



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 113 за 2016 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Жуков В.Т., Краснов М.М.,
Новикова Н.Д., Феодоритова О.Б.

Алгебраический
многосеточный метод с
адаптивными
сглаживателями на основе
многочленов Чебышева

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Алгебраический многосеточный метод с адаптивными сглаживателями на основе многочленов Чебышева / В.Т.Жуков [и др.] // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2016. № 113. 32 с. doi:[10.20948/prepr-2016-113](https://doi.org/10.20948/prepr-2016-113)
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2016-113>

Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Российской академии наук

В.Т. Жуков, М.М. Краснов,
Н.Д. Новикова, О.Б. Феодоритова

Алгебраический многосеточный метод
с адаптивными сглаживателями
на основе многочленов Чебышева

Москва — 2016

Жуков В.Т., Краснов М.М., Новикова Н.Д., Феодоритова О.Б.

Алгебраический многосеточный метод с адаптивными сглаживателями на основе многочленов Чебышева

Для численного решения трехмерных эллиптических уравнений построен адаптивный алгебраический многосеточный метод (АММ). Новым элементом является объединение техники АММ с потенциалом сглаживателей на основе оптимальных многочленов Чебышева. Показаны возможности автоматической адаптации сглаживателей к границам дискретных операторов. Обсуждаются свойства двух сглаживателей чебышевского типа – полинома и рациональной функции; приводятся результаты экспериментальной проверки АММ. Эффективная реализация сглаживателей и процедуры решения уравнений на самом грубом дискретном уровне с помощью явно-итерационных чебышевских алгоритмов обеспечивает возможность функционирования параллельного кода на современных суперкомпьютерных архитектурах.

Ключевые слова: эллиптические уравнения, алгебраический многосеточный метод, многочлены Чебышева, адаптивные сглаживатели

Victor Timofeevich Zhukov, Mikhail Mikhailovich Krasnov, Natalia Dmitrievna Novikova, Olga Borisovna Feodoritova

Algebraic Multigrid Method with adaptive smoothers based on Chebyshev polynomials

We introduce an adaptive algebraic multigrid method (AMG) for numerical solution of three-dimensional elliptic equations. A new element is the integration of AMG technique with the smoothers based on optimal Chebyshev polynomials. The possibilities of automatic adaptation of smoothers to the bounds of the AMG discrete operators are shown. The properties of two smoothers, the polynomial and the rational function, are discussed. The results of experimental verification of the AMG are given. Effective implementation of the smoothers and solver for the coarsest equations with the help of Chebyshev explicit-iterative algorithms enables the functioning of the parallel code on modern supercomputer architectures.

Key words: elliptic equations, algebraic multigrid method, Chebyshev polynomials, adaptive smoother

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 14–21–00025)

Введение

В данной работе представлены возможности алгебраического многосеточного метода (АММ) решения краевых задач для трехмерных эллиптических уравнений в сочетании с адаптивными сглаживателями на основе многочленов Чебышева. Такие сглаживатели мы будем называть чебышевскими или полиномиальными, хотя один из них является рациональной функцией, но конструкция этой функции основана на чебышевских многочленах. Принципиальная общая черта этих сглаживателей состоит в том, что они реализуются явными чебышевскими итерациями.

В общем случае адаптация может пониматься в самом широком смысле, мы однако ведем речь об адаптации сглаживателя к спектру дискретных операторов в процессе многосеточных итераций.

Ранее нами рассмотрены возможности классического геометрического многосеточного метода [1] с адаптивными чебышевским сглаживателями применительно к задачам с анизотропными и/или разрывными коэффициентами, см. [2] – [6]. Для дискретизации в этих работах использовались простейшие аппроксимации на декартовых трехмерных сетках. При переходе к алгебраическому многосеточному методу мы остаемся в рамках тех же аппроксимаций на основной сетке, однако идеология АММ (его непривязанность к сетке) позволяет говорить о возможности применения предлагаемой технологии к задачам, не ограниченных классом декартовых сеток. Сетки могут быть произвольными, в том числе и неструктурными. Заметим, что такая технология соответствует принципу "черного ящика" и это делает ее вычислительно привлекательной.

Предложенная нами адаптивная многосеточная технология может быть полезна при расчете процессов диффузии, динамики жидкости, обработки изображений и многих других задач, в которых трудоемким элементом является решение систем линейных уравнений с большим числом неизвестных $N \simeq 10^8 - 10^{10}$. Мы ограничимся рассмотрением систем линейных уравнений,

возникающих при дискретизации трехмерных дифференциальных уравнений эллиптического типа. Сеточная природа систем линейных уравнений играет заметную роль в наших построениях. Именно сеточный характер задач обеспечивает эффективную параллельную реализацию. Вопрос о параллельности кода, или как сейчас принято говорить, масштабируемости, имеет важное значение в связи с быстрым развитием архитектур многопроцессорных компьютеров, ростом их производительности. Уже сейчас компьютеры имеют петафлопсную производительность при использовании сотен тысяч процессоров. Среди численных методов одним из претендентов на высокую масштабируемость является многосеточный метод. Эффективная реализация его основных вычислительно-интенсивных элементов – сглаживателей и процедуры решения уравнений на самом грубом дискретном уровне – с помощью адаптивных явно-итерационных чебышевских алгоритмов обеспечивает высокий потенциал масштабируемости и возможность переноса параллельного кода на современные суперкомпьютерные архитектуры.

1. Постановка задачи

Рассмотрим уравнение диффузии

$$\operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) - au = f . \quad (1)$$

Будем искать решение $u(r)$ этого уравнения в параллелепипеде $\Omega = [x_0 ; x_1] \times [y_0 ; y_1] \times [z_0 ; z_1]$; $r = (x, y, z) \in \Omega$, функции $k(r) \geq 0$, $a(r) \geq 0$, $f(r)$ являются заданными. В общем случае допускаются краевые условия первого – третьего родов, $k(r)$ может быть тензором, возможны и другие обобщения.

Мы рассматриваем дискретизацию краевых задач для уравнения диффузии на декартовых сетках, предполагая, что искомая сеточная функция задана в узлах сетки. Расчетная область может содержать зоны со сложной геометрией и различными физическими свойствами, например, на границах зон тензор диффузии $k(r)$ может быть разрывным, а его скачок большим. Тогда в

окрестности поверхности разрыва решение имеет большие градиенты, для сеточного воспроизведения которых обычно требуются подробные сетки.

В АММ строится набор уровней дискретизации с использованием только элементов матрицы исходной сеточной аппроксимации. При описании АММ мы будем пользоваться терминологией геометрического многосеточного метода. Формирование систем линейных уравнений на различных уровнях можно интерпретировать как построение последовательности грубых сеточных уровней с записью на них грубосеточных уравнений. Каждая многосеточная итерация АММ состоит в переходе от одного сеточного уровня к другому вплоть до самого грубого уровня и обратно. Для двух последовательных уровней записываются операторы межсеточных переходов. Для системы уравнений каждого уровня, кроме последнего, самого грубого, строятся процедуры сглаживания, обеспечивающие переход от текущего приближения к более «гладкому». Такой переход обычно делается с помощью какого-либо итерационного метода, хотя существуют процедуры сглаживания типа приближенной LU-факторизации. На самом грубом уровне система линейных уравнений может решаться точно или приближенно. В рамках постулируемой концепции экстремального параллелизма мы считаем, что самая грубая система уравнений должна решаться параллельно, и предлагаем использовать явный чебышевский итерационный метод с дополнительной опцией адаптивного расчета нижней границы дискретного оператора.

В [3], [4] показана эффективность применения геометрического многосеточного метода с адаптивными чебышевскими сглаживателями в задачах с анизотропными и разрывными коэффициентами. Интерес к таким сглаживателям во многом связан с возможностью работать с большими объемами данных, например, использовать сетки с миллиардами узлов на многопроцессорных суперкомпьютерах, в том числе гибридной архитектуры.

