



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 15 за 2016 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Голубев Ю.Ф., Грушевский А.В.,
Корянов В.В., Тучин А.Г.,
Тучин Д.А.

О вариации наклона
орбит небесных тел при
совершении
гравитационного манёвра в
Солнечной системе

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: О вариации наклона орбит небесных тел при совершении гравитационного манёвра в Солнечной системе / Ю.Ф.Голубев [и др.] // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2016. № 15. 36 с. doi:[10.20948/prepr-2016-15](https://doi.org/10.20948/prepr-2016-15)
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2016-15>

Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Российской академии наук

Ю.Ф. Голубев, А.В. Грушевский,
В.В. Корянов, А.Г. Тучин, Д.А. Тучин

**О вариации наклона
орбит небесных тел
при совершении
гравитационного манёвра
в Солнечной системе**

Москва — 2016

Голубев Ю.Ф., Грушевский А.В., Корянов В.В., Тучин А.Г., Тучин Д.А. О вариации наклона орбит небесных тел при совершении гравитационного манёвра в Солнечной системе

Манёвры по изменению наклона орбиты являются в астродинамике особо энергозатратными и, естественно, привлечение дополнительных источников энергии путём использования гравитационных манёвров для них является приоритетным. Считающиеся каноническими оценки вариации наклона орбиты КА при совершении гравитационных манёвров требуют уточнения. В данной работе представлены результаты соответствующих уточнённых пространственных расчётов по оценке возможного изменения наклона орбиты КА при проведении гравитационных манёвров около планет Солнечной системы. Эти расчеты необходимы для создания актуальных баллистических сценариев космических миссий с целью изучения внутренней гелиосферы из внеэклиптических положений (отечественная миссия «Интергелиозонд», миссия ЕКА “Solar Orbiter”).

Ключевые слова: небесное тело, повышающий гравитационный маневр, угол поворота асимптотической скорости, высоконаклонённая гелиоцентрическая орбита

Yury F. Golubev, Alexey V. Grushevskii, Victor V. Koryanov, Andrey G. Tuchin, Denis A. Tuchin. Orbit's inclination change of celestial bodies in the Solar system with using gravity assists maneuvers

Key words: celestial body, cranking gravity assist, angle of the infinity velocity rotation, high inclined heliocentric orbit

Maneuvers for the orbit's inclination change have especially energy consumption in astrodynamics. Of course – raising additional sources of energy for them at the expense of using gravity assist is a priority. Reputed as canonical evaluations of variation of inclination of the spacecraft's orbital plane upon the gravity assist needed to be clarified. This paper presents the results of the corresponding calculations of the refined spatial evaluation of possible changes in the inclination of the spacecraft's orbit during gravitational maneuvers near the planets of the Solar system. These design is demanded for the creating of modern ballistic scenarios for space missions to study the inner heliosphere from positions outside of ecliptic plane (the national mission "Interheliozond" also ESA mission "Solar Orbiter").

Введение

К настоящему времени востребованы, реализуются и находятся в стадии активной разработки космические миссии по исследованию приполярных областей Солнца с высоконаклонённых к плоскости эклиптики орбит (“Ulysses” ESA-NASA, “Solar Orbiter” ESA, российский проект “Интергелиозонд”). Манёвры по изменению наклона орбиты являются в астродинамике особо энергозатратными и, естественно, являются востребованным привлечение дополнительных источников энергии путем использования гравитационных манёвров (**GAM** – Gravity Assist Maneuver). Укажем также на востребованность построения алгоритмов формирования высоконаклонённых орбит в системах Юпитера и Сатурна. Требуют уточнения считающиеся каноническими оценки вариации наклона орбиты КА при совершении гравитационных манёвров около небесных тел [1-3]. Актуально также и построение уточняющих гистограмм предельных вариаций наклона орбиты КА при пролёте крупных тел Солнечной системы. Ряд современных астродинамических разработок, затрагивающих пространственную (**3D**) интерпретацию гравитационных манёвров [4-10], которые не вполне следуют «каноническим» результатам [1,2], также требуют ретроспективы и сравнительного анализа с целью внесения ясности в стандарты аналитического и геометрического описания 3D-GAM. Указанным вопросам в значительной части посвящена настоящая работа. Однако основной акцент делается на адаптацию полученной корректной аналитической модели 3D-GAM к условиям высокоточного баллистического проектирования космических миссий. Строятся так называемые индикатрисы для моделирования 3D-GAM с использованием точного интегрирования уравнений движения КА в полных эфемеридах планет и спутников Солнечной системы. Авторы признательны С.М. Лавреневу за полезные обсуждения и рекомендации.

1. Основные элементы пространственного гравитационного манёвра

Для описания конфигурации Солнце-планета-КА будем применять терминологию [1,20,21] модели ограниченной задачи трёх тел: Солнце – основное (центральное, «первое») тело, планета – малое («второе») тело, КА – лёгкое, «третье» тело (тело ничтожно малой массы). Метод склеенных конических сечений представляет траектории КА в виде кусочно-кеплеровых гелиоцентрических орбит с точками склейки (изломами) в местах проведения гравитационных манёвров около планеты (второго тела). Области проведения манёвров (с момента t_1 входа в сферу действия второго тела до момента t_2 выхода из неё) считаются ничтожными по сравнению с участками кеплерового гелиоцентрического движения и заменяются точками склейки (рис. 1). На рисунке $\mathbf{V}_{sc,in}$ – вектор скорости КА относительно центрального тела до входа в сферу действия второго тела, $\mathbf{V}_{sc,out}$ – соответствующий вектор скорости при выходе из сферы действия второго тела (после проведения гравитационного манёвра), \mathbf{V}_{pl} – скорость планеты-партнёра.

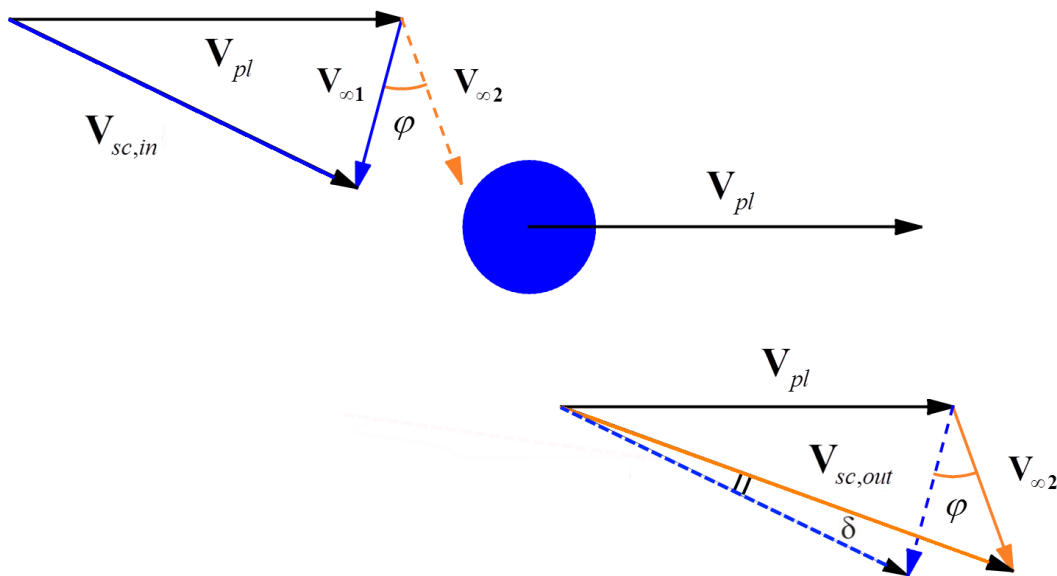


Рис. 1. Геометрия гравитационного манёвра

Для описания геометрии пространственного гравитационного манёвра (3D-GAM) вводятся основные углы.

Угол δ излома вектора гелиоцентрической скорости КА \mathbf{V} : $\mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_{sc,in}$, $\mathbf{V}_2 = \mathbf{V}_{sc,out}$ (рис. 1) определяется, исходя из угла раствора φ пролётной гиперболы относительно второго тела – «планеты-партнёра» по гравитационному манёвру (модуль вектора асимптотической скорости КА относительно планеты-партнёра $\|\mathbf{V}_{\infty 1}\| = V_{\infty}$ при этом не меняется, но сам вектор $\mathbf{V}_{\infty 1}$ поворачивается на угол φ и переходит в $\mathbf{V}_{\infty 2}$ – рис. 2, взят из [1]). В представленной модели метода конических сечений [1,2,11] пролётная гипербола «запакована» в точке склейки кусочно-кеплеровых дуг. В ней для максимального угла поворота вектора асимптотической скорости φ справедливо соотношение [1,11]:

$$\sin \frac{\varphi}{2} = \frac{\mu}{\mu + R_{\pi} V_{\infty}^2} \quad (1)$$

где μ – гравитационный параметр пролётного тела, R_{π} – расстояние перицентра пролётной гиперболы КА, которое не может быть меньше радиуса планеты-партнёра R_{pl} [11].

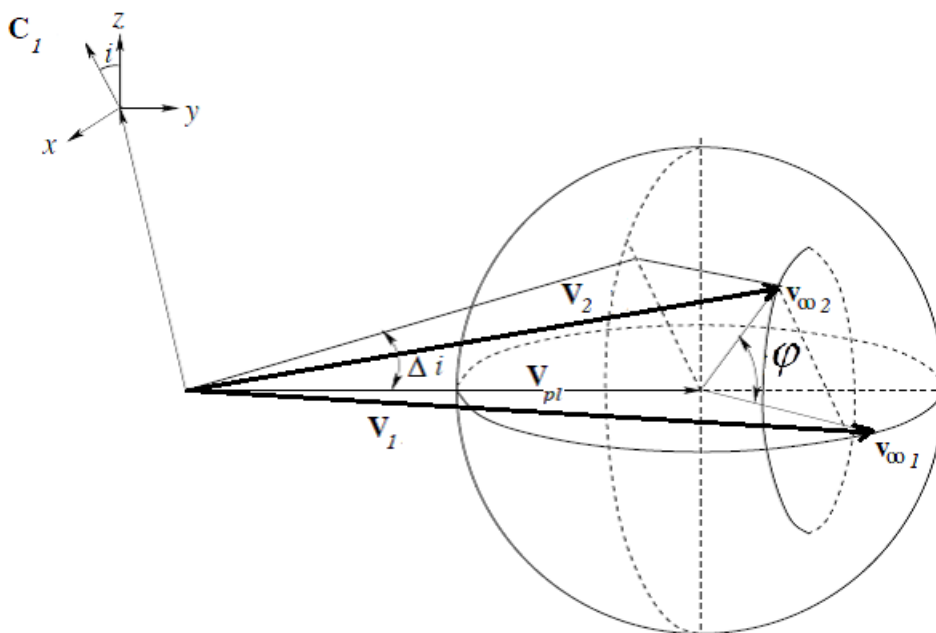


Рис. 2. Поворот вектора асимптотической скорости в случае 3D-GAM, [1,2]

Поскольку изменение скорости КА относительно центрального тела равно $\Delta \mathbf{V} = \mathbf{V}_{sc,in} - \mathbf{V}_{sc,out}$, а максимальное значение изменения скорости ΔV_{\max} достигается при максимальном угле поворота, справедлива оценка:

$$\Delta V_{\max} = \frac{2V_{\infty} \mu}{\mu + R_{\pi} V_{\infty}^2} = \frac{2V_{\infty} \sqrt{\frac{\mu}{R_{\pi}}}}{\frac{\mu}{R_{\pi}} + V_{\infty}^2} \sqrt{\frac{\mu}{R_{\pi}}} \leq \sqrt{\frac{\mu}{R_{\pi}}} \quad (2)$$

Так как R_{π} не может быть меньше радиуса планеты R_{pl} , максимальная добавка к гелиоцентрической скорости по модулю не может превышать первую космическую скорость для планеты-партнёра:

$$\Delta V_{\max} \leq \sqrt{\frac{\mu}{R_{pl}}} \quad (3)$$

Согласно ставшей классической книге по гравитационным манёврам [1], а также [2], из анализа рис. 2 следует, что изменение наклона Δi на одном гравитационном манёвре удовлетворяет соотношению

$$\sin \Delta i \leq \sin \Delta i_{\max} = \frac{V_{\infty}}{V_{pl}} \sin \varphi, \quad (4)$$

где φ подчиняется закону (1) (см. формулы (1.2.10) в [1], и (69) в [2]).

Учитывая обозначенные приоритеты авторства [1, с.4], оценку (4) обоснованно можно назвать *критерием Лабунского*. Перепишем её в виде *неравенства Лабунского*:

$$\sin \Delta i \leq \frac{V_{\infty}}{V_{pl}} \sin \varphi = \frac{V_{\infty}}{V_{pl}} \sin \left(2 \arcsin \frac{\mu}{\mu + R_{\pi} V_{\infty}^2} \right) \quad (5)$$

В [1] отмечается, что при условии

$$\varphi_{\max} \geq \frac{\pi}{2} \quad (6)$$

имеет место

$$\sin \Delta i_{\max} = \frac{V_{\infty}}{V_{pl}} \quad (7)$$

В дальнейшем будет показано, что формула (7) верна, но условие (6) требует корректировки.

