



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 18 за 2016 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Маштаков Я.В., [Ткачев С.С.](#)

Влияние возмущений на
точность стабилизации
спутника ДЗЗ

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Маштаков Я.В., Ткачев С.С. Влияние возмущений на точность стабилизации спутника ДЗЗ // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2016. № 18. 31 с. doi:[10.20948/prepr-2016-18](https://doi.org/10.20948/prepr-2016-18)
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2016-18>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Российской академии наук**

Я.В. Маштаков, С.С. Ткачев

**Влияние возмущений на точность
стабилизации спутника ДЗЗ**

Москва — 2016

Маштаков Я.В., Ткачев С.С.

Влияние возмущений на точность стабилизации спутника ДЗЗ

Предложен алгоритм синтеза углового движения спутника дистанционного зондирования Земли (ДЗЗ) для отслеживания маршрутов на поверхности Земли. Рассмотрено влияние неучтенных внешних возмущений на точность ориентации и стабилизации космического аппарата. Исследована связь между отклонением точки визирования и ошибки скорости бега изображения, точностью ориентации и стабилизации аппарата, а также кривизной снимаемой траектории и возможностями системы управления

Ключевые слова: дистанционное зондирование Земли, синтез углового движения, ПД-регулятор, точность ориентации

Yaroslav Mashtakov, Stepan Tkachev

Effect of disturbances on attitude precision of the remote sensing satellite

The angular motion synthesis algorithm for remote sensing satellite is developed. Effect of external disturbances on attitude accuracy is considered. Relations between attitude accuracy and image quality and trajectory curvature and control capabilities are investigated.

Key words: remote sensing, angular motion synthesis, PD-controller, attitude accuracy

Работа поддержана грантами РФФИ №№ 16-01-00739, 15-31-20058

Введение

При освоении труднодоступных частей планеты нельзя переоценить возможности, которые предоставляет дистанционное зондирование Земли (ДЗЗ), осуществляемое космическими аппаратами (КА). Космическая съемка оказывается незаменимой и при исследовании Арктики (изучение льдов, определение границы паковых льдов, прокладка маршрутов караванов, мониторинг состояния трубопроводов и других линейных протяженных объектов, контроль состояния автономно функционирующих элементов наземной инфраструктуры, экологический мониторинг). Для эффективного использования космических средств при решении таких задач необходимо уметь не только осуществлять съемку подспутниковой полосы обзора, но и отслеживать заданные маршруты на поверхности Земли вдоль трассы спутника.

Как правило, для решения задачи космической съемки используются большие аппараты («Ресурс-П» [1] или «WorldView» [2]), которые осуществляют высокодетальную съемку поверхности Земли. Для оперативного мониторинга (например, ледовой обстановки или сложных протяженных объектов) они могут и не подходить из-за длительных временных интервалов между последовательными проходами над регионами наблюдения. Для этой цели могут быть использованы малые (до нескольких сотен килограммов) КА [3], движущиеся на низких (до 400 км) орбитах. Стоимость и время их разработки и запуска значительно ниже по сравнению с большими аппаратами. Возможности каждого из таких аппаратов, естественно, скромнее, чем у больших спутников ДЗЗ, но, с другой стороны, возможен одновременный запуск группировки малых спутников, что приносит качественно новые возможности для решения задач мониторинга.

При выполнении миссий ДЗЗ с использованием малых спутников целесообразной является жесткая установка камеры в корпус КА, так как использование подвеса может сильно усложнить и повысить стоимость разработки аппарата. В настоящей работе излагается подход к построению и реализации углового движения КА при осуществлении съемки достаточно произвольных протяженных наземных структур в случае, когда поворот камеры осуществляется поворотом всего аппарата.

Стоит отметить, что схожая задача отслеживания маршрутов на поверхности Земли уже рассматривалась в статьях С.А. Бутырина и С.Е. Сомова [4–6], однако в них применяется численное решение кинематических уравнений для кватерниона ориентации КА. Также в них большое внимание уделяется проблеме компенсации разности скоростей различных точек изображения в фокальной плоскости камеры, что является актуальным для аппаратов с широкой полосой обзора, в то время как для малых аппаратов с узкоугольными камерами эта проблема не является критичной. В настоящей же работе рассматривается подход к решению задачи отслеживания траекторий на

поверхности Земли, который обеспечивает съемку заданного сложного и протяженного маршрута, представляющего собой кривую третьего порядка гладкости. Помимо этого, довольно большая часть работы посвящена задаче отслеживания заданного углового движения КА и оценке возникающих при этом ошибок ориентации и стабилизации спутника и их влияния на качество получаемых изображений. В настоящей работе критериями качества изображения являются ошибка скорости бега изображения по чувствительному элементу (приводит к смазу снимаемого изображения) и отклонение точки визирования от требуемого положения.

1. Постановка задачи, системы координат

1.1 Постановка задачи

В настоящей работе рассматривается задача обеспечения съемки заданного маршрута на поверхности Земли. При этом предполагаются известными:

- 1) орбитальное движение спутника, то есть его скорость и местоположение в пространстве в каждый момент времени;
- 2) тензор инерции КА;
- 3) параметры камеры, установленной на КА: ее фокальное расстояние и требуемая скорость бега изображения;
- 4) параметры системы управления ориентацией КА: максимальное и минимальное управляющее воздействие маховиков, а также максимальный запас кинетического момента маховиков;
- 5) траектория на поверхности Земли, представляющая собой трижды непрерывно дифференцируемую параметризованную кривую.

Исходя из этих данных требуется построить угловое движение КА и алгоритм его реализации с помощью гироскопической системы управления ориентацией, обеспечивающий требуемое качество съемки при наличии внешних возмущений (гравитационного, магнитного и аэродинамических моментов).

1.2 Особенности оптического сенсора

В качестве оптического сенсора, установленного на КА для осуществления съемки, для определенности рассматривается ПЗС-линейка. Это накладывает определенные условия на так называемую скорость бега изображения – скорость изображения снимаемой поверхности в фокальной плоскости камеры, где установлен чувствительный оптический элемент (рис. 1). Она должна быть постоянной по величине и направлена перпендикулярно ПЗС-линейке.

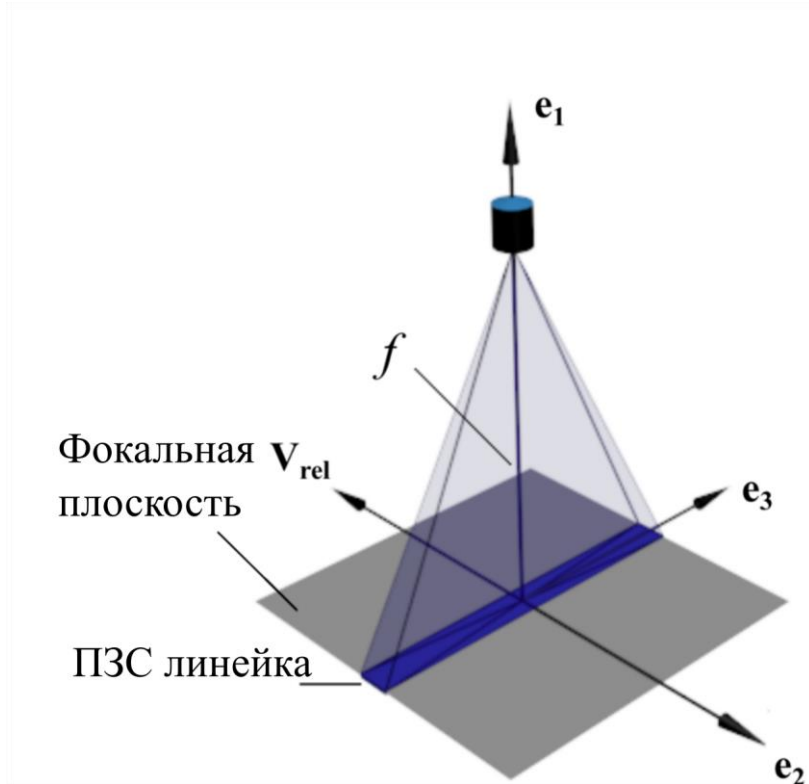


Рис. 1. Схема камеры

Сделать так, чтобы изображения всех точек снимаемой поверхности двигались с одинаковой относительно ПЗС-линейки скоростью, невозможно в силу слишком большого количества условий, накладываемых на угловую скорость аппарата (даже для двух точек в общем случае возникает четыре уравнения для трех компонент угловой скорости). Выражение для разности скоростей бега изображения центральной точки (точки визирования) и точки края полосы обзора может быть записано в виде

$$\Delta V \leq \|(\boldsymbol{\Omega}_E - \boldsymbol{\omega}) \times \mathbf{r}\| \frac{f}{\rho}.$$

Здесь \mathbf{r} – вектор, соединяющий точку визирования и точку границы полосы обзора, $\boldsymbol{\Omega}_E$, $\boldsymbol{\omega}$ – абсолютные угловые скорости Земли и спутника соответственно, f – фокальное расстояние камеры, ρ – расстояние от центра чувствительного элемента до точки визирования. В частности, полагая ширину полосы обзора равной 20 км, $\rho = 600$ км, $f = 6$ м, $|\boldsymbol{\omega}| = 10^{-3}$ рад/с, легко получить, что разница скоростей составит всего лишь 10^{-4} м/с. Для сравнения, требуемая скорость бега изображения для камеры, установленной на спутнике ТаблетСат-Аврора (ООО СПУТНИКС), составляет $5 \cdot 10^{-2}$ м/с. Таким образом, условие на скорость бега каждой точки изображения может быть заменено лишь одним условием на скорость бега центральной точки изображения.

