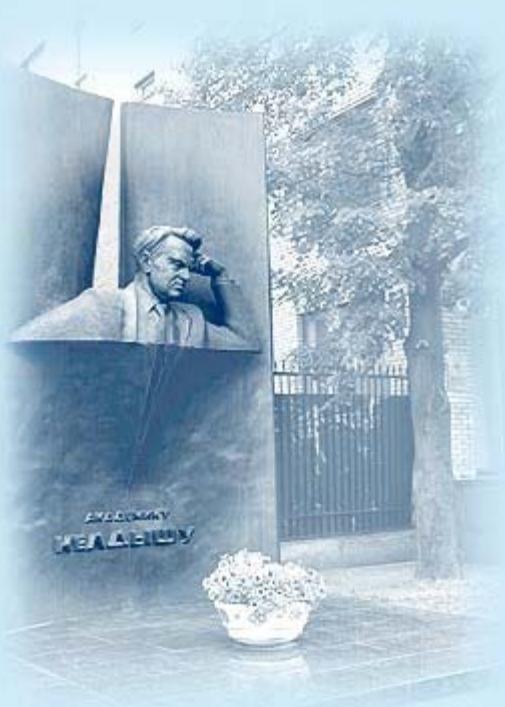




ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 120 за 2016 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

[Страховская Л.Г.](#)

Об устойчивости
стационарных состояний
гравитирующего газового
диска

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Страховская Л.Г. Об устойчивости стационарных состояний гравитирующего газового диска // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2016. № 120. 18 с. doi:[10.20948/prepr-2016-120](https://doi.org/10.20948/prepr-2016-120)

URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2016-120>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Российской академии наук**

Л.Г. Страховская

**Об устойчивости
стационарных состояний
гравитирующего газового диска**

Москва — 2016

Страховская Л.Г.

Об устойчивости стационарных состояний гравитирующего газового диска

Рассматривается трехмерная модель гравитирующего газового диска, который вращается вокруг гравитирующего центра. Построен численный алгоритм для нахождения стационарных течений в диске, использующий решение системы нелинейных уравнений. Плотность, масса и гравитационный потенциал увеличиваются в несколько раз по сравнению с моделью, не учитывающей гравитацию диска. Вычисляется параметр Тоомре, определяющий устойчивость газового диска.

Ключевые слова: газовый диск, стационарное состояние, гравитационная неустойчивость, параметр устойчивости

Liudmila Glebovna Strakhovskaya

On the stability of the steady states of the gravitating gas disk

The three-dimensional model of the gravitating gas disk, rotating around the gravitating center, is investigated. The numerical algorithm for finding the steady flows in the disk, which uses a solution of the system of nonlinear equations, is built. Density, mass and gravitational potential increase several times in comparison with the model, which does not consider gravity of disk. The parameter Toomre, which determines the stability of steady-state solution, is calculated.

Key words: gas disk, steady state, gravitational instability, parameter of the stability

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 15-01- 03085-а.

Оглавление

Введение.....	3
1. Постановка задачи.....	3
2. Стационарное состояние газового диска	5
3. Влияние гравитации центрального объекта	8
4. Влияние гравитации диска	10
Заключение.....	17
Библиографический список.....	17

Введение

Рассматривается газодинамическая модель системы, состоящей из гравитирующего центра и вращающегося вокруг него гравитирующего газового облака. Влияние гравитации центрального объекта исследуются, например, в работах [1,2], в которых получены стационарные цилиндрически-симметричные аналитические решения, не учитывающие самогравитацию газа. В настоящей работе, которая является продолжением работ [3,4], исследуется влияние суммарной гравитации на эволюцию газового диска, построен численный алгоритм для получения стационарных решений, анализируется их устойчивость.

Разработку теории гравитационной неустойчивости начал Джеймс Джинс в 1902, он показал, что изначально однородная среда с плотностью ρ_0 неустойчива по отношению к малым линейным возмущениям плотности и существует критическое значение, называемое длиной волны Джинса, $\lambda_J \approx c_s \sqrt{\pi / G \rho_0}$, где c_s - скорость звука в среде, которое отделяет область устойчивости от области неустойчивости [5]. В областях, размер которых ниже критического, где преобладают негравитационные силы, возмущения плотности релаксируют – это область устойчивости. В областях, размер которых выше критического, где преобладают силы гравитации, возмущения усиливаются, образуются области повышенной плотности, джинсовская длина волн уменьшается и может начаться сжатие и фрагментация газового облака, если масса облака превышает массу Джинса, массу, заключенную в объеме радиуса λ_J : $M_J \sim \rho \lambda_J^3 \sim T^{3/2} \rho^{-1/2}$. Таким образом, сжатие и фрагментация газового облака зависят от размеров, плотности и температуры и характеризуются параметром устойчивости Тoomре $Q_T = c_s \kappa_{ep} / \pi G \Sigma$, который зависит от скорости звука c_s , эпциклической частоты κ_{ep} , которая для кеплеровского диска равна угловой частоте ω , и поверхностной плотности Σ [6]. Чтобы диск начал сжиматься и фрагментироваться, нужно, чтобы $Q_T < 1$.

1. Постановка задачи

Модель диска описывается 3D нестационарными уравнениями газовой динамики в переменных Эйлера в цилиндрической системе координат r, φ, z с началом координат в гравитирующем центре и уравнением Пуассона для гравитационного потенциала диска. Область расчета Ω : $r_1 \leq r \leq r_2$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $-h \leq z \leq h$ находится между двумя коаксиальными цилиндрами, малой высоты по сравнению с внешним радиусом. В симметричном случае рассматривается половина высоты диска.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u r)}{r \partial r} + \frac{\partial(\rho v)}{r \partial \varphi} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0, \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2 r + pr)}{r \partial r} + \frac{\partial(\rho uv)}{r \partial \varphi} + \frac{\partial(\rho uw)}{\partial z} = \frac{\rho v^2}{r} + \frac{p}{r} + \rho \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{G \cdot M_s}{R} \right) \right), \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho vur)}{r \partial r} + \frac{\partial(\rho v^2 + p)}{r \partial \varphi} + \frac{\partial(\rho vw)}{\partial z} = -\frac{\rho vu}{r} + \rho \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}, \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho wur)}{r \partial r} + \frac{\partial(\rho vw)}{r \partial \varphi} + \frac{\partial(\rho w^2 + p)}{\partial z} = \rho \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{G \cdot M_s}{R} \right) \right), \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial(e+p)ur}{r \partial r} + \frac{\partial(e+p)v}{r \partial \varphi} + \frac{\partial(e+p)w}{\partial z} = \rho \mathbf{V} \cdot \left(\nabla \Phi + \nabla \left(\frac{G \cdot M_s}{R} \right) \right), \quad (1.5)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = -4\pi G \rho. \quad (1.6)$$