2. Вариации наклонений орбиты КА при совершении гравитационных манёвров в Солнечной системе

Формулы (5-7) в виде модификаций общеупотребительны в современных исследованиях по астродинамике [1-3]. Представим максимальные изменения наклонения орбиты КА при совершении гравитационного манёвра с планетами Земной группы и группы внешних планет, вычисленные с помощью критерия Лабунского, в зависимости от величины асимптотической скорости КА относительно планеты (рис. 3,5). Для сравнения одновременно представим графики из [1] для максимальных изменений наклонений орбиты КА в зависимости от величины асимптотической скорости КА относительно планет при совершении однопроходного ГАМ, вычисляемые с помощью критерия Лабунского. Сопоставление представленных авторами графиков с графиками [1,2] показывает, помимо их сходства «в целом», на некоторые различия. В первую очередь, завышение максимальных оценок Δi_{\max} для Земли, Венеры (рис. 3,4) и для Юпитера со сдвигом точки экстремума вправо. Во вторую очередь, принципиальную разницу поведения кривых для дальнейшей планеты Плутон (рис. 5,6).

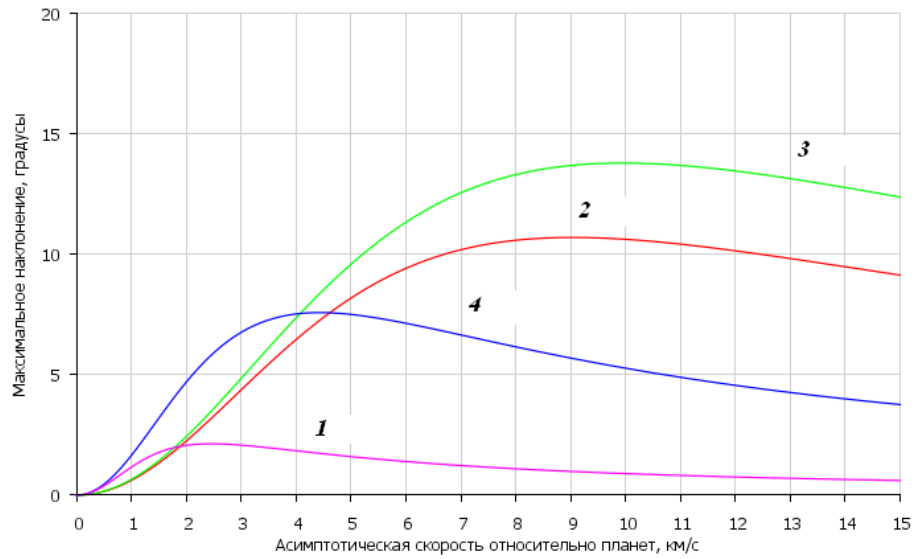


Рис. 3. Максимальные изменения наклонений при совершении GAM с планетами Земной группы, рассчитанные по критерию Лабунского [1]: 1–Меркурий, 2 – Венера, 3 – Земля, 4 – Марс

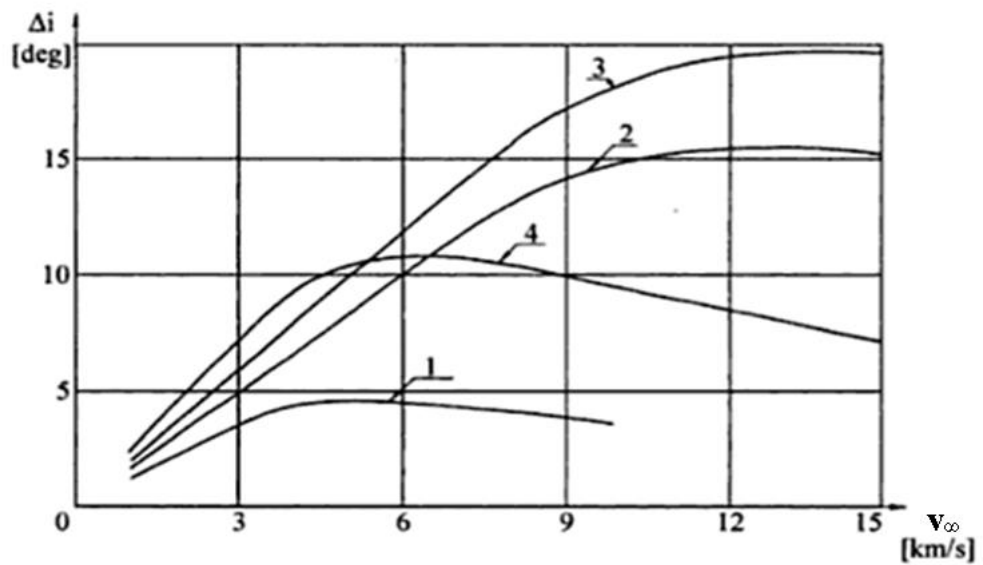


Рис. 4. Максимальные изменения наклонений для планет Земной группы согласно [1]: 1 – Меркурий, 2 – Венера, 3 – Земля, 4 – Марс

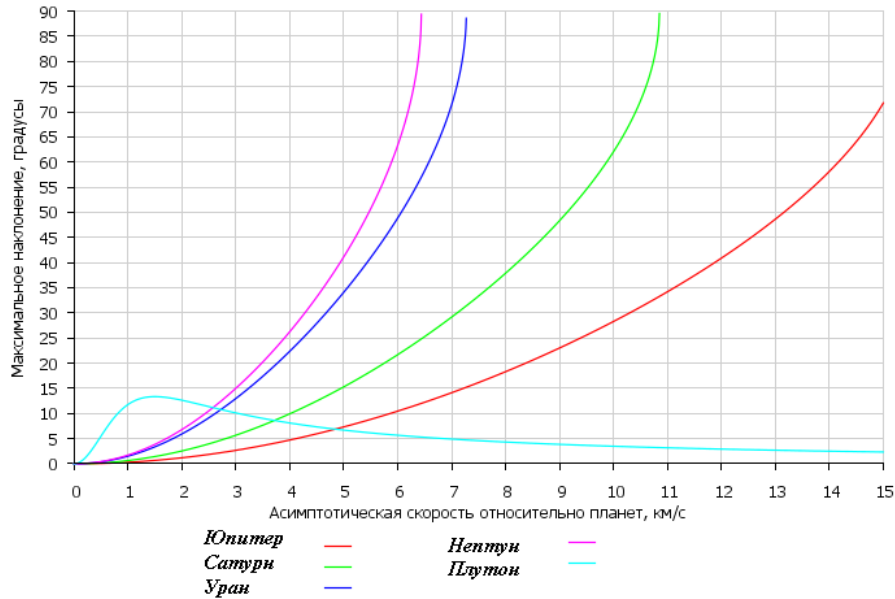


Рис. 5. Максимальные изменения наклонений при совершении ГАМ для группы внешних планет, рассчитанные по критерию Лабунского [1]

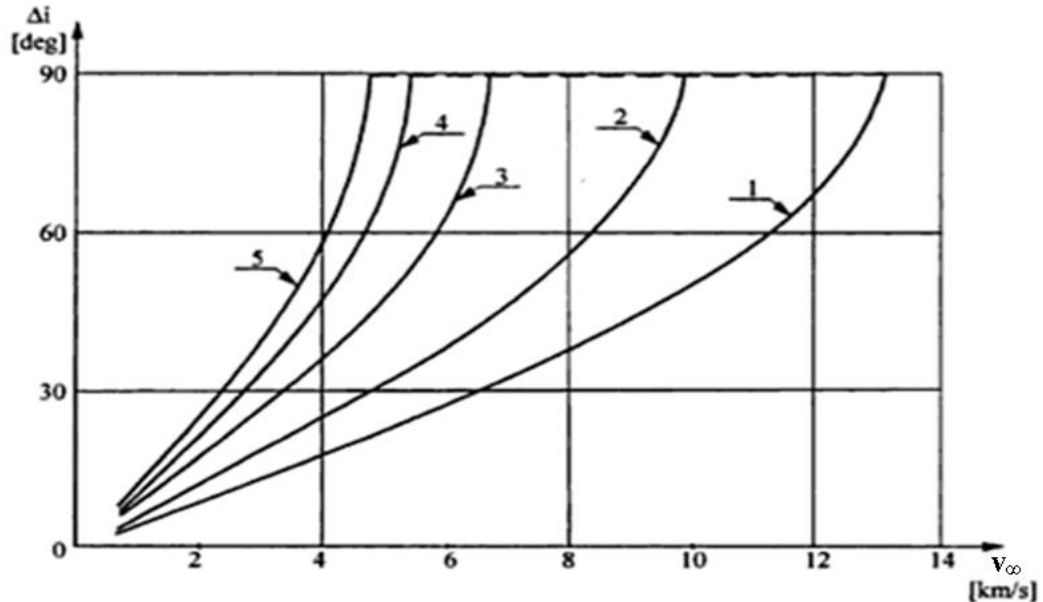


Рис. 6. Максимальные изменения наклонений для внешних планет согласно книге [1]: 1 – Юпитер, 2 – Сатурн, 3 – Уран, 4 – Нептун, 5 – Плутон

Сотрудниками ESA-ESOC в рамках проекта “Solar Orbiter” также производилось уточнение потенциала вариаций наклонения согласно критерию Лабунского [1]. Репродукция графика вариации наклонений для планет Земной группы, представленного ими в [3], показана на рис. 7. Его сопоставление с результатами расчётов авторов настоящего препринта, представленными на рис. 3, показывает практически полное их совпадение.

Inclination Change [deg]

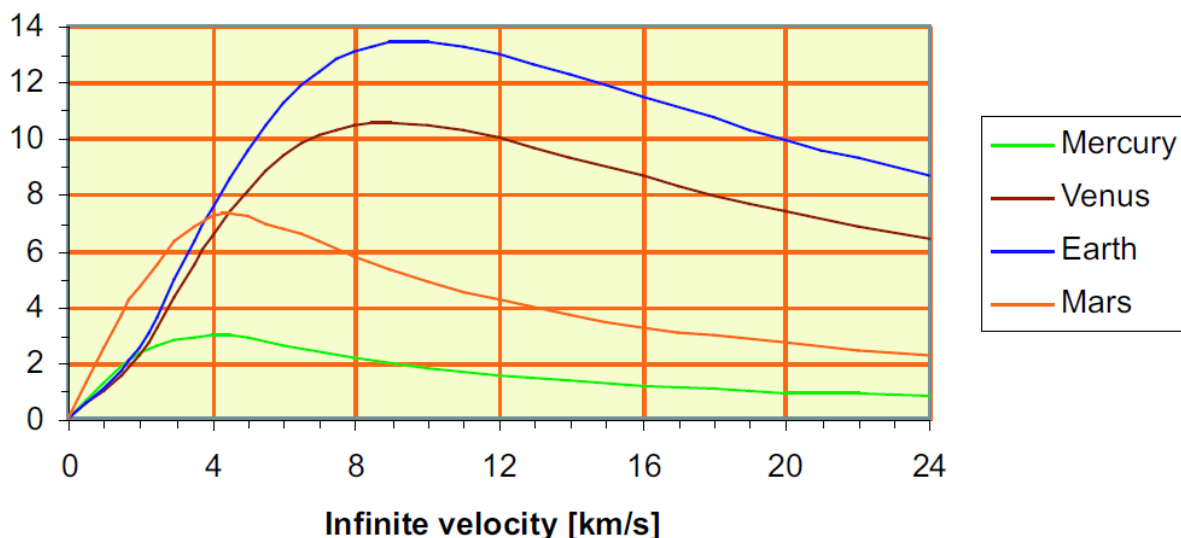


Рис. 7. Уточнённые графики максимального изменения наклонений планет Земной группы, согласно ESA [3]

Отметим следующее важное обстоятельство. Как следует из анализа рис. 2, формула (4) выражает не только *предельное изменение* наклонения Δi_{\max} на однопроходном ГАМ (будем называть такой ГАМ *элементарным*). Из неё следует и *геометрическое максимально возможное наклонение* i_{\max}^* орбиты КА к плоскости орбиты планеты, которое может быть достигнуто при *любой* серии элементарных ГАМ с этой планетой. А именно:

$$\sin i_{\max}^* = \frac{V_{\infty}}{V_{pl}} \quad (8)$$

Из рис. 8 видно, что в модельном случае движения КА в продольной плоскости (содержащей \mathbf{V}_{pl} и \mathbf{n} – векторы скорости планеты и нормали к её орбите) максимальное значение наклонения, соответствующее верхней границе оценки (7), достигается при выполнении условия $\mathbf{V}_{\infty, out} \cdot \mathbf{V}_{sc, out} = 0$, где $\mathbf{V}_{\infty, out}$ – вектор асимптотической скорости относительно планеты после поворота, обусловленного гравитационным манёвром, а $\mathbf{V}_{sc, out}$ – абсолютная скорость КА после гравитационного маневра. Это условие, как нетрудно вычислить с использованием рис. 8, можно записать (в зависимости от

начальной сонаправленности/противоположной направленности векторов \mathbf{V}_{pl} и $\mathbf{V}_{\infty, in}$) как

$$\varphi^* = \frac{\pi}{2} \pm i_{\max}^* \quad (9)$$

и с учётом (8)

$$\varphi^* = \frac{\pi}{2} \pm \arcsin \frac{V_{\infty}}{V_{pl}} \quad (10)$$

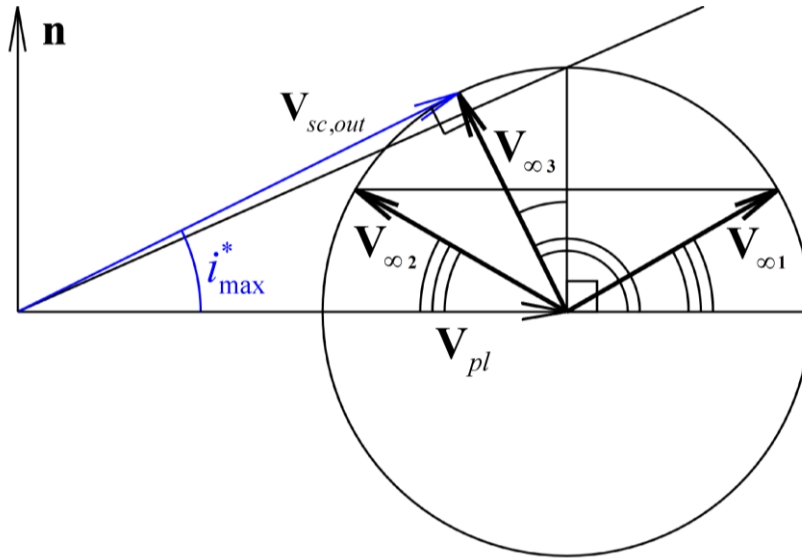


Рис. 8. Максимально возможное наклонение, которое может быть накоплено при любой серии ГАМ с данной планетой.