1.3 Системы координат

В работе используются следующие правые ортонормированные системы координат (рис. 2):

$O_a Y_1 Y_2 Y_3$ — инерциальная система координат (ИСК): начало O_a расположено в центре масс Земли, $O_a Y_1$ направлена в точку весеннего равноденствия эпохи J2000, $O_a Y_3$ направлена перпендикулярно плоскости экватора;

$O_a Z_1 Z_2 Z_3$ — связанная с Землей гринвичская система координат (ГСК): начало O_a расположено в центре масс Земли, $O_a Z_1$ лежит в плоскости экватора и направлена на нулевой меридиан, $O_a Z_3$ направлена перпендикулярно плоскости экватора на северный полюс;

$O x_1 x_2 x_3$ — связанная с КА система координат (ССК): начало O расположено в центре масс спутника, оси являются главными центральными осями инерции аппарата;

$S y_1 y_2 y_3$ — визирная система координат (ВСК): начало S расположено в центре чувствительного элемента, ось $S y_1$ параллельна оптической оси прибора, $S y_2$ антипараллельна требуемой скорости бега изображения;

$S X_1 X_2 X_3$ — опорная система координат (ОСК): начало S расположено в центре чувствительного элемента, а оси меняются таким образом, чтобы одновременно происходила съемка заданного маршрута и выполнялись условия, накладываемые камерой на скорость бега изображения (явные выражения для ее осей представлены в п. 2); в случае идеального управления ВСК должна быть совмещена с ОСК.

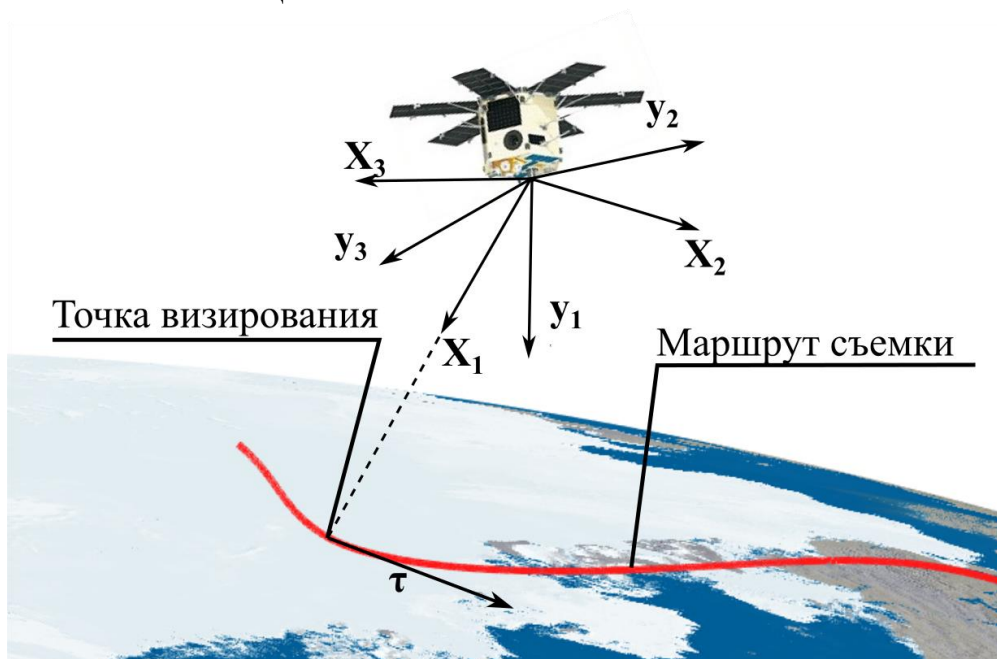


Рис. 2. Визирная и опорная СК

Переходы между этими системами координат осуществляются с помощью матриц направляющих косинусов: матрица \mathbf{F} отвечает за переход из ОСК в ВСК, \mathbf{B} — из ИСК в ОСК, \mathbf{N} — из ГСК в ИСК, \mathbf{D} — из ИСК в ССК, \mathbf{G} — из ВСК в ССК (при этом \mathbf{G} является постоянной).

2. Синтез углового движения КА

Угловое движение ОСК строится с помощью уравнений Пуассона для матриц направляющих косинусов

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{B}} &= -[\boldsymbol{\omega}]_{\times} \mathbf{B}, \\ \mathbf{B} &= \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1^T \\ \mathbf{e}_2^T \\ \mathbf{e}_3^T \end{pmatrix}, \quad \dot{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{e}}_1^T \\ \dot{\mathbf{e}}_2^T \\ \dot{\mathbf{e}}_3^T \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость КА, заданная в ОСК, \mathbf{e}_i — орты ОСК в проекции на оси ИСК. Здесь и далее точка означает производную по времени, а также введено обозначение для кососимметрической матрицы векторного произведения: для каждого $\mathbf{y} = (y_1 \ y_2 \ y_3)^T$

$$[\mathbf{y}]_{\times} := \begin{pmatrix} 0 & -y_3 & y_2 \\ y_3 & 0 & -y_1 \\ -y_2 & y_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

При этом легко заметить, что

$$[\mathbf{a}]_{\times} \mathbf{b} \equiv \mathbf{a} \times \mathbf{b}.$$

Как указано в п. 1.1, траектория на поверхности Земли представляет собой трижды непрерывно дифференцируемую параметризованную кривую $\mathbf{r}_p(p)$. Естественным является задание такой кривой в ГСК, поэтому в ИСК эта траектория примет вид

$$\tilde{\mathbf{r}}_p = \mathbf{N} \mathbf{r}_p,$$

где \mathbf{N} , как уже указывалось ранее, является матрицей перехода из ГСК в ИСК.

Требования на скорость бега изображения могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} (\mathbf{V}_{отн}, \mathbf{e}_3) \frac{f}{\rho} &= 0, \\ (\mathbf{V}_{отн}, \mathbf{e}_2) \frac{f}{\rho} &= -V, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\mathbf{V}_{отн} = \mathbf{V}_p - \mathbf{V}_s - \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{N} \mathbf{r}_p - \mathbf{r}_s) = \boldsymbol{\Omega}_E \times \mathbf{N} \mathbf{r}_p - \mathbf{V}_s - \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{N} \mathbf{r}_p - \mathbf{r}_s),$$

где $\mathbf{V}_p, \mathbf{V}_s$ – скорости наблюдаемой точки и КА относительно ИСК соответственно, $\boldsymbol{\omega}$ – угловая скорость КА, \mathbf{r}_s – положение центра масс КА, $\rho = \|\boldsymbol{\rho}\| = \|\mathbf{N}\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_s\|$ – расстояние от спутника до точки наблюдения. Исходя из этих требований, можно получить выражения для компонент угловой скорости аппарата

$$\begin{aligned}\omega_2 &= -\frac{(\boldsymbol{\Omega}_E \times \mathbf{N}\mathbf{r}_p - \mathbf{V}_s, \mathbf{e}_3)}{\rho}, \\ \omega_3 &= \frac{(\boldsymbol{\Omega}_E \times \mathbf{N}\mathbf{r}_p - \mathbf{V}_s, \mathbf{e}_2)}{\rho} + \frac{V}{f}.\end{aligned}\quad (3)$$

Выражение для ω_1 может быть получено с помощью уравнений (1). Базисные векторы ОСК определяются следующим образом (рассматривается случай идеального управления, когда ВСК совмещена с ОСК):

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_1 &= \frac{\boldsymbol{\rho}}{\rho}, \\ \mathbf{e}_3 &= \frac{\mathbf{e}_1 \times \mathbf{N}\boldsymbol{\tau}}{|\mathbf{e}_1 \times \mathbf{N}\boldsymbol{\tau}|}, \boldsymbol{\tau} = \frac{\partial \mathbf{r}_p}{\partial p}, \\ \mathbf{e}_2 &= \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1.\end{aligned}\quad (4)$$

Здесь, в силу малых размеров спутника по сравнению с радиусом орбиты, пренебрегаем разницей между положением центра масс КА и центра чувствительного элемента. Производные базисных векторов в этом случае:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{e}}_1 &= \frac{\dot{\mathbf{N}}\mathbf{r}_p + \mathbf{N}\boldsymbol{\tau}\dot{p} - \mathbf{V}_s - (\dot{\mathbf{N}}\mathbf{r}_p + \mathbf{N}\boldsymbol{\tau}\dot{p} - \mathbf{V}_s, \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1}{\rho}, \\ \dot{\mathbf{e}}_3 &= \frac{\dot{\mathbf{e}}_1 \times \mathbf{N}\boldsymbol{\tau} + \mathbf{e}_1 \times (\dot{\mathbf{N}}\boldsymbol{\tau} + \dot{p}\mathbf{N}) - \mathbf{e}_3 (\dot{\mathbf{e}}_1 \times \mathbf{N}\boldsymbol{\tau} + \mathbf{e}_1 \times (\dot{\mathbf{N}}\boldsymbol{\tau} + \dot{p}\mathbf{N}\partial\boldsymbol{\tau}/\partial p), \mathbf{e}_3)}{|\mathbf{e}_1 \times \mathbf{N}\boldsymbol{\tau}|}, \\ \dot{\mathbf{e}}_2 &= \dot{\mathbf{e}}_3 \times \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3 \times \dot{\mathbf{e}}_1.\end{aligned}\quad (5)$$