Здесь r - радиус, φ - полярный угол, z - ось вращения, ρ - плотность газа, p - давление, \mathcal{E} - внутренняя энергия единицы массы газа. $e = \rho(\mathcal{E} + \frac{\mathbf{v}^2}{2})$ - полная энергия (сумма внутренней и кинетической) единицы объема газа, $\mathbf{v} = (u, v, w)$ - вектор скорости, $\mathbf{v}^2 = u^2 + v^2 + w^2$. Φ - гравитационный потенциал диска, G - постоянная гравитации, M_s - масса центрального гравитирующего объекта, $\Phi_s = G \cdot M_s / R$ - соответствующий гравитационный потенциал, $R = \sqrt{r^2 + z^2}$. Для замыкания системы используется уравнение состояния идеального газа

$$p = (\gamma - 1)\rho\mathcal{E}. \quad (2)$$

Вычисления проводились в безразмерных переменных. В качестве основных масштабных единиц выбраны M_s , G , R_0 , где R_0 - характерный пространственный размер задачи. В безразмерных переменных вид уравнений газовой динамики не меняется, изменяется только выражение для гравитационного потенциала звезды $\Phi_s = \frac{1}{R}$ и правая часть в уравнении Пуассона. Например, масштабной единицей для плотности выбрана величина $\rho_0 = \frac{M_s}{4\pi R_0^3}$, для гравитационного потенциала $\Phi_0 = \frac{GM_s}{R_0}$, для идеального политропного газа $p = k\rho^\gamma$ безразмерный параметр k определяется формулой

$$k = (\mathfrak{R}R_0 / \mu GM_s)T^\circ, \quad (3)$$

где \mathfrak{R} - газовая постоянная.

Решение системы уравнений (1.1)-(1.6) осуществляется методом расщепления по физическим процессам, для аппроксимации используется метод конечных объемов. Уравнения газовой динамики решаются по схеме

Годунова [7]. Потоки на гранях ячеек вычисляются с помощью программы расчета плоского распада разрыва методом Ньютона, который по скорости сходимости является итерационным процессом второго порядка. Система уравнений (1.1)-(1.5) дополняется граничными условиями первого или второго рода: жесткое условие, условие симметрии, свободные краевые условия.

Уравнение Пуассона решается многосеточным методом Федоренко (Multigrid) [8], используется 2-4 вложенные сетки. Для гравитационного потенциала жесткие граничные значения Φ в каждой точке P вычисляются с помощью интеграла Пуассона, который дает точное решение уравнения (1.6)

$$\Phi(P) = \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\rho(Q)}{PQ} dV, \quad Q \in \Omega, \quad P \in \partial\Omega, \quad (4)$$

используются и свободные краевые условия $\partial\Phi / \partial n = 0$. Гравитационный потенциал Φ внутри области находится численным решением уравнения (1.6), так как вычисление Φ во всей области по формуле (4) очень дорогая операция.

2. Стационарное состояние газового диска

Произвольный выбор начальных условий обычно не приводит к установлению численного решения системы (1.1-1.6). Необходимо предварительно проанализировать вид стационарного решения уравнений газодинамики вращающегося вокруг гравитирующего центра газового диска.

При условии $\frac{\partial}{\partial t} \equiv 0$, $u = w = 0$ система (1.1-1.6) в безразмерных переменных приводится к виду:

$$v \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} + \rho \frac{\partial v}{\partial \varphi} = 0 \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial p}{\partial r} - \rho \frac{v^2}{r} = \rho \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \rho \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{R} \quad (5.2)$$

$$\frac{\partial p}{\partial \varphi} + \rho v \frac{\partial v}{\partial \varphi} = \rho \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \quad (5.3)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \rho \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \rho \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{R} \quad (5.4)$$

$$v \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \gamma p \frac{\partial v}{\partial \varphi} = \rho v \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \quad (5.5)$$

$$\Delta\Phi = -\rho, \quad (5.6)$$

Уравнение энергии (5.5) получено линейной комбинацией уравнений (1.3) и (1.5) с использованием уравнения неразрывности (1.1), уравнения состояния идеального газа $p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon$ и условия стационарности.

Суммарная сила гравитации в правых частях системы (5.1-5.6) состоит из суммы силы тяготения центрального объекта $\rho\nabla\Phi_s = \rho\nabla(1/R)$, которая всегда направлена к центру диска, и силы собственного тяготения диска $\rho\nabla\Phi$, под действием которых газовое облако сжимается. Этим силам противодействуют сила упругости $-\nabla p$ и центробежная сила $F_c = \rho \frac{v^2}{r}$, они стремятся рассеять газ. Интерес представляет взаимодействие этих сил, зависимость стационарной конфигурации диска от начального распределения плотности $\rho(r, \varphi, z)$, размеров (r_1, r_2, h) и внутренней энергии $\varepsilon(r, \varphi, z)$ (температуры).

Сделаем преобразования системы (5.1-5.6), умножим уравнение (5.3) на v и вычтем уравнение (5.5), получим $\rho v^2 \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \gamma p \frac{\partial v}{\partial \varphi} = 0$, при этом возможны два варианта:

- а) если $\frac{\partial v}{\partial \varphi} = 0$, то из уравнения неразрывности (5.1) следует, что $\frac{\partial \rho}{\partial \varphi} = 0$, и мы приходим к цилиндрически симметричному случаю;
- б) если $v^2 = \gamma p / \rho$ и течение изоэнтропическое, то есть

$$p = k\rho^\gamma, \quad k = \text{const}, \quad \gamma = \text{const}, \quad (6)$$

то уравнение неразрывности преобразуется в $\frac{\partial(\rho v)}{\partial \varphi} = \frac{\gamma+1}{2}(k\gamma)^{\frac{1}{2}}\rho^{\frac{\gamma-1}{2}}\frac{\partial \rho}{\partial \varphi} = 0$, и

так как $\rho \neq 0$, то $\frac{\partial \rho}{\partial \varphi} = 0$, и мы снова приходим к цилиндрически симметричному варианту, все функции зависят только от (r, z) .

