



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Досаев Р.В., Ткачев С.С.

Управление двумя
сферическими спутниками с
переменным
коэффициентом отражения
в групповом полете

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Досаев Р.В., Ткачев С.С. Управление двумя сферическими спутниками с переменным коэффициентом отражения в групповом полете // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2016. № 107. 28 с. doi:[10.20948/prepr-2016-107](https://doi.org/10.20948/prepr-2016-107)
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2016-107>

О р д е н а Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Р о с с и й с к о й а к а д е м и и н а у к

Р.В. Досаев, С.С. Ткачев

**Управление двумя сферическими
спутниками с переменным
коэффициентом отражения
в групповом полете**

Москва-2016

Досаев Р.В., Ткачев С.С.

Управление двумя сферическими спутниками с переменным коэффициентом отражения в групповом полете

В работе исследуется возможность управления формацией из двух сферических спутников с помощью силы солнечного давления. Источником управления является изменяемый коэффициент отражения поверхности одного из спутников. Учитываются возмущения от гармоник J_2 и эллиптичности орбит аппаратов.

Ключевые слова: сферический солнечный парус, управление относительным движением спутников, переменный коэффициент отражения поверхности паруса

Roman Vladimirovich Dosaev, Stepan Sergeevich Tkachev

Two spherical satellite relative motion control in formation flying via variable surface reflectivity

The possibility of two spherical satellites relative motion control using solar radiation pressure is considered. The source of control is a variable reflectivity of one of the satellites surface. The perturbations of J_2 harmonic and small eccentricity of satellites are taken into account.

Key words: spherical solar sail, satellite relative motion control, variable surface reflectivity

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 16-01-00739, № 16-31-00260, РФФИ № 16-31-00321.

Введение

Удержание группы спутников на относительно близком расстоянии друг от друга является неотъемлемой частью групповых полетов в космосе. Для описания относительного движения часто применяются уравнения, которые получаются из задачи двух тел линеаризацией по расстоянию между аппаратами. Эти уравнения в невозмущенном случае имеют аналитическое решение [1], которое в общем случае содержит вековой член, отвечающий за расхождение спутников. Теоретически данную проблему можно решить подбором определенных начальных условий, обнуляющих вековой член и обеспечивающих заданное периодическое движение. Однако на практике реализовать такие условия невозможно по причине неточностей при выводе на орбиту и формировании формации. Приходится применять управление, которое должно регулярно сводить ошибки траекторий к нулю и тем самым поддерживать формацию в ограниченной области. Последнее также обязательно при наличии различного рода возмущений. Известно [2], например, что гармоника J_2 вызывает прецессию низких околоземных орбит и тем самым существенно сказывается на относительном дрейфе аппаратов. Эллиптичность также значительно влияет на разлет формации из-за большой разницы ускорений в перигее и апогее. В работе [3] показано, что в линейной модели учитывающей эллиптичность, возникает экспоненциальный по истинной аномалии дрейф.

В настоящий момент существуют различные способы поддержания ограниченности взаимного расстояния спутников, основанные, например, на использовании реактивных [4] и плазменных двигателей [5], использовании электромагнитного взаимодействия между спутниками [6], силы сопротивления атмосферы [7], силы солнечного давления.

Данная работа посвящена последнему из перечисленных выше способов – применению силы светового давления (ССД). Способ управления при помощи солнечной радиации является весьма эффективным для высоких орбит и точек либраций в связи с малым потреблением аппаратом энергии. Интерес к указанному подходу неуклонно растет.

Одной из первых работ, посвященных данной тематике, является работа [8]. В ней изложен подход, основанный на выборе оптимального угла ориентации плоского паруса относительно набегающего потока солнечного излучения для устранения прецессии орбиты, вызванной гармоникой J_2 . В работе [9] рассматривается формация-тетраэдр из спутников, снабженных зеркальными парусами в форме параболоида для создания импульса, позволяющего управлять формацией под влиянием несферичности Земли. В статье [10] также рассматривается тетраэдр, но уже с плоскими парусами на геостационарной орбите. В [11] рассматривается формация, размещенная на солнечно-синхронной орбите для исследования магнитного «хвоста» Земли. Из

усредненных на периоде уравнений движения выводятся условия на нормаль паруса, которая должна непрерывно отслеживать линию апсид прецессирующей орбиты. В статье [12] рассмотрен способ снабжения солнечной энергией спутника-трансммиттера, находящегося на геостационарной орбите. Два других спутника-рефлектора находятся по обе стороны – «снизу и сверху» орбиты — и наклонены под определенным углом, отражая тем самым солнечные лучи прямо в трансмиттер. Обсуждается возможность поддержания такого вида формации.

Много работ посвящено исследованию движения формаций в окрестности точек либрации. Отметим из них те, в которых обсуждается использование ССД. В работе [13] анализируется поддержание двух типов относительных периодических траекторий вокруг точки L_2 : траекторию лидер-последователь и круговую траекторию. Статья [14] демонстрирует применение ССД для реконфигурации трех спутников вблизи точки L_2 . В качестве параметров управления используются площадь плоского паруса и два угла ориентации относительно вектора на Солнце. В [15] рассматривается опорная орбита с периодом в один год, получаемая в эллиптической задаче трех тел Земля-Солнце с помощью метода Пуанкаре-Линдштета. Подбирается оптимальный коэффициент отражения и ориентация парусов. В работах [16] исследуется движение формации в эфемеридной модели вблизи точек L_1 и L_2 . В работе М.Л. Лидова и С.С. Лукьянова [17] подробно рассмотрена задача управления орбитальным движением КА для плоского случая задачи трех тел. Рассмотрение проводится для линейного приближения.

Сравнительно недавно появились работы по изучению полета формации к астероидам и другим небесным телам. Например, в статье [18] изложен подход, представляющий собой построение и поддержание замкнутых относительных траекторий при помощи светового давления вокруг астероида.

Стоит отметить, что довольно популярным ([19], [20]) приемом упрощения управляющего воздействия и системы в целом является линеаризация по углу между нормалью к парусу и направлением на Солнце. А именно, предполагается, что разность между углом одного спутника с углом второго является малой величиной. Это позволяет получить линейную систему уравнений и применить, например, регулятор из семейства линейно-квадратичных.

В данной работе рассматриваем относительное движение двух спутников: главного – пассивного (без наличия какого-либо способа управления положением в пространстве) и дочернего – активного (с солнечным парусом). Оба спутника имеют сферическую форму. Такую форму аппаратов можно поддержать, например, центробежными силами, предварительно раскрутив их или приблизив форму многоугольным каркасом.

В качестве закона управления используем пропорционально-дифференциальный регулятор (ПД-регулятор) [21], обеспечивающий

асимптотическую устойчивость периодической траектории. Этот регулятор отличается своей простотой и удобен для оценки величины управления и внешних возмущений.

В роли параметра управления выступает переменный, распределенный по сферической поверхности дочернего спутника, коэффициент отражения. Новейшие и уже опробованные технологии позволяют использовать материалы с таким свойством [17], [22]. Благодаря этому появляется возможность за счёт варьирования конфигурации отдельных участков (ячеек) паруса изменять модуль и направление силы солнечного давления. Варьирование можно реализовать, например как в проекте Icaros в 2010 году [23], при помощи регулирования прозрачности жидкокристаллической пленки подачей электрического напряжения. Энергию на изменение цвета ячейки аппарат может получать от солнечных батарей. В статье [24] обсуждается управление ориентацией аппарата, использующего шарообразные солнечные паруса с переменным коэффициентом отражения (рис.1.).

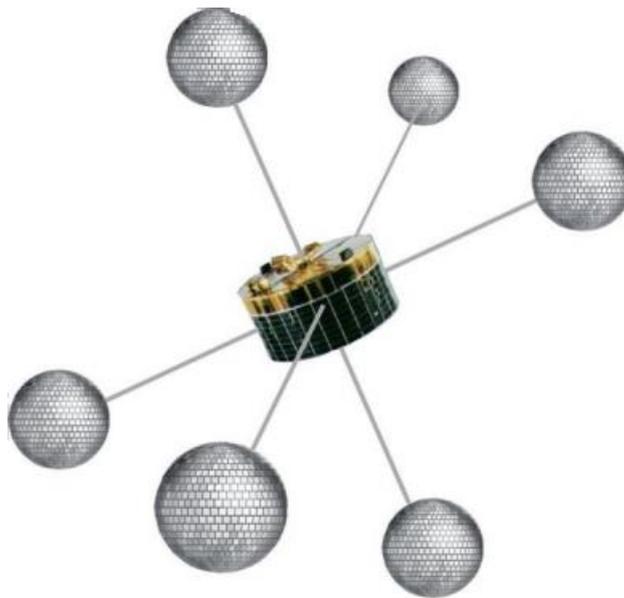


Рис. 1. Концепция аппарата, использующего шарообразные солнечные паруса

Основной проблемой при таком подходе является ограниченность коэффициента отражения и, как следствие, достижимость заданной величины управления. Для решения этой проблемы в настоящей работе будем уменьшать абсолютную величину управления до тех пор, пока ограничения на коэффициент отражения не будут удовлетворены. Из возмущений, влияющих на относительное движение аппаратов, в работе учитываем несферичность Земли и слабую эллиптичность орбит аппаратов.

