



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 106 за 2016 г.



ISSN 2071-2898 (Print)  
ISSN 2071-2901 (Online)

**Варин В.П.**

Асимптотическое  
разложение решения Крокко  
и константа Блазиуса

**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Варин В.П. Асимптотическое разложение решения Крокко и константа Блазиуса // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2016. № 106. 20 с. doi:[10.20948/prepr-2016-106](https://doi.org/10.20948/prepr-2016-106)  
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2016-106>

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК  
ОРДЕНА ЛЕНИНА ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ  
ИМЕНИ М.В. КЕЛДЫША

В.П. Варин

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ РЕШЕНИЯ КРОККО  
И КОНСТАНТА БЛАЗИУСА

Москва, 2016

УДК 521.1+531.314

В.П. Варин. Асимптотическое разложение решения Крокко и константа Блазиуса. Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, 2016.

Рассматривается уравнение Крокко (редукция уравнения Блазиуса). Использование этого более простого уравнения для вычисления константы Блазиуса сталкивается с неожиданными трудностями, которые не находили объяснения. Мы вычислили асимптотическое разложение решения уравнения Крокко в окрестности сингулярности. Ранее это разложение было неизвестно. Исследована структура римановой поверхности решения Крокко вблизи сингулярности. Мы использовали эти результаты для построения эффективного численного алгоритма, основанного на аналитическом продолжении, для вычисления константы Блазиуса с произвольной и гарантированной точностью. Эта константа вычислена нами со 100 десятичными разрядами.

V.P. Varin. Asymptotic expansion of Crocco solution and Blasius constant. Preprint of the Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS, Moscow, 2016.

We consider the Crocco equation (the reduction of the Blasius equation). The use of this more simple equation for computation of the Blasius constant leads to some unexpected difficulties, which have been unexplained. We computed the asymptotic expansion of the solution to Crocco equation at its singularity. This expansion was unknown before. We describe the structure of the Riemann surface of the Crocco solution at the singularity. These results were used for construction of an effective numerical algorithm, which is based on analytical continuation, for computation of the Blasius constant with an arbitrary and guaranteed accuracy. We computed the Blasius constant with a 100 decimal places.

© ИПМ им. М.В. Келдыша РАН.  
Москва, 2016 г.

## § 1. Введение

Классическая проблема Блазиуса в математической постановке состоит в решении краевой задачи на полубесконечном интервале  $[0, \infty]$  для уравнения

$$2 f_{ttt} + f f_{tt} = 0, \quad (1)$$

где  $f_t$  обозначает производную  $f(t)$  по  $t$ .

Необходимо определить величину  $s$  (константу Блазиуса),  $f_{tt}(0) = s$ , так, что при условиях  $f(0) = f_t(0) = 0$  выполняется условие на бесконечности  $f_t(\infty) = 1$ .

Эта проблема настолько широко известна, что ее уже дают студентам в качестве практикума: написать программу для численного решения этой задачи методом пристрелки. Однако таким и другими простыми и хорошо известными методами можно получить лишь несколько десятичных разрядов, что сравнимо с тем, что удалось вычислить Топферу в 1912 году вручную (см. [1]).

Обычно скромная точность достигнутого результата намного превосходит точность, для которой имеются строгие оценки погрешности. До недавнего времени (см. [2]) строгие оценки давали только три десятичных разряда.

К настоящему времени константа Блазиуса известна с 30 десятичными разрядами (см. [3, 2]). Однако эти результаты являются численными и не подтверждены строгими оценками погрешности. Такая оценка имеется пока только для 16 десятичных разрядов, однако и она опирается на массивные вычисления (см. [2]).

Таким образом, настоящая проблема Блазиуса начинается тогда, когда мы зададимся вопросом: как вычислить эту константу с произвольной и гарантированной точностью.

На этот вопрос до сих пор нет удовлетворительного ответа, и вовсе не по недосмотру или недостатку внимания к этой проблеме. Напротив, попытки решить эту проблему породили ряд «интригующих вопросов» (см. [4]), ответы на некоторые из которых можно найти в [2].

Чтобы понять суть проблемы, достаточно взглянуть на уравнение (1) с точки зрения вычислителя. Пристреливаться к бесконечности невозможно, поэтому вычисления обрываются при некотором  $t = t_{max}$ , дальше которого вычисления бессмысленны, так как все мономы в уравнении (1) близки к машинной точности (т.е. фактически нули).

Даже если принять, что точность вычислений контролируется до  $t = t_{max}$ , то этого все равно недостаточно, так как приходится отбрасывать некоторый интеграл от бесконечно малой величины по бесконечному полуинтервалу.

Хотя асимптотическое поведение функции  $f(t)$  в окрестности бесконечности теперь известно (см. [5]), использование этой информации для оценки указанного интеграла весьма затруднительно.

Тот факт, что вычислительная проблема, с которой мы сталкиваемся, является по сути математической, отчетливо виден из уравнения Крокко [6].

Уравнение Крокко является редукцией уравнения Блазиуса. Интегрируя уравнение (1), получаем тождество

$$f_{tt}(t) = s \exp\left(-\frac{1}{2} \int_0^t f(x) dx\right). \quad (2)$$

Поскольку  $s > 0$ ,  $f_t(0) = 0$ ,  $f_{tt}(t) > 0$ , то  $f_t(t)$  является монотонно возрастающей функцией, стремящейся к 1 при  $t \rightarrow \infty$ , т.е.  $f_t$  является диффеоморфизмом интервалов  $[0, \infty) \rightarrow [0, 1)$ .

Таким образом, замена переменных

$$y = f_{tt}, \quad x = f_t \quad (3)$$

в уравнении (1) дает *уравнение Крокко*

$$2y(x)y''(x) + x = 0, \quad (4)$$

а проблема Блазиуса трансформируется в краевую задачу на интервале  $[0, 1]$ :

$$y(0) = s, \quad y'(0) = 0, \quad y(1) = 0, \quad (5)$$

где краевое условие  $y(1) = 0$  следует из (2).

Напомним, что функция  $y(x)$ , удовлетворяющая краевой задаче (5), называется *решением Крокко* (см. [2]).