На рис. 8 обозначены $\mathbf{V}_{\infty, i=1,2,3}$ – различные возможные векторы выходной асимптотической скорости КА относительно планеты, $\mathbf{V}_{sc,out}$ – выходной вектор скорости КА.

Рассмотрим модельный случай, в котором $V_{\infty}/V_{pl} = 0.5$. Тогда углы $\varphi_{1,2}^*$, при которых обеспечивается максимальное наклонение, вычисляются по формуле:

$$\varphi_{1,2}^* = \frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} = 60^\circ, 120^\circ \quad (11)$$

Отметим, что значения граничных углов поворота асимптотической скорости, вычисленные по формуле (10), расходятся со значениями, полученными из более грубого условия (6), воспроизведённого из [1].

Утверждение 1. Пусть величина асимптотической скорости КА (до и после манёвра) V_∞ не превосходит модуля скорости планеты V_{pl} . Тогда синус максимального наклона орбиты КА, которое может обеспечить проведение GAM около конкретной планеты, не может превосходить отношения этих скоростей:

$$i_{\max} \leq i_{\max}^* = \arcsin \frac{V_\infty}{V_{pl}} \quad (12)$$

Эта оценка является неуточняемой.

Данный факт известен в западной литературе, но требует некоторых комментариев (см., например, [1,6,10], где в соответствующую формулу (3) в [10] вкралась опечатка: вместо функции $\arcsin \frac{V_\infty}{V_{pl}}$ стоит $\arccos \frac{V_\infty}{V_{pl}}$).

Доказательство утверждения непосредственно следует из геометрии проведения GAM согласно рис. 9. Из него видно, что максимальное наклонение орбиты КА достигается, когда $\mathbf{V}_{\infty, out}$ перпендикулярен вектору скорости КА $\mathbf{V}_{sc, out}$ и одновременно принадлежит линейной оболочке векторов скорости планеты \mathbf{V}_{pl} и нормали к плоскости к её орбите \mathbf{n} (иначе говоря - $\mathbf{V}_{sc, out}$ касается сферы всевозможных виртуальных скоростей \mathbf{V}_∞ , то есть – сферы радиуса V_∞ с центром на конце вектора \mathbf{V}_{pl}). Доказательство можно провести, например, следующим способом.

Выпустим из точки А начала вектора скорости планеты \mathbf{V}_{pl} всевозможные векторы до точек указанной поверхности сферы радиуса V_∞ . Их совокупность (а это – ни что иное, как всевозможные векторы $\mathbf{V}_{sc, out}$ на выходе из GAM) замечает внутреннюю область конуса с углом раствора $\varphi = \arcsin \frac{V_\infty}{V_{pl}}$ («обернём» сферу конусом касательных к ней векторов) (рис. 8). Никакая точка на сфере не преодолевает оболочку – поверхность

конуса. Таким образом, ни один возможный GAM не может доставить

$$i > \arcsin \frac{V_{\infty}}{V_{pl}} = i_{\max}^* .$$

Покажем, что указанный верхний предел для i достигается. Выберем среди множества возможных векторов $V_{sc,out}$ вектор $V_{sc,outN}$, лежащий в плоскости векторов нормали к орбите планеты и V_{pl} . Выбранный вектор доставляет требуемое значение наклона. Любой поворот $V_{sc,outN}$ вокруг оси V_{pl} понижает повернувшийся вектор к плоскости орбиты планеты и уменьшает реализуемое наклонение орбиты.

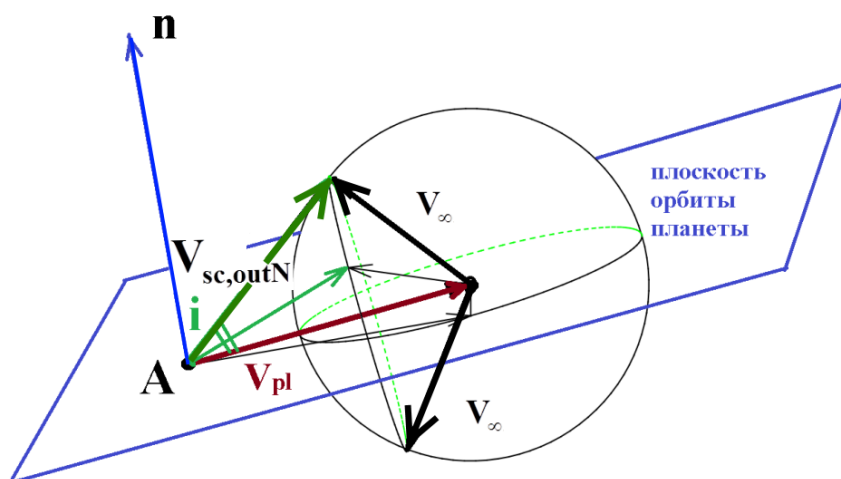


Рис. 9. Геометрия изменения наклона при гравитационном манёвре

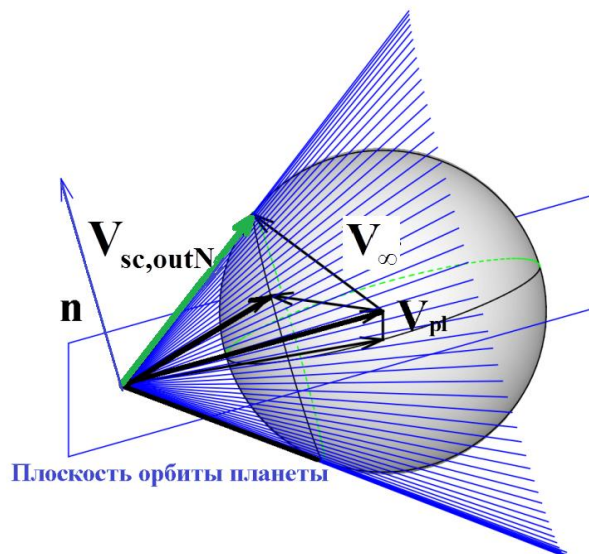


Рис. 10. Сфера V_{∞} в конусе виртуальных направлений V_{sc} после совершения

GAM

Современные космические проекты по изучению внутренней гелиосферы из внеэклиптических положений требуют повышения наклона орбиты КА относительно эклиптики более чем на 30° [6,9,12,22,23]. Ниже будем называть такие миссии *Миссиями класса «ИнтерГелиозонд»* и обозначать термином **МИГ**. Как следует из (8), для этого необходимо, чтобы:

$$v_\infty = \frac{V_\infty}{V_{pl}} = \frac{1}{2} \quad (13)$$

В табл. 1 представлены ресурсы углов поворота на элементарном GAM для планет Солнечной системы для космических миссий класса МИГ и предельные наклоны, получаемые при этом. Приведены также использующиеся динамические характеристики планет и их

«GAM-параметры» $\Theta_{pl} = V_{pl} / \sqrt{\frac{\mu}{R_\pi}} \approx V_{pl} / V_{Fpl}$, V_{Fpl} – первая космическая скорость планеты.

Таблица 1

Максимально возможные вариации наклона орбиты КА при однократном пролёте крупных небесных тел Солнечной системы для космических миссий класса МИГ

Планета	Первая космическая скорость V_{Fpl} , км/с	V_{pl} , км/с	$\Theta_{pl} = \frac{V_{pl}}{V_{Fpl}}$	Вариация $\delta\varphi$ для МИГ $v_\infty = 1/2$, град	Вариация $\delta\varphi$ для $V_\infty = 17.5$ км/с, град
Меркурий	3.01	47.36	15.28	1.93	3.49
Венера	7.23	35.02	4.84	16.75	16.75
Земля	7.92	29.78	3.77	25.37	19.58
Марс	3.54	24.13	6.81	9.1	4.47
Юпитер	41.13	13.07	0.32	154.34	115.47
Сатурн	25.46	9.69	0.38	149.66	85.53
Уран	15.56	6.81	0.44	145.04	52.40
Нептун	16.97	5.43	0.32	154.34	58.16
Плутон	1.2	4.67	3.89	24.14	0.54

3. Аналитическое развитие критерия Лабунского для допустимых изменений наклонов орбиты КА

Для получения точных аналитических оценок вариаций наклона на одном пролёте согласно критерию Лабунского в дополнение к рис. 3-6 докажем следующее полезное утверждение.

Утверждение 2. Пусть планета с орбитальной скоростью V_{pl} имеет GAM-параметр Θ_{pl} . Тогда максимальное значение изменения наклона орбиты КА на одном её пролёте Δi^* обеспечит значение его безразмерной асимптотической скорости относительно этой планеты, равное

$$v_{\infty}^* = \frac{\sqrt{\frac{\sqrt{17}-1}{2}}}{\Theta_{pl}} \approx \frac{1.249621}{\Theta_{pl}} \quad (14)$$

Иными словами, для величины $\xi^* = v_{\infty}^* \Theta_{pl}$ верно соотношение:

$$\xi^{*2} = \frac{\sqrt{17}-1}{2} \approx 1.561553 \quad (15)$$

Доказательство. Введём $\xi = v_{\infty} \Theta_{pl}$ и запишем (4) с учётом (1) в виде

$$\sin \Delta i_{\max} = f(\xi) = 2v_{\infty} \frac{1}{1+\xi^2} \sqrt{1 - \frac{1}{(1+\xi^2)^2}} = 2 \frac{\xi^2}{\Theta_{pl}} \frac{\sqrt{\xi^2+2}}{(1+\xi^2)^2} \quad (16)$$

Учитывая тот факт, что должно выполняться $\xi \geq 0$ и

$$f'(\xi) = -\frac{2\xi}{\Theta_{pl}} \frac{\xi^4 + \xi^2 - 4}{(1+\xi^2)^3 \sqrt{\xi^2+2}} \quad (17)$$

интервал возрастания $f(\xi)$ на правой полуоси заканчивается наибольшим из двух корней биквадратного уравнения $\xi^4 + \xi^2 - 4 = 0$:

$$\xi^* = \sqrt{\frac{\sqrt{17}-1}{2}} \approx 1.249621 \quad (18)$$

Утверждение доказано ■

Геометрия GAM в значительной степени определяется тем, пересекает ли вектор планеты \mathbf{V}_{pl} сферу всевозможных виртуальных скоростей КА $\mathbf{V}_{\infty,out}$, построенную на его конце, или полностью лежит внутри этой сферы (см. рис. 11) – то есть, выполнением условия

$$V_{\infty}/V_{pl} \leq 1 \quad (19)$$

В случае больших, окологиперболических значений асимптотической скорости КА $V_{\infty} > V_{pl}$ реализуются, очевидно, любые наклонения орбиты КА на одном пролёте.

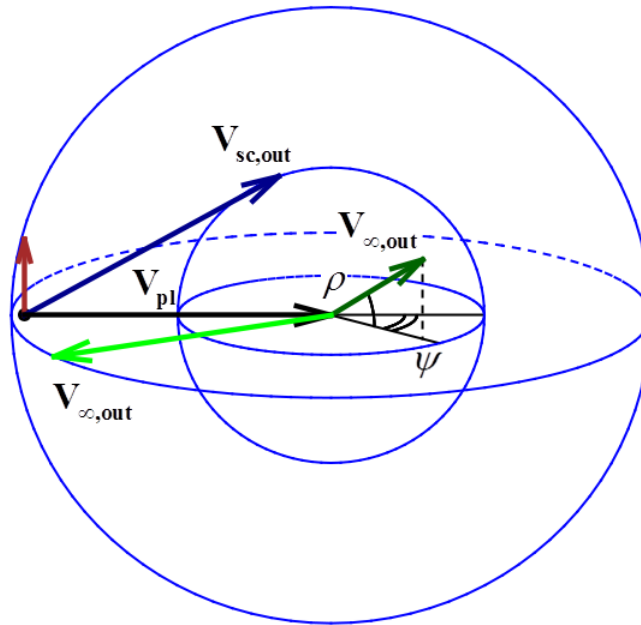


Рис. 11. Два различающихся класса геометрии GAM

Следствие 1. Для GAM с планетой, для которой GAM-параметр $\Theta_{pl} < 1.249621$, оптимальное значение v_{∞}^* не реализуется в классе $V_{\infty}/V_{pl} \leq 1$.