Подставляя эти соотношения в (1), можно получить следующие выражения для компонент угловой скорости КА:

$$\begin{aligned}\omega_1 &= (\dot{\mathbf{e}}_2, \mathbf{e}_3), \\ \omega_2 &= -(\dot{\mathbf{e}}_1, \mathbf{e}_3) = -\frac{(\dot{\mathbf{N}}\mathbf{r}_p + \mathbf{N}\boldsymbol{\tau}\dot{p} - \mathbf{V}_s, \mathbf{e}_3)}{\rho}, \\ \omega_3 &= (\dot{\mathbf{e}}_1, \mathbf{e}_2) = \frac{(\dot{\mathbf{N}}\mathbf{r}_p + \mathbf{N}\boldsymbol{\tau}\dot{p} - \mathbf{V}_s, \mathbf{e}_2)}{\rho}.\end{aligned}$$

Сравнивая с выражениями (3), а также учитывая $\dot{\mathbf{N}} = [\boldsymbol{\Omega}_E]_{\times} \mathbf{N}$, можно получить следующие уравнения:

$$\frac{(\mathbf{N}\boldsymbol{\tau}\dot{p}, \mathbf{e}_3)}{\rho} = \frac{(\mathbf{N}\boldsymbol{\tau}\dot{p}, \mathbf{e}_1 \times \mathbf{N}\boldsymbol{\tau})}{\rho |\mathbf{e}_1 \times \mathbf{N}\boldsymbol{\tau}|} \equiv 0,$$

$$\dot{p} \frac{(\mathbf{N}\boldsymbol{\tau}, \mathbf{e}_2)}{\rho} = \frac{V}{f}.$$

Из второго выражения легко получить дифференциальное уравнение на параметр траектории p

$$\dot{p} = \frac{\rho(t, p)V}{f} \frac{1}{(\mathbf{N}\boldsymbol{\tau}(t, p), \mathbf{e}_2(t, p))},$$

решение которого в совокупности с соотношениями (4) и (5) полностью определяет требуемое угловое движение аппарата, а точнее ориентацию и угловую скорость ОСК.

3. Построение управления, влияние возмущений

3.1 ПД-регулятор

Для реализации уже полученного углового движения КА в настоящей работе используется алгоритм, основанный на применении функции Ляпунова, также известный как *пропорционально-дифференциальный регулятор* (ПД-регулятор) [7–9]. Задачей управления является совмещение ВСК и ОСК.

Для вывода закона управления используются динамические и кинематические уравнения движения КА

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{K}} + \boldsymbol{\omega}_{abc} \times \mathbf{K} &= \mathbf{M}_{внеш} + \mathbf{M}_{упр}, \\ \dot{\mathbf{D}} &= -[\boldsymbol{\omega}_{abc}]_{\times} \mathbf{D}, \\ \dot{\mathbf{F}} &= -[\mathbf{G}^T \boldsymbol{\omega}_{отн}]_{\times} \mathbf{F}, \end{aligned} \quad (6)$$

где $\mathbf{K} = \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_{abc}$ – кинетический момент КА, $\boldsymbol{\omega}_{abc}$ – его угловая скорость, спроецированная на оси ССК, \mathbf{D} – матрица перехода из ИСК в ССК, $\boldsymbol{\omega}_{отн} = \boldsymbol{\omega}_{abc} - \mathbf{G}\mathbf{F}\mathbf{G}^T \boldsymbol{\omega}_{он}$, $\boldsymbol{\omega}_{он} = \mathbf{G}\boldsymbol{\Omega}_{он}$, $\boldsymbol{\Omega}_{он}$ – угловая скорость ОСК, спроецированная на оси этой системы, $\mathbf{M}_{внеш}, \mathbf{M}_{упр}$ – момент внешних сил и управляющий момент соответственно. Последнее уравнение, принимая во внимание постоянство матрицы перехода между ВСК и ССК \mathbf{G} и свойство, что для любой матрицы направляющих косинусов \mathbf{L} и вектора \mathbf{y} выполняется соотношение

$$[\mathbf{L}\mathbf{y}]_{\times} = \mathbf{L}[\mathbf{y}]_{\times} \mathbf{L}^T,$$

можно переписать в виде

$$\dot{\mathbf{A}} = -[\boldsymbol{\omega}_{отн}]_{\times} \mathbf{A}, \quad \mathbf{A} = \mathbf{GFG}^T.$$

В качестве кандидата на функцию Ляпунова выберем

$$V = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}_{отн}, \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_{отн}) + k_a(3 - \text{tr}\mathbf{A}), \quad k_a > 0.$$

Легко видеть, что эта функция неотрицательна, а нулю равна только когда ВСК и ОСК совмещены. Дифференцируя V с учетом (6), можно получить выражение

$$\dot{V} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}_{отн}, \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{отн}) - k_a \text{tr} \dot{\mathbf{A}} = (\boldsymbol{\omega}_{отн}, \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{абс} + \mathbf{J}[\boldsymbol{\omega}_{отн}]_{\times} \mathbf{A}\boldsymbol{\omega}_{он} - \mathbf{J}\mathbf{A}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{он} + k_a \mathbf{S}),$$

где $\mathbf{S} = (a_{23} - a_{32} \quad a_{31} - a_{13} \quad a_{12} - a_{21})$, a_{ij} – компоненты матрицы \mathbf{A} . Если потребовать

$$\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{абс} + \mathbf{J}[\boldsymbol{\omega}_{отн}]_{\times} \mathbf{A}\boldsymbol{\omega}_{он} - \mathbf{J}\mathbf{A}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{он} + k_a \mathbf{S} = -k_{\omega} \boldsymbol{\omega}_{отн}, \quad k_{\omega} > 0,$$

то $\dot{V} \leq 0$. Выражение для управляющих моментов в этом случае записывается в виде

$$\mathbf{M}_{упр} = -\mathbf{M}_{внеш} + \boldsymbol{\omega}_{абс} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_{абс} - \mathbf{J}[\boldsymbol{\omega}_{отн}]_{\times} \mathbf{A}\boldsymbol{\omega}_{он} + \mathbf{J}\mathbf{A}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{он} - k_a \mathbf{S} - k_{\omega} \boldsymbol{\omega}_{отн}. \quad (7)$$

Уравнения углового движения КА при этом принимают вид

$$\begin{aligned} \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{отн} + k_{\omega} \boldsymbol{\omega}_{отн} + k_a \mathbf{S} &= 0, \\ \dot{\mathbf{A}} &= -[\boldsymbol{\omega}_{отн}]_{\times} \mathbf{A}. \end{aligned} \quad (8)$$

При таком выборе управления ни одна целая траектория, кроме траектории $\mathbf{A} \equiv \mathbf{E}_{3 \times 3}, \boldsymbol{\omega}_{отн} \equiv 0$, не принадлежит множеству $(\mathbf{A}, \boldsymbol{\omega}_{отн}): \dot{V} = 0$, и, следовательно, согласно теореме Барбашина-Красовского [10], положение $\mathbf{A} \equiv \mathbf{E}_{3 \times 3}, \boldsymbol{\omega}_{отн} \equiv 0$ будет асимптотически устойчиво.

В дальнейшем эта система уравнений может быть использована для оценки влияния возмущений, действующих на КА.

3.2 Влияние возмущений

В выражении (7) присутствует слагаемое $\mathbf{M}_{внеш}$, вбирающее все внешние моменты, воздействующие на аппарат. Однако модель внешних моментов часто недостаточно точна или слишком сложна для вычисления на бортовом компьютере КА, что приводит к появлению дополнительных членов в правых частях уравнений (8):

$$\begin{aligned} \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{отн} + k_{\omega} \boldsymbol{\omega}_{отн} + k_a \mathbf{S} &= \mathbf{M}_{возм}, \\ \dot{\mathbf{A}} &= -[\boldsymbol{\omega}_{отн}]_{\times} \mathbf{A}, \end{aligned}$$

где $\mathbf{M}_{\text{возм}}$ обозначает сумму всех возмущающих моментов, которые действуют на аппарат. В качестве возмущений в настоящей работе для определенности рассматриваются гравитационный и аэродинамический моменты, а также неточность знания тензора инерции КА (однако подход, изложенный в работе, является универсальным, и его можно применить и для других возмущений):

$$\mathbf{M}_{\text{атм}} = -\frac{\rho_{\text{атм}} C_x S v^2 r_a \mathbf{e}_a \times \mathbf{e}_v}{2}, \quad |\mathbf{e}_a| = |\mathbf{e}_v| = 1,$$

$$\mathbf{M}_{\text{грав}} = 3 \frac{\mu_E}{r_s^5} \mathbf{r}_s \times \mathbf{J} \mathbf{r}_s,$$

$$\mathbf{M}_{\text{ин}} = \boldsymbol{\omega}_{\text{абс}} \times \delta \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}_{\text{абс}} + \delta \mathbf{J} \left(-[\boldsymbol{\omega}_{\text{отн}}]_{\times} \mathbf{A} \boldsymbol{\omega}_{\text{отн}} + \mathbf{A} \dot{\boldsymbol{\omega}}_{\text{отн}} \right),$$

где $\rho_{\text{атм}}$ – плотность атмосферы, C_x – коэффициент сопротивления, S – площадь поперечного сечения КА, $v \mathbf{e}_v$ – скорость центра масс КА, $r_a \mathbf{e}_a$ – радиус-вектор, соединяющий центр масс и центр давления КА, μ_E – гравитационный параметр Земли, $\delta \mathbf{J}$ – ошибка знания тензора инерции.