Решение Крокко устроено обманчиво просто (см. § 2). Существует множество работ, посвященных численному решению краевой задачи (5), которые варьируются от совсем ошибочных (см. обзор в [7]), до таких, где признается, что хотя сходимость и есть, но «безнадежно медленная» (см. [8]).

В работе [2] показано, что точка  $x = 1$ , т.е. конец интервала, где  $y(1) = 0$ , является подвижной особенностью уравнения (4). Т.е. какое начальное значение  $y(0) \approx s$  ни взять, мы всегда попадаем в особую точку функции  $y(x)$ , где  $y(x) = 0$ .

Асимптотическое поведение функции  $y(x)$  вблизи ее подвижной особенности известно пока только как асимптотическая эквивалентность функции  $y(x)$  некоторой логарифмической функции (см. [7]).

Эта информация объясняет непригодность Паде-аппроксимаций для моделирования функции  $y(x)$  (см. [2]). Однако она не помогает в выборе подходящих аппроксимаций.

Согласно Риману свойства аналитической функции определяются в основном ее особенностями. Таким образом, проблема состоит в том, что невозможно аппроксимировать функцию  $y(x)$  вблизи ее особой точки  $x = 1$ , пока не известны ее аналитические свойства.

Аналитические свойства функции, по нашему представлению, кодируются ее асимптотическим разложением вблизи ее особенности. Такое разложение для функции  $y(x)$  в настоящее время неизвестно.

В § 2 мы строим указанное разложение функции  $y(x)$  и даем его интерпретацию как локальную параметризацию римановой поверхности функции  $y(x)$  в окрестности ее сингулярности  $x = 1$ .

Эта информация может быть использована для строгой оценки погрешности вычислений функции  $y(x)$  с помощью степенных рядов.

В § 3 мы используем результаты § 2 для создания эффективного численного алгоритма вычисления константы Блазиуса методом аналитического продолжения.

## § 2. Асимптотическое разложение решения Крокко

В [2] показано, что решение Крокко является голоморфной функцией внутри единичного круга; а также – что степенной ряд функции  $y(x)$  в начале координат

$$y(x) = s - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_n}{s^{2n-1}} x^{3n}, \quad (6)$$

где

$$g_1 = 1/12, \quad n(3n-1)g_n = \sum_{j=1}^{n-1} j(3j-1)g_j g_{n-j}, \quad n > 1, \quad (7)$$

сходится внутри и на границе единичного круга, включая единственную особую точку  $x = 1$  на границе круга, где  $y(1) = 0$ . Однако  $y'(x) \rightarrow -\infty$  при  $x \rightarrow 1$ , что объясняет непригодность рациональных либо полиномиальных функций для аппроксимации решения Крокко.

Ряд (6) обладает одной примечательной особенностью, которая не описана в литературе. Он сходится вблизи особенности  $x = 1$  примерно как геометрический, т.е. очень быстро. Это позволяет вычислить константу Блазиуса с 3-4 десятичными разрядами весьма просто (правда, без строгой оценки погрешности). Однако уточнение константы Блазиуса с помощью этого ряда затруднительно, так как асимптотическое поведение коэффициентов  $g_n$  при  $n \rightarrow \infty$  неизвестно. Это, в частности, означает, что стандартные ускорители сходимости степенных рядов в данном случае не работают.

На рис. 1 показан график решения Крокко (6) и его производной (со знаком минус) с 50 членами разложения. В масштабе рисунка график истинного решения Крокко неотличим от графика рис. 1, хотя, как мы увидим,

решение Крокко имеет при  $x = 1$  экспоненциально малый крючок (так как  $y'(1) = -\infty$ ).

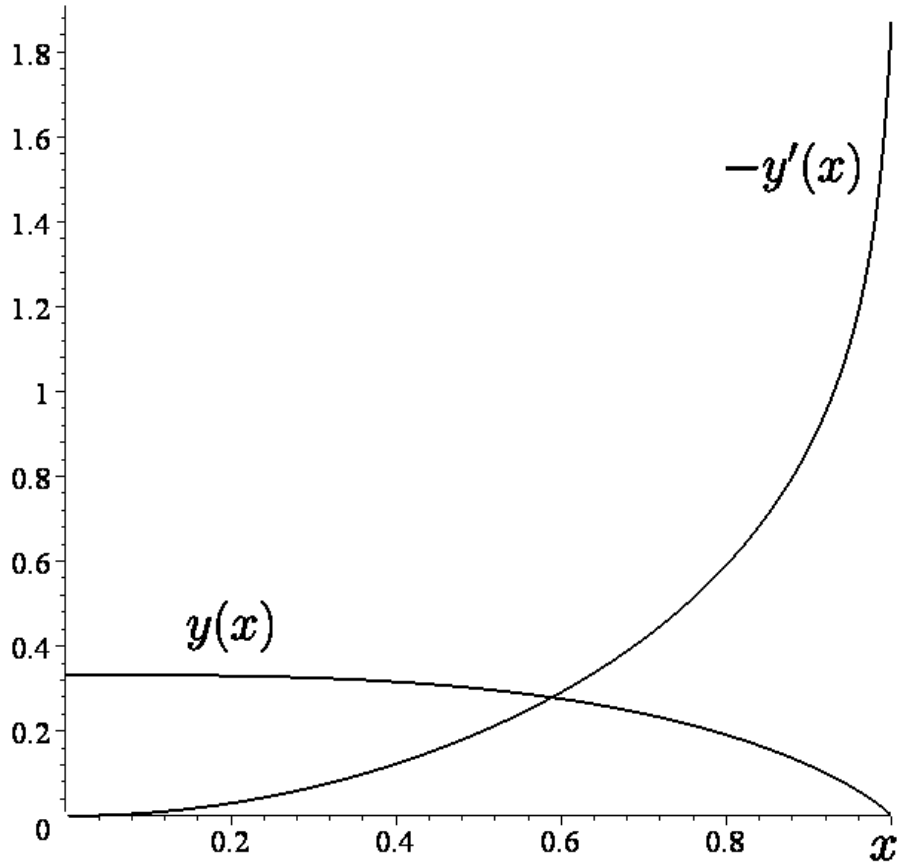


Рис 1. Графики функций  $y(x)$  и  $-y'(x)$  решения Крокко.

