1}{p_2} \right], \quad (11)$$

где $\text{Kn}_2 = \lambda_2/L_y$, λ_2 — число Кнудсена и длина свободного пробега на выходе из канала соответственно. Из формул (9) и (11) получаем выражение для проницаемости:

$$k = \frac{L_y^2}{12} \left[1 + B_1 \frac{1}{\bar{p}} + B_2 \frac{1}{\bar{p} \Delta p} \ln \left(1 + \frac{\Delta p}{\bar{p} - \frac{1}{2} \Delta p} \right) \right], \quad (12)$$

где

$$B_1 = \frac{3\sqrt{2\pi}(2 - \sigma)\eta c_s}{\sigma L_y}, \quad B_2 = \frac{12\eta c_s^2}{S_c L_y^2}, \quad \Delta p = p_1 - p_2, \quad \bar{p} = \frac{p_1 + p_2}{2}.$$

Предположив, что $\bar{p} \gg \Delta p$, получим

$$\frac{1}{\bar{p} \Delta p} \ln \frac{p_1}{p_2} = \frac{1}{\bar{p} \Delta p} \ln \left(1 + \frac{\Delta p}{\bar{p} - \frac{1}{2} \Delta p} \right) \approx \frac{1}{\bar{p}^2 - \frac{1}{2} \bar{p} \Delta p} \approx \frac{1}{\bar{p}^2}. \quad (13)$$

$N_x \times N_y$	$Q_m^{\text{no slip}}$	Q_m
25×10	0.60988	2.6017
50×20	0.6117	2.6436
125×50	0.61578	2.6725
250×100	0.61766	2.6828
формула (11)	0.6198	2.6934

Таблица 1. Полученные в расчетах течения гелия He в микроканале на различных сетках значения массовых расходов Q_m и $Q_m^{\text{no slip}}$ (10^{-8} кг/с). N_x, N_y — число расчетных ячеек вдоль направлений Ox и Oy соответственно.

$N_x \times N_y$	проскальзывание		прилипание	
	Δt , с	τ , с	Δt , с	τ , с
25×10	$4 \cdot 10^{-12}$	$2.54 \cdot 10^{-10}$	$5 \cdot 10^{-12}$	$6.96 \cdot 10^{-13}$
250×100	$4 \cdot 10^{-14}$		$5 \cdot 10^{-14}$	$6.96 \cdot 10^{-14}$

Таблица 2. Значения шага по времени Δt и параметра τ , использованные в расчетах течения в канале на различных сетках.

Пусть $L_y = 0.545 \cdot 10^{-6}$ м, $L_x = 2.5L_y = 1.3625 \cdot 10^{-6}$ м, $L_z = 1$ м. Рассмотрим изотермическое течение газа при температуре $T = 294.2$ К, со следующими параметрами, которые соответствуют гелию He: газовая постоянная $\mathcal{R} = 2.0785 \cdot 10^3$ Дж/(кг · К), коэффициент динамической вязкости $\eta = 19.6 \cdot 10^{-6}$ Па · с, число Шмидта $Sc = 0.77$. Долю диффузно отраженных молекул примем $\sigma = 1$. Давление на выходе $p_2 = 10^5$ Па и на входе $p_1 = p_2 + \Delta p$, где перепад давления $\Delta p = 75$ Па. Для скорости звука имеем $c_s = \sqrt{\mathcal{R}T} = 781.9813$ м/с. По формуле (11) имеем $Q_m = 2.6934 \cdot 10^{-8}$ кг/с. Заметим, что без учета эффектов проскальзывания (т.е. если $\text{Kn}_2 \rightarrow 0$) $Q_m^{\text{no slip}} = 6.1979 \cdot 10^{-9}$ кг/с. Число Кнудсена на выходе из канала $\text{Kn}_2 = 0.35$.

Пусть на верхней и нижней границе выполнены условия Максвелла (4), а на входе и выходе — условия, соответствующие перепаду давления Δp :

$$\begin{aligned}
 x = 0 : \quad p &= p_1, & \partial u_x / \partial x &= \partial u_y / \partial x = 0; \\
 x = L : \quad p &= p_2, & \partial u_x / \partial x &= \partial u_y / \partial x = 0.
 \end{aligned}$$

Расчет проводился до момента установления.