Для анизотропных задач таких вычислительных объемов процедура типа Гаусса-Зейделя в качестве сглаживателя может проигрывать сглаживателям

чебышевского типа, см. например, [3]. Недостатком чебышевских сглаживателей является необходимость знать границы дискретных операторов на подпространствах, порождаемых многосеточным методом. На каждом уровне (кроме самого грубого) пространство сеточных функций представляется ортогональной суммой двух подпространств. Это разбиение порождается условным делением собственных функций дискретного эллиптического оператора на две части: низкочастотные и высокочастотные функции, т.е. делением спектра оператора на низкие и высокие частоты. Для чебышевских сглаживателей нужны оценки границ спектра дискретных операторов на высокочастотных подпространствах. Верхняя граница спектра довольно точно оценивается с помощью теоремы Гершгорина, но априорная информация о нижней границе высокочастотного интервала спектра обычно отсутствует. Однако, можно оценить эту характеристику в ходе многосеточных итераций, анализируя процесс сходимости.

В [2] – [6] представлены свойства геометрического многосеточного метода в сочетании с адаптивными сглаживателями на основе многочленов Чебышева. В данной работе мы соединяем достоинства алгебраического многосеточного метода и адаптивных чебышевских сглаживателей, а также даем некоторое обоснование адаптации и приводим результаты экспериментальной проверки.

2. Основы алгебраического многосеточного метода

Алгебраический многосеточный метод (АММ) для построения многосеточных компонентов использует только элементы матрицы, возникающей при дискретизации дифференциальной задачи. В наши дни АММ широко распространен, он включен во многие пакеты прикладных программ, имеет различные модификации. Рассматриваемый нами алгоритм не выходит за рамки основной концепции АММ и может быть использован для решения общих систем линейных уравнений. Мы работаем с классическим вариантом АММ Рунге–Штубена [7–8].

Теоретически сходимость алгебраического многосеточного метода доказана для систем вида $Au = f$, у которых A есть M -матрица. Класс M -матриц – это квадратные невырожденные матрицы с неположительными недиагональными и положительными диагональными элементами; обратная к M -матрице является положительной матрицей. Для более общих линейных систем, которые не слишком нарушают свойства M -матрицы, можно ожидать хорошую сходимость. Эксперименты показывают, что несимметричность сама по себе не обязательно является причиной проблем АММ.

Алгоритм АММ состоит из инициализации и расчетной стадии, но в его описании мы выделяем четыре части. Первая часть – рекурсивное построение грубых уровней в терминах компонент сеточных функций. Вторая часть – построение операторов межсеточных переходов и грубосеточных операторов. Третья часть – построение сглаживающей процедуры, обеспечивающей гладкость невязки. Четвертая часть, расчетная стадия, использует результирующие построения для того, чтобы выполнить стандартный многосеточный цикл до тех пор, пока желаемый уровень точности, контролируемый по норме невязки на основной сетке, не будет достигнут.

Для того, чтобы получить линейную систему грубого уровня, определим разбиение (расщепление) заданной сетки (т.е. множества переменных) на несвязанные подмножества S и F , где подмножество S представляет те переменные, которые будут рассматриваться как переменные грубого уровня (S -переменные), а подмножество F представляет дополнительное множество F -переменных. Если быть более точным, необходимо определить S/F -разбиение и оператор интерполирования $P = I_{FC}$, который отображает функцию грубого уровня в функцию подробного уровня. Наоборот, оператор сборки $R = I_{CF}$ отображает функцию подробного уровня в функцию грубого уровня и строится с помощью операции транспонирования: $R = P^T$. После определения интерполяции и сборки система АММ грубого уровня

$$A_H u^H = f^H \quad (2)$$

получается из системы подробного уровня с помощью процедуры Галеркина

$$A_H = R A_h P, \quad f^H = R f_h, \quad (3)$$

где A_h – оператор подробного уровня. Для самого подробного уровня $A_h = A$. Предполагается, что оба оператора A_h, A_H имеют полный ранг, то есть для каждого из них минимальное сингулярное значение положительно и отделено от 0 некоторой пороговой величиной. Итерированный оператор многосеточного метода имеет вид [8]:

$$Q = S_p (I - P A_H^{-1} R A_h) S_p. \quad (4)$$

Здесь S_p – оператор сглаживания с числом p пред- и постсглаживающих шагов. Для сглаживания мы используем адаптивные сглаживатели чебышевского типа, которые нами успешно применены для геометрического многосеточного метода при решении задач для стационарных эллиптических и эволюционных параболических уравнений. Более подробно они описаны ниже в разделе 3.

Для того, чтобы достичь быстрой сходимости АММ, необходимо хорошо аппроксимировать алгебраически сглаженную ошибку с помощью интерполяции. Как правило, чем сильнее связь между F и C, тем быстрее сходимость многосеточного метода. С другой стороны, на каждом уровне размер матрицы грубосеточного оператора и время его расчета пропорциональны числу C-переменных. Так как общий коэффициент полезного действия (общая эффективность) зависит от скорости сходимости и от объема вычислительных затрат за одну многосеточную итерацию (т.е. один цикл АММ), то для ограничения числа C-переменных обязательным является требование, чтобы F-переменные были сильно связаны с C-переменными [8].

Нами реализованы три варианта C/F-расщепления: стандартное расщепление и агрессивное расщепление 1-ого и 2-ого типов. Агрессивные

стратегии позволяют существенно сократить этап инициализации, стоимость одного цикла АММ, сложность грубосеточных операторов, а также смягчить требования по объему памяти. Эти преимущества могут достигаться за счет уменьшения скорости сходимости, поскольку процедура сглаживания становится менее эффективной и становится все труднее согласовывать операторы сглаживания и интерполирования. Мы развиваем альтернативный путь – обеспечить преимущество агрессивных стратегий за счет использования эффективных чебышевских сглаживателей.

В качестве примера на рис. 1 представлены результаты стандартного расщепления, построенного для семиточечной дискретизации уравнения Пуассона на кубической сетке.

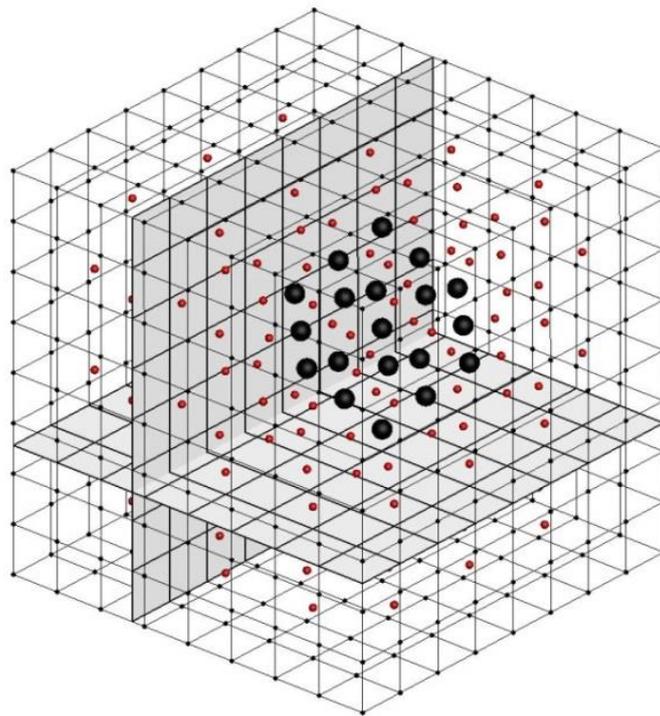


Рис. 1. Стандартная стратегия расщепления

Грубые узлы, построенные по матрице дискретизации, отмечены на рис. 1 красным цветом, узлы 19-точечного шаблона грубой дискретизации (3) во внутреннем узле исходной сетки отмечены черными кружками.

В экспериментах в случае стандартного расщепления используется стандартная интерполяция. В случае обоих типов агрессивного расщепления используется многопроходная интерполяция. Мы не будем подробно останавливаться на деталях указанных интерполяций, их можно найти в [7], [8].

Отметим, что компьютерный код АММ написан на языке C++.

3. Адаптивные чебышевские сглаживатели

Фигурирующий в формуле (4) многосеточного метода оператор S_p задает переход от приближения w к более «гладкому» приближению $w_{new} = S_p w$. Нами изучены два сглаживателя $S_p = S_p(A_h)$: первый является операторным многочленом степени p , второй сглаживатель – рациональная функция, конструируемая с помощью многочлена Чебышева.

Так как над полем вещественных чисел любая рациональная функция самосопряженного оператора является также самосопряженным оператором, то каждый сглаживатель $S_p = S_p(A_h)$ является самосопряженным оператором и его собственные числа – это значения функции $S_p(\lambda)$ на спектре оператора A_h .