Ответ на вопрос, почему «такая хорошая функция» так «плохо аппроксимируется» (см. [4], хотя там речь идет об уравнении (1)), скрывается в асимптотическом разложении решения Крокко при  $x = 1$ . Это разложение получается следующим образом.

Уравнение Крокко (4) квазиоднородно, т.е. инвариантно относительно преобразования

$$x \rightarrow x/C^2 \quad y(x) \rightarrow C^3 y(x). \quad (8)$$

Если взять  $C^3 = s$ , то краевые условия (5) трансформируются в условия

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \quad y(1/C^2) = 0, \quad (9)$$

на интервале  $[0, 1/C^2]$ .

Такую краевую задачу будем называть *нормализованной*.

Решение Крокко является монотонно убывающей функцией (см. [2]), поэтому функция  $u(x) = 1 - y(x)$  является монотонно возрастающей на интервале  $[0, 1/C^2]$ ,  $u(1/C^2) = 1$ . Следовательно, существует обратная функция  $x(u)$ , определенная на интервале  $[0, 1]$ ,  $x(0) = 0$ ,  $x(1) = 1/C^2$ .

Заметим, что эти преобразования мы уже использовали в [2] в сходной ситуации. В данном случае  $x(u) = 12^{1/3} z(u)^{1/3}$ , где  $z(u)$  удовлетворяет [2, Eq. (14)] и изображена на Fig. 1 в [2].

Смысл проделанных преобразований состоит в том, что задача свелась к определению граничного значения однозначно определенной аналитической функции  $x(u)^3$  на границе ее области аналитичности (т.е. единичной окружности) в ее единственной (см. [2]) особой точке  $u = 1$  на границе.

Наконец, перенесем особую точку в начало координат заменой переменной  $u = 1 - t$  и получим уравнение для функции  $x(t)$

$$t \frac{d^2}{dt^2} x(t) - \frac{1}{2} x(t) \left( \frac{d}{dt} x(t) \right)^3 = 0. \quad (10)$$

Итак, про функцию  $x(t)$  известно, что она монотонно убывает на интервале  $[0, 1]$ ,  $x(0) = 1/C^2$ ,  $x'(0) = 0$  (см. [2]), и  $x(t) = O((1-t)^{1/3})$  при  $t \rightarrow 1$ . График функции  $x(t)$  с точностью до растяжений по осям совпадает с графиком  $y(x)$  на рис. 1, отраженным относительно биссектрисы.

Формально мы получили похожую, но более сложную, чем (5), краевую задачу, так как константу  $C$  предстоит определить. Однако асимптотическое разложение функции  $x(t)$  в точке  $t = 1$  уже известно, и оно сходится вплоть до и включая точку  $t = 0$ .

Запишем уравнение (10) стандартным образом в виде системы двух уравнений первого порядка

$$Y_1'(t) = Y_2(t), \quad Y_2'(t) = \frac{1}{2} Y_1(t) Y_2(t)^3 / t, \quad (11)$$

где  $Y_1(t) = x(t)$ ,  $Y_2(t) = x'(t)$ .

Теперь сделаем замену независимой переменной в системе (11)

$$t = r \exp(pz), \quad (12)$$

где  $z \geq 0$ , а величины  $r, p$  определим позднее.

Тогда система (11) переходит в систему

$$Y_1'(z) = r p \exp(pz) Y_2(z), \quad Y_2'(z) = \frac{p}{2} Y_1(z) Y_2(z)^3. \quad (13)$$

Таким образом, при  $\operatorname{Re}(p) < 0$  и  $z \rightarrow +\infty$  получим  $t \rightarrow +0$ , т.е. особая точка  $t = 0$  системы (11) отобразилась в точку  $z = +\infty$  системы (13).

Заметим, что если сделать замену переменной (12) в уравнении (10), то получится довольно сложное уравнение второго порядка, которое не эквивалентно системе (13).



Структура системы (13) такова, что ее можно исследовать эмпирически без вычислений. А именно, правая часть первого уравнения (13) экспоненциально быстро убывает. Поэтому величина  $Y_1(z)$  быстро стабилизируется. Но если заморозить  $Y_1(z)$  во втором уравнении (13), то оно интегрируется, и мы получаем

$$Y_2(z) \asymp \text{const}/\sqrt{z}, \quad z \rightarrow \infty. \quad (14)$$

Таким образом,  $Y_2(z)$  не может помешать стабилизации  $Y_1(z)$  в первом уравнении и система (13) экспоненциально быстро расщепляется на два независимых уравнения.

Пусть теперь  $z_0$  достаточно велико. Тогда  $|Y_2(z)| \leq |Y_2(z_0)|$ , при  $z_0 \leq z$ , и мы немедленно получаем оценку погрешности

$$|Y_1(z_0) - Y_1(\infty)| = |r p \int_{z_0}^{\infty} \exp(p z) Y_2(z) dz| \leq |r \exp(p z_0) Y_2(z_0)|, \quad (15)$$

а эта оценка – не что иное, как оценка погрешности величины  $x(0) = 1/C^2$ , т.е. можно принять  $1/C^2 \approx Y_1(z_0)$  с экспоненциально малой погрешностью.

Перейдем к доказательству справедливости этого эмпирического анализа.

**Теорема 1.** *Существуют формальные асимптотические плоские разложения функций  $Y_1(z)$  и  $Y_2(z)$  при  $z \rightarrow +\infty$  в системе (13) по функциям, которые асимптотически ведут себя как  $\exp(p z n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$  при  $z \rightarrow +\infty$ . Величина  $r$  при этом играет роль малого параметра. Эти разложения сходятся при достаточно малом  $|r|$ .*

**Доказательство.** По поводу плоских разложений см. [5].

Представим функции  $Y_1(z)$  и  $Y_2(z)$  в виде

$$Y_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} r^k u_k(z), \quad Y_2(z) = \sum_{k=0}^{\infty} r^k v_k(z). \quad (16)$$

Подставим эти разложения в систему (13).