Утверждение 3. Пусть $\Theta_{pl} \geq 0.898255$. Тогда максимальное значение изменения наклонения орбиты КА Δi^* на одном пролёте планеты с GAM-параметром Θ_{pl} определяется величиной

$$\Delta i^* = \arcsin \frac{\sqrt{102\sqrt{17} - 214}}{16 \cdot \Theta_{pl}} \approx \arcsin \frac{0.898255}{\Theta_{pl}} \quad (20)$$

Доказательство. Подставляя в (16) вместо ξ^* выражение (15), после несложных преобразований, получим требуемое соотношение ■

Утверждение 4. Для величины V_∞^* размерной асимптотической скорости, соответствующей v_∞^* , будет выполнено

$$V_\infty^* = v_\infty^* V_{pl} = \frac{\xi^*}{\Theta_{pl}} V_{pl} = V_{Fpl} \sqrt{\frac{\sqrt{17}-1}{2}} \approx 1.249621 \cdot V_{Fpl} \quad (21)$$

Следствие 2. Для GAM с планетой, для которой GAM-параметр $\Theta_{pl} < 0.898255$, выход КА на орбиту с $i = \frac{\pi}{2}$ будет происходить с асимптотической скоростью КА v_∞ , меньшей теоретического оптимального по наклонению параметра v_∞^* из (14).

Результаты расчётов с использованием полученных аналитических оценок вариации наклонений на элементарном GAM около планет и крупных спутников Солнечной системы приведены в табл. 2.

Таблица 2

**Максимально возможные вариации наклонения орбиты КА
при разовом пролёте крупных небесных тел Солнечной системы**

Планета, спутник	V_{Fpl} , км/с	V_∞^* , км/с	v_{pl}^*	$\Theta_{pl}^{-1} = \frac{V_{Fpl}}{V_{pl}}$	$\sin \Delta i^*$	Δi^* , град	Центр. тело
Меркурий	3.01	3.87	0.081	0.063	0.059	3.37	Солнце
<i>Венера</i>	7.23	9.037	0.258	0.209	0.186	<i>10.70</i>	Солнце
<i>Земля</i>	7.92	9.87	0.331	0.266	0.239	<i>13.82</i>	Солнце
Марс	3.54	4.427	0.183	0.147	0.132	7.58	Солнце
<i>Юпитер</i>	41.13	*	*	3.257	~1	<i>>90</i>	Солнце
<i>Сатурн</i>	25.46	*	*	2.634	~1	<i>>90</i>	Солнце
<i>Уран</i>	15.56	*	*	2.22	~1	<i>>90</i>	Солнце
<i>Нептун</i>	16.97	*	*	3.07	~1	<i>>90</i>	Солнце
<i>Плутон</i>	1.2	1.5	0.321	0.18	0.231	<i>13.35</i>	Солнце
<i>Хаумеа</i>	0.593	0.74	0.165	0.132	0.2	<i>11.56</i>	Солнце
Макемаке	0.563	0.7	0.158	0.127	0.114	6.55	Солнце
<i>Эрида</i>	0.978	1.22	0.356	0.285	0.256	<i>14.83</i>	Солнце
<i>Луна</i>	1.68	*	*	1.642	~1	<i>>90</i>	Земля
Ио	1.8	2.25	0.11	0.1	0.1	5.15	Юпитер
Европа	1.43	1.79	0.11	0.1	0.1	5.15	Юпитер
Ганимед	1.94	2.42	0.212	0.17	0.153	8.78	Юпитер
<i>Каллисто</i>	1.73	2.16	0.262	0.21	0.19	<i>10.87</i>	Юпитер
<i>Титан</i>	1.86	2.29	0.412	0.33	0.3	<i>17.2</i>	Сатурн

При анализе табл. 2 можно отметить то, не вполне очевидное, обстоятельство, что ресурс изменения наклона для карликовых планет Хаумеа и Эрида при совершении GAM сопоставимы с возможными изменениями наклона для Венеры и Земли.

4. Полная аналитическая формула для вариации наклона

При классификации гравитационных манёвров разделяют Pumping GAM (**P-GAM** – разгонные GAM) и Cranking-GAM (**C-GAM** – изменяющие наклонение GAM). Будем рассматривать, как и в [1,2], модельный плоский случай конфигурации орбиты планеты и вектора скорости КА $\mathbf{V}_{sc,in}$ до совершения гравитационного манёвра класса **C-GAM**. Считаем, что условие (19) выполняется. Воспользуемся рис. 11 и введём два угла ρ и ψ . Угол ρ – это угол между вектором $\mathbf{V}_{\infty,out}$, полученным после гравитационного манёвра и его проекцией на плоскость орбиты, а угол ψ – угол между этой проекцией и вектором скорости планеты \mathbf{V}_{pl} . Как уже отмечалось, вектор $\mathbf{V}_{\infty,out}$ будет находиться на пересечении сферы радиуса V_{∞} и конуса с углом раствора φ , где φ удовлетворяет (1). Будем считать орбиту планеты круговой. Введём \mathbf{r}_{pl} - гелиоцентрический радиус-вектор планеты. Вектор нормали к плоскости абсолютной орбиты КА после GAM $\mathbf{n}_{sc} = \mathbf{r}_{pl} \times \mathbf{V}_{sc,out}$ будет находиться в линейной оболочке векторов \mathbf{V}_{pl} и $\mathbf{n} = \mathbf{r}_{pl} \times \mathbf{V}_{pl}$ (рис. 12). Поскольку $\mathbf{V}_{sc,out} = \mathbf{V}_{pl} + \mathbf{V}_{\infty,out}$, для наклона орбиты КА – угла между нормалью \mathbf{n} , \mathbf{n}_{pl} можно записать:

$$\cos i = \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_{sc}}{\|\mathbf{n}\| \cdot \|\mathbf{n}_{sc}\|} = \frac{(\mathbf{r}_{pl} \times \mathbf{V}_{pl}) \cdot (\mathbf{r}_{pl} \times (\mathbf{V}_{pl} + \mathbf{V}_{\infty,out}))}{\|\mathbf{n}\| \cdot \|\mathbf{n}_{sc}\|}$$

Используя известное тождество смешанного векторного произведения $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) = a^2(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})$, можно получить:

$$(\mathbf{r}_{pl} \times \mathbf{V}_{pl}) \cdot (\mathbf{r}_{pl} \times (\mathbf{V}_{pl} + \mathbf{V}_{\infty, out})) = r_{pl}^2 \mathbf{V}_{pl} \cdot (\mathbf{V}_{pl} + \mathbf{V}_{\infty, out}) = r_{pl}^2 (V_{pl}^2 + V_{pl} V_{\infty} \cos \rho \cdot \cos \psi)$$

$$\cos i = \frac{V_{pl} + V_{\infty} \cos \psi \cdot \cos \rho}{\sqrt{(V_{pl} + V_{\infty} \cos \psi \cdot \cos \rho)^2 + V_{\infty}^2 \sin^2 \rho}}$$

и, проведя соответствующие преобразования, выписать более понятную геометрически, чем в [1], формулу для вариации наклона орбиты КА при однопроходном GAM около планеты в виде:

$$i = \arctg \frac{V_{\infty} \sin \rho}{V_{pl} + V_{\infty} \cos \rho \cos \psi} \quad (22)$$

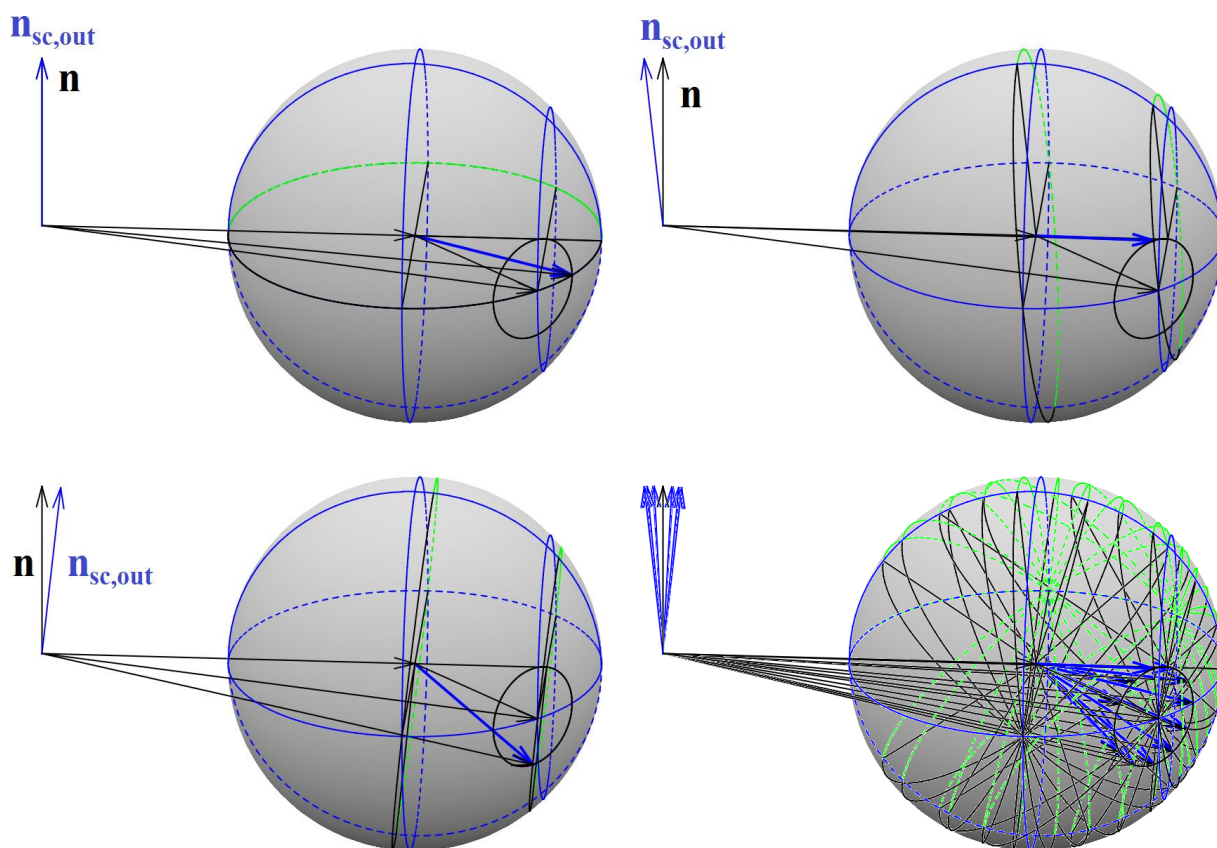


Рис. 12. Вариации наклона орбиты КА – отклонение нормали к орбите КА

$\mathbf{n}_{sc, out}$ от нормали к орбите планеты \mathbf{n} в зависимости от положения вектора

$\mathbf{V}_{\infty, out}$ (показан синим)

Указанная формула (22) согласуется с результатами и обширными выкладками [4-7] (где вопрос максимальной вариации наклона орбиты КА при совершении GAM специально не выделяется) при замене переменных ρ, ψ для круговой орбиты планеты на углы κ, α (*cranking, pumping angles*) согласно соотношениям $\sin \rho = \sin \kappa \sin \alpha$, $\cos \rho \cos \psi = \cos \alpha$.

Отметим также результаты наших коллег из *Colorado University, USA* [8], где аналогично предпринималась попытка получить более адекватные оценки вариации наклона, отличные от критерия Лабунского [1]. Однако при этом в [8], видимо по недоразумению, были перепутаны функции синуса и косинуса в числителях и знаменателях формул [8, Equations 8-11].

В случае проведения GAM в продольной плоскости $\sin \psi = 0$, нормальной к плоскости орбиты планеты (как и к предполагающейся первоначально почти компланарной ей плоскости орбиты КА), как следует из (9) и рис. 13, $\rho = \varphi$, и наклонение определяется по формуле

$$i = \operatorname{arctg} \frac{V_{\infty} \sin \varphi}{V_{pl} \pm V_{\infty} \cos \varphi} \quad (23)$$

Знак в знаменателе (23) зависит от значения $\operatorname{sign}(\cos \psi) = \operatorname{sign}(V(t_2) - V_{pl})$, то есть от того, больше ли перед GAM проекция скорости КА на вектор скорости планеты самой скорости планеты, или наоборот.

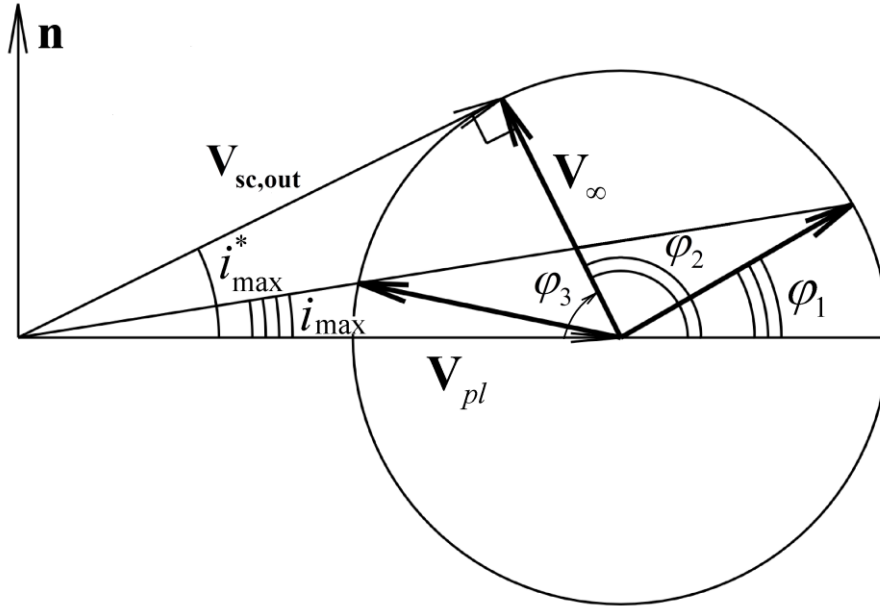


Рис. 13. Вариации наклона i_{\max} при различных конфигурациях подлёта КА к планете перед ГАМ

Учитывая (1), выражение (23) в случае $\rho = \varphi_{\max}$ можно записать как

$$i = \arctg \left(v_{\infty} \sin \left(2 \arcsin \frac{1}{1 + \Theta_{pl}^2 v_{\infty}^2} \right) \left(1 \pm v_{\infty} \cos \left(2 \arcsin \frac{1}{1 + \Theta_{pl}^2 v_{\infty}^2} \right) \right)^{-1} \right) \quad (24)$$

где $v_{\infty} = V_{\infty} / V_{pl}$, $\Theta_{pl} = V_{pl} / \sqrt{\frac{\mu}{R_{\pi}}} \approx V_{pl} / V_{Fpl}$, V_{Fpl} – первая космическая скорость планеты. В специальном случае миссий с $v_{\infty} = 0.5$ (класс МИГ)

$$\sin \frac{\varphi_{\max}}{2} = \sin \left(2 \arcsin \frac{1}{1 + \Theta_{pl}^2 v_{\infty}^2} \right) = (1 + 0.25 \Theta_{pl}^2)^{-1} \quad (25)$$

При «слабых» ГАМ ($\varphi_{\max} \leq i_{\max}^*$) функция (23) монотонна по φ , её максимальное значение достигается при $\rho = \varphi_{\max}$ и может быть вычислено по формуле (23) со знаком + в знаменателе. В случае «сильных» ГАМ ($\varphi_{\max} > i_{\max}^*$) (Юпитер, Сатурн и др.) максимум наклона i достигается при значении $\rho = \varphi = \varphi^*$ и вычисляется по формулам (8),(10).