В цилиндрически симметричном случае система (5.1-5.6) сводится к трем уравнениям

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho \left(\frac{v^2}{r} + \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{R} \right) \quad (7.1)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \rho \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{R} \right) \quad (7.2)$$

$$\Delta\Phi = -\rho, \quad (7.3)$$

Задача состоит в том, чтобы найти стационарные решения системы (1.1-1.6) для идеального политропного газа с условиями $\frac{\partial}{\partial t} \equiv 0$, $u = w = 0$. Для этого достаточно найти решения системы (7.1-7.3). Исключим давление,

получим $k\gamma\rho^{\gamma-2}\frac{\partial\rho}{\partial r}=\frac{v^2}{r}+\frac{\partial\Phi}{\partial r}+\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{R}$, $k\gamma\rho^{\gamma-2}\frac{\partial\rho}{\partial z}=\frac{\partial\Phi}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{R}$ и решим каждое отдельно

$$\frac{k\gamma}{\gamma-1}\rho^{\gamma-1}=\int\frac{v^2}{r}dr+\frac{1}{R}+\Phi+c_1(z) \quad (8)$$

$$\frac{k\gamma}{\gamma-1}\rho^{\gamma-1}=\frac{1}{R}+\Phi+c_2(r), \quad (9)$$

где $c_1(z)$, $c_2(r)$ - произвольные дифференцируемые функции. Из (8) вычтем (9) и продифференцируем по r , получим $v(r,z)=rc_2'(r)$, то есть вращательная скорость v зависит только от r . Продифференцировав разность уравнений (8) и (9) по z , получим $c_1(z)=const.$

В [1] при условии $\partial/\partial t=0$, $u=w=0$, $\partial/\partial\varphi=0$, но без учета самогравитации, получены стационарные аналитические решения уравнений (1.1-1.5). Показано, что для идеального политропного газа $p=k\rho^\gamma$ можно построить решения, описывающие дискообразные конфигурации вещества любой формы, задавая границу положительной плотности вещества $Z(r)$, дважды дифференцируемой и удовлетворяющей условию $r+Z(r)Z'(r)>0$, $r\in[r_1,r_2]$.

Предполагая существование границы $Z(r)$, на которой плотность обращается в ноль, мы можем определить константу в (8) и в случае самогравитирующего диска: $c_1=-\left(\int\frac{v^2(r)}{r}dr+\frac{1}{\sqrt{r^2+Z^2(r)}}+\Phi(r,Z(r))\right)$.

Дифференцируя по r , получаем выражение для скорости

$$v^2(r)=r\left[\frac{r+Z(r)Z'(r)}{(r^2+Z^2(r))^{\frac{3}{2}}}-\frac{\partial}{\partial r}\Phi(r,Z(r))\right], \quad (10)$$

а, подставляя c_1 в (9), получаем формулу для плотности:

$$\rho(r,z)=\left[\frac{\gamma-1}{k\gamma}\left(\frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}}-\frac{1}{\sqrt{r^2+Z^2(r)}}+\Phi(r,z)-\Phi(r,Z(r))\right)\right]^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad (11)$$

Используя (1.6) или (4) для гравитационного потенциала, мы можем определить стационарное распределение в самогравитирующем газовом диске.

3. Влияние гравитации центрального объекта

Для сравнения с результатами [9] и тестирования компьютерного кода проведены расчеты динамики диска без учета самогравитации с начальным стационарным распределением:

$$\rho(r, z) = \left[\frac{\gamma-1}{k\gamma} \left(1/\sqrt{r^2 + z^2} - 1/\sqrt{r^2 + Z^2(r)} \right) \right]^{1/(\gamma-1)} \quad (12)$$

$$v^2(r) = -r \frac{\partial}{\partial r} \left(1/\sqrt{r^2 + Z^2(r)} \right) = r(r + Z(r)Z'(r)) / (r^2 + Z^2(r))^{3/2}. \quad (13)$$

Устойчивость такой конфигурации определяется критерием Хейланда [10], который в случае идеального политропного газа сводится к неравенству $d(v^2 r^2)/dr > 0$, квадрат углового момента должен возрастать вдоль r .

Устойчивость диска без учета самогравитации не зависит от его массы. Так как полутолщина диска много меньше его радиуса $Z(r) \ll r$, то можно считать, что $v \approx 1/\sqrt{r}$, то есть вращательная скорость диска близка к кеплеровской.

Тест 1. В области $\Omega: 0.1 \leq r \leq 1.1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq z \leq 0.2$ вводится сетка $h_r \times h_\varphi \times h_z$ и задается распределение $\rho(r, \varphi, z) = \rho(r, z)$, $v(r, \varphi, z) = v(r)$ по формулам (12), (13). Задаются начальные скорости $u = w = 0$, гравитационный потенциал диска $\Phi \equiv 0$, давление $p = k\rho^\gamma$. Значение безразмерного параметра $k = 0.0106$ вычисляется по формуле (3) и соответствует температуре $95^\circ K$, $\gamma = 1.43$. Граница положительной плотности $Z(r) = 0.32r e^{-9(r-0.55)^2}$ (половина диска) находится внутри области Ω . В области отрицательной плотности, за границей $Z(r)$, плотность и давление заменялись малыми положительными константами $\rho_{\min} = 10^{-5}$, $p_{\min} = 10^{-6}$. Масса диска $M_d = 0.098$. Границочное условие $\mathbf{V}|_\Gamma = 0$. С этими начальными данными проведены расчеты динамики диска на разных сетках без учета самогравитации.

На рис. 1 изображены значения плотности $\rho(r, 0, 0)$ в среднем сечении $z = 0$ в момент времени $t = 0$ (кривая 1, начальное распределение (12)) и в момент $t = 4.33$, полученные на сетках $100 \times 4 \times 20$, $100 \times 64 \times 20$, $500 \times 4 \times 100$. Видно, что от φ ничего не зависит, кривые 2 и 3 совпадают, от шагов по r и z зависимость очевидна, так как используется схема Годунова первого порядка точности и проявляется диссипация. «Схемная вязкость» приводит к рассеянию точного решения.