Для дальнейшего анализа уравнений углового движения КА приведем их к безразмерному виду

$$\mathbf{I} \boldsymbol{\Omega}' + K_a \mathbf{S} + K_{\omega} \boldsymbol{\Omega} = \varepsilon_1 \mathbf{M}_1 + \varepsilon_2 \mathbf{M}_2 + \varepsilon_3 \mathbf{M}_3,$$

$$\mathbf{A}' = -[\boldsymbol{\Omega}]_{\times} \mathbf{A},$$

$$\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}_{\text{отн}} \sqrt{\frac{M_0}{J_0}}, \quad q = t \sqrt{\frac{M_0}{J_0}}, \quad \mathbf{I} = \frac{\mathbf{J}}{J_0},$$

$$\delta \mathbf{I} = \frac{\delta \mathbf{J}}{J_0}, \quad K_a = \frac{k_a}{M_0}, \quad K_{\omega} = \frac{k_{\omega}}{\sqrt{J_0 M_0}},$$

$$\varepsilon_1 = -\frac{\rho_{\text{атм}} C_x S v^2 r_a}{2 M_0}, \quad \mathbf{M}_1 = \mathbf{e}_a \times \mathbf{e}_v,$$

$$\varepsilon_2 = \frac{3 \omega_{\text{кр}}^2 J_0}{M_0}, \quad \mathbf{M}_2 = \mathbf{E}_3 \times \mathbf{I} \mathbf{E}_3,$$

$$\varepsilon_3 = \frac{J_0 \omega_{\text{абс}}^2}{M_0}, \quad \mathbf{M}_3 = \frac{\boldsymbol{\omega}_{\text{абс}} \times \delta \mathbf{I} \boldsymbol{\omega}_{\text{абс}}}{\omega_{\text{абс}}^2} + \frac{\delta \mathbf{I}}{\omega_{\text{абс}}^2} \left(-[\boldsymbol{\omega}_{\text{отн}}]_{\times} \mathbf{A} \boldsymbol{\omega}_{\text{отн}} + \mathbf{A} \dot{\boldsymbol{\omega}}_{\text{отн}} \right),$$

где штрихом обозначается производная по q , M_0 – максимальный управляющий момент, который способна реализовать система управления КА, $J_0 = \max_{i,j} (J_{ij})$, ε_i – характерная величина i -го возмущающего момента.

Полагается, что $\varepsilon_i \ll 1$. Это позволяет предположить малое отклонение ВСК от ОСК, что, в свою очередь, делает возможной линеаризацию уравнений движений вблизи асимптотически устойчивого положения равновесия

$\alpha_i = 0$, $\omega_{отн} = 0$ невозмущенной системы. Используется представление матрицы направляющих косинусов \mathbf{A} с помощью углов Крылова, которые представляют собой последовательность поворотов $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_1$ вокруг второй, третьей и первой осей соответственно. В этом случае матрица \mathbf{A} имеет вид

$$\begin{aligned} a_{11} &= \cos \alpha_2 \cos \alpha_3, & a_{12} &= \sin \alpha_3, \\ a_{21} &= -\cos \alpha_2 \sin \alpha_3 \cos \alpha_1 + \sin \alpha_2 \sin \alpha_1, & a_{22} &= \cos \alpha_3 \cos \alpha_1, \\ a_{31} &= \cos \alpha_2 \sin \alpha_3 \sin \alpha_1 + \sin \alpha_2 \cos \alpha_1, & a_{23} &= \sin \alpha_2 \sin \alpha_3 \cos \alpha_1 + \cos \alpha_2 \sin \alpha_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{31} &= \cos \alpha_2 \sin \alpha_3 \sin \alpha_1 + \sin \alpha_2 \cos \alpha_1, \\ a_{32} &= -\cos \alpha_3 \sin \alpha_1, \\ a_{33} &= -\sin \alpha_2 \sin \alpha_3 \sin \alpha_1 + \cos \alpha_2 \cos \alpha_1. \end{aligned}$$

Линеаризуя эти выражения вблизи $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, можно получить выражения для \mathbf{A} и \mathbf{S}

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_3 & -\alpha_2 \\ -\alpha_3 & 1 & \alpha_1 \\ \alpha_2 & -\alpha_1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{S} = 2(\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3)^T = 2\boldsymbol{\alpha}.$$

Выражение для угловой скорости при этом может быть записано в виде

$$\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\alpha}', \quad \boldsymbol{\Omega}' = \boldsymbol{\alpha}''.$$

Таким образом, линеаризованные уравнения принимают вид

$$\mathbf{I}\boldsymbol{\alpha}'' + K_\omega \boldsymbol{\alpha}' + 2K_a \boldsymbol{\alpha} = \varepsilon_1 \mathbf{M}_1 + \varepsilon_2 \mathbf{M}_2 + \varepsilon_3 \mathbf{M}_3.$$

Частное решение этого уравнения может быть представлено в виде суммы независимых частных решений, поэтому целесообразным является рассмотрение лишь уравнение общего вида

$$\mathbf{I}\boldsymbol{\alpha}'' + K_\omega \boldsymbol{\alpha}' + 2K_a \boldsymbol{\alpha} = \varepsilon \mathbf{M},$$

где $\varepsilon \ll 1$. В силу малости ε , представляется возможным использовать метод Пуанкаре [11] разложения решения в ряд по степеням малого параметра

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}^0 + \varepsilon \boldsymbol{\alpha}^1 + \varepsilon^2 \boldsymbol{\alpha}^2 + \dots$$

Итоговая система уравнений есть

$$\mathbf{I}(\boldsymbol{\alpha}^0)'' + K_{\omega}(\boldsymbol{\alpha}^0)' + 2K_a\boldsymbol{\alpha}^0 = 0,$$

$$\mathbf{I}(\boldsymbol{\alpha}^1)'' + K_{\omega}(\boldsymbol{\alpha}^1)' + 2K_a\boldsymbol{\alpha}^1 = \mathbf{M}(q, \boldsymbol{\alpha}^0),$$

...

Предполагая диагональный вид \mathbf{I} , эту систему можно переписать в виде (здесь и далее не рассматриваются возмущения второго и большего порядков)

$$I_{ii}(\alpha_i^0)'' + K_{\omega}(\alpha_i^0)' + 2K_a\alpha_i^0 = 0,$$

$$I_{ii}(\alpha_i^1)'' + K_{\omega}(\alpha_i^1)' + 2K_a\alpha_i^1 = M(q, \boldsymbol{\alpha}^0), \quad i = 1, 2, 3.$$

Вводя обозначения $2\gamma_i = \frac{K_{\omega}}{I_{ii}}$, $\omega_i^2 = \frac{2K_a}{I_{ii}}$, $f_i = \frac{M(q, \boldsymbol{\alpha}^0)}{I_{ii}}$, уравнения перепишем в виде

$$(\alpha_i^0)'' + 2\gamma_i(\alpha_i^0)' + \omega_i^2\alpha_i^0 = 0,$$

$$(\alpha_i^1)'' + 2\gamma_i(\alpha_i^1)' + \omega_i^2\alpha_i^1 = f_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Решения и первой, и второй группы уравнений зависят от соотношений между γ_i и ω_i .

1. Случай $\gamma_i^2 - \omega_i^2 > 0$

В этом случае решение однородного уравнения представляется в виде

$$\alpha_i^0 = A \exp((- \gamma_i + \varphi_i)q) + B \exp((- \gamma_i - \varphi_i)q), \quad \varphi_i = \sqrt{\gamma_i^2 - \omega_i^2}.$$

Полученное решение подставляется в $f_i(q, \boldsymbol{\alpha}^0)$, так что $f_i(q, \boldsymbol{\alpha}^0(q)) \rightarrow f_i(q)$. Для решения неоднородного уравнения используется метод вариации постоянных. Система дифференциальных уравнений для A, B представляется в виде

$$A' \exp((- \gamma_i + \varphi_i)q) + B' \exp((- \gamma_i - \varphi_i)q) = 0,$$

$$(- \gamma_i + \varphi_i)A' \exp((- \gamma_i + \varphi_i)q) +$$

$$+ (- \gamma_i - \varphi_i)B' \exp((- \gamma_i - \varphi_i)q) = f_i(q).$$

Ее решения суть

$$A' = \frac{f_i(q) \exp((- \gamma_i - \varphi_i)q)}{2\varphi_i},$$

$$B' = -\frac{f_i(q) \exp((- \gamma_i + \varphi_i)q)}{2\varphi_i},$$

а соответствующее решение неоднородного уравнения –

$$\alpha_i^1 = \int_0^q \frac{f_i(p)}{\varphi_i} \exp(-\gamma_i(q-p)) \operatorname{sh}(\varphi_i(q-p)) dp.$$

2. Случай $\gamma_i^2 - \omega_i^2 < 0$

Решение однородного уравнения представляется в виде

$$\alpha_i^0 = A \exp(-\gamma_i q) \cos(\psi_i q) + B \exp(-\gamma_i q) \sin(\psi_i q), \quad \psi_i = \sqrt{\omega_i^2 - \gamma_i^2}.$$

Аналогично предыдущему случаю, система для A, B представляется в виде

$$\begin{aligned} A' \exp(-\gamma_i q) \cos(\psi_i q) + B' \exp(-\gamma_i q) \sin(\psi_i q) &= 0, \\ -\psi_i A' \exp(-\gamma_i q) \sin(\psi_i q) + \psi_i B' \exp(-\gamma_i q) \cos(\psi_i q) &= f_i(q). \end{aligned}$$