Для функций  $u_0(z)$  и  $v_0(z)$  получаем уравнения

$$u_0'(z) = 0, \quad v_0'(z) = p/2 u_0(z) v_0(z)^3.$$

Таким образом,

$$u_0(z) = 1/C^2, \quad v_0(z) = C/(B - p z)^{1/2}, \quad (17)$$

где  $B$  и  $C$  – произвольные константы, которые подлежат определению.

Для функции  $u_1(z)$  получаем уравнение

$$u_1'(z) = p \exp(p z) v_0(z).$$

Используя (17), получаем

$$u_1(z) = C\sqrt{\pi} \exp(B) \operatorname{erfc}\left(\sqrt{B-pz}\right), \quad (18)$$

Для функции  $v_1(z)$  получаем уравнение

$$v_1'(z) = 3/2 p u_0(z) v_0(z)^2 v_1(z) + 1/2 p u_1(z) v_0(z)^3.$$

Используя (17), (18), получаем

$$v_1(z) = \frac{C^4}{4} \left( \frac{2 \exp(pz)}{B-pz} - \frac{(2(B-pz)-1)\sqrt{\pi} \exp(B) \operatorname{erfc}\left(\sqrt{B-pz}\right)}{(B-pz)^{3/2}} \right). \quad (19)$$

Нетрудно проверить, что константы интегрирования (которые проявляются на каждом шаге) выбраны правильно, т.е.

$$u_1(z) = \frac{C \exp(pz)}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \Gamma(n-1/2) \left( \frac{1}{B-pz} \right)^{n-1/2},$$

где равенство понимается в асимптотическом смысле, так как данный ряд расходится. Иными словами,

$$u_1(z) = C \exp(pz) \left( \frac{1}{(B-pz)^{1/2}} - \frac{1}{2(B-pz)^{3/2}} + \frac{3}{4(B-pz)^{5/2}} + \dots \right).$$

Используя это разложение, получаем

$$v_1(z) = \frac{1}{2} C^4 \exp(pz) \left( \frac{1}{(B-pz)^2} - \frac{1}{(B-pz)^3} + \frac{9}{4(B-pz)^4} + \dots \right).$$

Таким образом, по индукционному предположению

$$u_m(z) = \exp(pz) P_m(z), \quad v_m(z) = \exp(pz) Q_m(z), \quad m \leq n-1, \quad n > 1,$$

где  $P_m(z)$  и  $Q_m(z)$  – степенные асимптотические ряды относительно переменной  $1/(B-pz)$ .

Для функции  $u_n(z)$  получаем уравнение

$$u_n'(z) = p \exp(pz) v_{n-1}(z) \asymp \exp(pz) n,$$

поэтому для функции  $u_n(z)$  индукционный шаг доказан, так как интегрирование (и дифференцирование) экспоненты, помноженной на степенной ряд, не меняет степени экспоненты, т.е. порядка экспоненциальной малости функции (при подходящей константе интегрирования).

Для функции  $v_n(z)$  получаем уравнение

$$v_n'(z) = 3/2 p u_0(z) v_0(z)^2 v_n(z) + H_n(z) = \frac{3}{2} \frac{p v_n(z)}{B-pz} + H_n(z),$$

где  $H_n(z) \asymp \exp(pz)$  определяется ранее найденными функциями. Это ОДУ интегрируемо, и мы получаем

$$v_n(z) = (B - pz)^{-3/2} \left( \int H_n(z) (B - pz)^{3/2} dz + C_n \right),$$

где  $C_n$  – константа интегрирования.

Таким образом, если взять  $C_n = 0$ , то для функции  $v_n(z)$  индукционный шаг доказан по той же причине, что и для функции  $u_n(z)$ .

Сходимость построенного разложения следует из теоремы 2 в [5]. Там доказана сходимость асимптотического ряда Блазиуса (и его первых двух производных). Поэтому мы уже имеем параметрическое сходящееся асимптотическое разложение решения Крокко (см. (3)). Ряды (16) получаются из этого последнего разложения с помощью регулярных замен переменных и потому сходятся. Асимптотическое разложение по фиксированной шкале функций единственно (см. [11]). **Конец доказательства.**

Отметим некоторые моменты в доказательстве теоремы 1.

Мы существенно, хотя и неявно, использовали структуру полученных уравнений (13).

Во-первых, это уравнения первого порядка, что существенно, так как вычисление плоского разложения основано на последовательном интегрировании линейных ОДУ, а такие ОДУ более первого порядка, вообще говоря, не интегрируемы в квадратурах.

Во-вторых, структура (13) такова, что указанные линейные ОДУ можно интегрировать последовательно на каждом шаге (т.е. сначала для функции  $u_n(z)$ , а затем – для  $v_n(z)$ ).

Полученные разложения (16) можно записать как трансряды (см. [9]), т.е. ряды из рядов, если представить компоненты разложения в виде асимптотических рядов по элементарным функциям.

Таким образом, каждый ряд-компонента разложения  $u_n(z)$  или  $v_n(z)$  представляет собой вполне определенную функцию, которая выражается либо в квадратурах, либо в виде расходящегося степенного асимптотического ряда, помноженного на экспоненту  $\exp(pz)$ .

Нам понадобится еще функция  $u_2(z)$ , которая имеет вид

$$u_2(z) = \frac{C^4 \sqrt{\pi} \exp(B)}{2} \operatorname{erfc}(\sqrt{B - pz}) \left( \frac{\exp(pz)}{\sqrt{B - pz}} - \exp(B) \sqrt{\pi} \operatorname{erfc}(\sqrt{B - pz}) \right).$$

Функцию  $v_2(z)$  мы не приводим ввиду ее громоздкости.

Нетрудно заметить, что функции  $u_n(z)$  и  $v_n(z)$ ,  $n \leq 2$  являются однородными функциями порядка  $n$  от двух образующих функций  $\exp(pz)$  и

$\operatorname{erfc}(\sqrt{B - pz})$  с коэффициентами, которые являются полиномами от переменной  $1/\sqrt{B - pz}$ . Отношение этих образующих имеет степенную асимптотику при  $z \rightarrow +\infty$ . Поэтому весьма заманчиво искать последующие члены разложений (16) методом неопределенных коэффициентов. Это была оригинальная идея Блазиуса для уравнения (1) (см. [10]).