В таблице 1 представлены значения массового расхода Q_m , полученные при моделировании течения на различных сетках. Видно, что уже даже на самых грубых сетках, в которых на высоту канала приходится 10 и 20 ячеек, хорошо заметно влияние эффектов проскальзывания. Там же для сравнения представлены значения массового расхода $Q_m^{\text{no slip}}$, полученные без учета

явления проскальзывания. Отметим, что в этом случае на твердых стенках ставятся стандартные условия прилипания, а параметр τ играет роль физически обоснованного регуляризатора, который вычислялся по формуле

$$\tau = \alpha^* \frac{h}{c_s}, \quad (14)$$

где постоянный параметр α^* выбирается из условия устойчивости расчета.

В таблице 2 представлены значения шага по времени, использованные в расчетах течения на различных сетках с учетом эффекта проскальзывания и без. Также там представлены соответствующие значения параметра τ . При этом для течений с проскальзыванием представлено значение τ на выходе из канала, вычисленное по формуле (3). Для течений с условиями прилипания значение τ вычислено по формуле (14) с $\alpha^* = 0.01$.

На рисунке 2 представлены распределения компоненты скорости u_x , полученные в расчетах. Видно, что с измельчением сетки полученное распределение u_x приближается к теоретическому.

В таблице 3 представлены значения коэффициентов k и k_∞ , полученные в расчетах при различных значениях среднего давления \bar{p} , но при постоянном перепаде давлений $\Delta p = 75$ Па. Для расчета выбрана сетка 125×50 ячеек. Полученные значения k хорошо согласуются с аналитическими k^{th} и при увеличении среднего давления \bar{p} постепенно уменьшаются, что соответствует теории. В таблице 3 также представлены полученные значения k_∞ для различных параметров α^* . Видно, что чем меньше выбрано значение α^* , тем точнее получается ответ. Таким образом, при вычислении значения проницаемости k_∞ образцов с сравнительно низкой проницаемостью (порядка 1 мД) предпочтительнее выбирать параметр α^* как можно меньше. Заметим, что при уменьшении среднего давления \bar{p} разница между значениями k_∞ при различных α^* растет, что можно объяснить увеличением вклада вектора \mathbf{w} в вектор плотности потока массы \mathbf{j}_m . Более того, если давление p слишком мало, тогда число Кнудсена становится сравнительно большим, и использование условий прилипания становится некорректным.

6.2 Течение в модельной пористой среде

В данном разделе рассмотрена задача определения значения коэффициента проницаемости k образцов модельных пористых сред с учетом эффекта Клинкенберга. Будем считать, что исследуемые пористые среды состоят из параллельных цилиндров круглого сечения диаметра $D = 2.9 \cdot 10^{-6}$ м, оси которых перпендикулярны плоскости xOy . Высота и длина всех исследуемых образцов составляет $L_y = L_x = 20 \cdot 10^{-6}$ м, соответственно, а на каждое направление приходится по 200 ячеек. Таким образом, шаг по пространству

\bar{p} , Па	k , мД	k^{th} , мД	k_{∞} , мД	
			$\alpha^* = 0.05$	$\alpha^* = 0.1$
70037.5	163.848	163.828	25.221	25.342
75037.5	150.684	150.664	25.213	25.326
100037.5	109.008	108.988	25.185	25.269
102037.5	106.770	106.750	25.183	25.266
105037.5	103.614	103.594	25.181	25.261
107037.5	101.633	101.613	25.179	25.258
200037.5	59.340	59.320	25.142	25.185

Таблица 3. Значения коэффициентов проницаемости k , полученные в расчетах течения гелия He в микроканале при различных значениях среднего давления \bar{p} , но постоянном перепаде $\Delta p = 75$ Па.