Итоговые выражения для A', B' принимают вид

$$A' = -\frac{f_i(q) \exp(\gamma_i q)}{\psi_i} \sin(\psi_i q),$$

$$B' = \frac{f_i(q) \exp(\gamma_i q)}{\psi_i} \cos(\psi_i q),$$

а решение неоднородного уравнения –

$$\alpha_i^1 = \frac{1}{\psi_i} \int_0^q f_i(p) \exp(\gamma_i(p-q)) \sin(\psi_i(q-p)) dp.$$

3. Случай $\gamma_i^2 - \omega_i^2 = 0$

Решение однородного уравнения представляется в виде

$$\alpha_i^0 = A \exp(-\gamma_i q) + B q \exp(-\gamma_i q).$$

Система для метода вариации постоянных записывается как

$$\begin{aligned} A' \exp(-\gamma_i q) + B' q \exp(-\gamma_i q) &= 0, \\ -\gamma_i A' \exp(-\gamma_i q) + (1 - \gamma_i q) B' \exp(-\gamma_i q) &= f_i(q), \end{aligned}$$

а ее решения – в виде

$$B' = f_i(q) \exp(\gamma_i q),$$

$$A' = -q f_i(q) \exp(\gamma_i q).$$

Решение неоднородного уравнения в этом случае –

$$\alpha_i^1 = \int_0^q f_i(p) \exp(-\gamma_i(q-p))(q-p) dp.$$

Наиболее критичным для выполнения задачи съемки траектории является не точное знание движения КА под действием возмущений в каждый момент времени, а значение максимального отклонения угловой скорости и ориентации КА от заданной.

3.3 Оценка максимального отклонения

Для оценки максимального отклонения ориентации и точности стабилизации КА используются уже полученные выражения для α_i^0, α_i^1 . При этом интерес представляет только возмущение асимптотически устойчивого положения равновесия и для его нахождения полагаем $\alpha_i^0 \equiv 0$.

1. Случай $\gamma_i^2 - \omega_i^2 > 0$

В этом случае, как было показано в предыдущем пункте, решение принимает вид (с точностью до величин порядка ε^2)

$$\alpha_i(t) = \varepsilon \int_0^q \frac{f_i(p)}{\varphi_i} \exp(-\gamma_i(q-p)) \operatorname{sh}(\varphi_i(q-p)) dp.$$

Угловая скорость КА (в безразмерных переменных) при этом может быть вычислена по формуле

$$\Omega_i = (\alpha_i)' = -\varepsilon \int_0^q \frac{\gamma_i}{\varphi_i} f_i(p) \exp(-\gamma_i(q-p)) \operatorname{sh}(\varphi_i(q-p)) dp +$$

$$+ \varepsilon \int_0^q f_i(p) \exp(-\gamma_i(q-p)) \operatorname{ch}(\varphi_i(q-p)) dp.$$

Таким образом, вводя обозначение $f_{max} = \varepsilon \max_t (|f_i(q)|)$, можно получить оценки точности ориентации и стабилизации КА:

$$\begin{aligned}
|\alpha_i(q)| &\leq f_{max} \left| \int_0^q \frac{1}{\varphi_i} \exp(-\gamma_i(q-p)) \operatorname{sh}(\varphi_i(q-p)) dp \right| \leq \\
&\leq f_{max} \left| \int_0^\infty \frac{1}{\varphi_i} \exp(-\gamma_i x) \operatorname{sh}(\varphi_i x) dx \right| = f_{max} \frac{1}{\gamma_i^2 - \varphi_i^2} \\
|\Omega_i| &\leq \frac{f_{max}}{\varphi_i} \int_0^\infty \left| -\gamma_i \exp(-\gamma_i x) \operatorname{sh}(\varphi_i x) + \varphi_i \exp(-\gamma_i x) \operatorname{ch}(\varphi_i x) \right| dx = \\
&= 2f_{max} \left(\frac{\gamma_i + \varphi_i}{\gamma_i - \varphi_i} \right)^{\frac{\gamma_i}{2\varphi_i}} \frac{1}{\sqrt{\gamma_i^2 - \varphi_i^2}}
\end{aligned}$$

Возвращаясь к первоначальным обозначениям и размерным переменным, выражения для точности ориентации и стабилизации КА запишем в виде

$$\begin{aligned}
|\alpha_i(t)| &\leq \frac{M_{max}}{2k_a}, \\
|\omega_i(t)| &\leq \frac{2M_{max}}{\sqrt{2J_{ii}k_a}} \left(\frac{k_\omega + \sqrt{k_\omega^2 - 8k_a J_{ii}}}{k_\omega - \sqrt{k_\omega^2 - 8k_a J_{ii}}} \right)^{\frac{-k_\omega}{2\sqrt{k_\omega^2 - 8k_a J_{ii}}}},
\end{aligned}$$

где $M_{max} = f_{max} M_0 I_{ii}$ – значение максимального возмущающего момента.

2. Случай $\gamma_i^2 - \omega_i^2 < 0$

Выражения для углов ориентации и угловой скорости КА принимают вид

$$\begin{aligned}
\alpha_i(q) &= \frac{\varepsilon}{\psi_i} \int_0^q f_i(p) \exp(\gamma_i(p-q)) \sin(\psi_i(q-p)) dp, \\
\Omega_i(q) &= -\varepsilon \frac{\gamma_i}{\psi_i} \int_0^q f_i(p) \exp(\gamma_i(p-q)) \sin(\psi_i(q-p)) dp + \\
&\quad + \varepsilon \int_0^q f_i(p) \exp(\gamma_i(p-q)) \cos(\psi_i(q-p)) dp.
\end{aligned}$$

Для получения оценки используется вспомогательное соотношение

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \exp(-ax) |\sin(x)| dx &= \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \int_{\pi k}^{\pi(k+1)} \exp(-ax) \sin(x) dx = \\
&= \int_0^\pi \exp(-ax) \sin(x) dx \sum_{k=0}^\infty \exp(-a\pi k) = \operatorname{cth} \left(\frac{a\pi}{2} \right) \frac{1}{a^2 + 1}.
\end{aligned}$$

Значения максимальных ошибок ориентации и стабилизации могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned}
|\alpha_i(q)| &\leq \frac{f_{\max}}{\psi_i} \int_0^q \exp(\gamma_i(p-q)) |\sin(\psi_i(q-p))| dp \leq \\
&\leq \frac{f_{\max}}{\psi_i^2} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{\gamma_i}{\psi_i} x\right) |\sin(x)| dx = \operatorname{cth}\left(\frac{\gamma_i \pi}{2\psi_i}\right) \frac{f_{\max}}{\gamma_i^2 + \psi_i^2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|\Omega_i(q)| &= \left| -\varepsilon \frac{\sqrt{\gamma_i^2 + \psi_i^2}}{\psi_i} \int_0^q f(p) \exp(\gamma_i(p-q)) \sin(\psi_i(q-p) - \theta) dp \right| \leq \\
&\leq f_{\max} \frac{\sqrt{\gamma_i^2 + \psi_i^2}}{\psi_i^2} \exp\left(-\frac{\gamma_i \theta}{\psi_i}\right) \left(\int_{-\theta}^\infty \exp\left(-\frac{\gamma_i x}{\psi_i}\right) |\sin(x)| dx \right) \leq \\
&\leq \frac{f_{\max}}{\sqrt{\gamma_i^2 + \psi_i^2}} \exp\left(-\frac{\gamma_i \theta}{\psi_i}\right) \left(1 + \operatorname{cth}\left(\frac{\gamma_i \pi}{2\psi_i}\right)\right),
\end{aligned}$$

где

$$\theta = \arccos\left(\frac{\gamma_i}{\sqrt{\gamma_i^2 + \psi_i^2}}\right), \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

Переходя к исходным обозначениям и переменным, эти выражения можно переписать в виде

$$\begin{aligned}
|\alpha_i(t)| &\leq M_{\max} \operatorname{cth}\left(\frac{\pi k_\omega}{2\sqrt{8k_a J_{ii} - k_\omega^2}}\right) \frac{1}{2k_a}, \\
|\omega_i(t)| &\leq \frac{M_{\max}}{\sqrt{2J_{ii} k_a}} \exp\left(\frac{-k_\omega}{\sqrt{8k_a J_{ii} - k_\omega^2}} \arccos\left(\frac{k_\omega}{\sqrt{8k_a J_{ii}}}\right)\right) \left(1 + \operatorname{cth}\left(\frac{\pi k_\omega}{2\sqrt{8k_a J_{ii} - k_\omega^2}}\right)\right).
\end{aligned}$$

3. Случай $\gamma_i^2 - \omega_i^2 = 0$

Выражения для углов ориентации и угловой скорости КА в этом случае принимают вид

$$\begin{aligned}
\alpha_i &= \varepsilon \int_0^q f_i(p) \exp(-\gamma_i(q-p))(q-p) dp, \\
\Omega_i &= \varepsilon \int_0^q f_i(p) \exp(-\gamma_i(q-p))(1 - \gamma_i(q-p)) dp.
\end{aligned}$$

Оценка сверху для этих параметров может быть записана в виде

$$|\alpha_i| \leq f_{max} \int_0^{\infty} \exp(-\gamma_i x) x dx = \frac{f_{max}}{\gamma_i^2},$$

$$|\Omega_i| \leq f_{max} \int_0^{\infty} |\exp(-\gamma_i x)(1 - \gamma_i x)| dx = 2 \frac{f_{max}}{e\gamma_i}.$$

В исходных обозначениях эти соотношения записываются так:

$$|\alpha_i| \leq \frac{M_{max}}{2k_a},$$

$$|\omega_i| \leq 4 \frac{M_{max}}{ek_{\omega}}.$$

Таким образом, получены оценки точности ориентации и стабилизации КА при известных оценках максимального возмущающего момента, действующего на аппарат.