На рис. 14 представлена пространственная конфигурация векторов гелиоцентрической скорости КА в зависимости от угла между скоростью

планеты и входным вектором скорости КА, посчитанная по точным кинематическим соотношениям (22) для 3D GAM в координатах $(V \cos \rho \cos \psi, V \cos \rho \sin \psi, V \sin \rho)$. Из неё видно, что возможные положения векторов выходной скорости лежат на покрытии части сферы радиуса V_∞ картами, образованными пересечениями с ней набора телесных углов с раствором φ_{\max} .

Из (22),(23) и 3D-схемы GAM, представленной на рис. 14, следует, что набор трёх значений $\cos \psi = \{-1, 0, 1\}$ достаточно полно характеризует область достижимости наклонений после совершения GAM. Соответствующие три кривые для планет Солнечной системы представлены на рис. 15-19. На них везде для сравнения приведена эталонная оценка *Лабунского* (6), показанная красной линией. Из рис. 15,16 видно, что оценка Лабунского для планет Земной группы близка к «синей» кривой $\cos \psi = 0$, в то время как кривые $\|\cos \psi\| = 0$ ограничивают её сверху и снизу. В случае группы внешних планет (рис. 17,18) поведение оценочной кривой Лабунского существенно отличается от остальных.

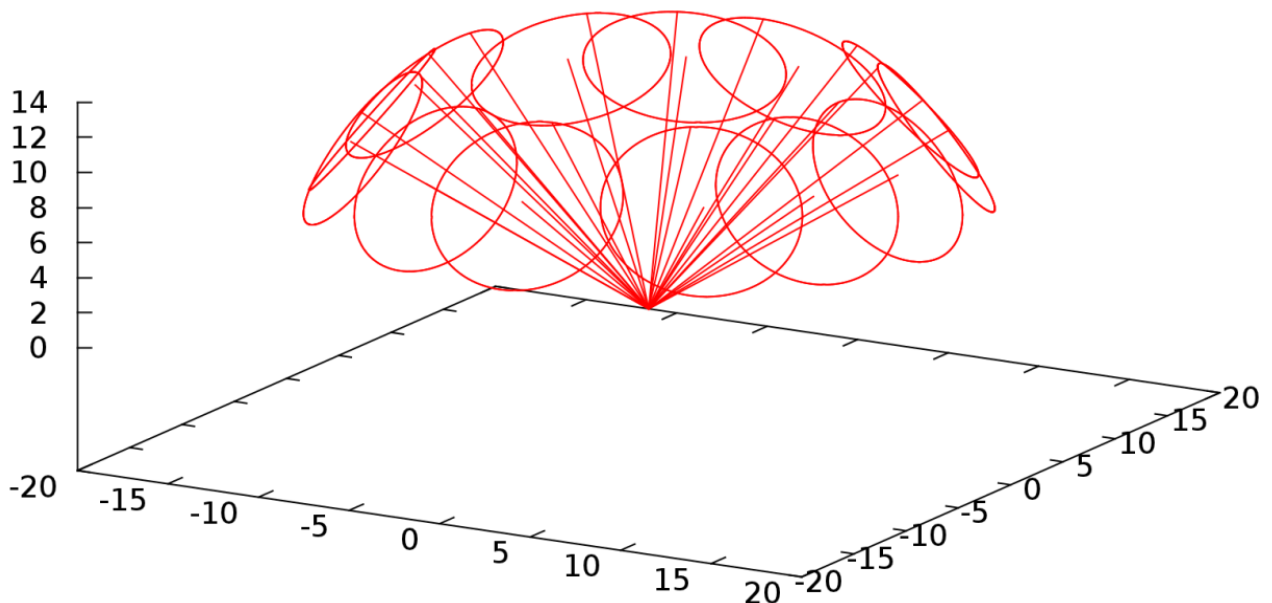
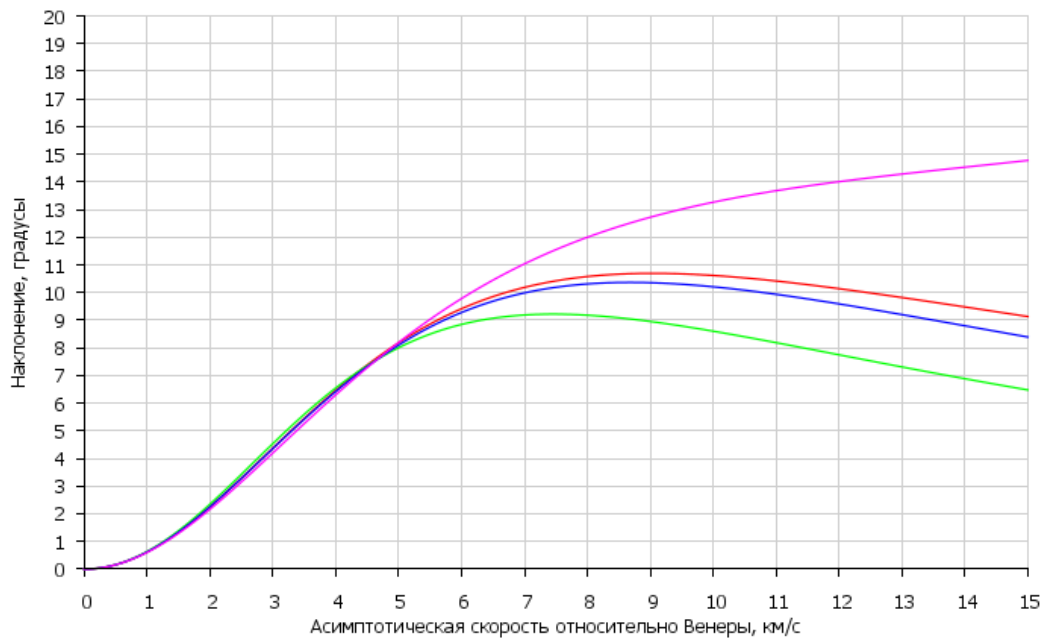
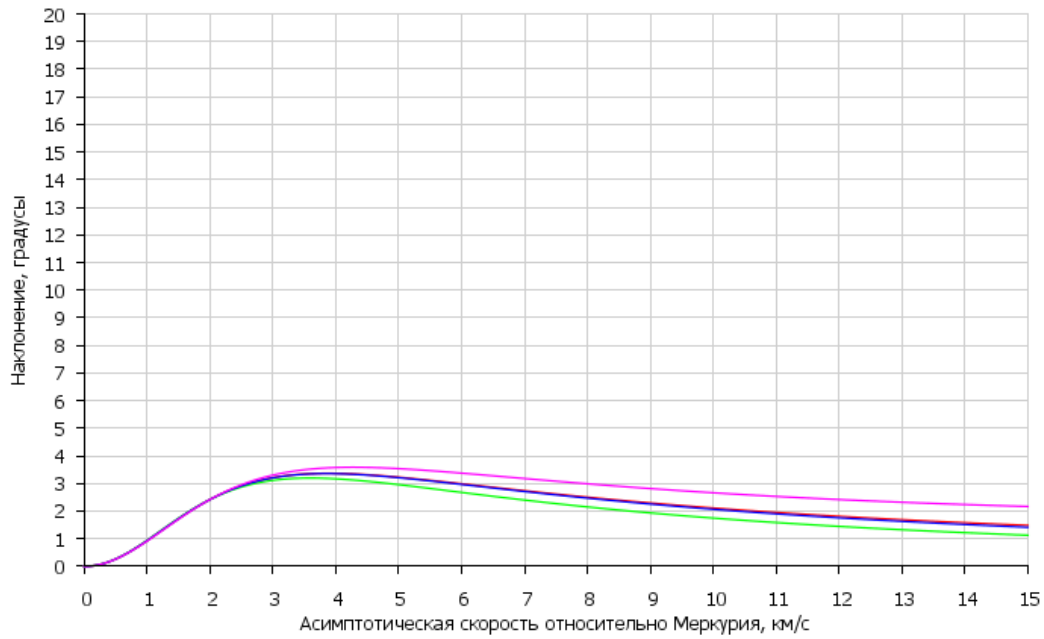
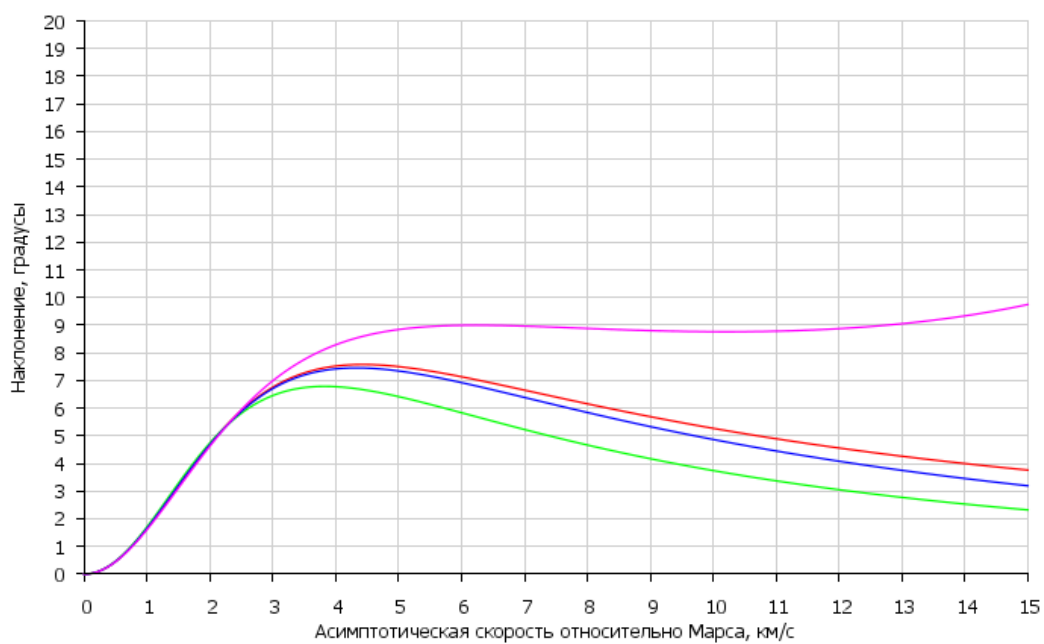
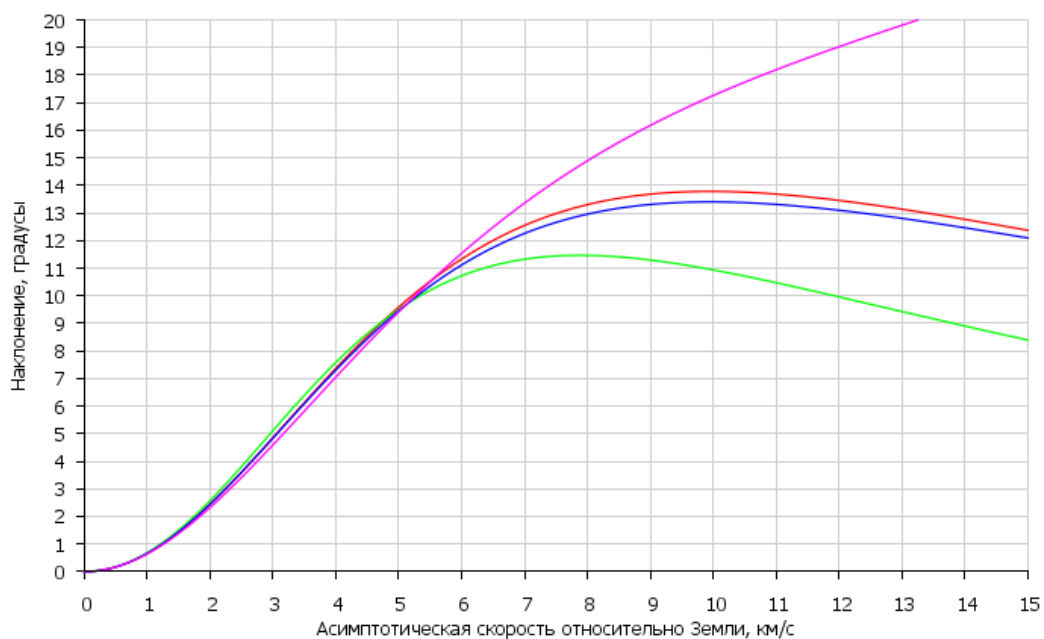