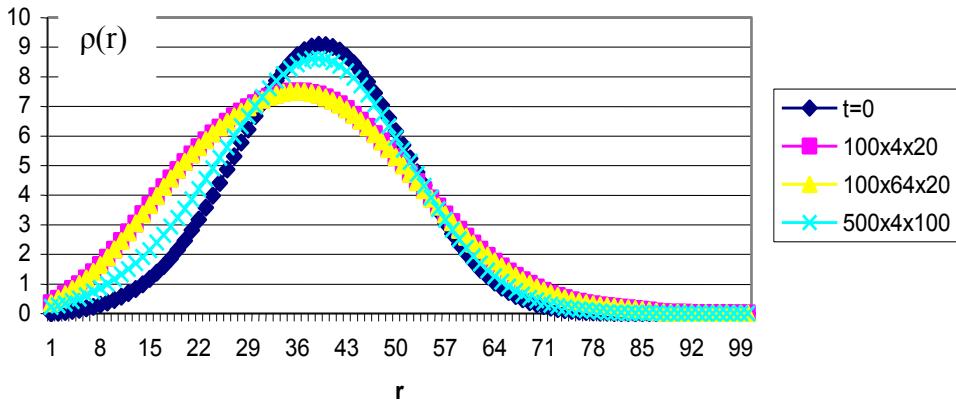


Рис.1. Кривая 1 – точное стационарное решение (4.1). Совпадающие кривые 2, 3 рассчитаны на разных сетках: $\varphi=4$, $\varphi=64$.

Кривая 4 получена на мелкой сетке по r и ближе всего к точному решению.

В [9] расчеты проводились в двумерной (r, φ) геометрии, начальное приближение получали путем осреднения решения (12) по z , оно оставалось постоянным до времени $t = 100$, если использовалась схема третьего порядка точности. Если использовалась схема первого порядка, то начальное приближение расплывалось по r . В цилиндрически симметричном случае (r, φ) -геометрия, фактически, одномерна.

Тест 2. Сделан расчет на сетке $500 \times 1 \times 1$. В качестве начальных данных взято сечение $\rho(r, h_\varphi / 2, h_z / 2)$, рассчитанное по формуле (12) с $Z(r) = 0.2re^{-9(r-0.8)^2}$ и параметрами: $k = 0.039$, что соответствует температуре $350^\circ K$, $\gamma = 1.67$ и $\rho_{\min} = 10^{-5}$, $p_{\min} = 10^{-6}$, $\mathbf{V}|_F = 0$. На рис. 2 изображены значения плотности на моменты времени $t = 0, 5.7, 10.8$, максимум плотности несколько упал, кривая незначительно расплылась по r .

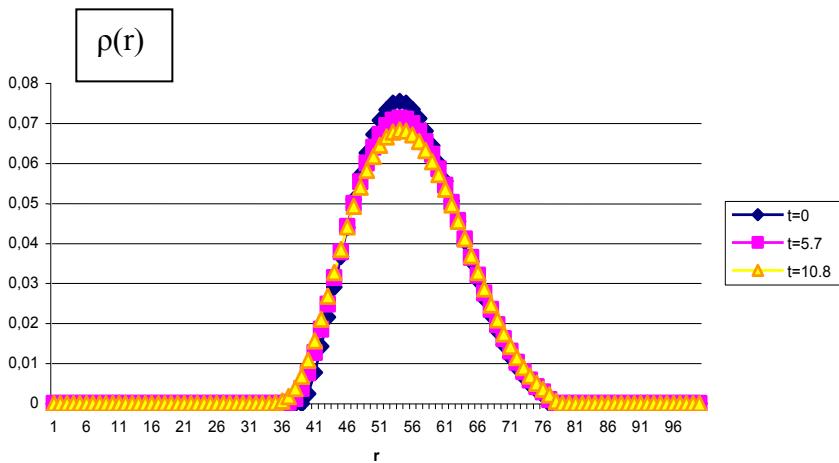


Рис.2. Плотность на сетке $500 \times 1 \times 1$, максимум плотности несколько упал, кривая незначительно расплылась по r из-за «схемной вязкости».

$$\text{Масса диска всегда вычислялась } M_d = \frac{1}{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} \int_0^{2\pi} \int_0^h \rho(r, \varphi, z) r dr d\varphi dz \quad (14)$$

и при жестких краевых условиях сохранялась точно. Эти тестовые расчеты подтверждают достаточную надежность компьютерного кода.

4. Влияние гравитации диска

Рассмотрим, как влияет гравитация диска на вид стационарного решения. Согласно п.2 стационарное состояние политропного газового диска описывается нелинейными уравнениями

$$\rho(r, z) = [\frac{\gamma-1}{k\gamma} (\frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + Z^2(r)}} + \Phi(r, z) - \Phi(r, Z(r)))]^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad (15)$$

$$v^2(r) = r \left[\frac{r + Z(r)Z'(r)}{(r^2 + Z^2(r))^{\frac{3}{2}}} - \frac{\partial}{\partial r} \Phi(r, Z(r)) \right]. \quad (16)$$

$$\Delta\Phi = -\rho, \quad (17)$$

Эту систему будем решать итерационным методом. Задается $\Phi^0(r, \varphi, z) = 0$, рассчитываются $\rho^0(r, \varphi, z)$, $v^0(r, \varphi, z)$ по формулам (15), (16) и решается уравнение Пуассона $\Delta\Phi^1 = -\rho^0$ многосеточным методом. Процесс имеет вид

$$\Delta\Phi^{n+1} = -\rho^n. \quad (18)$$

Используя начальные данные теста 1, получили расходящийся процесс, введение нормировки не улучшило ситуацию. Но изменение параметра k , именно, увеличение температуры до $135^\circ K$ в формуле (3), неожиданно, привело к сходимости итерационного процесса. Основными характеристиками сходимости были значения максимума плотности $\rho_{\max} = \max_r \rho(r, 0, 0)$, гравитационного потенциала Φ_{\max} , скорости v в точке максимума плотности и массы диска M_d , которые менялись в процессе итераций. Проведены расчеты для разных значений температуры.

Пример 1. В области $\Omega: 0.1 \leq r \leq 1.1$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq z \leq 0.2$ вводится граница положительной плотности $Z(r) = 0.32r \exp(-9(r - 0.55)^2)$ (половина диска), сетка $100 \times 40 \times 20$, $\gamma = 1.43$. Начальное распределение $\Phi^0(r, \varphi, z) = 0$, $\rho^0(r, \varphi, z) = \rho^0(r, z)$, $v^0(r, \varphi, z) = v^0(r)$ задается формулами (12), (13) для температур в диапазоне $100^\circ K$ - $150^\circ K$. В области отрицательной плотности, за границей $Z(r)$, плотность заменяется малой положительной константой $\rho_{\min} = 10^{-7}$. Для уравнения Пуассона при $z = 0$ ставится условие симметрии, на остальной границе жесткое граничное условие определяется формулой Пуассона (4).