1. Постановка задачи

1.1 Системы координат

Введем необходимые правые ортогональные системы координат:

O_aXYZ – инерциальная система координат (ИСК): начало координат O_a расположено в центре масс Земли, O_aX направлена в точку весеннего равноденствия, O_aZ направлена по оси вращения Земли. Орты вдоль осей O_aX, O_aY, O_aZ обозначим $\mathbf{E}_X, \mathbf{E}_Y, \mathbf{E}_Z$ соответственно (рис. 2).

$Oxyz$ – орбитальная система координат (ОСК): точка O совпадает с центром масс главного спутника. Ось Oz направлена по радиус-вектору спутника в текущей точке орбиты, ось Oy направлена по нормали к плоскости орбиты (рис. 3).

$O\xi\eta\zeta$ – солнечная система координат (ССК): ось $O\zeta$ направлена на Солнце, $O\xi$ перпендикулярна плоскости эклиптики. Орты вдоль осей $O\xi, O\eta, O\zeta$ обозначим $\mathbf{e}_\xi, \mathbf{e}_\eta, \mathbf{e}_\zeta$ соответственно (рис. 4).

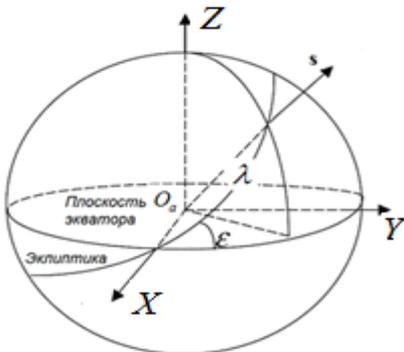


Рис. 2. ИСК

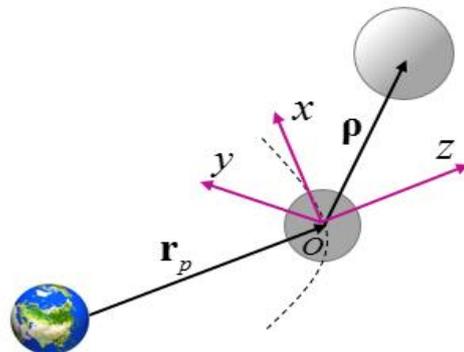


Рис. 3. ОСК

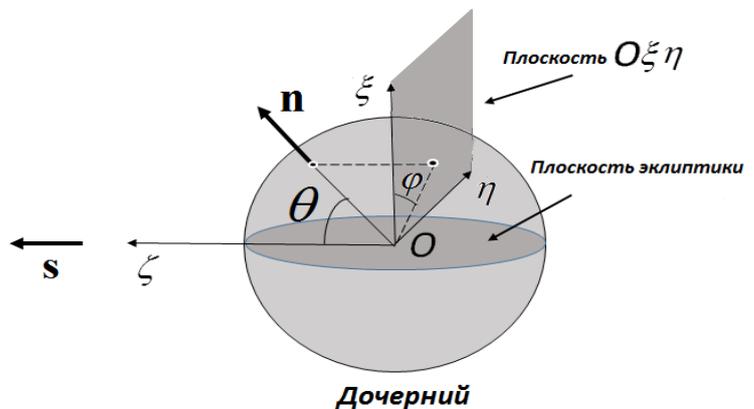


Рис. 4. ССК

1.2 Уравнения движения

Следуя работе [25], запишем уравнение относительного движения аппаратов в векторной форме:

$$\ddot{\mathbf{r}} + [\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{r}] + [\boldsymbol{\omega}, [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}]] + 2[\boldsymbol{\omega}, \dot{\mathbf{r}}] = -\frac{\mu}{r_c^3} \mathbf{r} + \frac{3\mu \cdot \mathbf{r}_c(\mathbf{r}_c, \mathbf{r})}{r_c^5} + \mathbf{f}_{J_2}. \quad (1)$$

Здесь точкой обозначено дифференцирование по времени, \mathbf{r} – вектор, идущий от главного спутника к дочернему, $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}$ – угловые орбитальные скорость и ускорение главного спутника соответственно, \mathbf{r}_c – радиус-вектор главного спутника, идущий от центра Земли к центру масс аппарата, r_c – абсолютное значение вектора \mathbf{r}_c , индекс c выделяет главный (chief) спутник, \mathbf{f}_{J_2} – возмущение от второй гармоники J_2 геопотенциала Земли, μ – гравитационный параметр Земли, равный $398600,4415 \text{ км}^3 \cdot \text{с}^{-1}$.

Выразим переменные r_c , $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$ через истинную аномалию \mathcal{G} , большую полуось a и эксцентриситет e орбиты главного спутника

$$\begin{aligned} r_c &= \frac{p}{1 + e \cos \mathcal{G}}, \\ \boldsymbol{\omega} &= \dot{\mathcal{G}} \mathbf{E}_2 = \omega_0 (1 + e \cos \mathcal{G})^2 \mathbf{E}_2, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{\mu}{p^3}}, \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= \dot{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{E}_2 = -2e\omega_0 \sin \mathcal{G} \cdot \dot{\mathcal{G}}, \end{aligned} \quad (2)$$

где $p = a(1 - e^2)$. Учитывая слабую эллиптичность $e \ll 1$, выражения (2) перепишем в виде

$$\begin{aligned} r_c &= a(1 - e \cos \mathcal{G}), \\ \dot{\mathcal{G}} &= \omega_0(1 + 2e \cos \mathcal{G}), \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= -2e\omega_0 \sin \mathcal{G} \cdot \dot{\mathcal{G}} \end{aligned}$$

Для возмущения \mathbf{f}_{J_2} , согласно работе [26], проведем также линеаризацию по e

$$\mathbf{f}_{J_2} = \mathbf{A}_{J_2} \cdot \mathbf{r},$$

$$\mathbf{A}_{J_2} = J \begin{bmatrix} 1 - 3\sin^2 i \sin^2 \mathcal{G} & \sin^2 i \sin 2\mathcal{G} & \sin 2i \sin \mathcal{G} \\ \sin^2 i \sin 2\mathcal{G} & -\frac{1}{4} - \sin^2 i \left(\frac{1}{2} - \frac{7}{4} \sin^2 \mathcal{G} \right) & -\frac{1}{4} \sin 2i \cos \mathcal{G} \\ \sin 2i \sin \mathcal{G} & -\frac{1}{4} \sin 2i \cos \mathcal{G} & -\frac{3}{4} + \sin^2 i \left(\frac{1}{2} + \frac{5}{4} \sin^2 \mathcal{G} \right) \end{bmatrix},$$

где $J = \frac{6\mu \cdot J_2 R_\oplus^2}{a^5} (1 - 5e \cos \mathcal{G})$, $J_2 = 1082.23 \cdot 10^{-6}$, R_\oplus – радиус Земли, i – наклонение орбиты.

Таким образом, уравнение (1) окончательно запишем в виде линейной системы

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}} &= \mathbf{v}, \\ \dot{\mathbf{v}} &= \mathbf{A}_r \mathbf{r} + \mathbf{A}_v \mathbf{v}, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\mathbf{A}_r = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_{J_2} + \mathbf{A}_e^r$, $\mathbf{A}_v = \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_e^v$,

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1 &= \omega_0^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = 2\omega_0 \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{A}_e^r &= e\omega_0^2 \begin{bmatrix} \cos \mathcal{G} & 0 & 2\sin \mathcal{G} \\ 0 & -3\cos \mathcal{G} & 0 \\ -2\sin \mathcal{G} & 0 & 10\cos \mathcal{G} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_e^v = 4e\omega_0 \cos \mathcal{G} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4)$$

Матрицы \mathbf{A}_1 и \mathbf{A}_2 суть результат линеаризации по расстоянию между спутниками, остальные матрицы отвечают за малые возмущения, вызванные эллиптичностью и гармоникой J_2 соответственно. Такая запись уравнений удобна для последующих оценок максимального управляющего воздействия и допустимых начальных отклонений.

1.3 Опорная траектория

Рассмотрим уравнения (3) без возмущений

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}} &= \mathbf{v}, \\ \dot{\mathbf{v}} &= \mathbf{A}_1 \mathbf{r} + \mathbf{A}_2 \mathbf{v}, \end{aligned}$$

где матрицы \mathbf{A}_1 , \mathbf{A}_2 определены в (4). Эта система имеет аналитическое решение

$$\begin{aligned}
 x(t) &= -\frac{2 \cdot C_2}{\omega_0} \cdot \sin \omega_0 t + \frac{2 \cdot C_3}{\omega_0} \cos \omega_0 t - 1.5 \cdot C_1 \cdot \omega_0 t + C_4, \\
 y(t) &= C_5 \cos \omega_0 t + C_6 \sin \omega_0 t, \\
 z(t) &= \frac{C_2}{\omega_0} \cos \omega_0 t + \frac{C_3}{\omega_0} \sin \omega_0 t + C_1.
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

Здесь C_i , $i = \overline{1,6}$ – постоянные интегрирования. Константа C_1 , в общем случае не равная нулю, отвечает за относительный дрейф (рис. 5).