Сглаживатели служат для подавления компонент невязки, которые отвечают высокочастотной части спектра $[\lambda_{min}^*; \lambda_{max}]$, где λ_{min}^* – условная граница, разделяющая спектр оператора A_h на низкочастотную и высокочастотную части. Отметим, что параметры λ_{min}^* , λ_{max} – свои для каждого сеточного уровня. В ряде случаев можно указать оценку границы раздела спектра, например, в случае задачи Дирихле для уравнения Пуассона в трехмерном случае при простейшей конечно-объемной дискретизации на равномерной сетке $\lambda_{min}^* = \lambda_{max}/6$. Границу раздела можно уточнять в процессе многосеточных итераций, т.е. использовать автоматическую адаптацию к спектру сеточных операторов.

В этом разделе мы дадим описание итерационных чебышевских сглаживателей. Они обеспечивают возможность эффективной параллельной реализации и автоматической адаптации к спектру дискретных операторов.

Приведем нужные нам сведения о многочленах Чебышева. Хорошо известна конструкция многочлена Чебышева 1 рода $T_p(x)$ степени p , наименее уклоняющегося от нуля на отрезке $[-1;1]$ (см. [9]):

$$T_p(x) = \cos(p \arccos x), \quad |x| \leq 1; \quad T_p(t) = ch(p \operatorname{arch} x), \quad |x| > 1. \quad (5)$$

Ясно, что $|T_p(x)| \leq 1$ при $|x| \leq 1$, а вне этого отрезка (на гиперболических ветвях) $|T_p(x)|$ является строго монотонной функцией. Последнее свойство важно для обоснования адаптации чебышевского полиномиального сглаживателя. Справедливы следующие рекуррентные соотношения

$$T_0(x) = 1; \quad T_1(x) = x; \quad T_k(x) = 2xT_{k-1}(x) - T_{k-2}(x), \quad k = 2, 3, \dots$$

Эти соотношения можно использовать для построения многочленов заданной степени, но мы, как правило, строим нужный многочлен с помощью итерационного алгоритма, опираясь на нули чебышевского многочлена.

Чебышевский полиномиальный сглаживатель порождается стандартным итерационным методом Чебышева [9], который для погашения невязки в заданное число ε^{-1} раз $(\|f - A_h u_p\| < \varepsilon \|f - A_h u_0\|)$ требует $p = p(\varepsilon, \eta)$ итераций, при условии, что спектр оператора $Sp(A_h) \subset [\lambda_{\min}^*; \lambda_{\max}]$,

$$p(\varepsilon, \eta) = \left\lceil \ln(\varepsilon^{-1} + \sqrt{\varepsilon^{-2} - 1}) / \ln \rho \right\rceil, \quad \rho = \frac{1 + \sqrt{\eta}}{1 - \sqrt{\eta}}, \quad \eta = \frac{\lambda_{\min}^*}{\lambda_{\max}}, \quad (6)$$

здесь $\lceil r \rceil$ обозначает наименьшее целое, большее или равное r .

В основе данного метода лежит многочлен $F_p(\lambda)$ степени p , максимум модуля которого минимален на отрезке $[\lambda_{\min}^*; \lambda_{\max}]$. Этот многочлен выражается через стандартный многочлен T_p при линейной замене переменной

$t = 0.5 \cdot (\lambda_{\min}^* + \lambda_{\max} - (\lambda_{\min}^* - \lambda_{\max}) \cdot x)$, переводящей отрезок $[-1; 1]$ в отрезок $[\lambda_{\min}^*; \lambda_{\max}]$, а точку $x = -1$ в точку $t = \lambda_{\min}^*$.

Для второго оператора сглаживания ЛИ-М [6] число итераций $v = 2p - 1$ равно почти удвоенной степени чебышевского многочлена $p = p(\varepsilon, \eta)$, вычисляемой по формуле

$$p(\varepsilon, \eta) = \left\lceil \frac{\pi}{4} \sqrt{(\varepsilon^{-1} - 1)/\eta + 1} \right\rceil. \quad (7)$$

При схожести сглаживателей они имеют определенные отличия. Первый из них порождается оптимальным алгебраическим многочленом Чебышева 1 рода. Среди всех многочленов F_p степени p с нормировкой $F_p(0) = 1$ такой многочлен наименее уклоняется от нуля на отрезке $[\lambda_{\min}^*; \lambda_{\max}]$. Определим $p_{Cheb} = p(\varepsilon, \eta)$ по формулам (6) при заданной точности сглаживателя $\varepsilon = \varepsilon_{smooth}$. После работы сглаживателя компоненты погрешности уменьшаются в $\varepsilon^{-1} > 1$ раз равномерно по данному участку спектра $[\lambda_{\min}^*; \lambda_{\max}]$, а демпфирующая функция полиномиального сглаживателя имеет вид

$$\rho_{Cheb}(\lambda) = F_p(\lambda). \quad (8)$$

Эта функция принимает значения $\pm\varepsilon$ в точках экстремума многочлена на отрезке $[\lambda_{\min}^*; \lambda_{\max}]$ и быстро растет в соответствии с (5) вне этого отрезка.

Сглаживатель ЛИ-М представляет собой более сложную конструкцию. Он является рациональной операторной функцией

$$S_v = (I - G_p^2) \cdot (I + \tau A_h)^{-1}, \quad (9)$$

где нижний индекс v у оператора S_v связан со степенью p формулой $v = 2p - 1$, а $G_p(\lambda)$ – это многочлен Чебышева 1 рода, наименее уклоняющийся от 0 на отрезке $[\lambda_0; \lambda_{\max}]$ при условии нормировки $G_p(-1/\tau) = 1$.

Как видно, в определении многочлена G_p входят два дополнительных параметра λ_0 и τ . Они связаны с параметрами p , λ_{max} соотношениями:

$$\lambda_0 = \lambda_{max} (z_1 - 1) / (z_1 + 1), \quad z_1 = \cos(0.5\pi/p), \quad (10)$$

$$\tau = (16p^2/\pi^2 - 1) / \lambda_{max}. \quad (11)$$

Нетрудно проверить, что $\lambda_0 \in [-1/\tau; 0]$ и на отрезке $[0; \lambda_{max}]$ выполнены неравенства $|G_p(\lambda)| \leq 1$, $|S_v(\lambda)| \leq 1$. Многочлен G_p выражается через оптимальный многочлен T_p при линейной замене переменной $t = 0.5 \cdot (\lambda_0 + \lambda_{max} - (\lambda_0 - \lambda_{max}) \cdot x)$, переводящей отрезок $[-1; 1]$ в отрезок $[\lambda_0; \lambda_{max}]$, точку $x = -1$ в точку $t = \lambda_0$, определенную в (10). Тогда точке $t = -1/\tau$ (в которой выполнено условие нормировки $G_p(-1/\tau) = 1$) соответствует некоторая точка $x = x_\tau < -1$. Укажем также, что по построению $G_p(0) = 0$. Отметим, что параметр τ в соответствии с (11) зависит от p и λ_{max} .

Спектр сглаживающего оператора (9) есть

$$\rho_{LIM}(\lambda) = (1 - G_p^2(\lambda)) \cdot (1 + \tau\lambda)^{-1}. \quad (12)$$

Нетрудно видеть, что на отрезке $[0; \lambda_{max}]$ справедливо неравенство

$$0 \leq \rho_{LIM}(\lambda) \leq (1 + \tau\lambda)^{-1}. \quad (13)$$

На правом конце спектра происходит быстрое затухание:

$$\rho_{LIM}(\lambda_{max}) \leq \pi^2 / (16p^2).$$

Из (13) следует, что для уменьшения нормы начальной невязки в ε^{-1} раз достаточно потребовать выполнения неравенства $(1 + \tau\lambda_{min}^*)^{-1} < \varepsilon$, что эквивалентно неравенству $\tau\lambda_{min}^* > \varepsilon^{-1} - 1$, т.е. параметр τ нужно взять из условия

$$\tau > (\varepsilon^{-1} - 1) / \lambda_{min}^*. \quad (14)$$

Отсюда, подставляя в это выражение соотношение (11), получаем формулу (7) для степени p многочлена.

Конструкция сглаживателя ЛИ-М вытекает из следующих рассуждений. Ясно, что идеальным (но нереальным) сглаживателем является обратный оператор задачи A_h^{-1} с демпфирующей функцией $\rho(\lambda) = 1/\lambda$. Говоря об обратном операторе, мы, конечно, понимаем под этим не вычисление обратного оператора, а решение соответствующей системы линейных уравнений.