В таблице 1 приведены значения плотности ρ_{\max} , массы M_d , гравитационного потенциала Φ_{\max} , вращательной скорости v , внутренней энергии ε диска и параметра устойчивости Тоомре на нулевой и последней итерации n в узле ($r_{39} = 0.485, 0, 0$) - точке максимума начальной плотности. Величины рассматриваются в зависимости от температуры диска T , каждому значению которой соответствует параметр k (3). В первых четырех вариантах для температуры, $\leq 130^\circ K$, итерационный процесс (18) не сходится, происходит авост, так как из-за сильного роста гравитационного потенциала получается отрицательный квадрат скорости. Если масса газового диска становится больше некоторого критического значения, (для диска данного размера $M_d^n \approx 0.13$), то наступает неустойчивость. Для температуры, большей $130^\circ K$, итерационный процесс (18) сходится, масса диска увеличивается в 2-3 раза по сравнению с нулевым приближением, соответствующим стационарному решению, не учитывающим гравитацию диска, скорость при этом почти не меняется.

Чем выше температура, тем меньше плотность, масса диска и гравитационный потенциал. Несоответствие только в первом расчете из-за сильного роста гравитационного потенциала и вследствие этого быстрого авоста. Начальные значения внутренней энергии и скорости одинаковы во всех вариантах, $\varepsilon^0 = 0.064$, $v^0 = 1.4378$, так как не зависят от k , то есть от температуры.

Вычислялся параметр устойчивости Тоомре, в безразмерных переменных $Q_T = \frac{2c_s \kappa_{ep}}{\Sigma}$, вместо эпизициклической частоты κ_{ep} бралась угловая частота $\omega = v/r$, поверхностная плотность $\Sigma = \int_0^h \rho dz$.

Таблица 1

T	k	n	ρ_{\max}^0	ρ_{\max}^n	Φ_{\max}^0	Φ_{\max}^n	M_d^0	M_d^n	v^n	ε^n	Q_T^0	Q_T^n
$100^\circ K$	0.0112	5	8.06	1285.	0.20	44.6	0.087	20.49	1.327	0.565	1.97	0.04
$110^\circ K$	0.0123	7	6.45	2970.	0.16	120.6	0.070	56.38	1.151	0.891	2.46	0.02
$120^\circ K$	0.0134	10	5.27	1443.	0.13	61.7	0.057	28.99	1.196	0.713	3.01	0.04
$130^\circ K$	0.0145	20	4.38	377.5	0.11	15.9	0.047	7.433	1.307	0.434	3.63	0.12
$135^\circ K$	0.0151	40	4.01	10.63	0.100	0.287	0.043	0.123	1.439	0.097	3.96	1.96
$140^\circ K$	0.0157	40	3.68	7.696	0.092	0.204	0.040	0.087	1.440	0.088	4.31	2.56
$150^\circ K$	0.0168	40	3.14	5.332	0.078	0.139	0.034	0.059	1.440	0.080	5.06	3.46

Диск устойчив, если $Q_T \geq 1$. Расчеты согласуются с этим условием: до температуры $130^{\circ}K$ итерационный процесс не сходится и $Q_T^n < 1$, выше $130^{\circ}K$ итерационный процесс сходится и $Q_T^n > 1$. Диск без учета самогравитации всегда устойчив $Q_T^0 > 1$.

На рис.3 кривые 1-7 иллюстрируют процесс (18) установления решения для плотности в узле ($r_{39} = 0.485, 0, 0$) при разных начальных значениях температуры в соответствии с таблицей 1. Из-за сильного роста плотности значения нанесены для первых n итераций.

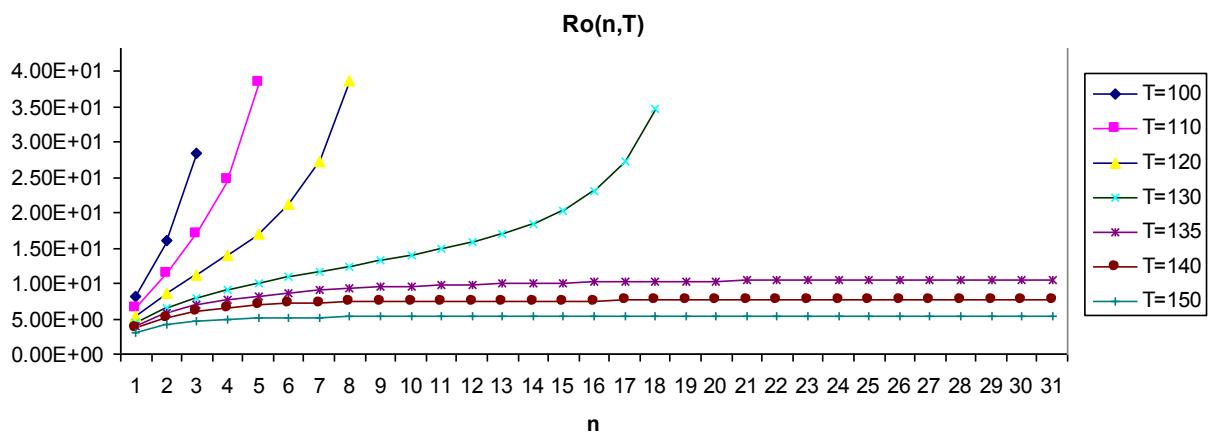


Рис.3. Установление плотности в итерационном процессе (18).

На рис.4-7 изображены плотность, скорость, гравитационный потенциал и параметр устойчивости Тоомре неустойчивого диска вдоль радиуса ($\varphi = 0, z = 0$) с температурой $130^{\circ}K$ в трех состояниях: без учета самогравитации диска ($n = 0$), с учетом самогравитации ($n = 20$) и при $t = 0.1$ после полного расчета газодинамической задачи с начальными данными $\rho^{20}(r, \varphi, z)$ и жесткими краевыми условиями. Влияние самогравитации велико и диск сжимается.