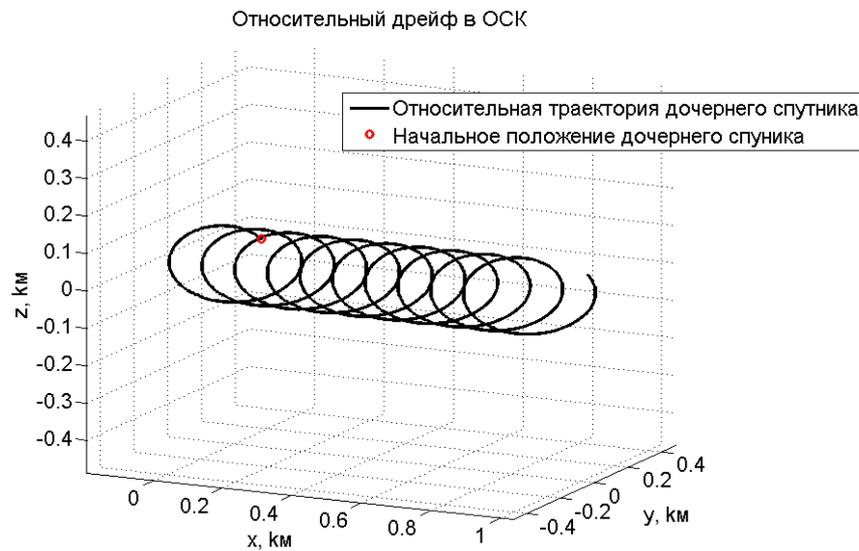


Рис. 5. Относительный дрейф в ОСК

Для того чтобы получить эллиптическую относительную траекторию, положим $C_1 = 0$. Кроме того, потребуем выполнение равенства $C_4 = 0$. Последнее условие обеспечит расположение главного спутника внутри эллипса. Такой подход наглядно отображает относительное расстояние между аппаратами на графиках, приведенных ниже. Назовем траекторию с такими ограничениями *опорной* и обозначим \mathbf{r}_{ref} , \mathbf{v}_{ref} (рис. 6).

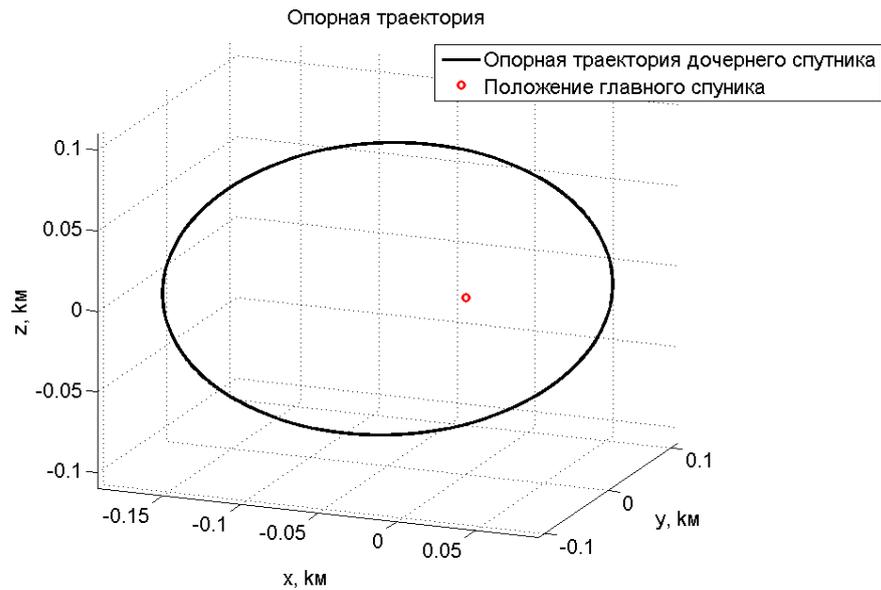


Рис. 6. Опорная траектория в ОСК

Часто в роли опорной траектории выступают круговые или проективные¹ круговые орбиты. Популярность последних вызвана их применением к решению задач дистанционного зондирования Земли, так как при этом сохраняется расстояние между аппаратами в плоскости обзора. Однако здесь мы не будем проводить анализ выбора опорной траектории, а возьмем частное решение (5).

1.4 Модель силы солнечного давления

Рассмотрим способ управления относительным движением двух спутников с использованием ССД. В качестве средства управления выберем переменный коэффициент отражения поверхности дочернего спутника. Оба спутника имеют сферическую форму. Предположим, что отражение света от поверхности спутника зеркальное, то есть угол падения равен углу отражения. Запишем формулу для силы светового давления \mathbf{F} в соответствии с [27]:

$$\mathbf{F} = -P \left[\int (1-k) \mathbf{s}(\mathbf{s}, \mathbf{n}) dA + 2 \int k \mathbf{n}(\mathbf{s}, \mathbf{n})^2 dA \right], \quad (6)$$

где $k = k(\varphi, \theta)$ – коэффициент отражения поверхности спутника ($0 \leq k \leq 1$), $P = 4,56 \cdot 10^{-6} \text{ Н / м}^2$ – солнечная постоянная вблизи Земли, \mathbf{s} – вектор направления на Солнце, \mathbf{n} – нормаль к поверхности спутника ($|\mathbf{n}| = |\mathbf{s}| = 1$). Интегрирование ведется по освещенной поверхности спутника, где выполняется условие $\mathbf{n} \cdot \mathbf{s} > 0$, что равносильно $\varphi \in (0, 2\pi)$, $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ в солнечной системе координат (рис.4).

¹ Проективная круговая орбита – орбита, проекция которой на плоскость Oxz (Рис. 3) является окружностью.

Предполагаем, что главный спутник пассивный, то есть его поверхность имеет постоянный коэффициент отражения $k = \text{const}$, в отличие от дочернего, у которого он зависит от углов φ и θ . В этом случае интегралы, входящие в выражение (6), несложно вычисляются по следующим формулам (приложение Б):

$$(1-k)\mathbf{s} \int (\mathbf{s}, \mathbf{n}) dS = \pi R^2 (1-k)\mathbf{s};$$

$$2 \int k \mathbf{n} (\mathbf{s}, \mathbf{n})^2 dS = k \pi R^2 \mathbf{s}.$$

Тогда (6) примет вид

$$\mathbf{F} = -\pi R^2 P \mathbf{s} = -PA \mathbf{s}, \quad (7)$$

где A – площадь диаметрального сечения спутника. Как видно из последнего выражения, сила \mathbf{F} не зависит от коэффициента отражения, постоянна по модулю и всегда направлена против вектора \mathbf{s} . Полученная сила будет действовать на главный спутник.

Рассмотрим случай переменной отражательной способности. Тогда (6) перепишем в виде

$$\mathbf{F} = -PR^2 [\mathbf{s} \iint_{\substack{0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}}} (1-k(\varphi, \theta)) \cos \theta \sin \theta d\varphi d\theta +$$

$$+ 2 \iint_{\substack{0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}}} \mathbf{n} k(\varphi, \theta) \cdot (\cos \theta)^2 \sin \theta d\varphi d\theta]. \quad (8)$$

Выражение (8) при известной левой части \mathbf{F} представляет собой интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода относительно неизвестной функции $k(\varphi, \theta)$. Известно [28], что уравнения такого рода могут иметь не единственное решение. Для того чтобы найти одно из них, разделим переменные: представим функцию k в виде произведения двух функций g и h одного переменного:

$$k(\varphi, \theta) = g(\varphi) \cdot h(\theta). \quad (9)$$

Подстановка (9) в (8) дает выражение для проекций $\mathbf{F} = (F_{\xi_1} \ F_{\eta_1} \ F_{\zeta_1})$ на оси ССК:

$$\begin{aligned}
F_{\xi 1} &= -\frac{1}{4} PR^2 \int_0^{2\pi} d\varphi g(\varphi) \cos \varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} h(\theta) (1 - \cos 4\theta) d\theta, \\
F_{\eta 1} &= -\frac{1}{4} PR^2 \int_0^{2\pi} d\varphi g(\varphi) \sin \varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} h(\theta) (1 - \cos 4\theta) d\theta, \\
F_{\zeta 1} &= -PR^2 \left(\pi + \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} g(\varphi) d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} h(\theta) \sin 4\theta d\theta \right).
\end{aligned} \tag{10}$$

Выражения (10) суть коэффициенты ряда Фурье функций g и h . Так как уравнений всего три, то коэффициентов Фурье оставим не более трех в качестве неизвестных параметров. Взяв функцию h в явном виде так, чтобы она была положительной и ограниченной сверху единицей, включим неизвестные параметры в функцию g . При этом функция h выберем так, чтобы не обнулить компоненты силы \mathbf{F} и обеспечить тем самым трехосное управление:

$$g(\varphi) = a_1 \cos(\varphi + \alpha) + a_0, \quad h(\theta) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sin 4\theta, \tag{11}$$

где a_0, a_1, α – неизвестные параметры, которые далее будут выражены через \mathbf{F} . Подставляя (11) в (10) и интегрируя, получим

$$F_{\xi} = -\sigma \cdot a_1 \cos \alpha, \quad F_{\eta} = \sigma \cdot a_1 \sin \alpha, \quad F_{\zeta} = -\sigma \cdot a_0 - P_c A. \tag{12}$$

Здесь $\sigma = \frac{P\pi^2 R^2}{16}$.