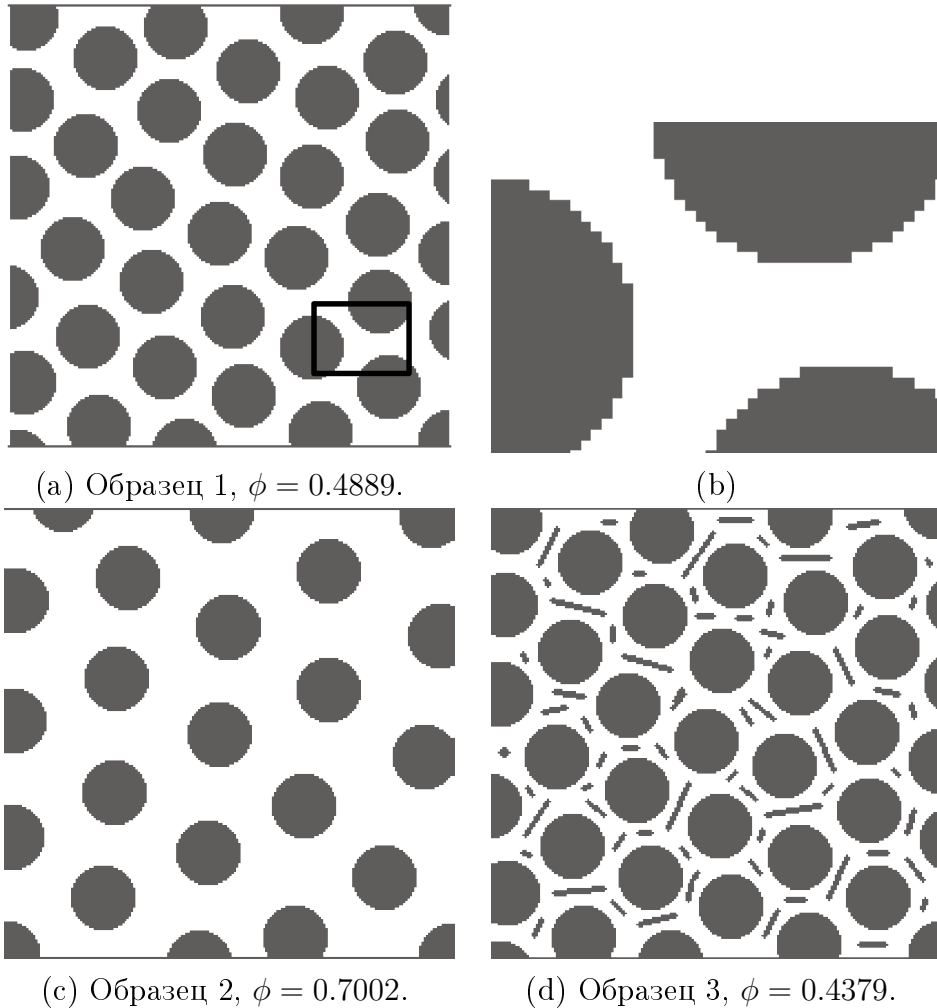


Рис. 3. Расчетная область. На рисунке 3а черным контуром выделена область, представленная на рисунке 3б. Серым цветом помечены ячейки, относящиеся к породе. Размер области составляет 200×200 ячеек.