3.4 Влияние ошибок на съемку траектории

Как уже говорилось выше, из-за действующих на КА возмущающих моментов невозможно абсолютно точно совместить ВСК и ОСК. Кроме того, как правило, движение центра масс КА тоже известно с некоторой точностью. Все это может негативно сказаться на качестве снимаемого изображения: из-за ошибок ориентации и неточности знания положения центра масс КА происходит съемка не самого маршрута, а некоторой лежащей рядом с ним области, а ошибки стабилизации и неточность знания скорости движения аппарата могут привести к ошибкам в скорости бега изображения, что, в свою очередь, может привести к смазу отснятого изображения.

В случае достаточно малых отклонений ВСК от ОСК матрица перехода из ИСК в ВСК может быть записана в виде

$$\mathbf{K} = \mathbf{FB} \approx \left(\mathbf{E}_3 + \begin{pmatrix} 0 & \beta & -\alpha \\ -\beta & 0 & \gamma \\ \alpha & -\gamma & 0 \end{pmatrix} \right) \mathbf{B},$$

где α, β, γ – углы Крылова (последовательность поворотов 2-3-1). Выражения для базисных векторов ВСК могут быть записаны через эти углы и базисные векторы ОСК с помощью соотношений

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \mathbf{K}^T (1 \ 0 \ 0)^T = \mathbf{e}_1^0 + \beta \mathbf{e}_2^0 - \alpha \mathbf{e}_3^0 = \mathbf{e}_1^0 + \delta \mathbf{e}_1, \\ \mathbf{e}_2 &= \mathbf{K}^T (0 \ 1 \ 0)^T = \mathbf{e}_2^0 - \beta \mathbf{e}_1^0 + \gamma \mathbf{e}_3^0 = \mathbf{e}_2^0 + \delta \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_3 &= \mathbf{K}^T (0 \ 0 \ 1)^T = \mathbf{e}_3^0 + \alpha \mathbf{e}_1^0 - \gamma \mathbf{e}_2^0 = \mathbf{e}_3^0 + \delta \mathbf{e}_3, \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь и далее верхним индексом 0 обозначены величины, которые использовались при построении ОСК.

Для определения текущей точки визирования \mathbf{r}_p , а следовательно, и ее отклонения от заданного положения $\delta\mathbf{r}_p$, необходимо найти пересечение линии визирования и Земли. В частности, используя представление Земли в виде эллипсоида вращения, для этого требуется решить квадратное уравнение

$$\frac{(r_1 + e_1 l)^2}{a^2} + \frac{(r_2 + e_2 l)^2}{a^2} + \frac{(r_3 + e_3 l)^2}{a^2(1 - \sigma)^2} = 1, \quad (10)$$

где r_i, e_i – компоненты векторов \mathbf{r}_s и \mathbf{e}_1 в ИСК соответственно, l – искомая величина, a – большая полуось эллипсоида вращения, $\sigma \approx 1/300$ – коэффициент полярного сжатия. Всего могут быть реализованы три случая:

- 1) уравнение не имеет корней, что означает что камера КА ориентирована не на Землю;
- 2) уравнение имеет один корень, что означает что ведется съемка горизонта;
- 3) уравнение имеет два корня. В этом случае выбирается наименьший по модулю корень, так как именно он соответствует точке визирования.

Принимая во внимание малость σ , уравнение (10) переписывается в виде

$$l^2(1 + 2\sigma) + 2l((\mathbf{r}_s, \mathbf{e}_1) + 2\sigma r_3 e_3) + |\mathbf{r}_s|^2 - a^2 + 2\sigma r_3^2 = 0,$$

а его решения принимают вид

$$l_{1,2} = -(\mathbf{r}_s, \mathbf{e}_1) \pm \sqrt{(\mathbf{r}_s, \mathbf{e}_1)^2 - |\mathbf{r}_s|^2 + a^2} + \sigma \left(-2r_3 e_3 + 2(\mathbf{r}_s, \mathbf{e}_1) \mp \frac{r_3^2 - |\mathbf{r}_s|^2 + a^2 + 2(\mathbf{r}_s, \mathbf{e}_1)^2 - 2r_3 e_3 (\mathbf{r}_s, \mathbf{e}_1)}{\sqrt{(\mathbf{r}_s, \mathbf{e}_1)^2 - |\mathbf{r}_s|^2 + a^2}} \right). \quad (11)$$

Здесь были отброшены величины второго порядка малости по σ . Для дальнейшего учета влияния ошибок ориентации $\delta\mathbf{e}_i$ и неточности знания положения центра масс $\delta\mathbf{r}_s$ КА в (11) удобно отбросить слагаемое, пропорциональное σ , так как его вклад в отклонение точки визирования на два порядка меньше, чем от первых двух слагаемых.

Учитывая неточность знания положения центра масс КА $\mathbf{r}_s = \mathbf{r}_s^0 + \delta\mathbf{r}_s$ и ошибку в ориентации аппарата, а также отбрасывая величины второго порядка малости, это выражение можно переписать в виде

$$\begin{aligned}
l &= -(\mathbf{r}_s^0 + \delta\mathbf{r}_s, \mathbf{e}_1^0 + \delta\mathbf{e}_1) - \sqrt{(\mathbf{r}_s^0 + \delta\mathbf{r}_s, \mathbf{e}_1^0 + \delta\mathbf{e}_1)^2 - ((\mathbf{r}_s^0 + \delta\mathbf{r}_s)^2 - a^2)} = \\
&= -(\mathbf{r}_s^0, \mathbf{e}_1^0) - (\delta\mathbf{r}_s, \mathbf{e}_1^0) - (\mathbf{r}_s^0, \delta\mathbf{e}_1) - \sqrt{(\mathbf{r}_s^0, \mathbf{e}_1^0)^2 - ((\mathbf{r}_s^0)^2 - a^2)} \times \\
&\times \left(1 + 2 \frac{(\mathbf{r}_s^0, \mathbf{e}_1^0)((\delta\mathbf{r}_s, \mathbf{e}_1^0) + (\mathbf{r}_s^0, \delta\mathbf{e}_1)) - (\mathbf{r}_s^0, \delta\mathbf{r}_s)}{(\mathbf{r}_s^0, \mathbf{e}_1^0)^2 - ((\mathbf{r}_s^0)^2 - a^2)} \right)^{\frac{1}{2}} \approx l^0 + \delta l, \\
\delta l &= -(\delta\mathbf{r}_s, \mathbf{e}_1^0) - (\mathbf{r}_s^0, \delta\mathbf{e}_1) - \frac{(\mathbf{r}_s^0, \mathbf{e}_1^0)((\delta\mathbf{r}_s, \mathbf{e}_1^0) + (\mathbf{r}_s^0, \delta\mathbf{e}_1)) - (\mathbf{r}_s^0, \delta\mathbf{r}_s)}{\sqrt{(\mathbf{r}_s^0, \mathbf{e}_1^0)^2 - ((\mathbf{r}_s^0)^2 - a^2)}}, \\
l^0 &= -(\mathbf{r}_s^0, \mathbf{e}_1^0) - \sqrt{(\mathbf{r}_s^0, \mathbf{e}_1^0)^2 - ((\mathbf{r}_s^0)^2 - a^2)}.
\end{aligned}$$

Выражение для точки визирования записывается в виде

$$\mathbf{r}_p = \mathbf{r}_s + \mathbf{e}_1 l = \mathbf{r}_s^0 + \delta\mathbf{r}_s + \mathbf{e}_1^0 l^0 + \delta\mathbf{e}_1 l^0 + \mathbf{e}_1^0 \delta l = \mathbf{r}_p^0 + \delta\mathbf{r}_p + \delta\mathbf{e}_1 l^0 + \mathbf{e}_1^0 \delta l.$$