Однако, как показывают вычисления, это не проще, а сложнее уже для функций  $u_n(z)$  и  $v_n(z)$ ,  $n \leq 2$ . Кроме того, этот метод в принципе не работает для  $n \geq 3$ , так как последующие члены разложений (16) не выражаются через известные функции. Эта ситуация не описана в литературе, кроме [5], где она встретилась впервые в асимптотическом разложении Блазиуса.

Таким образом, представление о том, что асимптотический ряд (формальное решение ОДУ) можно как-то угадать по первому члену разложения (в качестве которого назначается какое-нибудь решение укороченного уравнения) – оказывается несостоятельным.

Заметим также, что асимптотический ряд (неважно, сходящийся или нет), представляющий решение ОДУ, не является единственно определенным, что вполне очевидно. В случае системы (13) оказалась удобной переменная  $B - pz$ , хотя асимптотические ряды можно было раскладывать и по переменной  $z$ .

Возвращаясь к переменной  $t$  и уравнению (10), а также сделав замену  $B \rightarrow B + \log r$ , получаем асимптотическое разложение функции  $x(t)$  при  $t \rightarrow +0$ .

$$x(t) = \frac{1}{C^2} + C\sqrt{\pi} \exp(B) \operatorname{erfc}(\sqrt{B - \log t}) + \frac{1}{2} C^4 \sqrt{\pi} \exp(B) \times \\ \operatorname{erfc}(\sqrt{B - \log t}) \left( \frac{t}{\sqrt{B - \log t}} - \sqrt{\pi} \exp(B) \operatorname{erfc}(\sqrt{B - \log t}) \right) + \dots, \quad (20)$$

которое можно также записать в виде трансряда

$$x(t) = \frac{1}{C^2} + \\ Ct \left( \frac{1}{(B - \log t)^{1/2}} - \frac{1}{2} \frac{1}{(B - \log t)^{3/2}} + \frac{3}{4} \frac{1}{(B - \log t)^{5/2}} + \dots \right) + \\ C^4 t^2 \left( \frac{1}{4} \frac{1}{(B - \log t)^2} - \frac{1}{2} \frac{1}{(B - \log t)^3} + \frac{21}{16} \frac{1}{(B - \log t)^4} + \dots \right) + \dots \quad (21)$$

Разложение (20) объясняет, почему функция  $x(t)$ , которая на графике выглядит как полином, столь плохо аппроксимируется стандартными средствами численного анализа. Дело в том, что эта функция имеет в нуле экспоненциально малый крючок.

Чтобы пояснить это нестрогое понятие, определим, что такое степенно-малый крючок. Это, по определению, особенность функций  $t^{1+\varepsilon}$ ,  $t \geq 0$  в нуле

при  $\varepsilon \rightarrow +0$ . Это семейство функций равномерно стремится к биссектрисе на любом конечном интервале. В то же время каждая функция касается в нуле оси  $t$ . Очевидно, чем меньше  $\varepsilon$ , тем меньше крючок. Нетрудно проверить, что функция  $x(t)$  имеет в нуле похожую особенность, только данный крючок меньше любого степенного.

Обратим внимание, что нам удалось вычислить два члена разложения (20) в явном виде только потому, что некоторые интегралы (но не все), включающие функцию  $\operatorname{erf}()$ , выражаются через нее же. На третьем шаге это везение заканчивается. Если бы функция  $\operatorname{erf}()$  не была уже изучена, то разложения (20) вовсе бы не было. Такого рода примеры очень редки, хотя и описаны в литературе (см. [5], [11, с.21]).

В данном случае у нас имеется запасной вариант в виде трансряда (21), хотя это обстоятельство не является необходимым. В [11, с.21] приведен пример функции, не имеющей асимптотического разложения в «элементарных» (т.е. уже известных) функциях.

Возвращаясь к основной цели данной работы – предложить способ надежного вычисления константы Блазиуса с произвольной и контролируемой точностью, приходится признать, что ряды (20) и (21) для этого непригодны.

Ряд (20) хотя и сходится, но не может быть вычислен далее в известных функциях по вышеуказанным причинам. А ряды, входящие в ряд (21), расходятся; и нет никакой очевидной возможности оценить отброшенные члены.

Тем не менее применим вычисленный отрезок ряда (20) для реализации классической идеи Блазиуса (см. [10]) о сращивании двух асимптотических разложений.

Заметим, что метод сращивания различных асимптотических разложений одного и того же решения также известен под названием «погранслоя» при решении сингулярных краевых задач.

Рассмотрим нормализованную краевую задачу (9). Она определена на интервале  $[0, 1/C^2 \approx 2.085409]$ , а ряд Тейлора (6), в котором подставлена величина  $s = 1$ , быстро сходится внутри этого интервала.

Возьмем  $x_0 = 2$ , и 300 коэффициентов (7) ряда Тейлора голоморфной функции  $y(x)$ . Тогда

$$t = t_0 = y(x_0) \approx 0.1810578187, \quad (22)$$

$$x(t_0) = x_0 = 2, \quad x'(t_0) = 1/y'(x_0) \approx -0.58683143170. \quad (23)$$

Теперь надо решить сложную нелинейную и трансцендентную систему уравнений

$$x_0 = x(t), \quad x'(t_0) = x'(t)$$

относительно неизвестных  $B$  и  $C$ , где правые части вычисляются по ряду (20). Это оказывается осуществимо, и мы получаем

$$B \approx -0.351914817, \quad C \approx -0.692473722,$$

откуда имеем  $s = |C|^3 \approx 0.3320548996$ , что отличается от точного значения менее чем на  $2.5 \times 10^{-6}$ . Такая точность вычисления константы Блазиуса может быть достигнута, при некоторых усилиях, и без применения асимптотического ряда (20).

Заметим, что ряды (20) и (21) дают параметрическое представление римановой поверхности функции  $x(t)$  в окрестности сингулярности, т.е. эти разложения применимы и при комплексных значениях величин  $B$ ,  $C$  и  $t$ .