В уравнениях относительного движения сила запишется как разность сил, действующих на каждый спутник в отдельности

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_d - \mathbf{F}_c,$$

где индекс c обозначает главный, d – дочерний (deputy) спутник. В дальнейшем такое обозначение индексов сохранится и для других величин. Тогда окончательный вид для силы \mathbf{F} на оси ССК следующий:

$$\begin{aligned}
F_{\xi} &= -\sigma \cdot a_1 \cos \alpha, \\
F_{\eta} &= \sigma \cdot a_1 \sin \alpha, \\
F_{\zeta} &= -\sigma \cdot a_0 + P_c (A_c - A_d).
\end{aligned} \tag{13}$$

Из условия $k \in [0, 1]$ следуют неравенства

$$\begin{aligned}
0 &\leq g(\varphi)h(\theta) \leq 1, \\
0 &\leq (a_1 \cos(\varphi + \alpha) + a_0) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sin 4\theta \right) \leq 1, \\
0 &\leq a_1 \cos(\varphi + \alpha) + a_0 \leq 1,
\end{aligned}$$

так как $0 \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sin 4\theta \leq 1$ для всех θ . Поскольку неравенства $0 \leq a_1 \cos(\varphi + \alpha) + a_0 \leq 1$ должны выполняться для всех φ , то они равносильны системе

$$\begin{cases} 0 \leq a_1 + a_0 \leq 1, \\ 0 \leq a_0 - a_1 \leq 1. \end{cases} \quad (14)$$

Решение этой системы на плоскости параметров (a_1, a_0) представляет собой ромб (рис. 7).

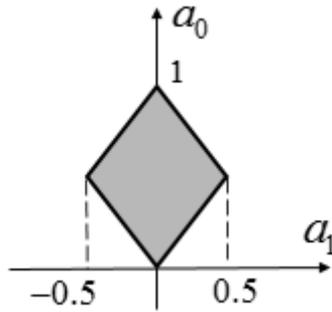


Рис. 7. Область допустимых параметров коэффициента отражения

Параметры a_0, a_1, α из системы (14) с учетом условия $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, n – целое, имеют вид

$$\begin{aligned}
\alpha &= \operatorname{arctg} \left(-\frac{F_\eta}{F_\xi} \right), \\
a_1 &= -\frac{F_\xi}{\sigma \cos \alpha}, \\
a_0 &= \frac{\pi}{\sigma} (R_c^2 - R_d^2) - \frac{F_\zeta}{\sigma}.
\end{aligned} \quad (15)$$

Таким образом, получена функциональная зависимость параметров a_0, a_1, α от действующей на поверхность силы солнечного давления \mathbf{F} . Зная закон управления, по формулам (15) можно вычислить параметры отражающей поверхности и генерировать нужную силу давления. Если вычисленные

значения a_0 и a_1 не попадают в область допустимых параметров, то необходимо уменьшить управление так, чтобы обновленные параметры уже удовлетворяли ограничению (14).

2. Построение управления

Задачей управления является обеспечение асимптотической устойчивости опорной траектории \mathbf{r}_{ref} , \mathbf{v}_{ref} , то есть сведение ошибок по положению \mathbf{e}_r и скорости \mathbf{e}_v к нулю при $t \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_r(t) &= \mathbf{r} - \mathbf{r}_{\text{ref}}, \\ \mathbf{e}_v(t) &= \mathbf{v} - \mathbf{v}_{\text{ref}}.\end{aligned}$$

Это обеспечивается с помощью построения ляпуновского управления – управления, построенного с помощью прямого метода Ляпунова.

2.1 Построение ляпуновского управления

Перепишем систему уравнений движения (3), добавив в правую часть управление \mathbf{u} ,

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}} &= \mathbf{v}, \\ \dot{\mathbf{v}} &= \mathbf{f} + \mathbf{u},\end{aligned}\tag{16}$$

где $\mathbf{f} = \mathbf{A}_r \mathbf{r} + \mathbf{A}_v \mathbf{v}$. Следуя подходу, изложенному в работе [21], для системы (16) введем функцию Ляпунова

$$V = \frac{1}{2} k_r (\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\text{ref}})^2 + \frac{1}{2} (\mathbf{v} - \mathbf{v}_{\text{ref}})^2.$$

Здесь k_r – коэффициент усиления по положению.

Запишем производную по времени этой функции с учетом уравнений движения (16)

$$\begin{aligned}\dot{V} &= k_r (\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\text{ref}})^T (\mathbf{v} - \mathbf{v}_{\text{ref}}) + (\dot{\mathbf{v}} - \dot{\mathbf{v}}_{\text{ref}})^T (\mathbf{v} - \mathbf{v}_{\text{ref}}) = \\ &= k_r (\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\text{ref}})^T (\mathbf{v} - \mathbf{v}_{\text{ref}}) + (\mathbf{f} + \mathbf{u} - \dot{\mathbf{v}}_{\text{ref}})^T (\mathbf{v} - \mathbf{v}_{\text{ref}}).\end{aligned}\tag{17}$$

Для того чтобы обеспечить выполнение условий $\dot{V} = 0$ при \mathbf{r}_{ref} , \mathbf{v}_{ref} и $\dot{V} < 0$ при всех остальных \mathbf{r} , \mathbf{v} , примем

$$k_r (\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\text{ref}})^T (\mathbf{v} - \mathbf{v}_{\text{ref}}) + (\mathbf{f} + \mathbf{u} - \dot{\mathbf{v}}_{\text{ref}})^T (\mathbf{v} - \mathbf{v}_{\text{ref}}) = -k_v (\mathbf{v} - \mathbf{v}_{\text{ref}})^T (\mathbf{v} - \mathbf{v}_{\text{ref}}) \leq 0, \tag{18}$$

где $k_v > 0$ – коэффициент усиления по скорости. Отсюда получим выражение для управления \mathbf{u}

$$\mathbf{u} = -k_r (\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\text{ref}}) - k_v (\mathbf{v} - \mathbf{v}_{\text{ref}}) + \dot{\mathbf{v}}_{\text{ref}} - \mathbf{f}.\tag{19}$$

Если обратно подставить формулу для \mathbf{u} (19) в (16), то получим дифференциальное уравнение для отклонения от опорной траектории $\delta\mathbf{r} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_{\text{ref}}$

$$\delta\ddot{\mathbf{r}} + k_v\delta\dot{\mathbf{r}} + k_r\delta\mathbf{r} = 0. \quad (20)$$

Соответствующее характеристическое уравнение имеет корни

$$\lambda_{1,2} = -\frac{k_v}{2} \pm \sqrt{k_v^2 - 4k_r}.$$

Для обеспечения максимальной степени устойчивости характеристического уравнения линеаризованной системы положим

$$k_v^2 - 4k_r = 0,$$

где

$$k_r = \frac{k_v^2}{4}. \quad (21)$$

В этом случае решение уравнения (20) примет вид

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{r} &= \left[(\delta\mathbf{v}(0) + \frac{k_v}{2}\delta\mathbf{r}(0))t + \delta\mathbf{r}(0) \right] e^{-\frac{k_v}{2}t}, \\ \delta\mathbf{v} = \delta\dot{\mathbf{r}} &= \left[-\frac{k_v}{2}(\delta\mathbf{r} - \delta\mathbf{r}(0)) + \delta\mathbf{v}(0) \right] e^{-\frac{k_v}{2}t}, \end{aligned} \quad (22)$$

где $\delta\mathbf{r}(0), \delta\mathbf{v}(0)$ – отклонения от опорного движения в начальный момент времени $t = 0$. Тогда выражение для управления в этом случае запишем как

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= -k_r \left[(\delta\mathbf{v}(0) + \frac{k_v}{2}\delta\mathbf{r}(0))t + \delta\mathbf{r}(0) \right] e^{-\frac{k_v}{2}t} + \\ &+ \left[\frac{k_v^2}{2}(\delta\mathbf{r} - \delta\mathbf{r}(0)) - k_v\delta\mathbf{v}(0) \right] e^{-\frac{k_v}{2}t} + \dot{\mathbf{v}}_0 - \mathbf{f}. \end{aligned} \quad (23)$$

Видно, что в выражении (23) с течением времени первые два слагаемых, являющиеся фактически ошибками траектории, затухают и основную роль в формировании управляющего воздействия играют возмущения \mathbf{f} .

Отметим, что вектор \mathbf{u} записан в ОСК. В ССК он примет вид

$$\mathbf{U} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}, \quad (24)$$

где матрица \mathbf{D} определена в (32) (см. Приложение А).

Выражения (22) позволяют определить требуемые параметры для коэффициента отражения, если взять вместо компонент вектора \mathbf{F}

соответствующие компоненты вектора \mathbf{U} . При этом необходимо удовлетворить ограничениям (14).

2.2 Редукция вектора управления

Если ограничения (14) не удовлетворены, будем уменьшать абсолютную величину управления, оставляя его направление неизменным.