В будущем мы вернемся к возможности построения сглаживателя, основанного на многочлене наилучшего приближения к функции $1/x$ [13], а сейчас покажем, что ЛИ-М сглаживатель является специальной итерационной реализацией оператора A_h^{-1} . Рассмотрим вместо стационарной дискретной задачи $A_h u = f$ эволюционную задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A_h u = f \quad (15)$$

с начальным условием $u_0 = w$ при $t = 0$. От заданного приближения $u_0 = w$ построим переход к более «гладкому» приближению $w_{\text{new}} = S_p w$. Для этого зададимся некоторым шагом $\tau > 0$ и запишем чисто неявную схему

$$\frac{u_{j+1} - u_j}{\tau} + A_h u_{j+1} = f, \quad (16)$$

реализующую переход со слоя t_j на верхний временной слой $t_{j+1} = t_j + \tau$. Сделаем один шаг со слоя t_0 на слой $t_1 = t_0 + \tau$ и положим $w_{\text{new}} = u_1$, то есть решим систему линейных алгебраических уравнений с оператором $(I + \tau A_h)$, где I – единичный оператор. Ясно, что демпфирующая функция такого сглаживателя есть

$$\rho_{\text{IMPLICIT}}(\lambda) = (1 + \tau\lambda)^{-1}.$$

Тогда для заданного отрезка $[\lambda_{\min}^*; \lambda_{\max}]$ можно обеспечить уменьшение нормы начальной невязки в ε^{-1} раз, взяв τ из условия (14). С ростом τ мы приближаемся к реализации A_h^{-1} , но к этому стремиться на самом деле не нужно, так как из (11) видно, что увеличение τ сопровождается увеличением

числа p , то есть ростом вычислительных затрат. Формальное обращение оператора неявной схемы $(I + \tau A_h)$ лишь немногим легче, чем обращение оператора A_h , но, как следует из неравенства (13), демпфирующая функция является мажорантой демпфирующей функции сглаживателя ЛИ-М (12).

Этот сглаживатель фактически построен с помощью схемы решения эволюционных уравнений ЛИ-М [10]. Напомним ее конструкцию. В этой схеме оператор послыного перехода с нижнего слоя t_j на верхний слой $t_{j+1} = t_j + \tau$ определяется операторным многочленом Чебышева $G_p(A)$ специальной конструкции [10], [11] алгебраической степени

$$p = \left\lceil \frac{\pi}{4} \sqrt{\tau \lambda_{\max} + 1} \right\rceil. \quad (17)$$

Конструкция многочлена G_p приведена выше: это многочлен Чебышева 1 рода, оптимальный для отрезка $[\lambda_0; \lambda_{\max}]$ при условии нормировки $G_p(-1/\tau) = 1$. Он легко выражается через стандартный многочлен Чебышева:

$$G_p(\lambda) = H_p(\lambda) / H_p(-1/\tau), \quad H_p(\lambda) = \prod_{m=1}^{m=p} (a_m - \lambda) \equiv T_p(z_1 - (z_1 + 1) \cdot \lambda / \lambda_{\max}), \quad (18)$$

здесь T_p – оптимальный многочлен Чебышева (5). Как следует из (18) для конструирования многочлена G_p достаточно задать параметры

$$a_m = \frac{\lambda_{\max}}{1 + z_1} (z_1 - \beta_m), \quad m = 1, \dots, p.$$

Эти параметры выражаются через нули β_m оптимального многочлена Чебышева T_p . Множество значений $\beta_m \in K_p = \{\cos((i - 0.5)\pi/p), i = 1, 2, \dots, p\}$ упорядочено для устойчивости [9] с выбором $\beta_1 = z_1 = \cos(0.5\pi/p)$.

Конструкция сглаживателя в точности повторяет алгоритм схемы решения эволюционных уравнений ЛИ-М: переход от сеточной функции w к «гладкому» приближению w_{new} выполняется за $v = 2p - 1$ явных шагов

$$y^m = \frac{1}{1 + \tau b_m} [w + \tau b_m \cdot y^{m-1} - \tau(A_n \cdot y^{m-1} - f)], \quad m = 1, \dots, \nu,$$

где $y^0 = w$ – начальное приближение, а результатом является сеточная функция:

$w_{new} = y^\nu$. Набор итерационных параметров b_m определяется как $\{b_1, b_2, \dots, b_{2p-1}\} \equiv \{a_1, a_2, \dots, a_p, a_2, a_3, \dots, a_p\}$.

Отличие процедуры сглаживания от схемы решения эволюционных уравнений состоит в задании параметров, определяющих многочлен G_p . В сглаживателе по заданным границам высокочастотного интервала $[\lambda_{\min}^*; \lambda_{\max}]$ (точнее по их отношению $\eta = \lambda_{\min}^* / \lambda_{\max}$) и заданной точности сглаживания $\varepsilon = \varepsilon_{smooth}$ мы находим параметр τ по формуле (14), а затем и степень p нужного многочлена по формуле (7).

В схеме ЛИ-М решения эволюционных уравнений параметр τ – это заданный шаг по времени, то есть входной известный параметр. Вторым, кроме τ , параметром схемы является верхняя граница спектра λ_{\max} , определяемая по теореме Гершгорина о кругах. Нижнюю границу и точность задавать совсем не нужно, точность обеспечивается конструкцией схемы, см. [10], [11].

Заметим, что в случае чебышевской процедуры число итераций совпадает со степенью полинома, $\nu = p$, а для сглаживателя ЛИ-М $\nu = 2p - 1$. Исследование указанных сглаживателей можно найти в работах [2–5] по геометрическому многосеточному методу, в которых обсуждены качественные свойства сглаживателей, а также показаны графики демпфирующих функций $\rho_{Cheb}(\lambda)$ и $\rho_{LIM}(\lambda)$. При переходе от геометрического к алгебраическому варианту многосеточного метода существенно новых деталей, кроме относящихся к адаптации сглаживателей, не внесено.

Еще раз заметим, что эффективность сглаживания зависит от выбора границы λ_{\min}^* , разделяющей спектр на низкочастотную и высокочастотную

части. Конечно, в ряде случаев можно указать оценку границы λ_{\min}^* , однако в общем случае сделать это затруднительно. Но анализируя, как происходит процесс сходимости в ходе многосеточных итераций, можно корректировать нижнюю границу интересующей нас части спектра.

В дальнейшем ниже в тексте мы под λ_{\min}^* будем подразумевать точную неизвестную нижнюю границу высокочастотного спектра, а под λ^* – текущее приближенное значение, которое будем уточнять.

В начале расчета полагаем $\lambda^* = \eta \lambda_{\max}$, задавая начальное значение η достаточно произвольно, например $\eta = 0.5$. Можно задавать в качестве начального значения η отношение Рэля $\eta = (Au, u)/(u, u)$ на высокочастотном подпространстве, т.е. взяв дискретную функцию u , равную нулю в S -точках и принимающую какие-либо значения в F -точках.

Пусть в ходе многосеточной итерации на текущем сеточном уровне с номером l после сглаживания для начальной и конечной невязок получено соотношение $\delta = \|r_v\|/\|r_0\|$. Номер уровня для простоты записи опускаем. Допустим, что значение δ заметно отличается от заданной точности $\varepsilon = \varepsilon_{smooth}$. Тогда границу λ^* спектрального отрезка нужно пересчитать с помощью процедуры адаптации, которая основана на двух предположениях.

Гипотеза 1. Верхняя граница спектра λ_{\max} (априори она тоже неизвестна) является оценкой сверху максимального собственного значения оператора A_h (на текущем сеточном уровне); это предположение отвечает реальному положению дел, если, например, значение λ_{\max} определено по теореме Гершгорина о кругах.

Гипотеза 2. На каждой многосеточной итерации в результате применения на текущем сеточном уровне оператора сглаживания к невязке r_0 в сглаженной невязке ведущей становится гармоника, отвечающая собственному значению

λ_{\min}^* точной границы раздела спектра. То есть в невязке r_0 можно пренебречь низкочастотными компонентами, или, иными словами, невязка r_0 почти лежит в инвариантном подпространстве, отвечающем собственным значениям оператора A_h из интервала $[\lambda_{\min}^*; \lambda_{\max}]$. Это условие можно выполнить, например, включая адаптацию не на первой многосеточной итерации, а после проведения двух–трех многосеточных итераций.