Трансряд (21) является разновидностью пси-ряда (см. [12, с. 249]). В частности, это означает, что функция  $x(t)$  имеет логарифмическое ветвление в нуле.

График функции  $x(t)$  при  $t \in [0, 1]$  можно интерпретировать как срез одного листа римановой поверхности аналитической функции  $x(t)$ .

Если взять малое  $t = t_0 > 0$  и сделать обход вокруг особой точки ноль на угол  $2\pi$ , то  $\log t$  изменится на  $2\pi i$ , что равносильно изменению константы  $B$  на эту величину. Ясно, что мы попадаем на следующий лист римановой поверхности, который расположен ближе к листу  $x(t) = 1/C^2$  (так как константа является решением уравнения (10)).

Поэтому если просто делать обход вокруг особой точки ноль снова и снова, то все члены разложения (21) будут убывать, и мы получаем, что  $x(t_0) \rightarrow 1/C^2$  со скоростью  $\asymp \text{const}/\sqrt{m}$  (см. (14)), где  $m$  – число оборотов вокруг особой точки.

Таким образом, риманова поверхность функции  $x(t)$  вблизи нуля состоит из бесконечного количества листов, которые касаются друг-друга в особой точке. Эту информацию можно использовать для контроля точности вычислений.

### § 3. Численное аналитическое продолжение функции $x(t)$

Перейдем к построению численного алгоритма, который, как мы полагаем, позволяет, в принципе, вычислить константу Блазиуса с произвольной и гарантированной (т.е. контролируемой) точностью.

Поскольку речь идет о вычислениях на компьютере, то сначала необходимо условиться о том, что мы понимаем под произвольной и гарантированной точностью.

Произвольная точность означает просто, что на современных компьютерах вычисления можно проводить в плавающей арифметике с очень большой

разрядной сеткой (вполне реально – тысячи десятичных разрядов на домашнем компьютере).

Вопрос о гарантированной точности является более тонким и, вероятно, не может быть строго определен. Поэтому мы ограничимся некоторыми принципами, которых будем придерживаться.

Будем считать, что аналитическая функция вычисляется по ее степенному ряду с нужной точностью внутри ее круга сходимости, если мы можем вычислить любое количество коэффициентов ее степенного ряда.

Мы уже неявно пользовались этим принципом при вычислении начальных значений (22) и (23) по коэффициентам (7) ряда Тейлора функции  $y(x)$ . Как было отмечено, внутри радиуса сходимости ( $\approx 2.085409$ ) этот ряд сходится (почти) как геометрический, т.е. точность вычисления начальных значений вполне контролируема.

Заметим, что этот принцип сразу исключает стандартные методы численного интегрирования любого порядка, такие, например, как методы Рунге-Кутты (которые уже имеются до 14-го порядка точности). Порядок точности  $N$ , разумеется, это оценка локальной погрешности  $O(h^{N+1})$  на каждом шаге  $x \rightarrow x + h$ .

Второй и последний принцип, который мы используем, это допущение, что на каждом шаге аналитического продолжения функции имеется внутренняя (а не априорная) оценка достигнутой точности. Иными словами, оборвав вычисления, мы имеем оценку достигнутой точности ожидаемого результата, которая следует из проделанных вычислений.

Разумеется, это означает, что мы не строим какой-либо общий метод численного интегрирования ОДУ, а лишь вполне конкретный, предназначенный для системы (13), для которой у нас уже имеется строгая оценка погрешности (15).

Мы будем численно интегрировать систему (13) методом тейлоровских разложений, но число коэффициентов в разложениях заранее не фиксируем и можем менять по необходимости. Таким образом, порядок точности численного интегрирования ОДУ в нашем случае неограничен.

Заметим, что система (13) инвариантна относительно преобразования  $z \rightarrow z + h$ ,  $r \rightarrow r \exp(ph)$ . Это означает, что достаточно вычислить коэффициенты тейлоровских разложений функций  $Y_1$  и  $Y_2$  только в одной точке  $z = 0$ .

Определим сначала начальные данные системы (13) и входящие в нее параметры.

Напомним, что функция  $y(x)$ , т.е. решение нормализованной задачи (9),

вычисляется по формуле

$$y(x) = 1 - \sum_{n=1}^M g_n x^{3n}, \quad (24)$$

где  $M$  – число коэффициентов (7), которые нам необходимо вычислить, чтобы достигнуть выбранной точности (с некоторым запасом).

Выберем некоторое  $x = x_0$  внутри круга сходимости функции  $y(x)$  (реально –  $x_0 < 2$ ). Тогда

$$Y_1(0) = a_0 = x_0, \quad Y_2(0) = b_0 = 1/y'(x_0), \quad r = y(x_0)$$

являются начальными значениями системы (13) при  $z = 0$  (см. (12)).

Например, взяв  $M = 300$  в (24) и  $x_0 = 3/2$ , получаем  $a_0 = 1.5$ ,  $b_0 \approx -1.552$ ,  $r \approx 0.7001$  и  $g_{300} (3/2)^{900} \approx 0.365 \times 10^{-134}$ .

Для контроля точности начальных значений можно также использовать ряд

$$w(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_n - q_{n-1}}{n} x^n,$$

где коэффициенты  $q_n$  вычисляются по рекуррентной формуле [2, Eq. (17)]. Тогда должны выполняться (с нужной точностью) тождества

$$(12 w(1 - r))^{1/3} = x_0, \quad (12 w'(1 - r))^{1/3} = -b_0.$$

Теперь представим функции  $Y_1$  и  $Y_2$  в виде тейлоровских разложений

$$Y_1(z) = \sum_{n=0}^N a_n z^n, \quad Y_2(z) = \sum_{n=0}^N b_n z^n,$$

где  $N$  – выбранное число коэффициентов, которые мы вычислим.

Подставим эти разложения в систему (13) и соберем подобные члены. Тогда для  $n = 0, 1, \dots, N - 1$  получаем

$$a_{n+1} = r p / (n + 1) \sum_{j=0}^n b_{n-j} p^j / j!, \quad (25)$$

$$b_{n+1} = p/2 / (n + 1) \sum_{j=0}^n a_{n-j} \sum_{k=0}^j b_{j-k} \sum_{i=0}^k b_{k-i} b_i,$$

где первая из этих формул вполне очевидна, а вторая осуществляет возведение ряда в 3 степень и перемножение рядов по правилу Коши.