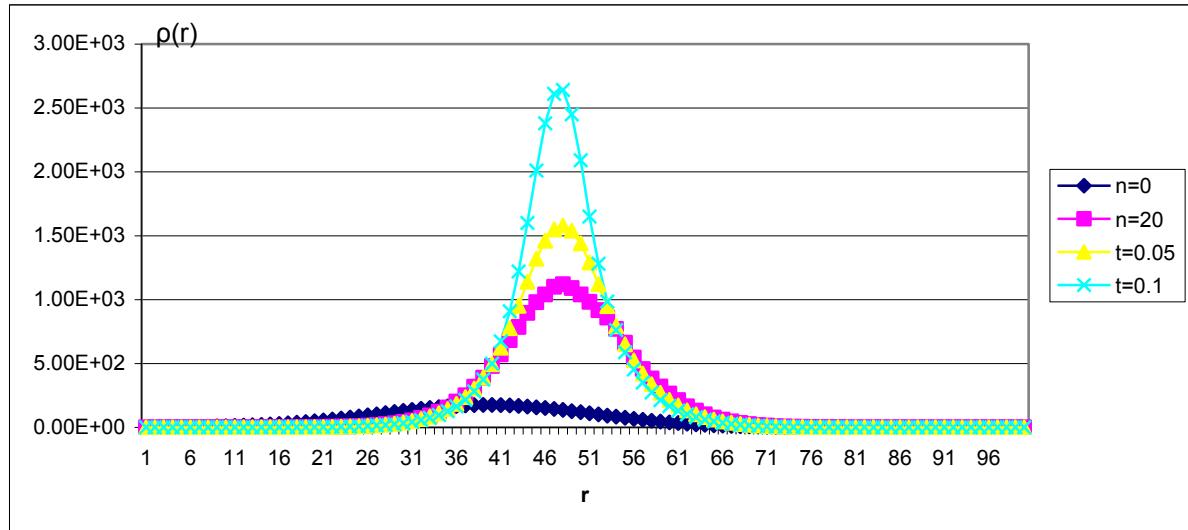


Рис.4. Рост плотности неустойчивого газового диска с температурой $T = 130^{\circ}K$, диск сжимается. Значения плотности для первой кривой ($n = 0$) увеличены в 40 раз.

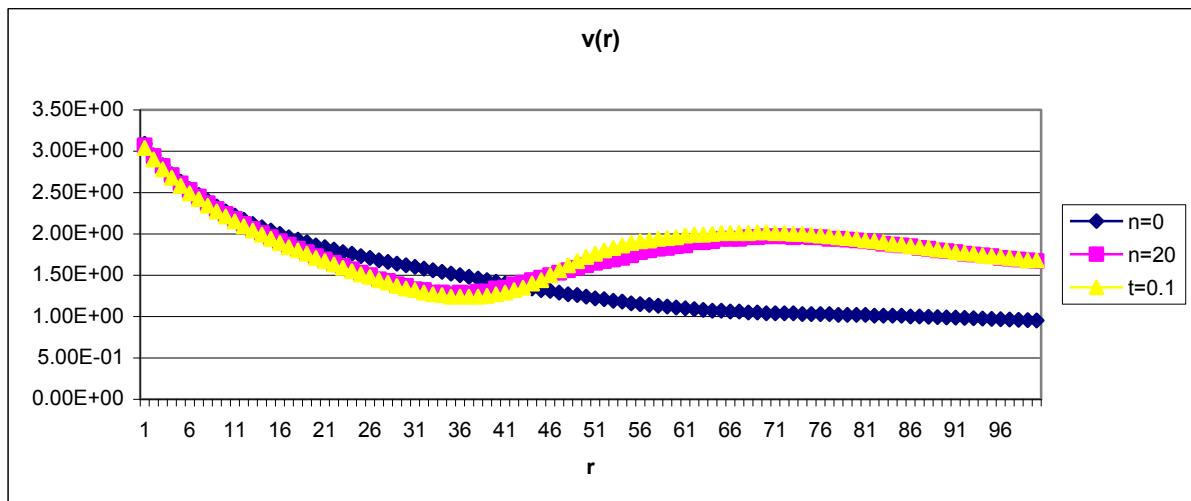


Рис.5. Скорость вращения $v(r)$ вдоль радиуса $\varphi = 0, z = 0$ для температуры $130^{\circ}K$. Первая кривая ($n=0$) - скорость вращения устойчивого негравитирующего газового диска. Две другие кривые - скорости неустойчивого гравитирующего газового диска.

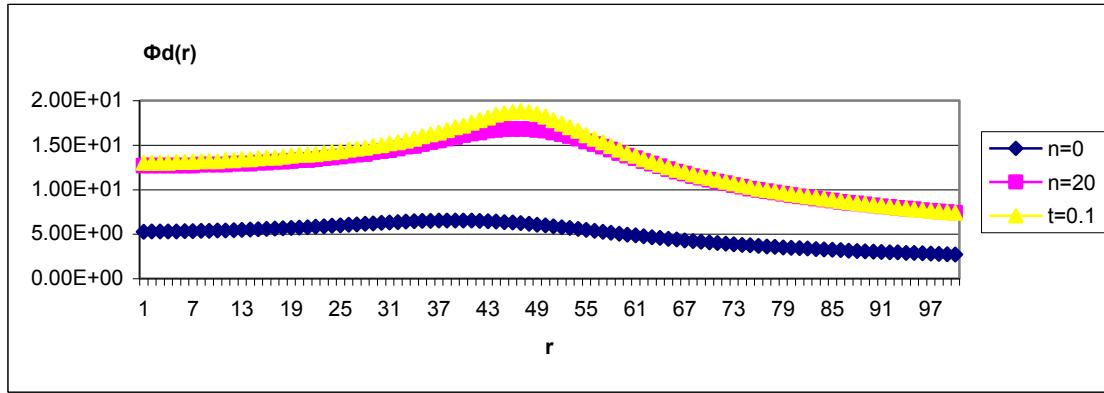


Рис.6 . Рост гравитационного потенциала газового диска с температурой $T^\circ = 130^\circ K$, диск сжимается. Значения потенциала для первой кривой ($n = 0$) увеличены в 40 раз.