Вводя обозначения

$$\begin{aligned}
\delta\mathbf{x} &= (\delta\alpha, \delta\beta, \delta\gamma, \delta\omega_1, \delta\omega_2, \delta\omega_3, \delta r_s^1, \delta r_s^2, \delta r_s^3, \delta V_s^1, \delta V_s^2, \delta V_s^3)^T = \\
&= (\delta\boldsymbol{\Psi}^T, \delta\boldsymbol{\omega}^T, \delta\mathbf{r}_s^T, \delta\mathbf{V}_s^T)^T,
\end{aligned}$$

$$\mathbf{M} = [\mathbf{M}_{1-3,1}, \mathbf{M}_{1-3,2}, \mathbf{M}_{1-3,3-6}, \mathbf{M}_{1-3,7-9}, \mathbf{M}_{1-3,10-12}]$$

$$\mathbf{M}_{1-3,1} = \mathbf{e}_1^0 \frac{(\mathbf{r}_s^0, \mathbf{e}_1^0)(\mathbf{r}_s^0, \mathbf{e}_3^0)}{\sqrt{(\mathbf{r}_s^0, \mathbf{e}_1^0)^2 - ((\mathbf{r}_s^0)^2 - R^2)}} + \mathbf{e}_1^0 (\mathbf{r}_s^0, \mathbf{e}_3^0) - \mathbf{e}_3^0 l^0,$$

$$\mathbf{M}_{1-3,2} = \mathbf{e}_2^0 l^0 - \mathbf{e}_1^0 \frac{(\mathbf{r}_s^0, \mathbf{e}_1^0)(\mathbf{r}_s^0, \mathbf{e}_2^0)}{\sqrt{(\mathbf{r}_s^0, \mathbf{e}_1^0)^2 - ((\mathbf{r}_s^0)^2 - R^2)}} - \mathbf{e}_1^0 (\mathbf{r}_s^0, \mathbf{e}_2^0),$$

$$\mathbf{M}_{1-3,3-6} = \mathbf{0}_{3 \times 4},$$

$$\mathbf{M}_{1-3,7-9} = \mathbf{E}_{3 \times 3} - \mathbf{e}_1^0 (\mathbf{e}_1^0)^T + \frac{\mathbf{e}_1^0 (\mathbf{r}_s^0)^T - (\mathbf{r}_s^0, \mathbf{e}_1^0) \mathbf{e}_1^0 (\mathbf{e}_1^0)^T}{\sqrt{(\mathbf{r}_s^0, \mathbf{e}_1^0)^2 - ((\mathbf{r}_s^0)^2 - R^2)}},$$

$$\mathbf{M}_{1-3,10-12} = \mathbf{0}_{3 \times 3},$$

выражение для точки визирования перепишем в более компактном виде

$$\mathbf{r}_p = \mathbf{r}_p^0 + \delta\mathbf{r}_p, \quad \delta\mathbf{r}_p = \mathbf{M} \delta\mathbf{x}.$$

Для получения оценок влияния ошибок на скорость бега изображения используется цепочка выражений для скорости точки визирования относительно КА

$$\mathbf{V}_{отн} = \mathbf{V}_p - \mathbf{V}_s - (\mathbf{B}^T \mathbf{F}^T \mathbf{G}^T \boldsymbol{\omega}) \times (\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_s) = \boldsymbol{\Omega}_E \times \mathbf{r}_p - \mathbf{V}_s - (\mathbf{B}^T \mathbf{F}^T \mathbf{G}^T \boldsymbol{\omega}) \times (\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_s).$$

Наличие множителя $\mathbf{B}^T \mathbf{F}^T \mathbf{G}^T$ перед угловой скоростью необходимо здесь для учета того, что угловая скорость задается в ССК, а все остальные величины – в ИСК. Матрица \mathbf{F} , как и при расчете отклонения точки визирования, имеет вид

$$\mathbf{F} \approx \mathbf{E}_3 + \begin{pmatrix} 0 & \beta & -\alpha \\ -\beta & 0 & \gamma \\ \alpha & -\gamma & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{E}_3 + \delta \mathbf{F},$$

а угловая скорость записывается в виде $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}^0 + \delta \boldsymbol{\omega}$. Таким образом, выражение для относительной скорости точки визирования запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{отн} &= \mathbf{V}_{отн}^0 + \delta \mathbf{V}, \quad \mathbf{V}_{отн}^0 = \boldsymbol{\Omega}_E \times \mathbf{r}_p^0 - \mathbf{V}_s^0 - \mathbf{B}^T \mathbf{G}^T \boldsymbol{\omega}^0 \times (\mathbf{r}_p^0 - \mathbf{r}_s^0), \\ \delta \mathbf{V} &= [\boldsymbol{\Omega}_E - \mathbf{B}^T \mathbf{G}^T \boldsymbol{\omega}^0]_{\times} \delta \mathbf{r}_p - \delta \mathbf{V}_s + [\mathbf{B}^T \mathbf{G}^T \boldsymbol{\omega}^0]_{\times} \delta \mathbf{r}_s + \\ &+ [\mathbf{r}_p^0 - \mathbf{r}_s^0]_{\times} (\mathbf{B}^T \delta \mathbf{F}^T \mathbf{G}^T \boldsymbol{\omega}^0 + \mathbf{B}^T \mathbf{G}^T \delta \boldsymbol{\omega}). \end{aligned}$$

Выражения для скорости бега изображения записываются в виде

$$\begin{aligned} \frac{f}{\rho} (\mathbf{V}_{отн}, \mathbf{e}_3) &= \frac{f}{\rho} ((\delta \mathbf{V}, \mathbf{e}_3^0) + (\mathbf{V}_{отн}^0, \delta \mathbf{e}_3)), \\ \frac{f}{\rho} (\mathbf{V}_{отн}, \mathbf{e}_2) &= -\frac{V \rho^0}{\rho} + \frac{f}{\rho} ((\delta \mathbf{V}, \mathbf{e}_2^0) + (\mathbf{V}_{отн}^0, \delta \mathbf{e}_2)), \\ \rho^0 &= \|\mathbf{r}_p^0 - \mathbf{r}_s^0\|, \quad \frac{1}{\rho} = \frac{1}{\|\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_s\|} \approx \frac{1}{\rho^0} \left(1 - \frac{(\mathbf{r}_p^0 - \mathbf{r}_s^0, \delta \mathbf{r}_p - \delta \mathbf{r}_s)}{(\rho^0)^2} \right). \end{aligned}$$

Здесь учтены условия на скорость бега изображения, которые выполняются при точном совмещении ВСК и ОСК (2)

$$\begin{aligned} (\mathbf{V}_{отн}^0, \mathbf{e}_3^0) &= 0, \\ (\mathbf{V}_{отн}^0, \mathbf{e}_2^0) &= -\frac{V \rho^0}{f}. \end{aligned}$$

Учитывая соотношения (9) и обозначения

$$\frac{f}{\rho}(\mathbf{V}_{omn}, \mathbf{e}_i) = V_i^0 + \delta V_i, \quad i = 2, 3,$$

$$V_2^0 = -V, \quad V_3^0 = 0,$$

выражения для ошибок в скорости бега изображения записываются так:

$$\delta V_3 = \frac{f}{\rho^0} \left((\delta \mathbf{V}, \mathbf{e}_3^0) + \alpha (\mathbf{V}_{omn}^0, \mathbf{e}_1^0) + \gamma \frac{V \rho^0}{f} \right),$$

$$\delta V_2 = \frac{f}{\rho^0} \left((\delta \mathbf{V}, \mathbf{e}_2^0) - \beta (\mathbf{V}_{omn}^0, \mathbf{e}_1^0) \right) + V \frac{(\mathbf{r}_p^0 - \mathbf{r}_s^0, \delta \mathbf{r}_p - \delta \mathbf{r}_s)}{(\rho^0)^2}.$$

Полученные выражения достаточно сложны и громоздки для анализа. Для их упрощения, во-первых, можно отбросить ошибку знания положения и скорости центра масс КА, так как эта ошибка никак не зависит от работы системы управления ориентацией. Во-вторых, как правило, съемка ведется достаточно близко к надиру, т.е.

$$\frac{r_s |\sin \varphi|}{\sqrt{a^2 - r_s^2 \sin^2 \varphi}} \ll 1$$

где φ – угол между местной вертикалью и радиус-вектором, соединяющим спутник и точку визирования. Принимая во внимание эти соображения, выражения для ошибок скорости бега изображения и сдвига точки визирования могут быть записаны в виде

$$|\delta \mathbf{r}_p| \approx \rho^0 |\delta \Psi|,$$

$$|\delta V_3| \approx f |\delta \Psi| (|\boldsymbol{\omega}^0| + |\boldsymbol{\Omega}_E|) + f |\delta \boldsymbol{\omega}| + V |\delta \Psi|,$$

$$|\delta V_2| \approx f |\delta \Psi| (|\boldsymbol{\omega}^0| + |\boldsymbol{\Omega}_E|) + f |\delta \boldsymbol{\omega}|.$$

Полученные выражения могут быть использованы для построения простой связи между параметрами системы ориентации КА и качеством снимаемого изображения.

3.5 Влияние кривизны траектории

Для съемки траекторий с малым радиусом кривизны, как правило, требуется обеспечивать довольно большую угловую скорость КА. Однако, в силу ограниченных возможностей системы управления ориентацией, реализовать такой режим движения не всегда удастся. Для получения оценок минимального радиуса кривизны траектории, при котором не происходит выхода за ограничения системы управления ориентацией, используется выражение для управляющего момента (7)

$$\mathbf{M}_{упр} = -\mathbf{M}_{внеш} + \boldsymbol{\omega}_{abc} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_{abc} + \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{он}.$$

При этом предполагается, что аппарат стабилизирован, то есть относительная угловая скорость равна нулю и ВСК совмещена с ОСК. Учитывая малость величины внешних моментов и производной опорного движения по сравнению с величиной векторного произведения $\boldsymbol{\omega}_{abc} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_{abc}$, получается следующая оценка для максимальной угловой скорости КА

$$|\omega_{max}| \approx \sqrt{\frac{M_0}{\max_{i,j} |J_{ii} - J_{jj}|}},$$

где M_0 – максимальный управляющий момент.