Формулы (25) применимы при любых значениях коэффициентов  $a_n$  и  $b_n$ , однако формула для  $b_n$  весьма неоптимальна. Вместо нее уместно воспользоваться формулой возведения ряда в степень, которая была известна уже Эйлеру (см. [13]).



Обозначим  $c_0 = b_0^3$  и положим для  $n > 0$

$$c_n = \left( \sum_{k=1}^n (4k - n) b_k c_{n-k} \right) / b_0 / n.$$

Эта формула справедлива, очевидно, только если  $b_0 \neq 0$  на каждом шаге. Для данной задачи это условие выполнено (см. (14)). Тогда

$$b_{n+1} = p/2/(n+1) \sum_{j=0}^n a_{n-j} c_j. \quad (26)$$

Эта формула значительно быстрее формулы (25).

После того как вычислено нужное количество коэффициентов (которое можно менять на каждом шаге), вычисляются начальные значения на следующем шаге, т.е. при  $z = h$ , где  $h$  – величина шага. Ее мы определим позднее. Имеем

$$Y_1(h) = \sum_{n=0}^N a_n h^n, \quad Y_2(h) = \sum_{n=0}^N b_n h^n.$$

Очевидно, это не самые оптимальные формулы, поэтому запишем их по правилу Хорнера

$$S = a_N; \quad S := a_j + h S, \quad j = N - 1, \dots, 0; \quad Y_1(h) = S,$$

плюс аналогичная формула для  $Y_2(h)$ . Здесь символ «:=» понимается в смысле присваивания.

Теперь мы полагаем  $z = 0$ ,  $a_0 = Y_1(h)$ ,  $b_0 = Y_2(h)$  и  $r := r \exp(ph)$  в силу указанной инвариантности системы (13). После чего все вычисления можно повторить начиная с формул (25).

Осталось уточнить некоторые детали описанного алгоритма.

Величина  $p$  является независимым параметром, специально введенным для дополнительного контроля вычислений. Единственное условие, налагаемое на этот параметр, – это  $\operatorname{Re} p < 0$ . Этот параметр тоже можно менять произвольно на каждом шаге.

Величина шага интегрирования  $h$  и ее автоматический контроль – это тонкий момент, который требует отдельного исследования. Поскольку мы не строим общего алгоритма численного интегрирования, то мы можем использовать информацию о решении, полученную ранее из асимптотического анализа, а также *aposteriori*, т.е. из уже сделанных вычислений.

Как оказалось, коэффициенты  $a_n$  (которые нам, в конечном счете, и нужны) убывают экспоненциально быстро. Коэффициенты  $b_n$  убывают не столь быстро и, кроме того, знакопеременны. Поэтому предлагается следующая схема для выбора шага  $h$ .

Начальный шаг берется  $h = 1/2$ . Этот шаг либо делится, либо умножается на 2, но так, что всегда  $h \leq 1/2$ .

После того как вычислены коэффициенты  $a_n$  и  $b_n$ ,  $n = 1, \dots, N$ , проверяется условие

$$|b_N h^N| < \varepsilon/16, \quad (27)$$

где  $\varepsilon$  – выбранная точность (обычно это так называемая *машинная точность*, т.е. условие  $1 = 1 + \varepsilon$  истинно). Если условие (27) не выполнено, то полагаем  $h := h/2$  и снова проверяем условие (27). Если условие (27) выполнено, то проверяем условие  $|b_N 2^N h^N| < \varepsilon/16$ . В случае его выполнения полагаем  $h := 2h$  и вычисляем начальные значения на следующем шаге.

На самом деле, условие  $h \leq 1/2$  можно опустить и предоставить алгоритму самому определить величину  $h$ . В наших вычислениях было до  $h = 4$ . Ясно, что в данном случае термин «порядок точности» численной схемы теряет смысл.

Осталось определить условие выхода из этого бесконечного цикла.

В силу оценки (15), а также асимптотических свойств функции  $Y_2(z)$  (см. (14)), условие  $|r| < \varepsilon$  гарантирует точность достигнутого результата  $|a_0 - 1/C^2| < \varepsilon|b_0| < \varepsilon$ .

Указанные формулы весьма просты в реализации на языках программирования высокого уровня (мы использовали Maple и FORTRAN). В полученном алгоритме полностью отсутствует эффект «черного ящика», что весьма повышает достоверность полученных результатов.

Приведем некоторые детали проделанных вычислений.

Величина  $p$  регулирует скорость расщепления системы (13) на два (почти) независимых уравнения. На рис. 2 показаны графики функций  $Y_1(z)$  и  $Y_2(z)$  для  $p = -2$  и  $x_0 = 3/2$ .

В качестве теста можно положить  $p = i$ , что будет соответствовать бесконечному обходу вокруг особой точки по кругу. В этом случае стремление величины  $Y_1(z)$  к предельному значению описывается асимптотикой (14), помноженной на  $\exp(iz)$ .

Но если взять  $\operatorname{Re}(p) < 0$ ,  $\operatorname{Im}(p) = i$ , то траектория, по которой решение приближается к особой точке 0, будет описывать логарифмическую спираль, расположенную на разных листах римановой поверхности функции  $x(t)$ . С каждым оборотом вокруг особой точки, т.е.  $z \rightarrow z + 2\pi$ , траектория переходит на новый лист, который расположен ближе к листу  $x(0) = 1/C^2$ , который нам нужен. Поскольку константа  $C$  вещественна, то величина  $|\operatorname{Im}(a_0)|$  экспоненциально быстро убывает и может служить дополнительным контролем точности.