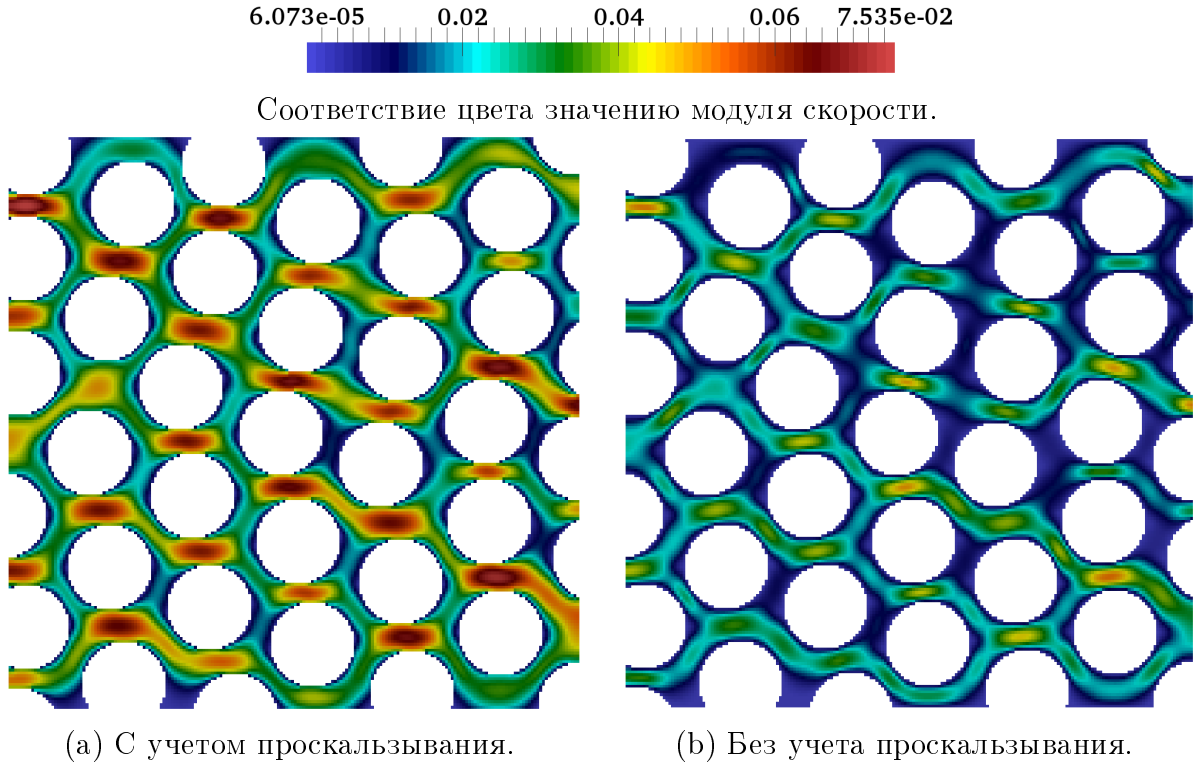


Рис. 4. Поля модуля скорости, полученные в расчетах течения гелия He при $\Delta p = 100$ Па, $\bar{p} = 5 \cdot 10^4$ Па с учетом проскальзывания 4а и без 4б.

$h = L_y/200 = 10^{-7}$ м. Как и в предыдущем разделе, будем считать, что их ширина $L_z = 1$ м. Будем считать, что все параметры течения не зависят от координаты z . На рис. 3 представлены сечения образцов плоскостью xOy , причем серый цвет обозначает твердую стенку (породу), а белый — поровое пространство. Образец, соответствующий рис. 3d, помимо цилиндров также содержит некоторые «включения». В подписях к рис. 3 указаны значения пористости ϕ , т.е. отношения объема пустотного пространства ко всему объему.

Рассмотрим течение гелия He с параметрами из раздела 6.1 и азота N_2 , который в рамках рассматриваемой задачи отличается только значениями коэффициента динамической вязкости $\eta = 17.6 \cdot 10^{-6}$ Па \cdot с, газовой постоянной $\mathcal{R} = 296.8$ Дж/(кг \cdot К) и числом Шмидта $Sc = 0.746$.

Значения коэффициентов проницаемости k_∞ рассматриваемых образцов можно определить, если рассматривать параметр τ как физически обоснованный регуляризатор и вычислять его по формуле (14), а на границе с твердой стенкой ставить стандартные условия прилипания. В этом случае так же, как в разделе 6.1, наблюдается небольшая зависимость значения k_∞ от среднего давления \bar{p} , которая обусловлена влиянием вектора \mathbf{w} . Так, в результате моделирования течения азота N_2 в образце 1 при среднем давлении $\bar{p} = 4 \cdot 10^5$ Па с шагом $\Delta t = 10^{-10}$ с и $\alpha^* = 0.5$ значение проницаемости составило $k_{1,\infty} = 26.396$ мД. Для образцов 2 и 3 значения коэффициентов

проницаемостей составили $k_{2,\infty} = 231.126$ мД, $k_{3,\infty} = 7.024$ мД. При вычислении τ использованы значение $\alpha^* = 0.5$ и шаг по времени $\Delta t = 10^{-10}$ с.

С другой стороны, для приблизительного определения значения коэффициента проницаемости k_∞ можно воспользоваться соотношением Козени-Кармана, уточненным для пористой среды, состоящей из параллельных цилиндров круглого сечения [36]:

$$k_\infty^{kc} = \frac{\phi^3(\phi - 0.2146)D^2}{31(1 - \phi)^{1.3}}, \quad \text{если } \phi > 0.2146. \quad (15)$$

Подставляя значение пористости для образца 1 $\phi = 0.4889$ и диаметра цилиндра $D = 2.9 \cdot 10^{-6}$ м, получаем $k_{1,\infty}^{kc} = 21.085$ мД, что согласуется с полученными в расчете значениями $k_{1,\infty}$. Отличие может быть объяснено несовпадением расчетных областей и условий на их границах.