Пусть вектор \mathbf{U} получен по формуле (24) и параметры, вычисленные на основе формул (13), не удовлетворяют условиям (14). Тогда вычисляем коэффициент ослабления γ , который должен уменьшить управление \mathbf{U} так, чтобы новые параметры уже удовлетворяли неравенствам (14). Эти неравенства перепишем в виде

$$\begin{aligned} -\beta\sigma &\leq \gamma(F_\zeta + a_1) \leq (1-\beta)\sigma, \\ -\beta\sigma &\leq \gamma(F_\zeta - a_1) \leq (1-\beta)\sigma, \end{aligned} \quad (25)$$

где $\beta = \frac{16}{\pi} \left(\frac{R_c^2}{R_d^2} - 1 \right)$, $\sigma = \frac{P\pi^2 R_d^2}{16}$, $0 < \gamma \leq 1$.

Так как необходимо ограничиться минимально возможным уменьшением величины $|\mathbf{U}|$, то в качестве γ выберем

$$\gamma^{\text{опт}} = \min \left\{ \frac{1-\beta}{F_\zeta + a_1} \sigma, \frac{1-\beta}{F_\zeta - a_1} \sigma, \frac{-\beta}{F_\zeta + a_1} \sigma, \frac{-\beta}{F_\zeta - a_1} \sigma \right\}.$$

Заметим, что для существования коэффициента $\gamma \in (0, 1]$ коэффициент β должен принадлежать интервалу $(0, 1)$, что накладывает следующие ограничения на размеры спутников:

$$R_d < R_c < \sqrt{1 + \frac{\pi}{16}} R_d \approx 1.09 R_d. \quad (26)$$

Эти ограничения говорят о том, что радиус спутника с постоянным коэффициентом отражения не должен сильно превосходить радиус спутника с переменной отражательной поверхностью.

2.3 Оценка абсолютной величины управления и возмущений

Для определения минимальной силы, которую можно гарантированно обеспечить в любом направлении трехмерного пространства, применим метод, аналогичный используемому для поиска коэффициента γ .

Пусть $\mathbf{F} = F\mathbf{e}$, $\mathbf{e} = (e_\xi \ e_\eta \ e_\zeta)^T$ – единичный вектор. Тогда выражения для a_0, a_1 из (15) перепишем следующим образом:

$$a_1 = \pm \frac{1}{\sigma} \sqrt{e_\zeta^2 + e_\eta^2} = \pm \frac{1}{\sigma} \sqrt{1 - e_\zeta^2},$$

$$a_0 = -\frac{1}{\sigma} e_\zeta + \frac{\pi}{\sigma} (R_c^2 - R_d^2).$$

Подставив их в систему неравенств (14), получим:

$$\begin{aligned} -\beta\sigma &\leq F\left(\sqrt{1 - e_\zeta^2} + e_\zeta\right) \leq (1 - \beta)\sigma, \\ -\beta\sigma &\leq F\left(-\sqrt{1 - e_\zeta^2} + e_\zeta\right) \leq (1 - \beta)\sigma. \end{aligned} \quad (27)$$

Необходимо найти минимальное e_ζ , удовлетворяющее неравенствам (27). В зависимости от знака выражений $\pm\sqrt{1 - e_\zeta^2} + e_\zeta$ минимум определяется как левая граница неравенств (27)

$$F_{\min} = \sigma \cdot \min_{e_\zeta} \left\{ \frac{\beta - 1}{e_\zeta - \sqrt{1 - e_\zeta^2}}, \frac{\beta - 1}{\sqrt{1 - e_\zeta^2} + e_\zeta}, \frac{\beta}{e_\zeta - \sqrt{1 - e_\zeta^2}}, \frac{\beta}{\sqrt{1 - e_\zeta^2} + e_\zeta} \right\}.$$

Этот минимум

$$F_{\min} = \sqrt{2}\sigma \cdot \begin{cases} 1 - \beta, & \text{если } \beta > \frac{1}{2} \\ \beta, & \text{если } \beta \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

как несложно показать, достигается в точках $e_\zeta = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$. Полученная величина сравнительно мала. Например, при радиусе дочернего спутника 2 м и главного 2.2 м, она составляет всего $9.35 \cdot 10^{-7}$ Н, что, в свою очередь, накладывает ограничения на возможные начальные ошибки траектории и габариты аппарата.

Оценим теперь абсолютную величину внешних возмущений

$$\|\mathbf{f}\| \leq \|\mathbf{f}_g\| + \|\mathbf{f}_e\| + \|\mathbf{f}_{J_2}\|, \quad (28)$$

где под $\|\cdot\|$ понимается евклидова норма. Здесь с каждым слагаемым связаны неравенства

$$\begin{aligned} \|\mathbf{f}_{\text{grav}}\| &\leq \|\mathbf{A}_1\| \cdot \|\mathbf{r}\| + \|\mathbf{A}_2\| \cdot \|\mathbf{v}\|, \\ \|\mathbf{f}_e\| &= \|\mathbf{A}_e^r \mathbf{r} + \mathbf{A}_e^v \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{A}_e^r\| \cdot \|\mathbf{r}\| + \|\mathbf{A}_e^v\| \cdot \|\mathbf{v}\|, \\ \|\mathbf{f}_{J_2}\| &= \|\mathbf{A}_{J_2} \mathbf{r}\| \leq \|\mathbf{A}_{J_2}\| \cdot \|\mathbf{r}\|. \end{aligned}$$

В свою очередь, $\mathbf{r} = \mathbf{r}_{\text{ref}} + \delta\mathbf{r}$, $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\text{ref}} + \delta\mathbf{v}$ и тогда, собирая оценки по положению и скоростям, получаем

$$\begin{aligned} \|\mathbf{f}\| \leq & (\|\mathbf{A}_1\| + \|\mathbf{A}_e^r\| + \|\mathbf{A}_{J_2}\|)(\|\mathbf{r}_{\text{ref}}\| + \|\delta\mathbf{r}\|) + \\ & + (\|\mathbf{A}_2\| + \|\mathbf{A}_e^v\|)(\|\mathbf{v}_{\text{ref}}\| + \|\delta\mathbf{v}\|). \end{aligned} \quad (29)$$

Нормы матриц $\|\mathbf{A}_1\| + \|\mathbf{A}_e^r\| + \|\mathbf{A}_{J_2}\|$, $\|\mathbf{A}_2\| + \|\mathbf{A}_e^v\|$ несложно оценить (что проделано в Приложении В). Обозначив эти оценки через K_1 , K_2 , имеем неравенство

$$\|\mathbf{f}\| \leq K_1 \|\delta\mathbf{r}\| + K_2 \|\delta\mathbf{v}\| + K_1 \|\mathbf{r}_{\text{ref}}\| + K_2 \|\mathbf{v}_{\text{ref}}\|. \quad (30)$$

Чтобы обеспечить реализуемость управления, оценим возмущение (30) сверху гарантированной величиной управления F_{min} , то есть

$$\begin{aligned} \|\mathbf{f}\| & \leq F_{\text{min}}, \\ K_1 \|\delta\mathbf{r}\| + K_2 \|\delta\mathbf{v}\| + K_1 \|\mathbf{r}_{\text{ref}}\| + K_2 \|\mathbf{v}_{\text{ref}}\| & \leq F_{\text{min}}, \\ K_1 \|\delta\mathbf{r}\| + K_2 \|\delta\mathbf{v}\| & \leq F_{\text{min}} - K_1 \|\mathbf{r}_{\text{ref}}\| - K_2 \|\mathbf{v}_{\text{ref}}\|. \end{aligned} \quad (31)$$

Из последнего неравенства следует, что выбор опорной орбиты является немаловажным фактором в построении управления. Необходимо, чтобы правая часть последнего из неравенств (31) была положительной. В численном моделировании подбирались начальные данные, удовлетворяющие этому условию.

3. Численное моделирование

Выводы проведенного аналитического исследования проиллюстрируем численными примерами. Параметры орбиты главного спутника, начальные условия для опорной траектории, а также начальные отклонения от нее сведем в табл.1.

Табл.1. Параметры орбиты главного спутника и начальные данные относительного движения

Ω	i	ω_π	e	a , км	\mathcal{G}_0
0°	30°	0°	0.001	15000	0°
x_0 , м	y_0 , м	z_0 , м	\dot{x}_0 , мм/с	\dot{y}_0 , мм/с	\dot{z}_0 , мм/с
50	50	50	-3.4	0.1	1.72
δx_0 , м	δy_0 , м	δz_0 , м	$\delta \dot{x}_0$, мм/с	$\delta \dot{y}_0$, мм/с	$\delta \dot{z}_0$, мм/с
5	5	5	-0.3	-0.01	0.17

Так как возмущение от атмосферы и тень Земли не учитываются в модели, то и орбиту главного спутника выберем достаточно большой. При таких

начальных данных константа C_1 , отвечающая за относительный дрейф, равна 0.018 м/с. Размеры и масса спутников приведены в табл.2.

Табл.2. Характеристики сферических парусов

Главный спутник		Дочерний спутник	
Радиус, м	Масса, кг	Радиус, м	Масса, кг
2.2	20	2	5

При этом габариты спутников подберем так, чтобы парусность – отношение площади внешней поверхности паруса (в нашем случае $4\pi R^2$) к массе полезной нагрузки не превосходила десяти – максимального на данный момент известного значения парусности для аппарата Икарос [23].