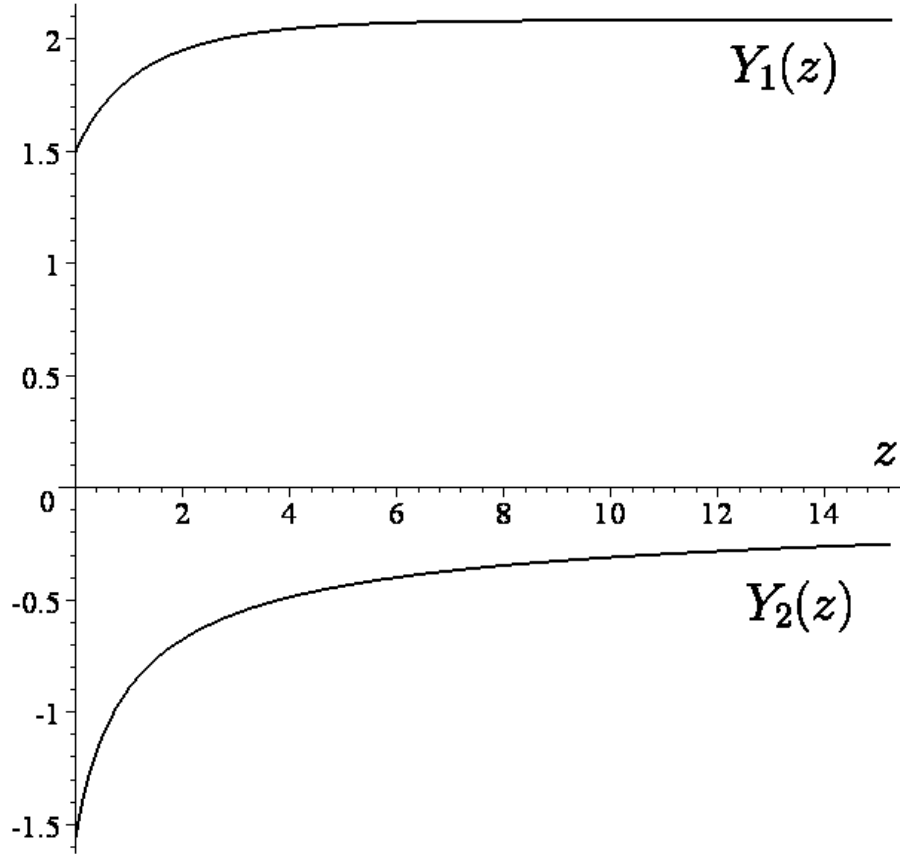


Рис 2. Графики функций  $Y_1(z)$  и  $Y_2(z)$  для  $p = -2$  и  $x_0 = 3/2$ .

Расчеты показывают, что уже 3-4 оборота дают 13-16 верных десятичных разрядов константы Блазиуса при различных начальных значениях.

Результаты расчетов при разных  $p$ ,  $x_0$ ,  $N$  и  $M$ , разумеется, совпадают в пределах заданной точности  $\varepsilon$  (при соответствующей величине разрядной сетки). Ключевой величиной при этом является  $M$ , которая используется при вычислении начального приближения по ряду (24). Поэтому ее следует выбирать с некоторым запасом.

Тестовые расчеты по программе, реализованной на языке FORTRAN в DD-арифметике (т.е. с 32 десятичными разрядами), показали, что константа Блазиуса вычисляется с машинной точностью (т.е. все 32 десятичных разряда верны) в широком диапазоне параметров  $p$ ,  $x_0$ ,  $M$  и  $N$ . При этом количество шагов (т.е.  $z \rightarrow z + h$ ) редко превосходит 150-200. Это означает, что накопление локальной погрешности несущественно и им можно пренебречь.

Приведем 100 десятичных разрядов константы Блазиуса, вычисленной в системе Maple ( $\varepsilon = 10^{-128}$ ,  $M \in [300, 500]$ ,  $N \in [20, 80]$ ,  $p \in [-4, -1]$ ,  $x_0 \in [0.5, 1.9]$ ).

$$s = 0.33205733621519629893718006201058296654709356141267 \\ 98181004475640198724174018064405070490731855146368$$

Мы не ставили своей задачей посчитать рекордное количество десятичных разрядов константы Блазиуса, но лишь продемонстрировать, что ее можно вычислить с любой (в принципе) точностью по нашему алгоритму.

## Список литературы

- [1] *Töpfer C.* Bemerkungen zu dem Aufsatz von H. Blasius «Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung» // *Z. Math. Phys.* 1912. V.60. P.397-398.
- [2] *Varin V.P.* A solution of the Blasius problem // *Comp. Math. & Math. Phys.* 2014. V.54. N 6. P.1025–1036.
- [3] *Ganapol B.D.* Highly accurate solutions of the Blasius and Falkner-Skan boundary layer equations via convergence acceleration // [arXiv:1006.3888], 2010.  
(<https://arxiv.org/abs/1006.3888>)
- [4] *Boyd J.P.* The Blasius function in the complex plane // *Experiment. Math.* 1999. V.8. P.381–394.
- [5] *Варин В.П.* Плоские разложения и их приложения // *Ж. Выч. мат. и мат. физ.* 2015. V.55, N 5. P.807–821.
- [6] *Crocco L.* Sull strato limite laminare nei gas lungo una lamina plana // *Rend. Math. Appl. Ser. 5*, 1941. V.21. P. 138-152.
- [7] *Brighi B., Fruchard A., Sari T.* On the Blasius problem // *Adv. Diff. Eqn.* 2008. V.13. P. 509-600.
- [8] *Ahmad F.* Application of Crocco-Wang equation to the Blasius problem // *Electronic Journal «Technical Acoustics»* 2007. V.2.  
(<http://www.ejta.org>]
- [9] *Edgar G.A.* Transseries for beginners // [arxiv:0801.4877v5], 2009.  
(<http://arxiv.org/abs/0801.4877v5>)
- [10] *Blasius H.* Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung // *Z. Math. Phys.* 1908. V.56. P.1–37.
- [11] *de Bruijn N.G.* Asymptotic methods in analysis. Amsterdam: North-Holland Publ. Co. 1958.

- [12] *Hille E.* Ordinary differential equations in the complex domain. New-York: John Wiley & Sons. 1976.
- [13] *Euler L.* Introductio in analysin infinitorum. Lausanne, 1748. = *Euler L.* Introduction to the analysis of the infinite (Blanton J.D., tr.). New York: Springer, 1988, 1990.