В валидационных целях для образца 1 автором также проведен расчет коэффициента абсолютной проницаемости с помощью программного комплекса Palabos [37, 38], основанного на методе решеточных уравнений Больцмана. В результате получено значение $k_\infty^{plb} = 26.665$ мД. При этом ширина расчетной области бралась в 10 раз больше длины и высоты, что позволяет пренебречь влиянием боковых стенок на конечный результат и сравнить результаты, полученные в настоящей работе и с помощью упомянутого пакета, между собой. Видно, что и в этом случае $k_{1,\infty}$ согласуется с k_∞^{plb} .

В таблице 4 представлены значения коэффициента проницаемости k в зависимости от среднего давления \bar{p} , полученные в серии расчетов течения гелия He и азота N₂ в образце 1 с учетом эффекта проскальзывания. При этом перепад давления задавался постоянным $\Delta p = 100$ Па. На рисунке 5 те же значения представлены графически в зависимости от величины $1/\bar{p}$. Также в этой таблице показаны значения чисел Кнудсена на выходе из образца Kn₂, причем в качестве характерного размера выбрано среднее расстояние между цилиндрами, которое составляет приблизительно $D/2 = 1.45 \cdot 10^{-6}$ м.

Видно, что с увеличением \bar{p} значение k стремится к значению k_∞ для обоих газов, при уменьшении \bar{p} наблюдаемая проницаемость k увеличивается. Это увеличение для He и N₂ обладает различным характером, что объясняется различной величиной свободного пробега. При этом для гелия оказывается особенно ярко выражен нелинейный характер зависимости k от $1/\bar{p}$.

Из соотношения (1) видно, что коэффициент скольжения Клинкаенберга можно определить как угловой коэффициент линейного участка графика зависимости отношения k/k_∞ от величины среднего давления. В таблице 5 представлены значения отношения $k/k_{i,\infty}$, полученные в результате расчетов течения гелия He в образце с номером $i \in \{1, 2, 3\}$, а на рис. 6 представлена зависимость $k/k_{i,\infty}$ от $1/\bar{p}$.

\bar{p} , Па	He		N ₂	
	Kn ₂	k	Kn ₂	k
20050	0.662	288.000	0.225	72.867
30050	0.442	156.284	0.150	53.043
40050	0.332	108.010	0.112	44.884
50050	0.264	84.448	0.090	40.507
70050	0.190	62.274	0.064	35.936
75050	0.166	59.054	0.060	35.214
100050	0.132	48.806	0.045	32.767
150050	0.088	40.059	0.030	30.424
200050	0.066	36.188	0.022	29.280
250050	0.052	34.003	0.018	28.601
300050	0.044	32.595	0.015	28.149
400050	0.034	30.881	0.011	27.588

Таблица 4. Значения k , полученные в расчетах течений He и N₂ в образце 1 при различных значениях \bar{p} , но постоянном $\Delta p = 100$ Па.

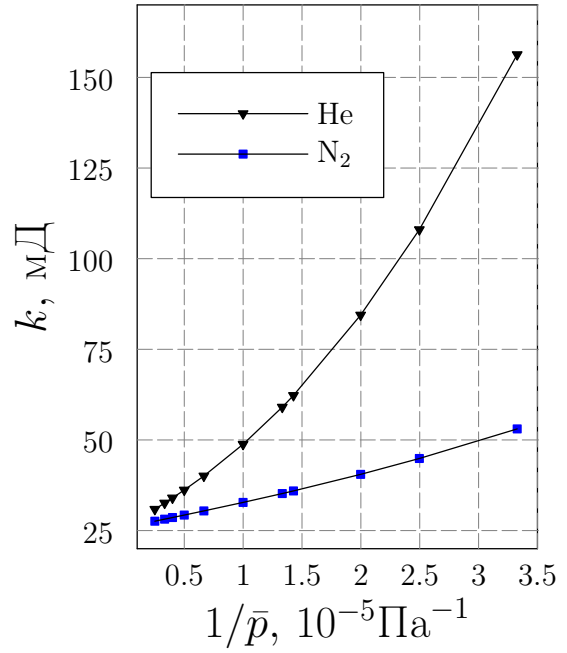


Рис. 5. Зависимость k от $1/\bar{p}$, полученная в расчетах течений гелия He и азота N₂ в образце 1.