$Q_T(r)$

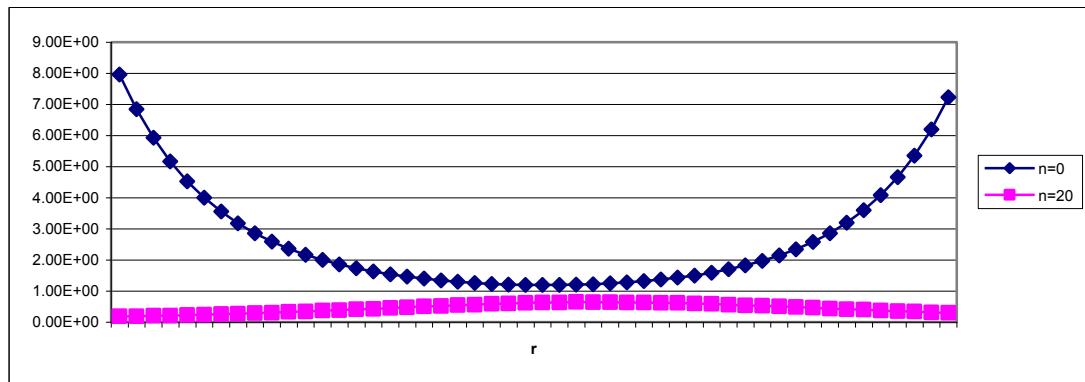


Рис.7. Параметр устойчивости Тоомре $Q_T(r)$. Первая кривая $Q_T > 1$ иллюстрирует устойчивость стационарного состояния негравитирующего газового диска. Вторая кривая $Q_T < 1$ иллюстрирует неустойчивость стационарного состояния гравитирующего газового диска.

Рис.8,9 иллюстрируют разную конфигурацию гравитирующего и негравитирующего диска при одинаковой температуре $T^\circ = 130^\circ K$. На рис.8 изображена плотность негравитирующего газового диска в плоскости (r, z) , масса диска $M_d = 0.047$, максимум плотности $\max \rho = 4.38$. На рис.9 изображена плотность гравитирующего газового диска, масса диска $M_d = 7.43$, максимум плотности $\max \rho = 2770$. Диск сжался в кольцо.

На рис.10 изображена плотность устойчивого диска с температурой $135^{\circ} K$ в трех состояниях: без учета самогравитации ($n = 0$), с учетом самогравитации ($n = 40$) и при $t = 0.2$. Влияние самогравитации мало, максимум плотности падает из-за схемной вязкости так же, как в тесте 1.