Рис. 14. Пространственная конфигурация векторов гелиоцентрической скорости КА в координатах $(V \cos \rho \cos \psi, V \cos \rho \sin \psi, V \sin \rho)$



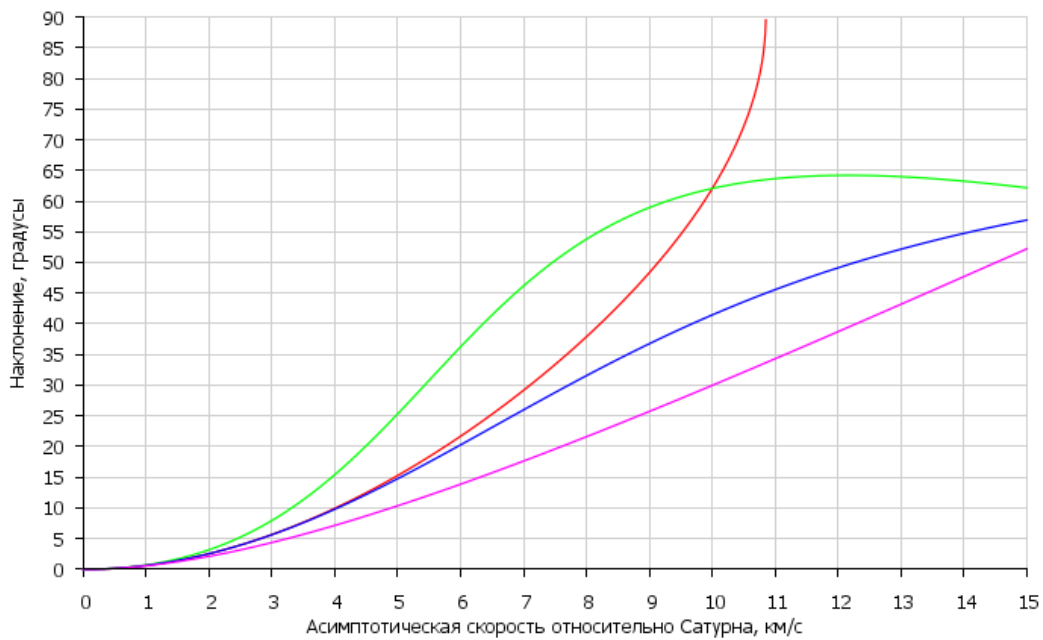
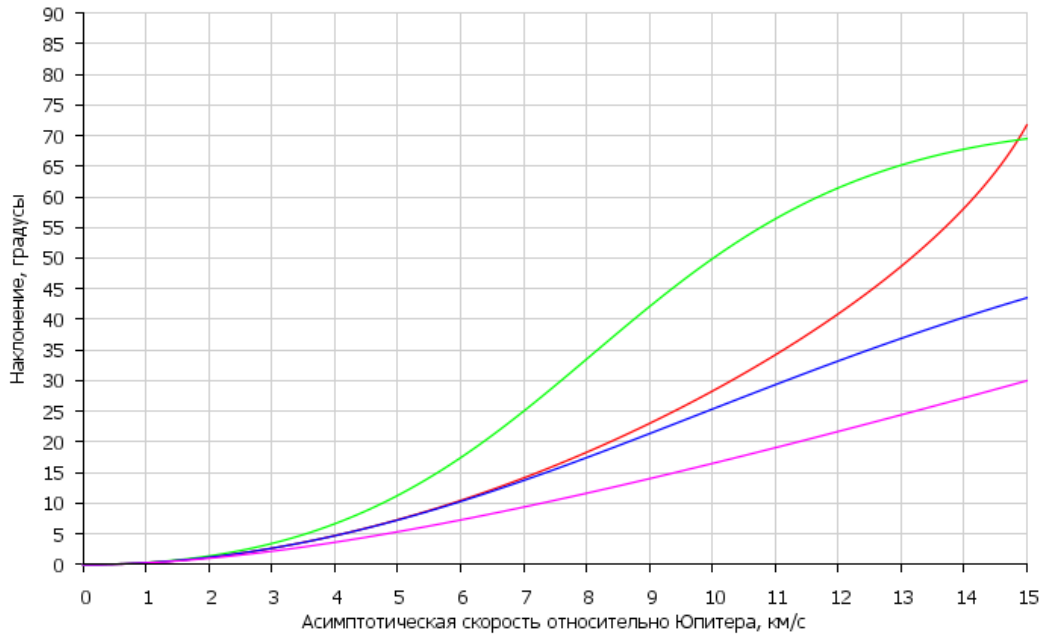
— Критерий Лабунского — $\psi = \pi$ — $\psi = \pi/2$ — $\psi = 0$

Рис. 15. Максимальные возможные вариации наклона на элементарном ГАМ около Меркурия и Венеры



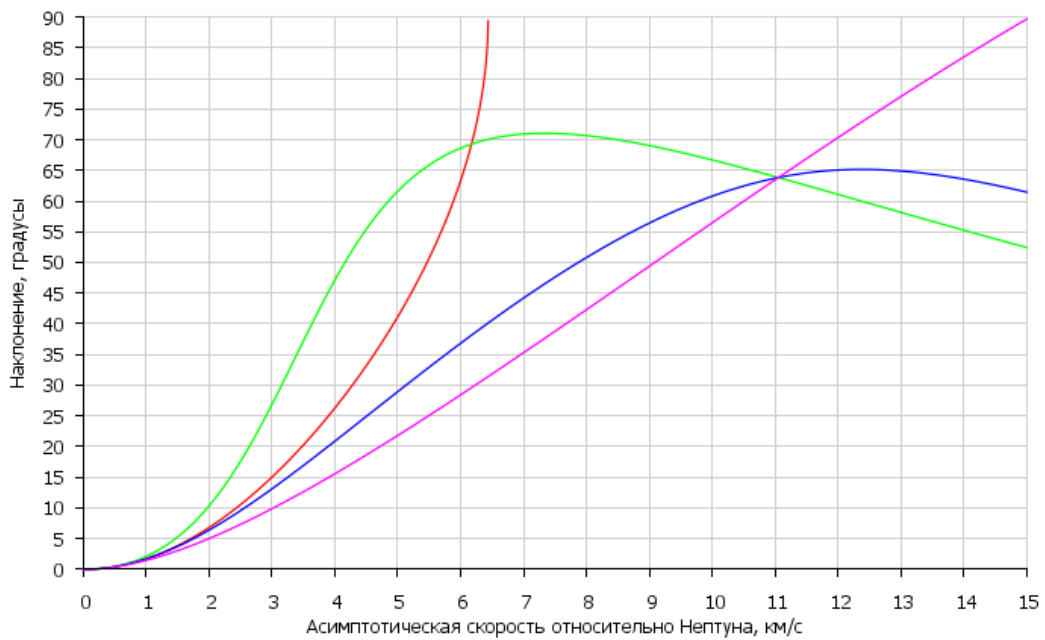
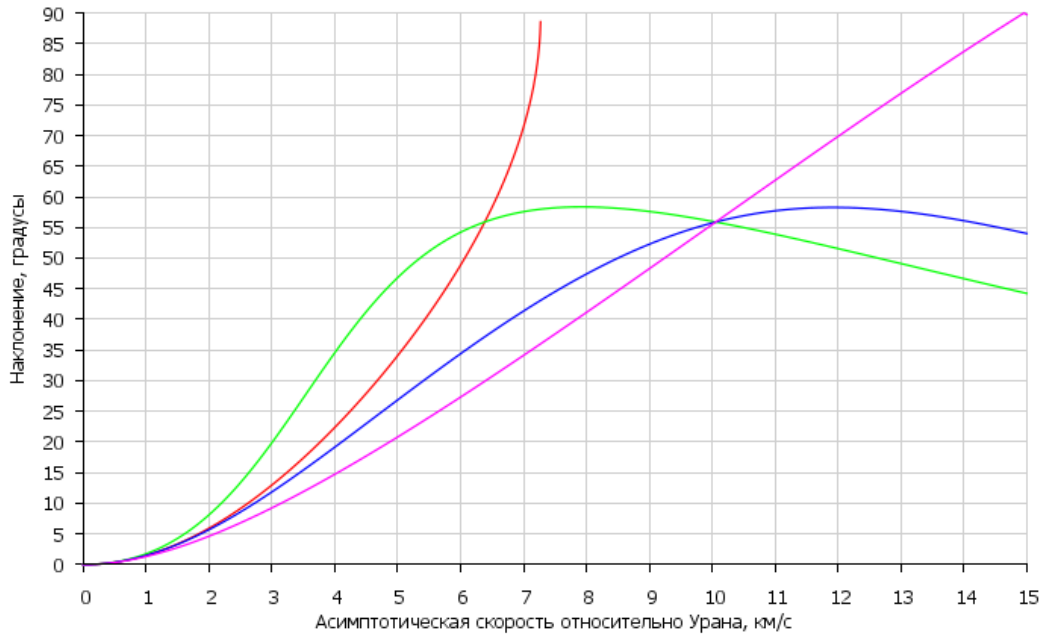
— Критерий Лабунского — $\psi = \pi$ — $\psi = \pi/2$ — $\psi = 0$

Рис. 16. Максимальные возможные вариации наклонения на элементарном ГАМ около Земли и Марса



— Критерий Лабунского — $\psi = \pi$ — $\psi = \pi/2$ — $\psi = 0$

Рис. 17. Максимальные возможные вариации наклонения на элементарном GAM около Юпитера и Сатурна



— Критерий Лабунского — $\psi = \pi$ — $\psi = \pi/2$ — $\psi = 0$

Рис. 18. Максимальные возможные вариации наклонения на элементарном GAM около Урана и Нептуна

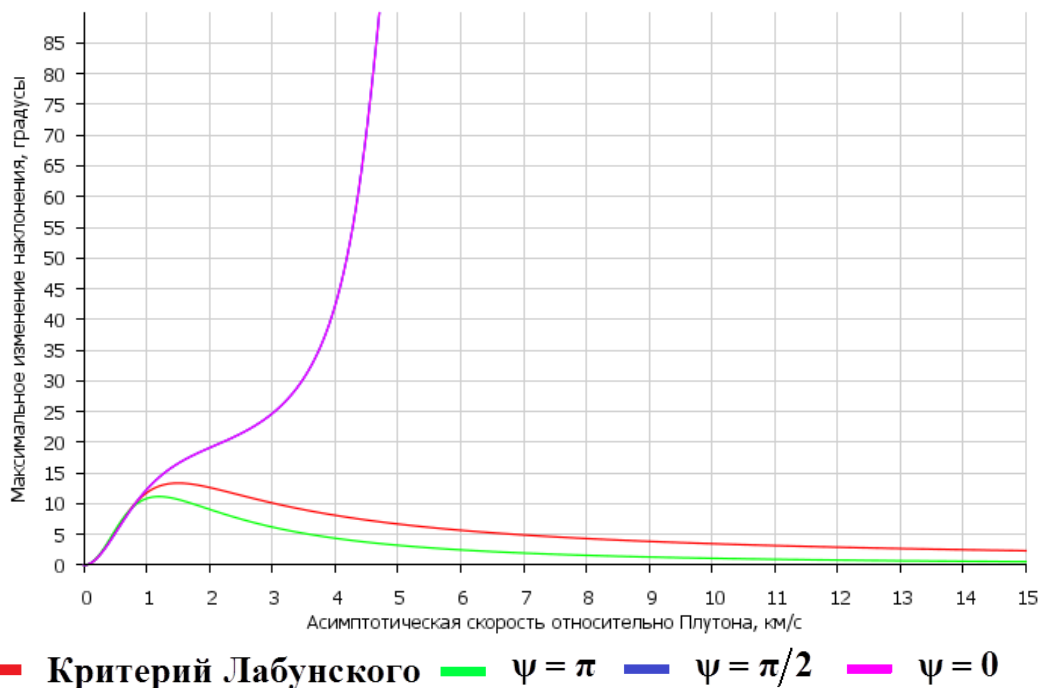


Рис. 19. Максимальные возможные вариации наклона на элементарном GAM около Плутона

5. Индикатрисы манёвров C-GAM

Представления вариаций наклона при совершении GAM в виде зависимостей от модуля асимптотической скорости не описывают всех нюансов 3D-GAM. Для целей высокоточного баллистического проектирования миссий с высоким наклоном орбит КА к плоскости эклиптики [12] в полной эфемеридной модели [24-25] востребованы 3D-карты расположения векторов выходных скоростей КА после совершения GAM. В качестве примера, представим результаты расчётов, полученных для 3D-модели, показанные на рис. 3 для случая GAM около планеты Венера. На рис. 20, 21 показаны изолинии асимптотической скорости на плоскости «наклонение-боковое отклонение (поперечная составляющая)» вектора асимптотической скорости КА от \mathbf{V}_{pl} . Эти изолинии, следуя [26], будем называть индикатрисами. На рис. 20 изолинии построены для случая МИГ, а на рис. 21 - для случаев $V_\infty = 7; 10; 17.5; 20; 25; 30$ км/с.