Коэффициент ПД-регулятора k_v выберем так, чтобы ошибка по скорости $-k_v(\mathbf{v} - \mathbf{v}_{ref})$ в начальный момент времени была одного порядка с гарантированной оценкой управления $F_{min} \sim 10^{-7}$ Н. Тогда

$$k_v = 0.02, \quad k_r = \frac{k_v^2}{4} = 10^{-4}.$$

На первом графике (рис. 8) показано, что было бы при отсутствии управления за 4 периода орбиты главного спутника. Видно, что вековой уход вдоль оси Ox составляет порядка одного километра. Это примерно согласуется с величиной относительного дрейфа $1.5 \cdot C_1 \omega_0 t \approx 700$ м.

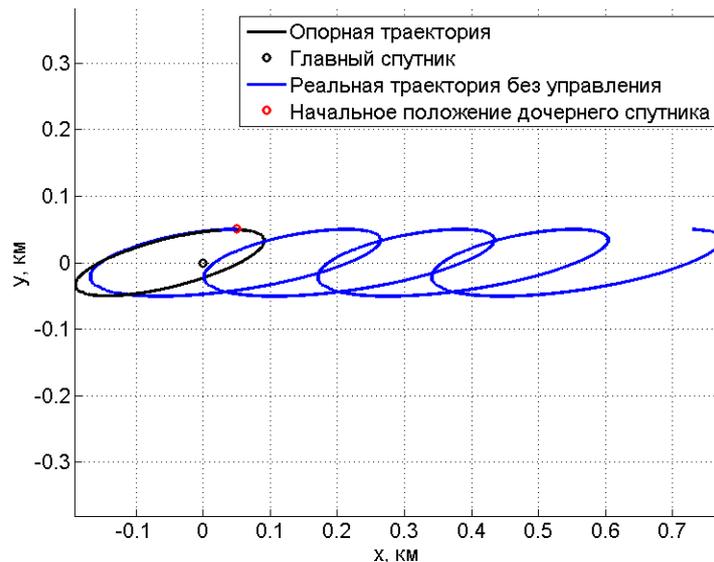


Рис. 8. Относительное движение без управления

Из следующего графика на рис. 9 видно, что при наличии управления задача слежения – постепенное сближение реальной траектории с опорной, выполняется успешно.

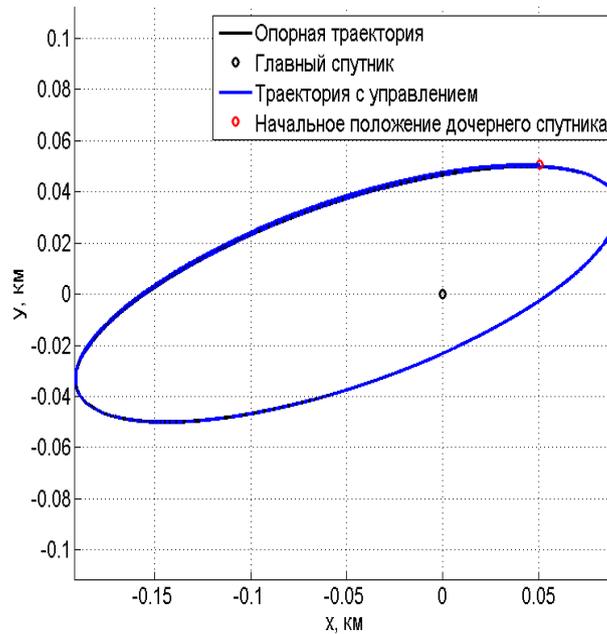


Рис. 9. Относительное движение с управлением

Следующие четыре графика (рис.10-13), изображающие ошибки реальной траектории по трем координатам в ОСК и по абсолютному значению, подтверждают вывод о сходимости реальной траектории к опорной. Из этих графиков видно, что выход на стационарный режим поддержания замкнутой орбиты обеспечивается менее чем за полвитка, что составляет в данном случае около двух часов.

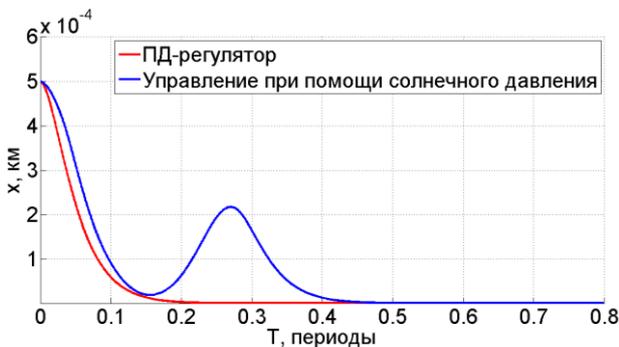


Рис.10. Ошибка по x-координате

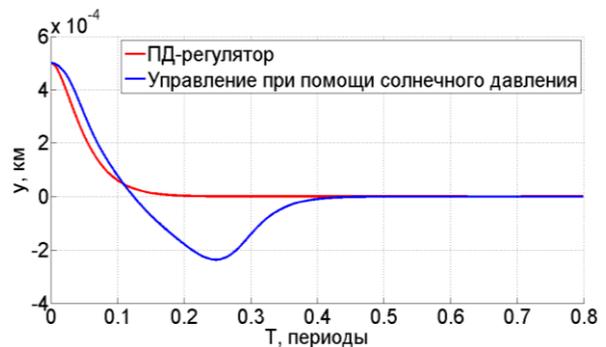


Рис.11. Ошибка по y-координате

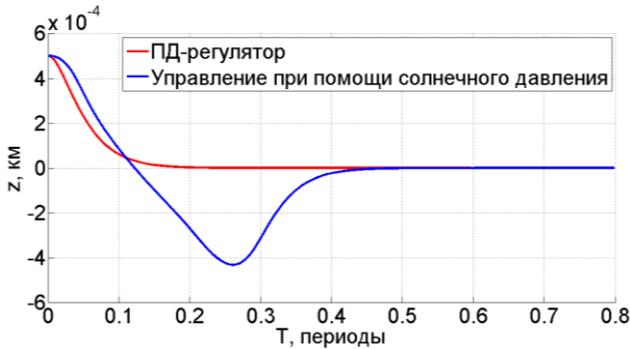


Рис. 12 Ошибка по z-координате

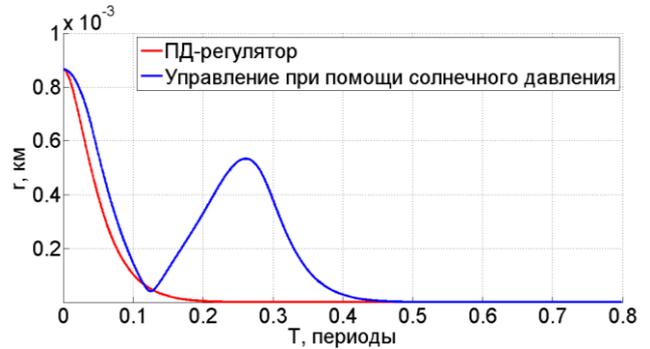


Рис. 13 Абсолютное значение

На последнем графике (рис. 14) изображены абсолютное значение управления при помощи вышеизложенного алгоритма и абсолютные значения внешних возмущений от эллиптичности и гармоник J_2 .

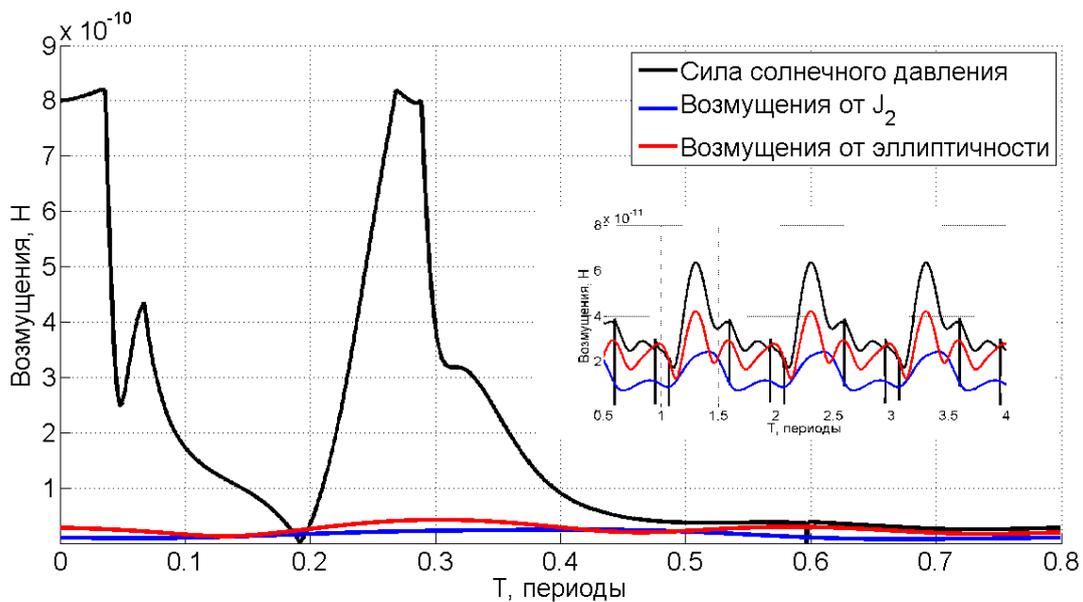


Рис. 14. Возмущения и сила солнечного давления

Из него видно, что управление в среднем превосходит внешние возмущения. На участках, где его недостаточно, например, на рис. 14 между 0.1 и 0.2 периода, включается редукция управления и меняется отражательная способность поверхности спутника.