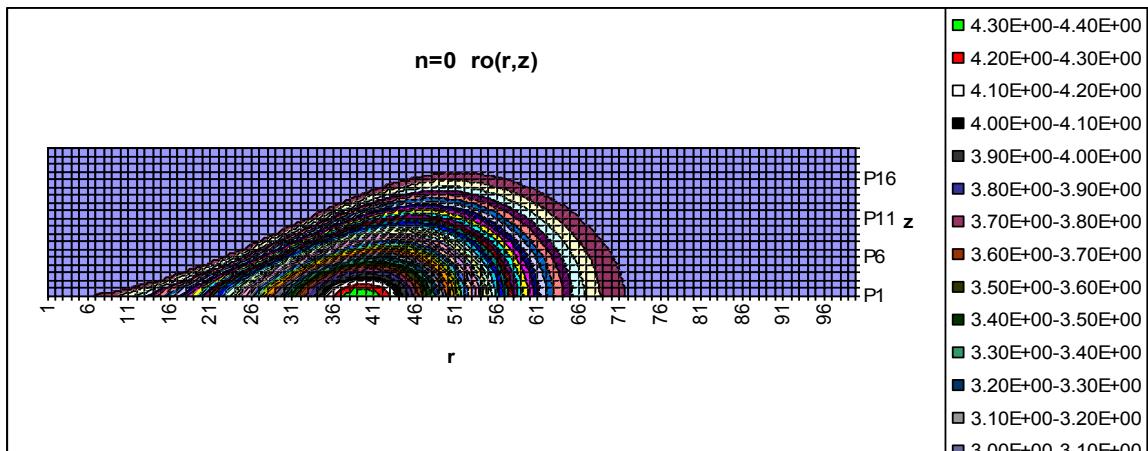


Рис.8. Устойчивая конфигурация газового диска без самогравитации

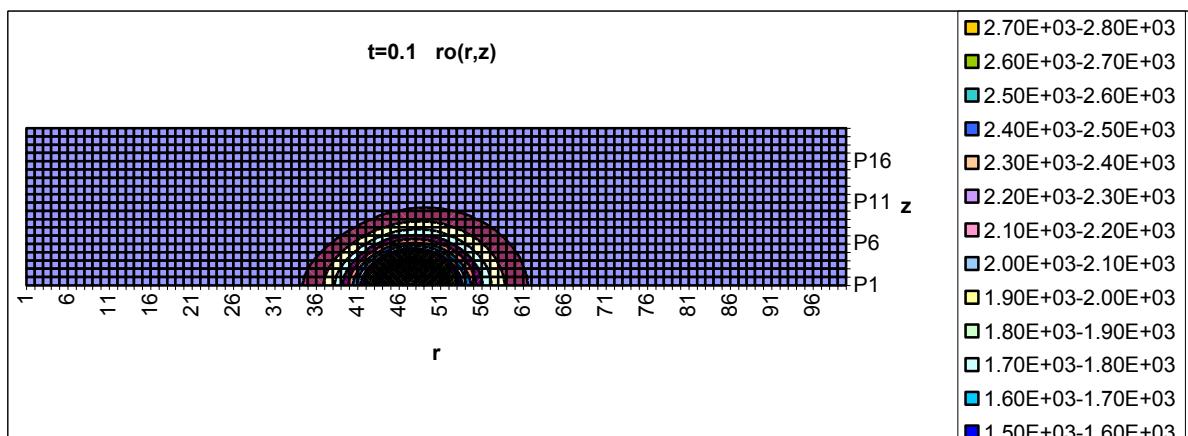


Рис.9. Неустойчивая конфигурация гравитирующего газового диска

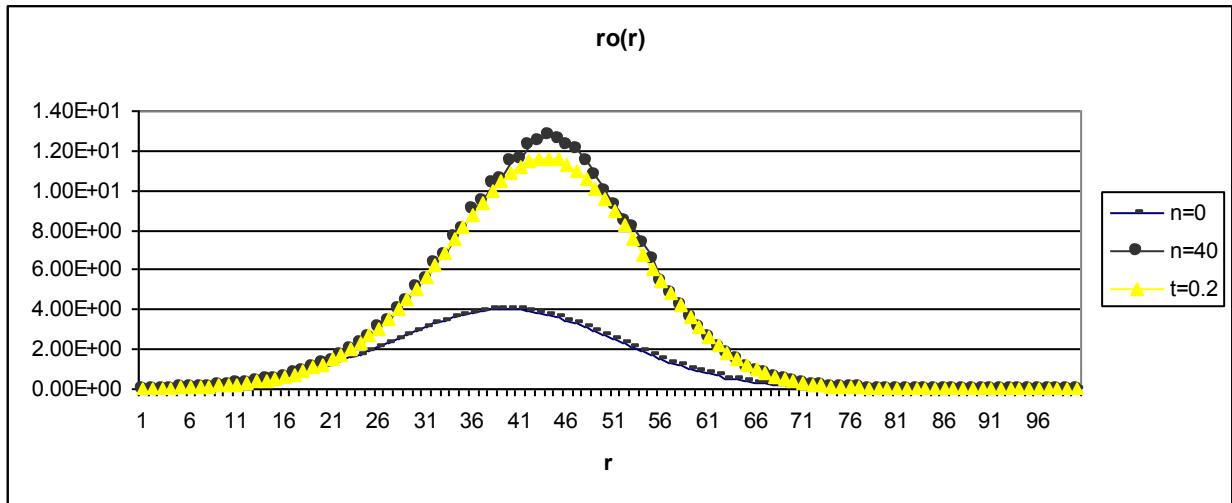


Рис.10. Плотность устойчивого газового диска с начальной температурой $T^{\circ} = 135^{\circ} K$, максимум плотности падает из-за схемной вязкости.

Пример 2. Сделаны аналогичные расчеты для более тонкого диска с границей $Z(r) = 0.27re^{-9(r-0.55)^2}$. В таблице 2 приведены значения на нулевой и последней итерации n в узле ($r_{41} = 0.505, 0, 0$) - точке максимума начальной плотности. Для температуры $100^{\circ} K$ итерационный процесс уже сходится, масса диска выросла в три раза, диск устойчив $Q_T^{40} = 1.59 > 1$. Начальные значения внутренней энергии и скорости $\varepsilon^0 = 0.081$, $v^0 = 1.402$ одинаковы во всех вариантах.

Более тонкий диск становится неустойчивым при более низкой температуре, что согласуется с теорией гравитационной неустойчивости Джинса.

Таблица 2

T	k	n	ρ_{\max}^0	ρ_{\max}^n	Φ_{\max}^0	Φ_{\max}^n	M_d^0	M_d^n	v^n	ε^n	Q_T^0	Q_T^n
$80^{\circ} K$	0.0090	6	6.38	1195.	0.14	25.0	0.059	11.06	1.363	0.438	2.20	0.04
$90^{\circ} K$	0.0101	10	4.85	807.5	0.10	18.5	0.045	8.26	1.337	0.416	2.89	0.06
$100^{\circ} K$	0.0112	40	3.79	12.07	0.08	0.25	0.035	0.104	1.407	0.076	3.70	1.59
$110^{\circ} K$	0.0123	40	3.04	5.69	0.06	0.12	0.028	0.050	1.406	0.060	4.61	2.93
$120^{\circ} K$	0.0134	40	2.48	3.90	0.05	0.08	0.023	0.034	1.405	0.056	5.65	4.08
$130^{\circ} K$	0.0145	40	2.06	2.92	0.04	0.06	0.019	0.026	1.405	0.054	6.80	5.30

Заключение

Построен итерационный алгоритм для получения «точного» стационарного численного решения гравитирующего диска. Плотность и гравитационный потенциал при этом увеличиваются в несколько раз, соответственно увеличивается масса диска, что может привести к гравитационной неустойчивости. Профиль вращательной скорости изменился, вместо $1/\sqrt{r}$ стал одногорбым. Рассчитан параметр устойчивости Тоомре $Q_T(r)$.

Стационарное состояние идеального политропного газового диска, не учитывающее самогравитацию, определяется размерами $Z(r)$, $r_1 \leq r \leq r_2$, температурой (параметр k), массой центрального объекта и всегда устойчиво, $Q_T^0 > 1$.

Стационарное состояние гравитирующего диска и его устойчивость зависят от размеров, температуры, массы центрального объекта и массы самого диска (гравитационного потенциала). Диск будет устойчивым, если его масса не превышает некоторую критическую массу, иначе диск становится неустойчивым и может начаться сжатие и фрагментация. В проведенных расчетах для двух разных размеров критическая масса диска превышает массу центрального объекта в несколько раз.

Масса диска должна быть большой, чтобы проявилось влияние самогравитации. Включение в расчетную схему уравнения Пуассона без пересчета начального состояния не приводит к ожидаемому результату. Для моделирования гравитационного коллапса требуется сверхмассивный протопланетный диск.

Библиографический список

1. М.В. Абакумов, С.И. Мухин, Ю.П. Попов, В.М. Чечеткин. Стационарные дисковые структуры около гравитирующих компактных объектов // АЖ. 1996. т.73. №3. с. 407-418.
2. А.В. Забродин [и др.] Некоторые модели описания протопланетного диска Солнца на начальной стадии его эволюции // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша, 2006. № 70. 45 с.
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2006-70>
3. Л.Г. Страховская. Модель эволюции самогравитирующего газового диска // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша, 2012. № 80. 24 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2012-80>
4. Л.Г. Страховская. Роль гравитации в формировании околозвездного газового диска // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2013. № 82. 24 с.
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2013-82>
5. Я. Б. Зельдович, И.Д. Новиков. Строение и эволюция Вселенной. - М.: Наука, 1975.

6. A. Toomre, On the gravitational stability of a disk of stars. // ApJ, 1964, v. 139, p. 1217-1238.
7. С.К. Годунов [и др.] Численное решение многомерных задач газовой динамики. - М.: Наука, 1976, 400 с.
8. Р.П. Федоренко. Введение в вычислительную физику. 2-е изд. - Долгопрудный: Изд. Дом «Интеллект», 2008, 504 с.
9. М.В. Абакумов. Построение потоковых разностных схем и их применение при расчетах течений газа в аккреционном диске. Препринт. М.: МАКС Пресс. 2012.
10. Jean-Louis Tassoul. Theory of rotating stars. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1978. (русский перевод: Ж.-Л. Тассуль. Теория вращающихся звезд. - М.: Мир, 1982, 472 с.)