\bar{p} , Па	Образец 1	Образец 2	Образец 3
30050	5.9207	2.3669	14.7608
40050	4.0919	1.9270	9.3331
50050	3.1992	1.6990	6.7433
70050	2.3592	1.4697	4.3761
75050	2.2372	1.4345	4.0410
100050	1.8490	1.3176	2.9962
150050	1.5176	1.2087	2.1412
200050	1.3710	1.1562	1.7808
300050	1.2348	1.1038	1.4627
400050	1.1699	1.0773	1.3189

Таблица 5. Значения $k/k_{i,\infty}$, полученные в расчетах течений гелия He при различных \bar{p} в образце с номером $i \in \{1, 2, 3\}$.

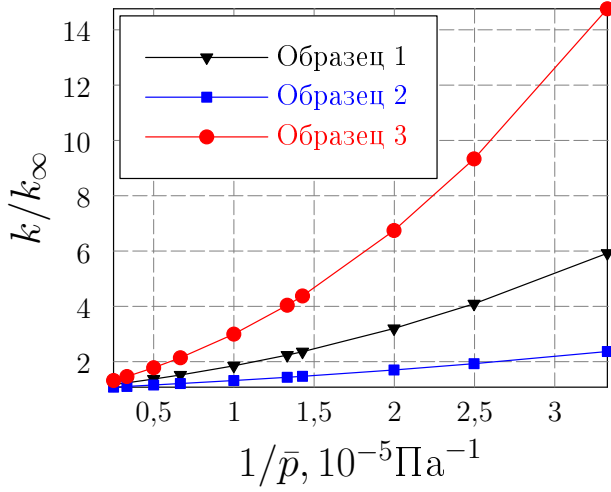


Рис. 6. Зависимость значений $k/k_{i,\infty}$ от $1/\bar{p}$, полученная в расчете течения гелия He в образце $i \in \{1, 2, 3\}$

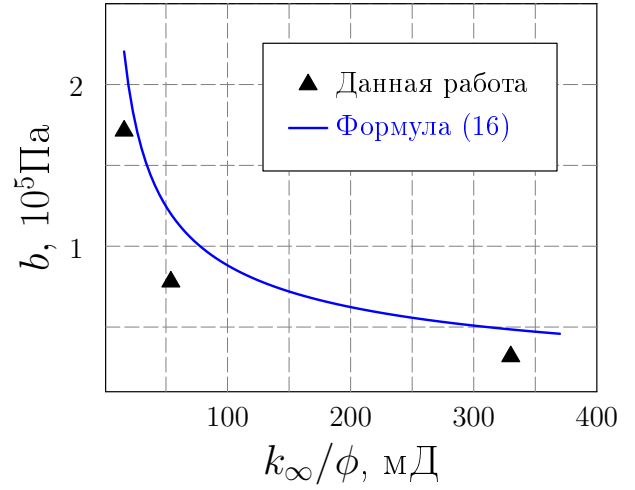


Рис. 7. Значения коэффициента b , полученные при расчете течений гелия He в образцах $i \in \{1, 2, 3\}$

№ образца	k_{∞} , мД	k_{∞}/ϕ , мД	коэффициент b , 10^3 Па	
			данная работа	формула (16)
2	231.126	330.086	31.809	48.531
1	26.396	53.990	77.902	120.000
3	7.024	16.040	172.610	220.158

Таблица 6. Полученные в расчетах течения гелия значения b

Существуют различные эмпирические зависимости для определения коэффициента скольжения Клинкенберга [39, 40]. Для большинства из них характерно увеличение значения b при уменьшении значения k_{∞} или отношения k_{∞}/ϕ . Так, зависимость, предложенная в работе [40] для гелия, имеет вид²:

$$b = 0.0277(k_{\infty}/\phi)^{-1/2}. \quad (16)$$

В таблице 6 представлены значения b , полученные на основе таблицы 5 и формулы (16). Те же значения представлены графически на рис. 7. Видно, что полученные в настоящей работе значения коэффициента скольжения b качественно совпадают со значениями, полученными на основе зависимости (16), более того, наблюдается уменьшение значения b при увеличении значения абсолютной проницаемости k_{∞} , что согласуется с известными эмпирическими зависимостями. Количественные расхождения могут быть объяснены тем, что формула (16) соответствует реальным образцам горных пород, тогда как в настоящей работе рассмотрены образцы модельных пористых сред.