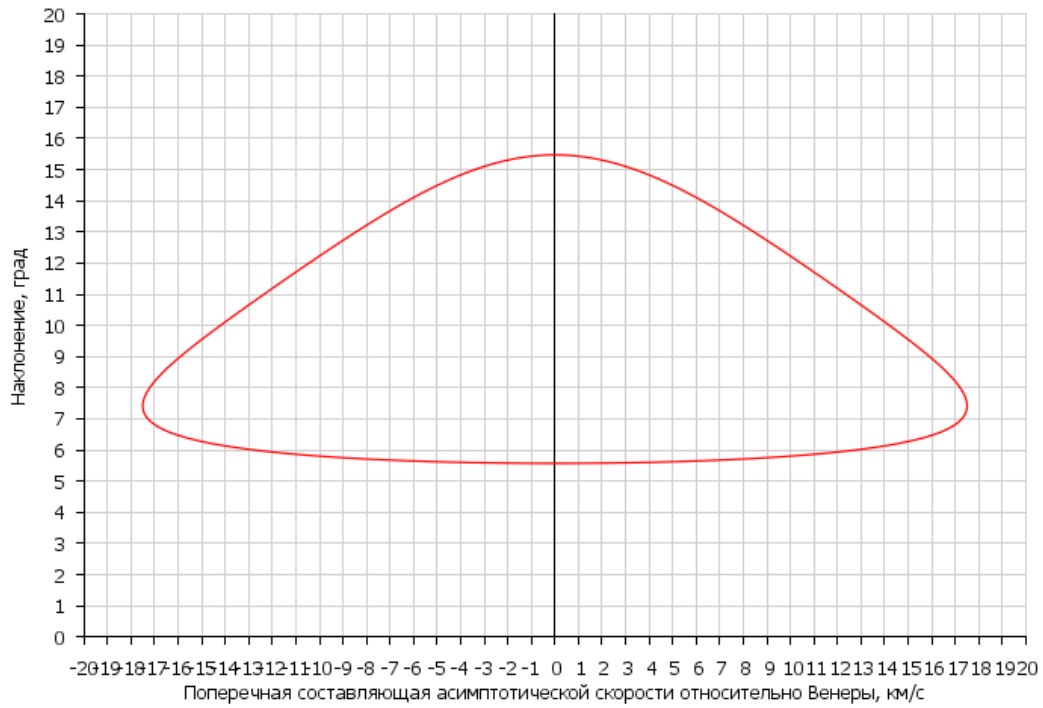


Рис. 20. 3D GAM около планеты Венера для миссии МИГ
($V_{\infty} = 17.5$ км/с)

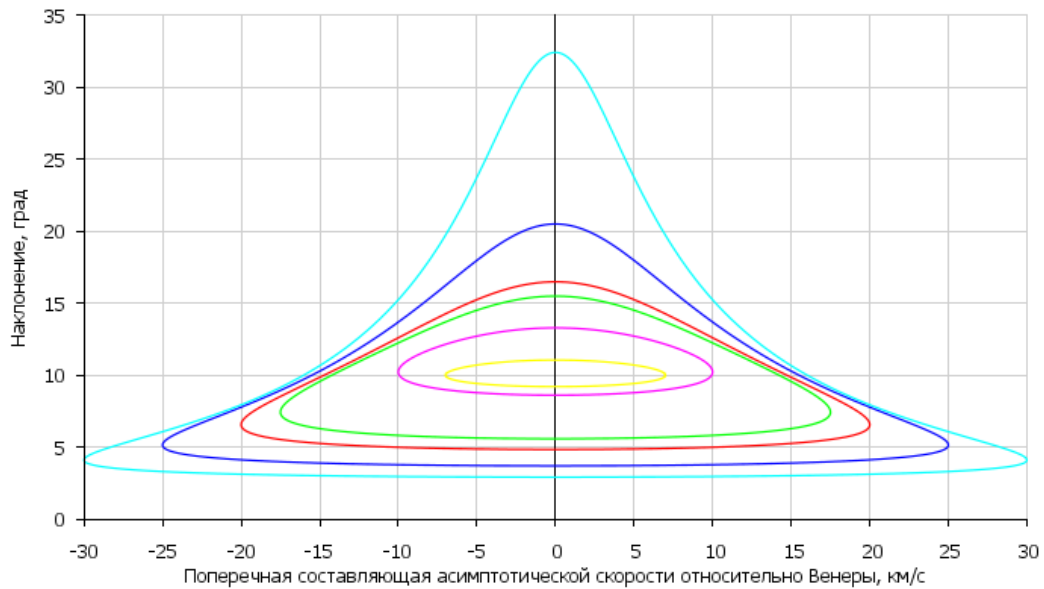


Рис. 21. 3D GAM около планеты Венера для величин
 $V_{\infty} = 7, 10, 17.5, 20, 25, 30$ км/с

6. Высокоточные эфемеридные индикатрисы манёвров C-GAM

Изменение наклона на элементарном GAM в пространственном случае, вообще говоря, не является функцией только величины v_∞ , (рис. 20, 21). Вектор скорости \mathbf{V}_2 при вылете КА из сферы действия планеты зависит не только от неё, но и от относительного расположения векторов $\mathbf{V}_{\infty, in}, \mathbf{V}_{pl}$ при входе КА в гравитационную сферу планеты. Для высокоточного баллистического проектирования требуется построение «индикатрисы» [26] - поверхности поствыходных абсолютных GAM-скоростей \mathbf{V}_2 , учитывающей реальные эфемериды планет и их спутников. Одновременно с построением соответствующих «карт элементарных GAM» – областей достижимости элементарных CGAM в 3D-пространстве тиссерановых координат (r_a, r_p, i) открывается универсальная возможность пучкового синтеза цепочек CGAM в виде маршрутизации [12] по покрытию картами универсальной «лоции» 3D-графа Тиссерана-Пуанкаре [10]. В первую очередь, речь идёт об обобщении техник 2D-графа Тиссерана [12-18] на пространственный случай. Схематично действие методики представлено на рис. 22,23,24. По осям абсцисс и ординат нанесены значения афелия и перигелия орбиты КА в астрономических единицах. На нём приведена проекция сверху поверхности 3D графа Тиссерана-Пуанкаре на плоскость «афелий-перигелий» (в астрономических единицах *a.e.*). Каждой точке поверхности соответствует фазовое состояние КА при совершении всевозможных GAM около планеты Венера. Одним цветом обозначены точки, имеющие примерно одинаковое наклонение. Зелёными прямыми нанесены изолинии основных резонансов (соизмеримостей между периодами обращения КА и планеты Венера). Видно, что для продолжения серии GAM можно совершать как подъёмы по резонансным «магистральям», так и перепрыгивая по ним с одного на другой, одновременно повышая наклонение.

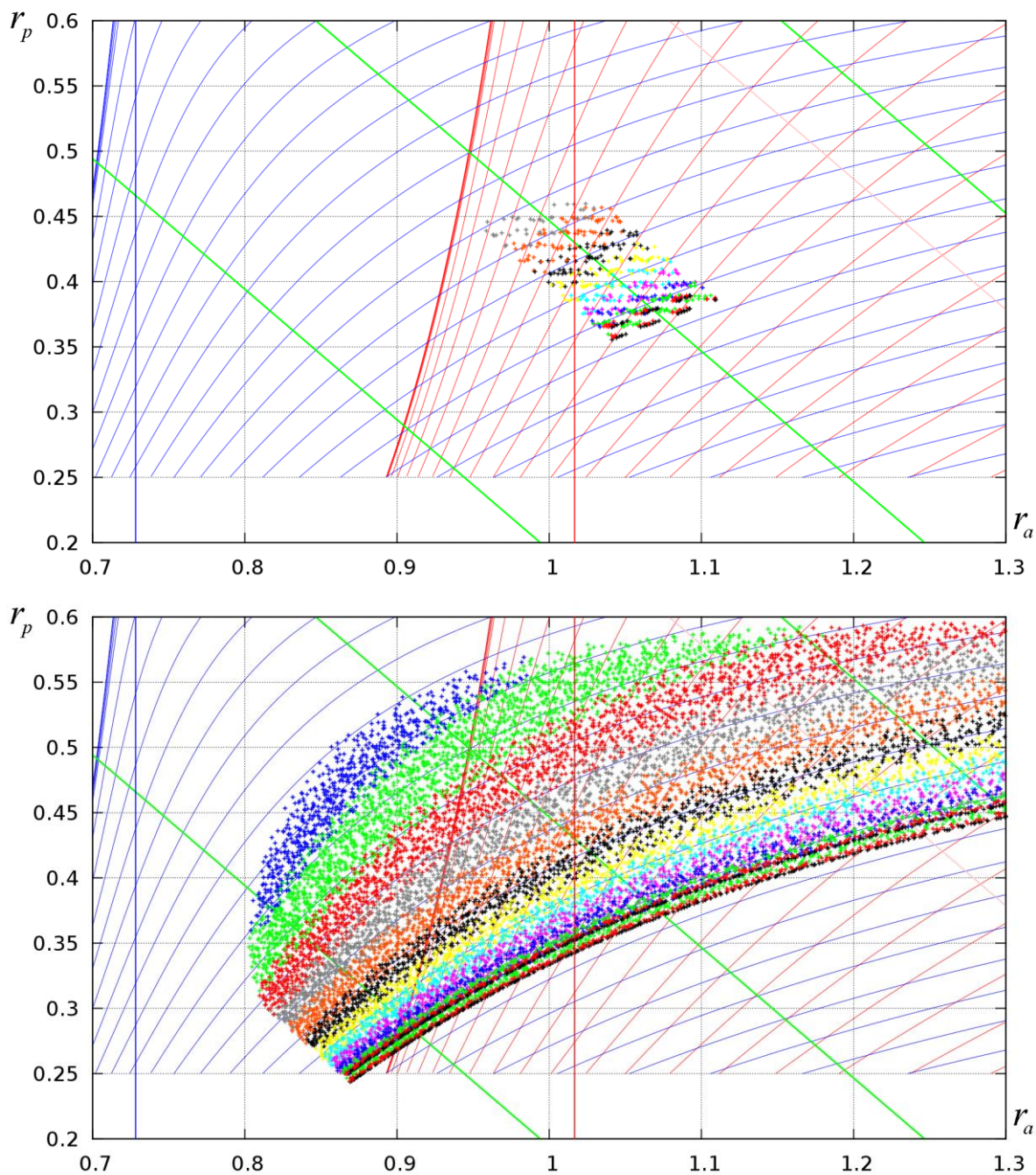


Рис. 22. Проекция сверху поверхности 3D графа Тиссерана-Пуанкаре на плоскость «афелий-перигелий» (в *a.e.*) для ГАМ с планетой Венера. Точка старта – на линии отношения периодов обращения КА и Венеры (1:1)

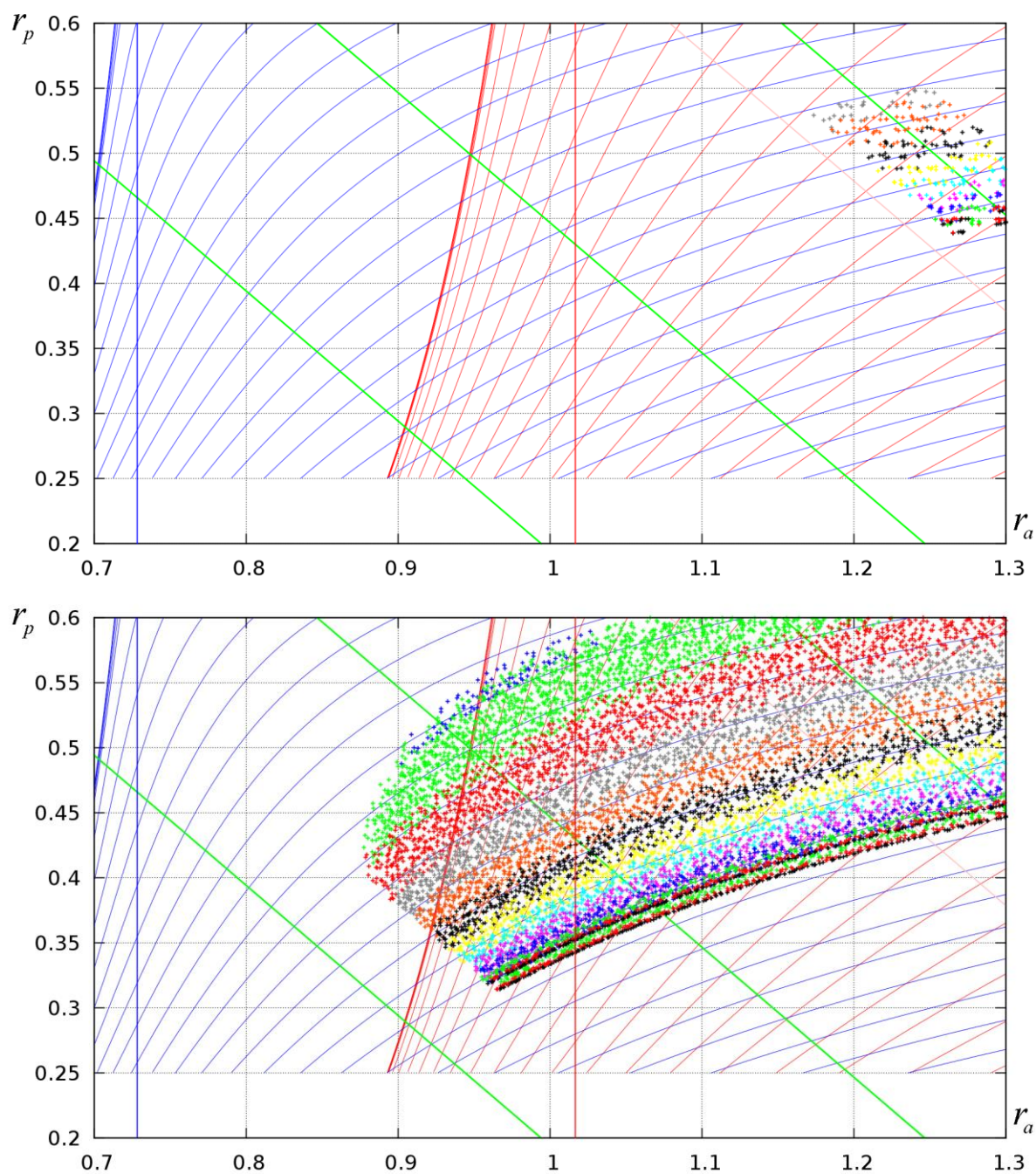


Рис. 23. Проекция сверху поверхности 3D графа Тиссерана-Пуанкаре на плоскость «афелий-перигелий» (в *a.e.*) для GAM с планетой Венера
Точка старта – на линии отношения периодов обращения КА и Венеры (4:3)