Заключение

Численными методами проанализирована возможность управления формацией из двух сферических спутников с помощью изменения отражающей способности поверхности одного из них. В модели зеркального отражения апробирована параметрическая функция, соответствующая переменному

коэффициенту отражения, и получено управление, зависящее от параметров этой функции. Проведены оценки абсолютной величины управления и возмущений: второй гармоники геопотенциала Земли и слабой эллиптичности орбиты главного спутника. Оценены границы применимости силы солнечного давления в управлении групповым полетом. Оказалось, что при определенных габаритах аппаратов и подходящем механизме изменения оптических свойств поверхности солнечное давление успешно справляется с задачей приведения формации к относительному движению по замкнутой траектории.

Список литературы

1. Hill G.W. Researches in the lunar theory // *Am. J. Math.* JSTOR, 1878. Vol. 1, № 1. P. 5–26.
2. Vaddi V.V.S.S. Modelling and control of satellite formations // *Vasa*. 2003. № May. P. 1–121.
3. Овчинников М.Ю., Ткачев С.С. Влияние слабых возмущений на относительное движение двух спутников // *Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша*. 2005. № 92. 29 с.
4. Wang J. Electric propulsion plume interactions with formation flying spacecraft. 2007. P. 1–23.
5. Campbell M.E., Schetter T. Formation flying mission for the UW Dawgstar satellite // *IEEE Aerosp. Conf.* 2000. Vol. 7. P. 117–125.
6. Peck M.A. et al. Spacecraft formation flying using Lorentz forces // *JBIS - J. Br. Interplanet. Soc.* 2007. Vol. 60, № 7. P. 263–267.
7. Maclay T.D., Tuttle C. Satellite stationkeeping of the ORBCOMM constellation via active control of atmospheric drag: operations, constraints, and performance (AAS 05-152) // *Adv. Astronaut. Sci.* Published for the American Astronautical Society by Univelt; 1999, 2005. Vol. 120, № 1. P. 763.
8. Williams T., Wang Z.-S. Uses of solar radiation pressure for satellite formation flight // *Int. J. Robust Nonlinear Control*. 2002. Vol. 12, № 2–3. P. 163–183.
9. Smirnov G., Ovchinnikov M., Guerman A. Use of solar radiation pressure to maintain a spatial satellite formation // *Acta Astronaut.* 2007. Vol. 61, № 7–8. P. 724–728.
10. Hou Y.-G. et al. Control of tetrahedron satellite formation flying in the geosynchronous orbit using solar radiation pressure // *Astrophys. Space Sci.* Springer Science+Business Media Dordrecht, 2016. Vol. 361, № 4. P. 144.
11. Parsay K., Schaub H. Designing solar sail formations in sun-synchronous orbits for geomagnetic tail exploration // *Acta Astronaut.* 2015. Vol. 107. P. 218–233.
12. Takeichi N., Ueno H., Oda M. Feasibility study of a solar power satellite system configured by formation flying // *Acta Astronaut.* 2005. Vol. 57, № 9. P. 698–706.
13. Gong S.P., Li J.F., Baoyin H.X. Solar radiation pressure used for formation flying control around the sun-earth libration point // *Appl. Math. Mech.* 2009.

- Vol. 30, № 8. P. 1009–1016.
14. Shahid K., Kumar K.D. Multiple spacecraft formation reconfiguration using solar radiation pressure // *Acta Astronaut.* 2014. Vol. 103. P. 269–281.
 15. James D. Biggs, Colin R. McInnes Biggs. Solar sail formation flying for deep space remote sensing // *J. Spacecrafts Rocket.* 2008. Vol. 22. P. 1753–1759.
 16. Marchand B.G., Howell K.C., Lafayette W. AAS 03-596 Formation flight near L_1 and L_2 in the Sun-Earth / Moon ephemeris system including solar radiation pressure. P. 1–36.
 17. Лидов М.Л., Лукьянов С.С., Тесленко Н.М. Автоматическая станция в окрестности лунной либрационной точки L_2 : 1 // Предварительный анализ схемы запуска и управления на галоорбите. Препринт Ин. прикл. матем. АН СССР. 1974. № 116.
 18. Baresi N., Scheeres D.J., Schaub H. Bounded relative orbits about asteroids for formation flying and applications // *Acta Astronaut.* 2016. Vol. 123. P. 364–375.
 19. Mu J., Gong S., Li J. Reflectivity-controlled solar sail formation flying for magnetosphere mission // *Aerosp. Sci. Technol.* 2013. Vol. 30, № 1. P. 339–348.
 20. Kumar K.D. et al. Maintenance of satellite formations using environmental forces // *Acta Astronaut.* 2014. Vol. 102. P. 341–354.
 21. Kristiansen R., Nicklasson P.J. Spacecraft formation flying: A review and new results on state feedback control // *Acta Astronaut.* 2009. Vol. 65, № 11–12. P. 1537–1552.
 22. Goldner R.B., Arntz F., Berera G., Haas T.E., Wei G., Wong K.K. Yu .P. Progress on the variable reflectivity electrochromic window // *Opt. Mater. Technol. Energy Effic. Sol. Energy Convers. X.* 1991. Vol. 1536. P. 63–69.
 23. Tsuda Y. et al. Achievement of IKAROS — Japanese deep space solar sail demonstration mission // *Acta Astronaut.* 2012. Vol. 82, № 2. P. 183–188.
 24. Малашкин А.В., Эйсмонт Н.А., Федоренко А.Н. О задаче моделирования и управления шарообразными космическими парусами // *Вестник Тамбовского государственного технического университета.* 2011. P. 1044–1052.
 25. Wiltshire R.S., Clohessy W.H. Terminal guidance for rendezvous in space // *J. Aerosp. Sci.* 1960. Vol. 27, № 9. P. 653–658.
 26. Schweighart S. a., Sedwick R.J. High-Fidelity Linearized J2 Model for Satellite Formation Flight // *J. Guid. Control. Dyn.* 2002. Vol. 25, № 6. P. 1073–1080.
 27. Белецкий В.В. Движение искусственного спутника относительно центра масс. М.: Наука, 1965.
 28. Полянин А.Д., Манжиров А.В. Справочник по интегральным уравнениям. Физматлит. М., 2003.

Приложение А. Матрицы перехода между системами координат

Введем следующие матрицы перехода между системами координат.

A – матрица перехода из ИСК в ОСК. Если вектор \mathbf{r} задан в ССК, то вектор \mathbf{r}' в ИСК равен: $\mathbf{r}' = \mathbf{A}\mathbf{r}$.

B – матрица перехода из ССК в ИСК. Найдем матрицу **B**. В ГСК вектор направления на Солнце \mathbf{s} выглядит следующим образом (рис.2)

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} \cos \lambda \\ \sin \lambda \cos \varepsilon \\ \sin \lambda \sin \varepsilon \end{pmatrix}, \quad (|\mathbf{s}|=1),$$

где λ – долгота Солнца, $\varepsilon = 23^\circ 27'$ – наклон эклиптики к экватору (рис. 4). Соответственно,

$$\mathbf{e}_\zeta = \mathbf{s},$$

$$\mathbf{e}_\eta = [\mathbf{E}_X, \mathbf{s}] = (0 \quad -\sin \varepsilon \quad \cos \varepsilon)^T,$$

$$\mathbf{e}_\xi = [\mathbf{s}, \mathbf{E}_Y] = (\sin \theta \quad -\cos \theta \cos \varepsilon \quad -\cos \theta \sin \varepsilon)^T.$$

Таким образом, матрица **B** равна:

$$\mathbf{B} = (\mathbf{e}_\xi \quad \mathbf{e}_\eta \quad \mathbf{e}_\zeta) = \begin{pmatrix} 0 & \sin \lambda & \cos \lambda \\ -\sin \varepsilon & -\cos \lambda \cos \varepsilon & \sin \lambda \cos \varepsilon \\ \cos \varepsilon & -\cos \lambda \sin \varepsilon & \sin \lambda \sin \varepsilon \end{pmatrix}.$$

Матрицу перехода **A** получим через орты орбитальной системы координат, выраженные в ИСК:

$$\mathbf{A} = \left(\frac{\mathbf{v}_n}{|\mathbf{v}_n|} \quad \left[\frac{\mathbf{v}_n}{|\mathbf{v}_n|}, \frac{\mathbf{r}_{ИСК}}{|\mathbf{r}_{ИСК}|} \right] \quad \frac{\mathbf{r}_{ИСК}}{|\mathbf{r}_{ИСК}|} \right),$$

где $\mathbf{v}_n = \mathbf{v}_{ИСК} - (\mathbf{v}_{ИСК}, \frac{\mathbf{r}_{ИСК}}{|\mathbf{r}_{ИСК}|}) \frac{\mathbf{r}_{ИСК}}{|\mathbf{r}_{ИСК}|}$ – нормальная составляющая орбитальной скорости.