Процедура адаптации зависит от типа сглаживателя. Схема рассуждений является общей для каждого из двух сглаживателей S_p : для сглаженной невязки r_v выполняется уравнение $r_v = S_p r_0$, поэтому в качестве оценки максимального собственного значения сглаживающего оператора S_p можно взять отношение $\|r_v\|/\|r_0\|$ норм невязок [12]. Фактически выполняется один шаг простейшего степенного метода поиска наибольшего собственного значения.

Сглаживатель ЛИ-М. Для него процедура адаптации выглядит достаточно просто. Из неравенства (13) следует, что искомое собственное значение λ_{\min}^* отвечает наибольшему собственному значению мажорирующего оператора $(I + \tau A_h)^{-1}$. Поэтому для $\delta = \|r_v\|/\|r_0\| < 1$ можно приближенно считать

$$\delta \approx \frac{1}{1 + \tau \lambda_{\min}^*}, \quad (19)$$

откуда с учетом (11) следует

$$\eta_{new} = \frac{\delta^{-1} - 1}{16p^2/\pi^2 - 1}.$$

Чебышевский сглаживатель. Пусть текущее приближенное значение λ^* больше искомого точного λ_{\min}^* , $\lambda^* > \lambda_{\min}^*$, и заданный уровень сглаживания не достигнут, т.е. $\delta > \varepsilon$. Ясно, что значение демпфирующей функции $F_p(\lambda) = \delta$ достигается на левой гиперболической ветви многочлена, т.е. при $\lambda < \lambda^*$, что

соответствует интервалу $x < -1$ для многочлена $T_p(x)$ (5). Тогда корень уравнения $F_p(\lambda) - \delta = 0$ на интервале $\lambda < \lambda^*$ и является новым значением λ_{\min}^* .

Для содержательного объяснения алгоритма рассмотрим в единичном кубе дискретный оператор Лапласа на кубической сетке с шагом h с нулевыми граничными значениями. Для наглядности демпфирующую функцию $F_p(\lambda)$ изобразим не на спектре $[0; \lambda_{\max}]$, а на нормированном интервале $[0; \lambda_{\max} h^2] = [0; 12]$. Предположим, что задана точность $\varepsilon = \varepsilon_{smooth} = 0.25$, а при сглаживании достигнута точность $\delta = 0.75$, что отвечает заданию $\lambda^* = 0.264$ в качестве приближенной нижней границы высокочастотной части спектра. Тогда в соответствии с (6) получаем $p = 7$. График функции $f(\lambda) = F_p(\lambda)$ показан на рис. 2 на всем нормированном спектральном интервале и на начальном участке спектра $[0; 1.5]$.

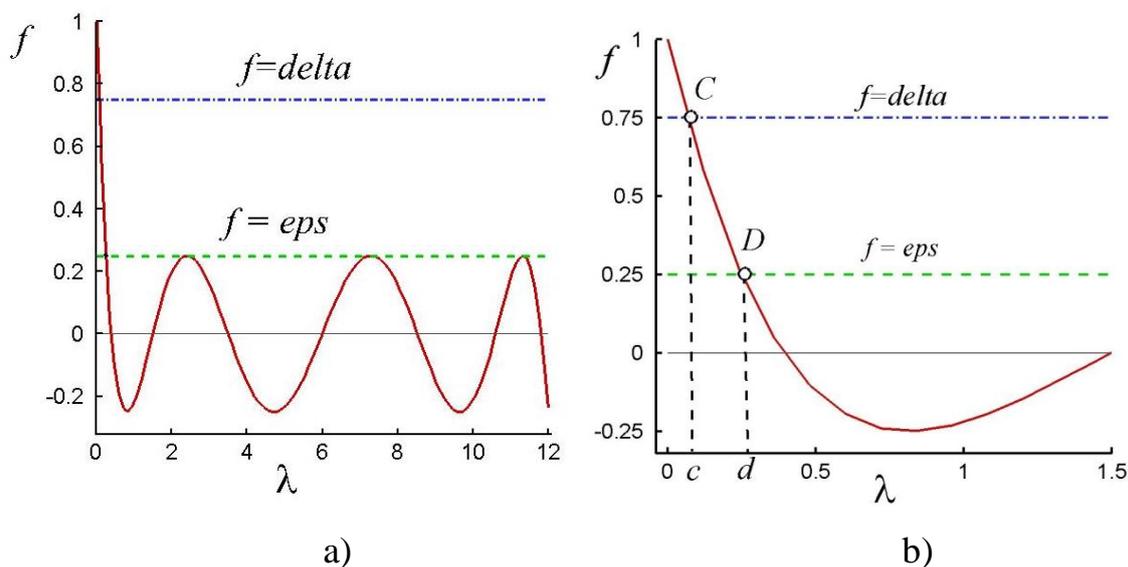


Рис. 2. Функция $F_p(\lambda)$: а) на всем спектре; б) на начальном участке

Заданному значению λ^* на графике на рис. 2б отвечает точка D с координатами (d, ε) , $d = \lambda^*$. Значение $f = \delta$ (delta) достигается в точке C с абсциссой $\lambda = c$, которая и является искомой величиной. Обозначим

$$q_p = \frac{2\rho_1^p}{1 + \rho_1^{2p}}, \quad \rho_1 = \frac{1 - \sqrt{\eta}}{1 + \sqrt{\eta}}, \quad \eta = \frac{\lambda^*}{\lambda_{\max}}. \quad (20)$$

Тогда вне интервала $[-1; 1]$ существует точка x^* , такая что

$$T_p(x^*) = \frac{\delta}{q_p} \equiv y_1. \quad (21)$$

Так как точка x^* лежит на гиперболической монотонной ветви многочлена $T_p(x)$, то решая уравнение $ch(p \operatorname{arch} x) = y_1$, находим его корень $x^* = ch(y_2/p)$, где $y_2 = \operatorname{arch}(y_1)$, или, избегая вычислений обратной гиперболической функции, $y_2 = \ln(y_1 + \sqrt{y_1^2 - 1})$, см. [14]. Новое приближенное значение λ_{new}^* получаем, возвращаясь от x к переменной λ .

Окончательно получаем следующие формулы для вычисления нового приближения η_{new} по известному текущему приближению η и полученному в расчете демпфирующему фактору δ :

$$\begin{aligned} 1. \quad \rho_1 &= \frac{1 - \sqrt{\eta}}{1 + \sqrt{\eta}}, & 2. \quad q_p &= \frac{2\rho_1^p}{1 + \rho_1^{2p}}, \\ 3. \quad y_1 &= \frac{\delta}{q_p}, & 4. \quad y_2 &= \ln(y_1 + \sqrt{y_1^2 - 1}), & 5. \quad x^* &= ch(y_2/p), \\ 6. \quad \lambda_{new}^* &= \frac{1 + \eta}{2} - \frac{1 - \eta}{2} x^*, & 7. \quad \eta_{new} &= \lambda_{new}^* / \lambda_{\max}. \end{aligned}$$

Для использования на следующей многосеточной итерации обновляем значения: $\eta = \eta_{new}$ и $\lambda^* = \lambda_{new}^*$.

При $\delta \geq 1$ для любого сглаживателя полагаем $\eta_{new} = \eta/k$, где параметр $k > 1$ можно задавать произвольно, например, взять $k = 2$, а можно учесть при выборе этого параметра информацию о сходимости итераций всего многосеточного метода.

Если заданная точность сглаживания достигнута, т.е. $\delta < \varepsilon$, то сглаживатель ЛИ-М без труда допускает применение процедуры адаптации, в

ходе которой происходит сдвиг λ_{new}^* вправо, в соответствии с той же самой формулой (19).

Для адаптации чебышевского полиномиального сглаживателя при $\delta < \varepsilon$ мы пользуемся формулируемым ниже эмпирическим правилом. Из соотношений (6) следует, что $\rho^p = \varepsilon^{-1} + \sqrt{\varepsilon^{-2} - 1}$. Найдем корень ρ_1 уравнения $\rho^p = \delta^{-1} + \sqrt{\delta^{-2} - 1}$. Так как функция $y(t) = t + \sqrt{t^2 - 1}$ монотонно возрастает на интервале $t > 1$, то $\rho_1 > \rho$. Обращая две оставшиеся формулы из (6), получаем соотношения для нахождения новой границы раздела λ_{new}^* :

$$\lambda_{new}^* = \left(\frac{\rho_1 - 1}{\rho_1 + 1} \right)^2 \cdot \lambda_{max}, \quad \rho_1 = \left(\delta^{-1} + \sqrt{\delta^{-2} - 1} \right)^{1/p}.$$

Граница λ_{new}^* лежит правее предыдущей границы λ^* , т.к. $\rho_1 > \rho$.