²Представленные в настоящей работе значения k_{∞} имеют размерность мД, поэтому, чтобы воспользоваться формулой (16), нужно перевести мД в м² по формуле 1 мД = 9.869233 · 10⁻¹⁶ м².

Список литературы

- [1] M. Gad-el-Hak, ed. The MEMS Handbook. CRC Press, 2002.
- [2] L. J. Klinkenberg. The Permeability Of Porous Media To Liquids And Gases. Drilling and Production Practice. American Petroleum Institute, 1941, pp. 200–213.
- [3] ГОСТ 26450.2-85 Породы горные. Методы определения коллекторских свойств. Метод определения коэффициента абсолютной газопроницаемости при стационарной и нестационарной фильтрации.
- [4] К. Черчиньяни. Теория и приложения уравнения Больцмана. Москва: Издательство «Мир», 1978.
- [5] M. Gad-el-Hak. The Fluid Mechanics of Microdevices – The Freeman Scholar Lecture. // Journal of Fluids Engineering. 1999, pp. 5–33.
- [6] J. C. Maxwell. On Stresses in Rarified Gases Arising from Inequalities of Temperature. // Philosophical Transactions of the Royal Society of London., V. 170. 1879, pp. 231–256.
- [7] М. Н. Коган. Динамика разреженного газа. Москва, «Наука», 1967.
- [8] Г. Н. Абрамович. Прикладная газовая динамика. Т. 2. «Наука», 1991.
- [9] Л. Г. Лойцянский. Механика жидкости и газа. «Дрофа», 2003.
- [10] G. E. Karniadakis, A. Beskok, N. Aluru. Microflows and nanoflows: fundamentals and simulation. Springer-Verlag, 2005.
- [11] Ю. В. Шеретов. Динамика сплошных сред при пространственно-временном осреднении. М.-Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2009.
- [12] R. Deissler. An analysis of second-order slip flow and temperature-jump boundary conditions for rarefied gases. // International Journal of Heat and Mass Transfer., V. 7. 1964. № 6, pp. 681–694.
- [13] C. Aubert, S. Colin. High-order boundary conditions for gaseous flows in rectangular microducts. // Microscale Thermophysical Engineering., V. 5. 2001. № 1, pp. 41–54.
- [14] S. Colin, P. Lalonde, R. Caen. Validation of a Second-Order Slip Flow Model in Rectangular Microchannels. // Heat Transfer Engineering., V. 25. 2004. № 3, pp. 23–30.
- [15] Б. Н. Четверушкин. Кинетические схемы и квазигазодинамическая система уравнений. М.: МАКС Пресс, 2004.
- [16] Т. Г. Елизарова. Квазигазодинамические уравнения и методы расчета вязких течений. Москва: Научный мир, 2007.