Векторы $\mathbf{r}_{ИСК}$, $\mathbf{v}_{ИСК}$ найдем численным интегрированием задачи двух тел с учетом действия возмущений и силы солнечного давления. Две предыдущие матрицы нужны для вычисления матрицы **D**, которая служит для перехода из ССК в ОСК,

$$\mathbf{D} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}. \quad (32)$$

Стоит отметить, что при численном интегрировании уравнений движения долгота Солнца λ меняется незначительно из-за небольшой угловой скорости

Земли вокруг Солнца, так что допустимо принять ее константой на небольших интервалах времени.

Приложение Б. Вычисление поверхностных интегралов

Так как поверхности спутников предполагаются сферическими, то интегралы, входящие в выражение (6), вычислим, перейдя в сферические координаты в ССК (рис. 3),

$$\xi = R \cos \varphi \sin \theta, \eta = R \sin \varphi \sin \theta, \zeta = R \cos \theta,$$

где R – радиус сферической оболочки спутника. В этих координатах векторы \mathbf{n} и \mathbf{s} примут вид (рис.3)

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}, \mathbf{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Здесь $(\mathbf{n}, \mathbf{s}) = \cos \theta$. Интегралы, входящие в выражение (6), суть поверхностные интегралы 1-го рода

$$\iint (\mathbf{s}, \mathbf{n}) dA = 2\pi R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \sin \theta d\theta = \pi R^2,$$

$$\iint \mathbf{n}(\mathbf{s}, \mathbf{n})^2 dA = R^2 \iint \mathbf{n}(\mathbf{s}, \mathbf{n})^2 dA \begin{pmatrix} \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta \sin^2 \theta d\theta \\ \int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta \sin^2 \theta d\theta \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \theta d\theta \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \pi R^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \pi R^2 \mathbf{s}.$$

Приложение В. Оценка допустимых отклонений

Все нормы приняты евклидовыми. Для нормы матрицы используем формулу

$$\|\mathbf{A}\| = \sqrt{\sum_{i,j} a_{ij}^2}.$$

Для норм матриц $\mathbf{A}_1 = \omega_0^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{A}_2 = 2\omega_0 \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ справедливо

$$\|\mathbf{A}_1\| = \sqrt{10}\omega_0^2, \quad \|\mathbf{A}_2\| = 2\sqrt{2}\omega_0.$$

Выпишем матрицу \mathbf{A}_{J_2}

$$\mathbf{A}_{J_2} = J \begin{bmatrix} 1 - 3\sin^2 i \sin^2 \vartheta & \sin^2 i \sin 2\vartheta & \sin 2i \sin \vartheta \\ \sin^2 i \sin 2\vartheta & -\frac{1}{4} - \sin^2 i \left(\frac{1}{2} - \frac{7}{4} \sin^2 \vartheta \right) & -\frac{1}{4} \sin 2i \cos \vartheta \\ \sin 2i \sin \vartheta & -\frac{1}{4} \sin 2i \cos \vartheta & -\frac{3}{4} + \sin^2 i \left(\frac{1}{2} + \frac{5}{4} \sin^2 \vartheta \right) \end{bmatrix},$$

где $J = \frac{6\mu \cdot J_2 R_\oplus^2}{a^5} (1 + 5e \cos \vartheta)$. Норму матрицы \mathbf{A}_{J_2} запишем в виде

$$\begin{aligned} \|\mathbf{A}_{J_2}\|^2 &= J^2 (1 - 3\sin^2 i \sin^2 \vartheta)^2 + \left[0.25 + \sin^2 i (0.5 - 1.75 \sin^2 \vartheta) \right]^2 + \\ &+ \left[-0.75 + \sin^2 i (0.5 + 1.25 \sin^2 \vartheta) \right]^2 + 2(\sin^4 i \sin^2 2\vartheta + \sin^2 2i \sin^2 \vartheta + 0.0625 \sin^2 2i \cos^2 \vartheta) \end{aligned}$$

Эту норму оценим сверху максимумом по наклонению i и истинной аномалии θ ,

$$\|\mathbf{A}_{J_2}\|^2 \leq J^2 \cdot \max_{\substack{i \in [0, \pi] \\ \theta \in [0, 2\pi)}} (\|\mathbf{A}_{J_2}\|^2) = 1.6J^2.$$

Чтобы оценить размер опорной орбиты и модуль опорной скорости, выразим константы интегрирования в решении (5) через начальные данные,

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_0 &= (x_0 \ y_0 \ z_0), \quad \mathbf{v}_0 = (\dot{x}_0 \ \dot{y}_0 \ \dot{z}_0), \\ x(t) &= \left(4 \frac{\dot{x}_0}{\omega_0} + 6z_0\right) \cdot \sin \omega_0 t + \frac{2 \cdot \dot{z}_0}{\omega_0} \cos \omega_0 t + x_0 - \frac{2\dot{z}_0}{\omega_0}, \\ y(t) &= y_0 \cos \omega_0 t + \frac{\dot{y}_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t, \\ z(t) &= \frac{\dot{z}_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t - \left(\frac{2\dot{x}_0}{\omega_0} + 3z_0\right) \cos \omega_0 t\end{aligned}$$

или в матричном виде

$$\mathbf{r}_{\text{ref}} = \mathbf{M}_r \mathbf{r}_0 + \mathbf{M}_v \mathbf{v}_0,$$

$$\text{где } \mathbf{M}_r = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \sin \omega_0 t \\ 0 & \cos \omega_0 t & 0 \\ 0 & 0 & 4 - 3 \cos \omega_0 t \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}_v = \frac{1}{\omega_0} \begin{bmatrix} 4 \sin \omega_0 t & 0 & 2(\cos \omega_0 t - 1) \\ 0 & \sin \omega_0 t & 0 \\ -2 \cos \omega_0 t & 0 & \sin \omega_0 t \end{bmatrix}.$$

Нормы матриц \mathbf{M}_r и \mathbf{M}_v оценим их максимальными значениями

$$\begin{aligned}\|\mathbf{M}_r\|^2 &\leq 36 \sin^2 \omega_0 t + 10 \cos^2 \omega_0 t - 24 \cos \omega_0 t + 17 \leq 64, \\ \|\mathbf{M}_v\|^2 &\leq \frac{1}{\omega_0^2} (18 \sin^2 \omega_0 t + 8 \cos^2 \omega_0 t - 4 \cos \omega_0 t + 4) \leq \frac{36}{\omega_0^2}.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\|\mathbf{r}_{\text{ref}}\| \leq \|\mathbf{M}_r \mathbf{r}_0\| + \|\mathbf{M}_v \mathbf{v}_0\| \leq \|\mathbf{M}_r\| \cdot \|\mathbf{r}_0\| + \|\mathbf{M}_v\| \cdot \|\mathbf{v}_0\| \leq 8 \|\mathbf{r}_0\| + \frac{6}{\omega_0} \|\mathbf{v}_0\|.$$

Аналогично оценим скорость \mathbf{v}_{ref} :

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_{\text{ref}} &= \mathbf{N}_r \mathbf{r}_0 + \mathbf{N}_v \mathbf{v}_0, \\ \mathbf{N}_r &= \omega_0 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \cos \omega_0 t \\ 0 & -\sin \omega_0 t & 0 \\ 0 & 0 & 3 \sin \omega_0 t \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N}_v = \begin{bmatrix} 4 \cos \omega_0 t & 0 & 0 \\ 0 & \cos \omega_0 t & 0 \\ 2 \sin \omega_0 t & 0 & \cos \omega_0 t \end{bmatrix},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|\mathbf{N}_r\|^2 &= \omega_0^2 (36 \cos^2 \omega_0 t + 10 \sin^2 \omega_0 t) \leq 49 \omega_0^2, \quad \|\mathbf{N}_v\|^2 = 18 \cos^2 \omega_0 t + 4 \sin^2 \omega_0 t \leq 25, \\ \|\mathbf{N}_r\| &\leq 7 \omega_0, \quad \|\mathbf{N}_v\| \leq 5.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\|\mathbf{v}_{\text{ref}}\| \leq \|\mathbf{N}_r \mathbf{r}_0\| + \|\mathbf{N}_v \mathbf{v}_0\| \leq \|\mathbf{N}_r\| \cdot \|\mathbf{r}_0\| + \|\mathbf{N}_v\| \cdot \|\mathbf{v}_0\| \leq 7 \omega_0 \|\mathbf{r}_0\| + 5 \|\mathbf{v}_0\|.$$

Содержание

Введение	3
1. Постановка задачи	6
1.1 Системы координат	6
1.2 Уравнения движения	7
1.3 Опорная траектория	8
1.4 Модель силы солнечного давления	10
2. Построение управления	14
2.1 ПД-регулятор	14
2.2 Редукция вектора управления	16
3. Численное моделирование	18
Заключение	21
Приложение А. Матрицы перехода между системами координат	24
Приложение Б. Вычисление поверхностных интегралов	25
Приложение В. Оценка допустимых отклонений	26