Заметим, что это правило в проведенных расчетах оказывается работоспособным. Но для строгого обоснования адаптации чебышевского сглаживателя при $\delta < \varepsilon$ требуются дальнейшие исследования. Можно проводить увеличение η с учетом информации о сходимости всего многосеточного метода, см. [3–5]. Сказанное означает, что проблема уточнения нижней границы оператора для чебышевского итерационного метода заслуживает отдельного рассмотрения.

4. Результаты численных экспериментов

Ниже мы используем обозначения C_S , C_{A1} и C_{A2} для различных стратегий расщепления. Первая из них C_S называется стандартной, C_{A1} - агрессивная стратегия 1-ого рода и C_{A2} - агрессивная стратегия 2-ого рода. Как уже упоминалось, мы используем стандартную интерполяцию [8]. В случае агрессивного расщепления используется многопроходная интерполяция, которая работает всегда только на основном уровне.

В качестве процедуры сглаживания используются чебышевские процедуры *Cheb*, *LIM*, алгоритмы которых приведены в разделе 3. Линейная система самого грубого уровня в описываемых здесь экспериментах решается точно методом Гаусса. В дальнейшем для обеспечения параллельной эффективности такая система будет решаться стандартным чебышевским методом.

Для сравнения скорости сходимости различных вариантов АММ используются следующие параметры:

- Средняя скорость сходимости $q = (res_m / res_0)^{1/m}$. Здесь m – число многосеточных итераций, res_0 , res_m – нормы начальной и конечной невязок.
- Сеточная сложность $c_G = \sum_{lev} n_{lev} / n_1$, где n_{lev} означает число переменных на уровне с номером lev ($lev \neq 1$).
- Операторная сложность $c_A = \sum_{lev} nnz_{lev} / nnz_1$, где nnz_{lev} означает число ненулевых элементов матрицы на уровне lev .

Задача 1. Уравнение Пуассона в единичном кубе $\Omega = [0;1]^3$. Приведем основные результаты расчета задачи Дирихле с точным решением $u(x, y, z) = (\cos 2\pi x + \cos 4\pi x)(\cos 2\pi y + \cos 8\pi y)(\cos 2\pi z + \cos 4\pi z)$.

Сходимость алгебраического многосеточного метода оценивается при следующих контрольных параметрах: относительная точность решения исходной линейной системы $\varepsilon_{AMG} = 10^{-10}$, относительная точность сглаживающих итераций $\varepsilon_{smooth} = 0.5$. Количество уровней АММ не задается и ограничено только размером самой грубой сетки, т.е. размером самой грубой линейной системы. Процесс формирования уровней многосеточного метода заканчивается, как только число степеней свободы оказывается меньшим 100.

Различные стратегии расщепления формируют разную степень разреженности. Ниже в табл. 1 представлены оценки сеточной и алгоритмической сложности в зависимости от стратегии расщепления; в

таблице DOF_1, DOF_2 – число степеней свободы на первом (начальном) и на втором уровнях соответственно; размер исходной сетки $64 \times 64 \times 64$ ($DOF_1 = 274625$) Для сравнения в случае геометрического многосеточного метода при простейшей 7-точечной аппроксимации уравнения диффузии на декартовых сетках в 3D случае $DOF_1/DOF_2 = 8$, $c_G = c_A = 0.125$. Среди трех процедур расщепления, стандартной C_S и агрессивных C_{A1}, C_{A2} , мы в данной работе ограничиваемся стандартным разбиением C_S .

Таблица 1

Сеточная и алгоритмическая сложность стратегий расщепления

	DOF_2	DOF_1/DOF_2	c_G	c_A
C_S	125023	~ 2	1.4	2.3
C_{A1}	20836	~ 13	1.1	1.2
C_{A2}	29791	~ 9	1.1	1.3

Зафиксируем начальную границу раздела спектра для сглаживания $\lambda_{min}^* = 0.5 \lambda_{max}$. Характеристики сходимости приведены ниже в табл. 2. В ней N_{AMG} – полное число многосеточных итераций; N_{smooth}^{total} – число сглаживающих итераций на исходном (самом подробном) уровне, суммарное по всем N_{AMG} итерациям. Именно это число характеризует основной объем вычислительной работы.

Таблица 2

Асимптотическая сходимость АММ по сетке. Задача 1

	q	N_{AMG}	N_{smooth}^{total}
<i>Cheb</i> $16 \times 16 \times 16$	0.06	8	32
<i>Cheb</i> $32 \times 32 \times 32$	0.06	8	32
<i>Cheb</i> $64 \times 64 \times 64$	0.07	9	44

<i>Cheb</i> 128×128×128	0.1	10	54
<i>LIM</i> 16×16×16	0.04	8	48
<i>LIM</i> 32×32×32	0.06	8	48
<i>LIM</i> 64×64×64	0.07	9	54
<i>LIM</i> 128×128×128	0.07	9	54

На рис. 3 показано, как проходит процесс адаптации для самого подробного уровня в задаче 1 в зависимости от размера сетки. Рисунок 4 представляет динамику адаптации для различных уровней: справа – поведение для полиномиального сглаживателя *Cheb*, слева – для сглаживателя *LIM*.