- [17] М. В. Семенов, Ю. В. Шеретов. Численное моделирование дозвуковых осесимметричных течений газа вблизи шара. // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика., Т. 1. 2006. № 3, с. 78—97.
- [18] Н. А. Ларина, В. А. Рыков. Расчет плоских течений разреженного газа при малых числах Кнудсена. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., Т. 36. 1996. № 12, с. 135—150.
- [19] В. А. Титарев. Численный метод расчета двумерных нестационарных течений разреженного газа в областях произвольной формы. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., Т. 49. 2009. № 7, с. 1255—1270.
- [20] Ю. Ю. Клосс, Д. В. Мартынов, Ф. Г. Черемисин. Численный метод анализа свойств микронасосов Кнудсена. // Вычислительные методы и программирование., Т. 12 2011, с. 16—27.
- [21] А. А. Синер, Е. В. Коромыслов, А. М. Сипатов. Разработка решателя уравнения Больцмана для применения к инженерным задачам. // Вычислительная механика сплошных сред., Т. 4. 2011. № 3, с. 83—95.
- [22] E. S. Piekos, K. S. Breuer. Numerical Modeling of Micromechanical Devices Using the Direct Simulation Monte Carlo Method. // Journal of Fluids Engineering., V. 118 1996, pp. 464—469.
- [23] M. S. Ivanov et al. SMILE System for 2D/3D DSMC Computations. 2006.
- [24] S. Varoutis, C. Day, F. Sharipov. Rarefied gas flow through channels of finite length at various pressure ratios. // Vacuum., V. 86. 2012. № 12, pp. 1952—1959.
- [25] K. Xu, Z. Li. Microchannel flow in the slip regime: gas-kinetic BGK-Burnett solutions. // Journal of Fluid Mechanics., V. 513. Aug. 1, 2004, pp. 87—110.
- [26] И. Э. Иванов, И. А. Крюков, М. Ю. Тимохин. Применение системы моментных уравнений для математического моделирования газовых микротечений. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., Т. 53. 2013. № 10, с. 1721—1738.
- [27] M. Torrilhon. Modeling Nonequilibrium Gas Flow Based on Moment Equations. // Annual Review of Fluid Mechanics., V. 48. 2016. № 1, pp. 429—458.
- [28] Z. Guo, C. Zheng. Analysis of lattice Boltzmann equation for microscale gas flows: Relaxation times, boundary conditions and the Knudsen layer. // International Journal of Computational Fluid Dynamics., V. 22. 2008. № 7, pp. 465—473.

- [29] G.-H. Tang, Y.-H. Zhang, D. R. Emerson. Lattice Boltzmann models for nonequilibrium gas flows. // *Phys. Rev. E.*, V. 77 2008, p. 046701.
- [30] J. Zhao et al. Study of Gas Flow Characteristics in Tight Porous Media with a Microscale Lattice Boltzmann Model. // *Scientific Reports.*, V. 6. Sept. 2, 2016. Article, pages.
- [31] W.-M. Zhang, G. Meng, X. Wei. A review on slip models for gas microflows. // *Microfluidics and Nanofluidics.*, Т. 13. 2012. № 6, с. 845–882.
- [32] О. А. Шемарова. Разработка математических моделей и методов расчета процесса течения разреженных газов при взаимодействии с направленными потоками частиц. Дис. . . . к.ф.-м.н. МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2015.
- [33] J. Dvorkin et al. Relevance of computational rock physics. // *Geophysics.*, V. 76. 2011. № 5, E141–E153.
- [34] А. А. Злотник. О консервативных пространственных дискретизациях баротропной квазигазодинамической системы уравнений с потенциальной массовой силой. // *Журнал вычислительной математики и математической физики.*, Т. 56. 2016. № 2, с. 301–317.
- [35] К. С. Басниев, И. Н. Кочина, В. М. Максимов. Подземная гидромеханика. Т. 2. Москва «Недра», 1993, с. 416.
- [36] S. L. Lee, J. H. Yang. Modeling of Darcy-Forchheimer drag for fluid flow across a bank of circular cylinders. // *International Journal of Heat and Mass Transfer.*, V. 40. 1997. № 13, pp. 3149–3155.
- [37] W. Degruyter et al. Synchrotron X-ray microtomography and lattice Boltzmann simulations of gas flow through volcanic pumices. // *Geosphere.*, V. 6. 2010. № 5, pp. 470–481.
- [38] Palabos: Parallel lattice Boltzmann solver. <http://www.palabos.org/>.
- [39] F. A. Florence et al. Improved Permeability Prediction Relations for Low-Permeability Sands. Rocky Mountain Oil & Gas Technology Symposium, 16-18 April, Denver, Colorado, U.S.A. Society of Petroleum Engineers, 2007.
- [40] F. Civan. Effective Correlation of Apparent Gas Permeability in Tight Porous Media. // *Transport in Porous Media.*, V. 82. 2010. № 2, pp. 375–384.

Содержание

1	Введение	3
2	Система квазигидродинамических уравнений	5
3	Геометрическая модель расчетной области	6
4	Численный алгоритм	6
4.1	Разностная схема	6
4.2	Алгоритм реализации граничных условий	8
5	О расчете коэффициента проницаемости	10
6	Примеры расчетов	12
6.1	Течение в микроканале	12
6.2	Течение в модельной пористой среде	15