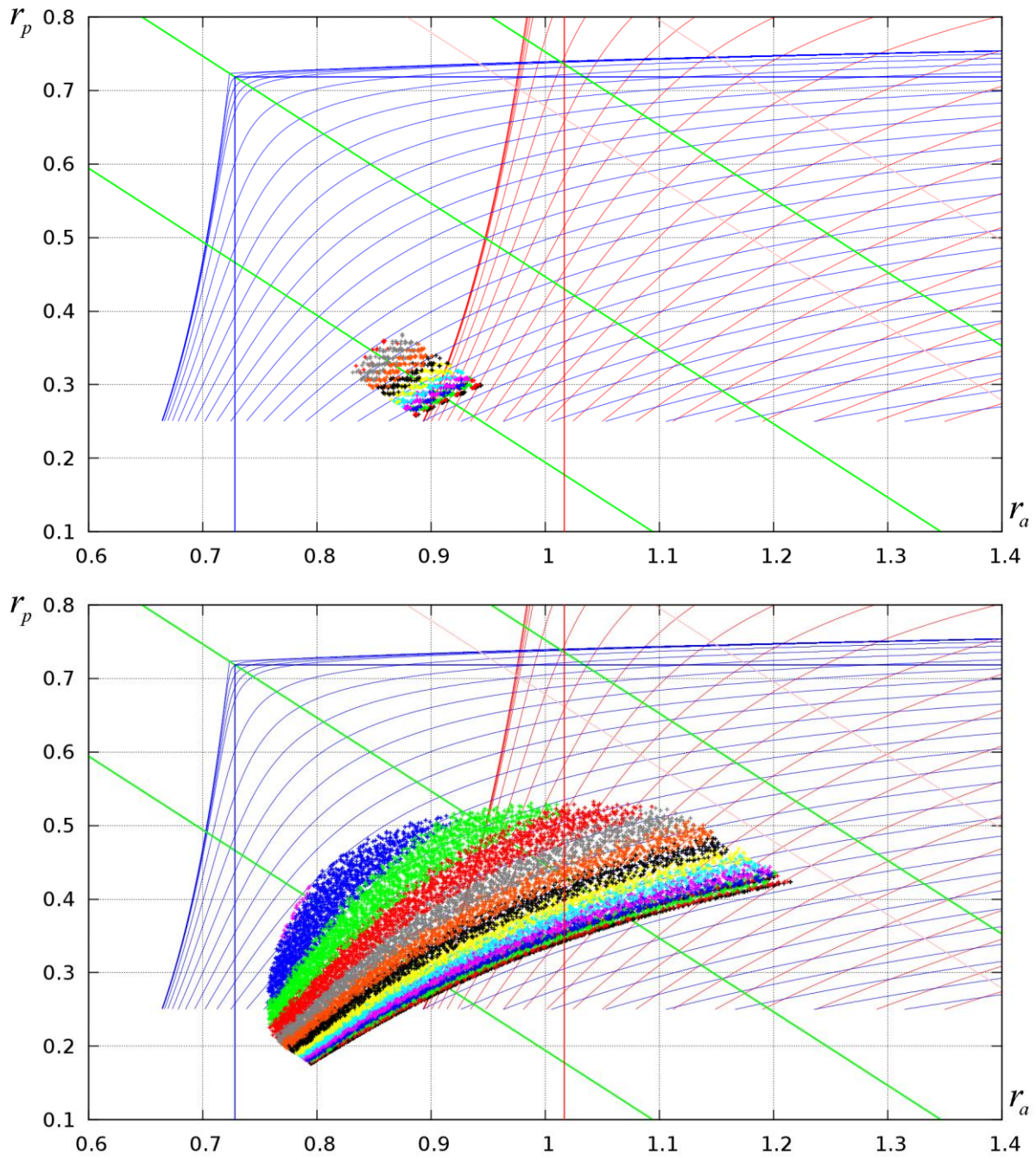


Рис. 24. Проекция сверху поверхности 3D графа Тиссерана-Пуанкаре на плоскость «афелий-перигелий» (в *a.e.*) для ГАМ с планетой Венера. Точка старта – на линии отношения периодов обращения КА и Венеры (3:4)

Выводы

В данной работе представлены результаты уточнённых расчётов по оценке возможного изменения наклонов орбиты КА при проведении гравитационных манёвров около планет Солнечной системы. Эти расчеты

необходимы для создания актуальных баллистических сценариев космических миссий с целью изучения внутренней гелиосферы из внеэклиптических положений (отечественная миссия «Интергелиозонд», миссия ЕКА “Solar Orbiter”).

Установлено, что при построении кривых допустимого изменения наклона при GAM необходимо учитывать точку бифуркации кривой максимального наклона в случае достижения углом разворота вектора асимптотической скорости значений $\varphi^* = \frac{\pi}{2} \pm \arcsin \frac{V_{\infty}}{V_{pl}}$ и выбирать адекватную ветвь оценочной кривой.

Построенные индикатрисы позволяют использовать их как уточнённые элементы покрытия компактных 3D-диаграмм Тиссерана соответствующих ограниченных задач трёх тел с целью получения их минимальных конечных подпокрытий в высокоточной постановке. Эта техника может служить основой для маршрутизации, то есть построения адаптивных цепочек прохождения небесных тел с целью формирования высоконаклонённых к плоскости эклиптики орбитальных космических зондов. Построение 3D-индикатрис GAM для конкретных небесных тел Солнечной системы в полной эфемеридной модели делает возможным применение полученных оценок для рабочего баллистического проектирования соответствующих космических миссий класса «Интергелиозонд», “Solar Orbiter” и др.

Классическая оценка Лабунского [1] вариации наклона орбиты КА при совершении гравитационного манёвра около планет, в целом адекватно отражает основные черты динамики 3D-GAM для планет Земной группы, но требует выполнения уточняющих расчётов и построения более полного описания модели 3D-GAM для целей баллистического проектирования перспективных космических миссий.

Библиографический список

1. Labunsky A.V., Papkov O.V., Sukhanov K.G. Multiple Gravity Assist Interplanetary Trajectories // Earth Space Institute Book Series. L.: Gordon and Breach Publishers, 1998. P. 33–68.
2. Barrabéz E., Gómez G., Rodríguez-Canabal J. Notes for the Gravitational Assisted Trajectories // Advanced Topics in Astrodynamics. Summer course. Barcelona, July 2004. – URL: <http://www.ieec.fcr.es/astro04/notes/gravity.pdf>
3. Janin G. Trajectory design for the Solar Orbiter mission / Monografías de la Real Academia de Ciencias de Zaragoza, 25, 2004. P. 177–218. (ESA-ESOC). – URL: http://www.unavarra.es/vijtmc/Bertiz_Def/177Janin.pdf
4. Strange N.J., Longuski J.M. Graphical Method for Gravity-Assist Trajectory Design // J. Spacecraft and Rockets, V. 39. № 1, 2002, P. 9–16.
5. Strange N.J., Russell R., Buffington B., Mapping the V-infinity Globe // AIAA/AAS Space Flight Mechanics Meeting, AAS Paper 07-277, 2007. – URL: http://russell.ae.utexas.edu/FinalPublications/ConferencePapers/07Aug_AAS-07-277.pdf
6. Kawakatsu Y. V_{∞} Direction Diagram and its Application to Swingby Design // 21st International Symposium on Space Flight Dynamics, September 28–October 2 2009, Toulouse, France. – URL: http://issfd.org/ISSFD_2009/InterMissionDesignI/Kawakatsu.pdf
7. Wolf A. Touring the Saturnian system // Space Science Reviews, V. 104. 2002, Iss. 1, P. 101–128.
8. Kelly B. Solar Orbiter Mission / ASEN 5050, 2010. – URL: http://ccar.colorado.edu/asen5050/projects/projects_2010/kelly/
9. Pérez J.M.S. Trajectory Design of Solar Orbiter // 23d ISSFD, Pasadena, California, October 29 - November 2, 2012. P.17. – URL: http://issfd.org/ISSFD_2012/ISSFD23_IMD1_3.pdf
10. Campagnola S., Kawakatsu Y. Jupiter Magnetospheric Orbiter: Trajectory Design in the Jovian System // J. Spacecraft and Rockets. V. 49. № 2. 2012. P. 318-324.
11. Охоцимский Д.Е., Сихарулидзе Ю.Г. Основы механики космического полета. М., Наука, 1990. 448 с.
12. Голубев Ю.Ф., Грушевский А.В., Корянов В.В., Тучин А.Г., Тучин Д.А. Методика формирования больших наклонов орбиты КА с использованием гравитационных манёвров // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2015. № 64. 32 с. – URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2015-64>
13. Голубев Ю.Ф., Грушевский А.В., Корянов В.В., Тучин А.Г. Гравитационные маневры космического аппарата в системе Юпитера // Изв. РАН. ТиСУ, 2014. № 3. С. 149-167; Golubev Yu.F., Grushevskii A.V., Koryanov V.V., Tuchin A.G. Gravity Assist Maneuvers of a Spacecraft in Jupiter System // Journal of Computer and Systems Sciences International, Pleiades Publishing, Ltd. 2014. V. 53. № 3. P. 445–463.

14. Голубев Ю.Ф., Грушевский А.В., Корянов В.В., Тучин А.Г. Синтез сценариев космических миссий в системе Юпитера с использованием гравитационных маневров // Доклады Академии Наук, Т. 456. №1, 2014, С. 39–41.
15. Grushevskii A.V., Golubev Yu.F., Koryanov V.V., Tuchin A.G. Tuchin D.A. Low Cost Mission Design in Jovian System in a Full Ephemeris Model with Two Coupled RTBP Engaging. // 25th International Symposium on Space Flight Dynamics (ISSFD), Munich, Germany, Oct. 19-23, 2015.
URL: http://issfd.org/2015/files/downloads/papers/044_Grushevskii.pdf
16. Голубев Ю.Ф., Грушевский А.В., Корянов В.В., Тучин А.Г., Тучин Д.А. Разработка стратегий исследования системы Юпитера при использовании модели ограниченной задачи четырёх тел // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша, 2014. № 50. 30 с. – URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2014-50>
17. Grushevskii A.V., Golubev Yu.F., Koryanov V.V., Tuchin A.G. To the adaptive multibody gravity assist tours design in Jovian system for the Ganymede Landing // 24th International Symposium on Space Flight Dynamics (ISSFD), Laurel, Maryland, Johns Hopkins University APL Laboratory (JHU APL), May 5-9 2014. Paper S15-4.
18. Grushevskii A.V., Golubev Yu.F., Koryanov V.V., Tuchin A.G. Adaptive low radiation multibody gravity assist tours design in Jovian system for the landing on Jovian's moons // Proc. 65th International Astronautical Congress (IAC 2014), 29 Sept – 3 Oct 2014, Toronto, Canada. Manuscript IAC-14,C1,9,13,x21406.
19. Пуанкаре А. Избранные труды в трёх томах. Т.1. Новые методы небесной механики. М.: Наука, 1971. 772 с.
20. Себехей В. Теория орбит. Ограниченная задача трёх тел. М.: Наука, 1982. 656 с.
21. Tisserand F.F. *Traité de Mécanique Céleste*. V. 4. Gauthier-Villars et fils. Paris, 1896. P. 203–205.
22. Константинов М. С., Петухов В. Г., Лёб Х. В. Применение высокочастотного ионного двигателя RIT-22 в проекте «Интергелио-Зонд» // Труды МАИ : электрон. журнал. 2012. № 60. 16 с. – URL: http://www.mai.ru/upload/iblock/c22/primenenie-vysokochastotnogo-ionnogo-dvigatelya-rit_22-v-proekte-_intergelio_zond_.pdf
23. Konstantinov M., Petukhov V., Thein M. Optimization spacecraft insertion into the system of heliocentric orbits for Sun exploration // 65th IAC, Toronto, Canada, 2014. IAC-14-C1.9.4
24. Сайт NAIF (Navigation and Ancillary Information Facility). URL: <http://naif.jpl.nasa.gov/naif/index.html>.
25. Yoder C.F. Astrometric and Geodetic Properties of Earth and the Solar System / Global Earth Physics. A Handbook of Physical Constants, ed. T. Ahrens. American Geophysical Union, Washington, 1995. P. 1-31.
26. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. М.: Едиториал УРСС, 2003. 416 с.

Оглавление

Введение	3
1. Основные элементы пространственного гравитационного манёвра.....	4
2. Вариации наклонений орбиты КА при совершении гравитационных манёвров в Солнечной системе	7
3. Аналитическое развитие критерия Лабунского для допустимых изменений наклонений орбиты КА.....	15
4. Полная аналитическая формула для вариации наклонения	18
5. Индикатрисы манёвров C-GAM.....	27
6. Высокоточные эфемеридные индикатрисы манёвров C-GAM.....	29
Выводы.....	32
Библиографический список	34