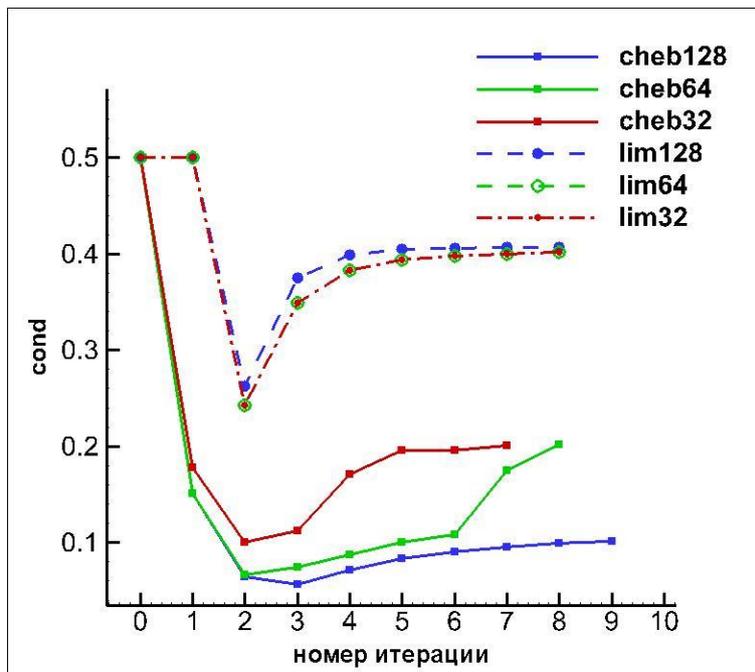


Рис. 3. Динамика процесса адаптации на исходном уровне метода. Задача 1

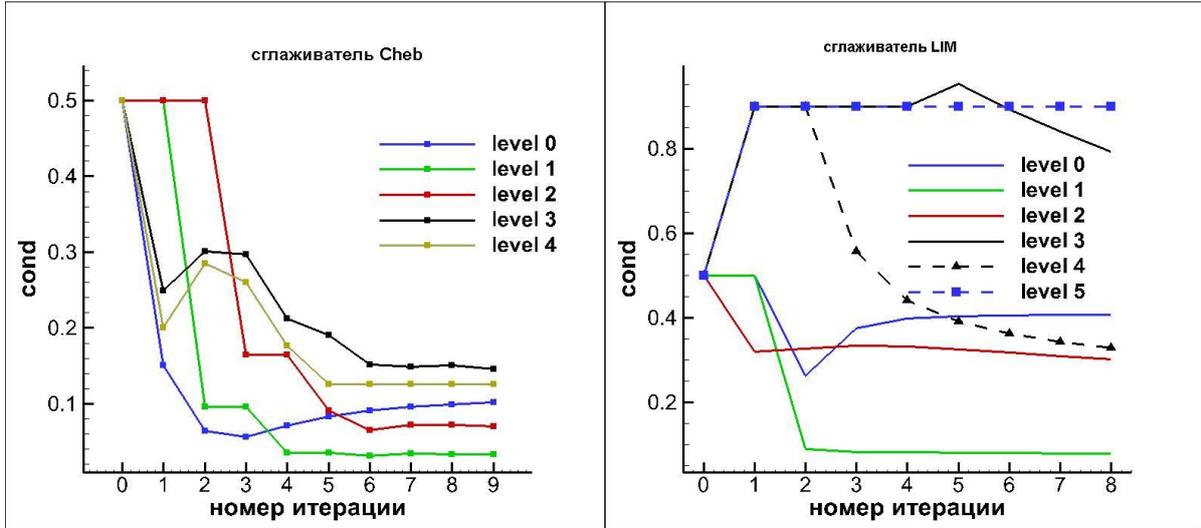


Рис. 4. Динамика адаптации по сеточным уровням. Задача 1

В рассмотренных здесь примерах адаптация начинается сразу же на первой многосеточной итерации, когда еще нет доминирования в сглаженной невязке гармоники, отвечающей значению λ_{\min}^* точной границы раздела спектра (гипотеза 2, см. раздел 3). Немонотонный характер графиков объясняется этим фактом, а также дискретным характером преобразования вещественных чисел в целые в соответствии с формулами (6) и (7) для степеней p многочленов Чебышева. Кроме того, в данной модельной задаче точное значение относительной границы раздела спектра $\eta \approx 0.12$. Поэтому при задании $\varepsilon_{smooth} = 0.5$ в случае сглаживателя *Cheb* округление значения $p \approx 1.3$ до целого $p = 2$ в соответствии с (6) приводит к улучшению точности сглаживания до ~ 0.35 , что обеспечивает скорость сходимости $q \approx 0.1$, см. табл. 2. Для сглаживателя *LIM* весь диапазон $\eta \approx 0.2 \div 0.9$ значений определяет минимально возможное значение $p = 2$, см. (7). Для данной задачи и указанной точности сглаживания даже три ($\nu = 2p - 1$) шага сглаживания избыточны и приводят к повышению скорости сходимости всего многосеточного метода ($q = 0.07$, вместо ожидаемой в асимптотике скорости сходимости $q = 0.25$, см. например,

последнюю строку в табл. 2). Подобные результаты получены для геометрического многосеточного метода, см. [2–5].

Динамика адаптации сглаживателей по уровням многосеточного метода (см. рис. 4) также показывает стабильность адаптации, несмотря на кажущийся разброс значений η (ось ординат с обозначением *cond*) от 0.1 до 0.9. Как мы уже говорили, для сглаживателя *LIM* значения из интервала $\eta \approx 0.2 \div 0.9$ определяют одну и ту же процедуру сглаживания. Выбиваются из общей картины графики уровня level 1 (для сглаживателя *LIM* вместо ожидаемого $p = 2$ имеем $p = 3$), что приводит к незначительному росту общего числа сглаживающих шагов, см. последний столбец в табл. 2.

Задача 2. Анизотропная диффузия с разрывными коэффициентами [15]. Уравнение (1) решается в области $\Omega \equiv [0; 1]^3$. Эта область разделена на четыре подобласти Ω_i , $i = 1, \dots, 4$ следующим образом:

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= \{(x, y, z) \in \Omega : y \leq 0.5, z \leq 0.5\}, & \Omega_2 &= \{(x, y, z) \in \Omega : y > 0.5, z \leq 0.5\}, \\ \Omega_3 &= \{(x, y, z) \in \Omega : y > 0.5, z > 0.5\}, & \Omega_4 &= \{(x, y, z) \in \Omega : y \leq 0.5, z > 0.5\}.\end{aligned}$$

Тензор диффузии является диагональным, $k(x, y, z) = \text{diag}\{k_x^i, k_y^i, k_z^i\}$, он терпит разрыв на внутренних поверхностях раздела и постоянен в каждой подобласти $i = 1, \dots, 4$:

$$\begin{aligned}k_x^1 &= k_x^2 = k_x^3 = k_x^4 = 1, \\ k_y^1 &= 10, \quad k_y^2 = 0.1, \quad k_y^3 = 0.01, \quad k_y^4 = 100, \\ k_z^1 &= 0.01, \quad k_z^2 = 100, \quad k_z^3 = 10, \quad k_z^4 = 0.1.\end{aligned}$$

Точное решение в каждой подобласти $i = 1, \dots, 4$ имеет вид $u(x, y, z) = \alpha_i \sin(2\pi x) \sin(2\pi y) \sin(2\pi z)$; условия непрерывности решения и потока обеспечивает выбор $\alpha_1 = 0.1, \alpha_2 = 10, \alpha_3 = 100, \alpha_4 = 0.01$.

На внешних границах области поставлены краевые условия Дирихле, которые, как и правая часть уравнения (1) (в котором $a \equiv 0$), определяются из точного решения.

Контрольные параметры взяты такими же, как для предыдущего теста: $\varepsilon_{AMG} = 10^{-10}$, $\varepsilon_{smooth} = 0.5$. Линейная система на самом грубом уровне решается точно. Процедура расщепления – стандартная C_S . В табл. 3 приведена асимптотическая сходимость АММ при применении каждого из двух сглаживателей на последовательности измельчающихся исходных сеток.

Результаты, приведенные в табл. 3 показывают, что АММ с адаптивным чебышевским сглаживателем достигает хороших результатов, как по скорости сходимости, так и по объему вычислений. Характеристикой вычислительных затрат служит параметр N_{smooth}^{total} .

АММ с адаптивным сглаживателем ЛИ-М показывает лучшую скорость сходимости, что сокращает число многосеточных итераций, но число сглаживающих шагов увеличивается почти вдвое по сравнению со случаем сглаживателя *Cheb*, см. правый столбец табл. 3.

Таблица 3

Асимптотическая сходимость АММ по шагу сетки. Задача 2

	q	N_{AMG}	N_{smooth}^{total}
<i>Cheb</i> 16×16×16	0.28	17	234
<i>Cheb</i> 32×32×32	0.34	20	260
<i>Cheb</i> 64×64×64	0.31	19	312
<i>Cheb</i> 128×128×128	0.18	13	422
<i>LIM</i> 16×16×16	0.16	12	398
<i>LIM</i> 32×32×32	0.11	10	450
<i>LIM</i> 64×64×64	0.11	10	644
<i>LIM</i> 128×128×128	0.08	8	778

Динамика адаптации сглаживателей на основной сетке и по сеточным уровням (см. рис. 5, 6) также показывает стабильность адаптации.

Установление значений η (ось ординат) для чебышевского сглаживателя происходит примерно при достижении $\eta = 0.01$ на всех уровнях.

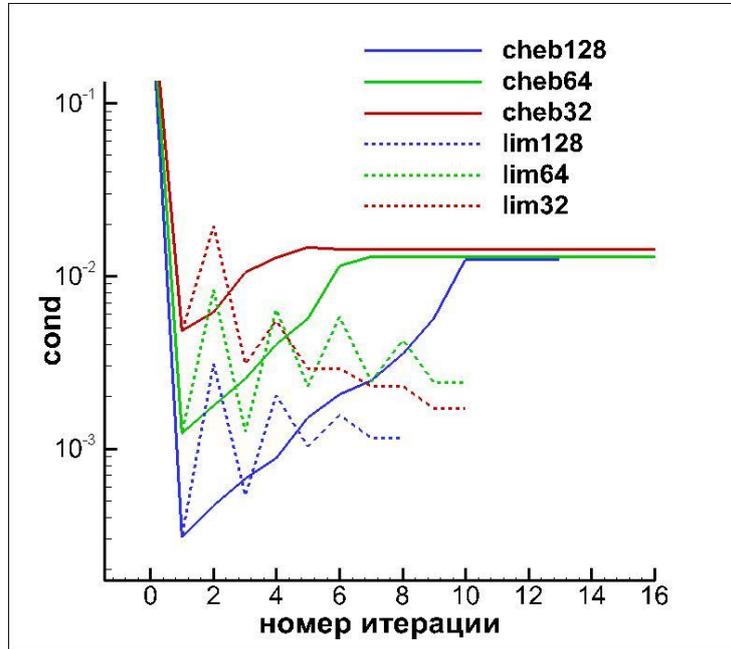


Рис. 5. Динамика процесса адаптации на исходном уровне. Задача 2

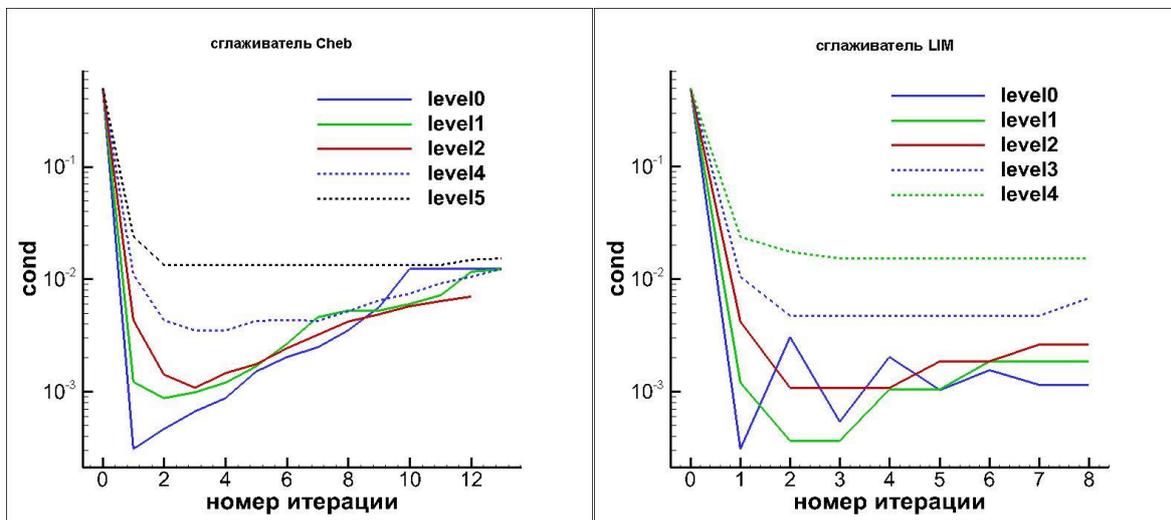


Рис. 6. Динамика адаптации по сеточным уровням. Задача 2

Сглаживатель ЛИ-М устанавливается на значении $\eta = 0.001$ на четырех первых уровнях, и на значении $\eta = 0.01$ на остальных двух грубых уровнях.

Небольшие флуктуации параметра η при выходе на установление объясняются в основном дискретным характером зависимости степени многочлена p от η .

Отметим, что в данной задаче геометрический многосеточный метод со стандартным прореживанием через один узел в каждом координатном направлении с чебышевским сглаживателем при $\varepsilon_{smooth} = 0.5$ оказывается неработоспособным из-за величины и структуры интерполяционных компонент невязки.

Со сглаживателем ЛИ-М адаптация происходит успешно, например, на сетке 128^3 сходимость многосеточного метода достигается за 20 многосеточных итераций с выходом на среднюю скорость сходимости $q \approx 0.3$, что близко к оптимальному значению $q = \varepsilon_{smooth}^2 = 0.25$. Суммарные затраты на сглаживание довольно большие – полное число сглаживающих шагов достаточно велико, $N_{smooth}^{total} \approx 3000$, так как граница раздела спектра на основной сетке лежит в глубине спектра (в адаптации для относительной границы устанавливается значение $\eta \approx 1.4 \cdot 10^{-4}$). Если взять $\varepsilon_{smooth} = 0.05$, то оба сглаживателя прекрасно адаптируются, обеспечивая следующие характеристики: сглаживатель *Cheb* – сходимость многосеточного метода за 11 итераций с полным числом сглаживающих шагов $N_{smooth}^{total} \approx 2850$, сглаживатель *LIM* – сходимость за 7 итераций с $N_{smooth}^{total} \approx 1880$.

Отсюда следует, что желательно адаптацию проводить не только по границе раздела спектра, но и по точности сглаживания ε_{smooth} , уменьшая это значение, если уточнение относительной границы не приводит к улучшению сходимости многосеточных итераций (об этом можно судить по критерию «идеальной» скорости сходимости $q = \varepsilon_{smooth}^2$).

Работоспособность АММ в данной задаче объясняется принятой стратегией расщепления, которая представляет собой аналог режима полуукрупнения сеток в геометрическом многосеточном методе.

Поэтому возникают следующие направления дальнейшего развития АММ: исследование стратегий расщепления и управление точностью сглаживателя в случае агрессивных стратегий, приводящих к эффектам, подобно описанным выше для геометрического многосеточного метода.

Заключение

На рассмотренных примерах алгебраический многосеточный метод с адаптацией сглаживателей основе оптимальных свойств чебышевских многочленов демонстрирует надежность и вычислительную эффективность. Новым элементом является алгоритм адаптации границы высокочастотной области к спектру многосеточных операторов.

Вычислительная сложность и время расчета в значительной степени зависят от многосеточной стратегии. Автоматическая адаптация явно-итерационных сглаживателей обеспечивает возможность выбора многосеточной стратегии в соответствии с ресурсами и архитектурой суперкомпьютера. На основе АММ может быть создан эффективный многосеточный код для решения стационарных трехмерных задач на произвольных, в том числе неструктурных, сетках. Такой код будет эффективен для решения неявных схем для эволюционных задач, особенно при условии независимости разрешающего оператора неявной схемы от времени (с возможным многократным использованием один раз созданных многосеточных структур).

Адаптивный алгебраический многосеточный метод обеспечивает хорошую перспективу для его применения в условиях экстремально-многопроцессорных систем.

Библиографический список

1. Федоренко Р.П. Релаксационный метод решения разностных эллиптических уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1961. Т. 1, № 5. С. 922–927

2. Жуков В.Т., Новикова Н.Д., Феодоритова О.Б. Параллельный многосеточный метод для разностных эллиптических уравнений // Матем. моделирование, 2014. Т. 26, № 1. С. 55–68
3. Жуков В.Т., Новикова Н.Д., Феодоритова О.Б. Многосеточный метод для анизотропных уравнений диффузии на основе адаптации чебышевских сглаживателей // Матем. моделирование. 2014. Т.26, № 9. С. 126–140
4. Жуков В.Т., Новикова Н.Д., Феодоритова О.Б. Многосеточный метод для эллиптических уравнений с анизотропными разрывными коэффициентами // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2015. Т. 55. № 7. С. 1168
5. Жуков В.Т., Новикова Н.Д., Феодоритова О.Б. О решении эволюционных уравнений многосеточным и явно-итерационным методами // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2015. Т. 55, № 8. С. 1305–1319
6. Жуков В.Т. Краснов М.М., Новикова Н.Д., Феодоритова О.Б. Сравнение эффективности многосеточного метода на современных вычислительных архитектурах // Программирование. 2015. № 1. С. 21–31
7. J.W. Ruge, K.Stuben Algebraic Multigrid (AMG). Multigrid Methods, Frontiers in Applied Mathematics (ed. S.F.McCormick). 73-130. SIAM, Philadelphia, 1987
8. U. Trottenberg, C.W.Oosterlee, A.Schuller. Multigrid.–ACADEMIC PRESS, 2001, 631 p.
9. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений.– М.: Наука, 1978, 592 с.
10. Жуков В.Т. О явных методах численного интегрирования для параболических уравнений // Матем. моделирование. 2010. Т.22, № 10. С. 127-158
11. Локуциевский В.О., Локуциевский О.В. О численном решении краевых задач для уравнений параболического типа // Доклады АН СССР.1986. Т. 291, № 3. С. 540–544

12. Люстерник Л. А. Замечания к численному решению краевых задач уравнения Лапласа и вычислению собственных значений методом сеток // Сб. работ Отдела приближенных вычислений МИАН СССР, Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, 20, Изд-во АН СССР, М.–Л., 1947. С.49–64
13. J. K. Kraus, P. S. Vassilevski and L. T. Zikatanov. Polynomial of best uniform approximation to $1/x$ and smoothing in two-level methods // Comput. Methods Appl. Math. 2012.Vol. 12, № 4. P. 448–468
14. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике. Для инженеров и учащихся ВТУЗов. –М.: Главиздат; изд. 3-е, перераб., 1953, 610 с.
15. R. Eymard, G. Henry, R. Herbin, F. Hubert, R. Kloforn, G. Manzini. 3D Benchmark on Discretization Schemes for Anisotropic Diffusion Problems on General Grids. HAL Id: hal-00580549 <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-0058054>. 2011