Ограничения, накладываемые на кривизну траектории, находятся из соотношений для угловой скорости

$$\begin{aligned} \omega_1 &= -(\dot{\mathbf{e}}_3, \mathbf{e}_2), \\ \omega_2 &= -\frac{(\boldsymbol{\Omega}_E \times \mathbf{N}\mathbf{r}_p - \mathbf{V}_s, \mathbf{e}_3)}{\rho}, \\ \omega_3 &= \frac{(\boldsymbol{\Omega}_E \times \mathbf{N}\mathbf{r}_p - \mathbf{V}_s, \mathbf{e}_2)}{\rho} + \frac{V}{f}. \end{aligned}$$

Используя явный вид выражений для базисных векторов, первое уравнение может быть переписано в виде

$$\begin{aligned} \omega_1 &= -\frac{(\dot{\mathbf{e}}_1 \times \mathbf{N}\boldsymbol{\tau} + \mathbf{e}_1 \times (\dot{\mathbf{N}}\boldsymbol{\tau} + \dot{p}\mathbf{N}\partial\boldsymbol{\tau}/\partial p), \mathbf{e}_2)}{|\mathbf{e}_1 \times \mathbf{N}\boldsymbol{\tau}|} = \\ &= \omega_2 \frac{(\mathbf{e}_1, \mathbf{N}\boldsymbol{\tau})}{|\mathbf{e}_1 \times \mathbf{N}\boldsymbol{\tau}|} - \frac{(\boldsymbol{\Omega}_E \times \mathbf{N}\boldsymbol{\tau}, \mathbf{e}_3)}{|\mathbf{e}_1 \times \mathbf{N}\boldsymbol{\tau}|} - \dot{p} \frac{(\mathbf{N}\partial\boldsymbol{\tau}/\partial p, \mathbf{e}_1 \times \mathbf{N}\boldsymbol{\tau})}{|\mathbf{e}_1 \times \mathbf{N}\boldsymbol{\tau}|^2}. \end{aligned}$$

Вводя дополнительную переменную ζ – угол между \mathbf{e}_1 и $\mathbf{N}\boldsymbol{\tau}$, а также учитывая выражение для кривизны траектории

$$\boldsymbol{\kappa} = \frac{\mathbf{N}\boldsymbol{\tau} \times \mathbf{N}\partial\boldsymbol{\tau}/\partial p}{|\mathbf{N}\boldsymbol{\tau}|^3},$$

итоговое выражение для ω_1 запишем в виде

$$\omega_1 = \omega_2 \text{ctg}(\zeta) - (\boldsymbol{\Omega}_E, \mathbf{e}_1) + (\boldsymbol{\Omega}_E, \mathbf{e}_2) \text{ctg}(\zeta) - \rho \frac{V}{f} \frac{(\mathbf{e}_1, \boldsymbol{\kappa})}{\sin^3 \zeta}.$$

Малым значениям $\sin \zeta$ соответствует съемка близко к горизонту, что на практике, как правило, не реализуется из-за больших геометрических искажений получаемых изображений. Например, ограничивая минимальное

значение $\sin \zeta \geq \sqrt{3}/2$ (оно эквивалентно съемке не далее чем в 30° от надира), можно получить условие, при выполнении которого точная съемка траектории является реализуемой:

$$\kappa \leq f 3\sqrt{3} \frac{(\omega_{max} - 2\Omega_E)}{8\rho V}. \quad (12)$$

Эта, достаточно грубая, оценка позволяет определить некоторый класс траекторий, которые заведомо могут быть сняты с использованием установленного на КА оборудования.

4. Численное моделирование

Для демонстрации работы алгоритма проводилось численное моделирование съемки маршрута на поверхности Земли. Параметры КА соответствуют аппарату ТаблетСат-Аврора компании «СПУТНИКС»:

1. Тензор инерции КА $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.002 & 0.005 \\ 0.002 & 0.579 & 0.009 \\ 0.005 & 0.009 & 0.5 \end{pmatrix}$.
2. Требуемая скорость бега изображения $V = 50 \text{ мм/с}$.
3. Фокусное расстояние линзы, установленной на КА – 6 м.
4. Спутник движется по круговой полярной орбите. Ее радиус составляет 7000 км.
5. Максимальный управляющий момент, реализуемый системой управления ориентацией КА, составляет $10^{-3} \text{ Н}\cdot\text{м}$, а минимальный – $10^{-7} \text{ Н}\cdot\text{м}$.

Исходя из выбранных характеристик системы ориентации КА, можно получить оценку для минимального радиуса кривизны снимаемой траектории, при которой съемка осуществима (12)

$$r_{крив} \geq 1000 \text{ км.}$$

Для построения маршрута на поверхности Земли в настоящей работе при компьютерном моделировании использовался эллипсоид Красовского. Точка на поверхности Земли задается своими координатами (широтой φ и долготой λ) с помощью формул

$$\mathbf{r}_p(p) = h(\varphi) \begin{pmatrix} \cos \lambda \cos \varphi \\ \sin \lambda \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix},$$

$$h(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{\frac{\cos^2 \varphi}{a^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{b^2}}}.$$

Матрица перехода \mathbf{N} из ГСК в ИСК задается выражением

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} \cos(\lambda_0 + \Omega_E t) & -\sin(\lambda_0 + \Omega_E t) & 0 \\ \sin(\lambda_0 + \Omega_E t) & \cos(\lambda_0 + \Omega_E t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Таким образом, задавая широту и долготу как дважды непрерывно дифференцируемые функции, можно описать любой маршрут на поверхности Земли в связанной с ней СК. В общем случае для описания таких функций могут быть использованы сплайны, кривые Безье или В-сплайны [12], которые позволяют провести кривую нужной степени гладкости через заданный набор узловых точек. В настоящей работе эти функции являются явно заданными:

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - kp, \quad \lambda = \alpha \frac{\sin(lp)}{\sin(kp)}, \quad (13)$$

где α, l, k – некоторые константы, p – параметр траектории. С помощью этих функций при $\alpha = 0.05$, $l = 1000$, $k = 100$ описывается маршрут, показанный на рис. 3.



Рис. 3. Маршрут съемки и подспутниковая траектория

При моделировании учитывалось воздействие аэродинамического и гравитационного возмущающих моментов. При этом предполагалось, что в начальный момент времени спутник правильно ориентирован и стабилизирован. Также предполагалось, что ВСК и ССК совмещены, т.е. $\mathbf{G} = \mathbf{E}_3$. Результаты моделирования представлены ниже.

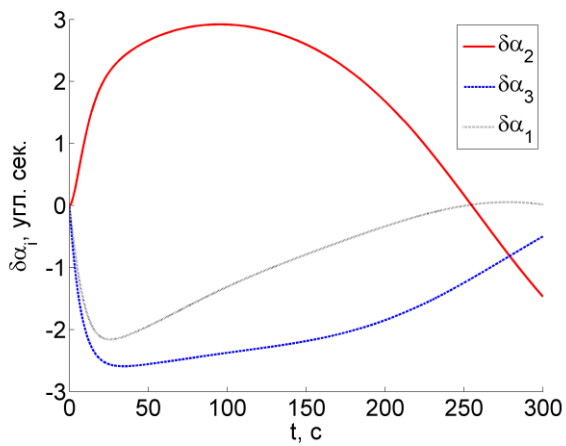


Рис. 4. Ошибка ориентации, углы Крылова

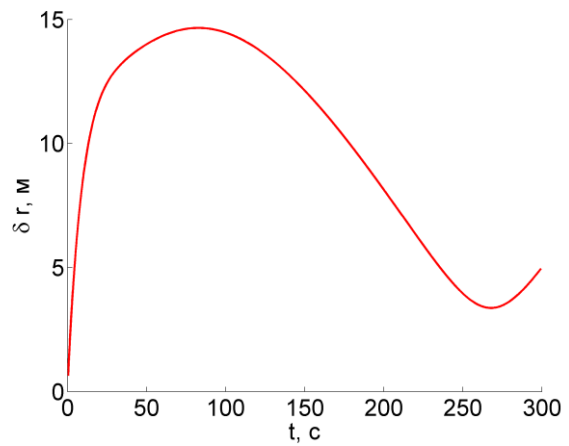


Рис. 5. Отклонение точки визирования

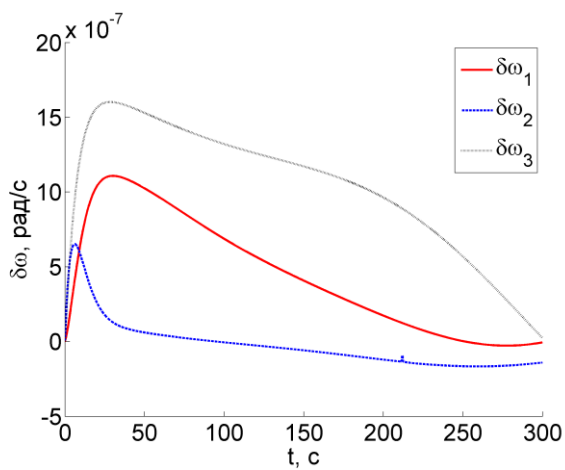


Рис. 6. Относительная угловая скорость

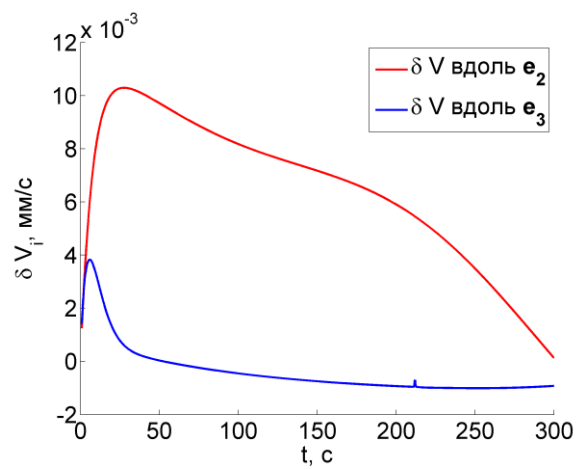


Рис. 7. Ошибка скорости бега изображения

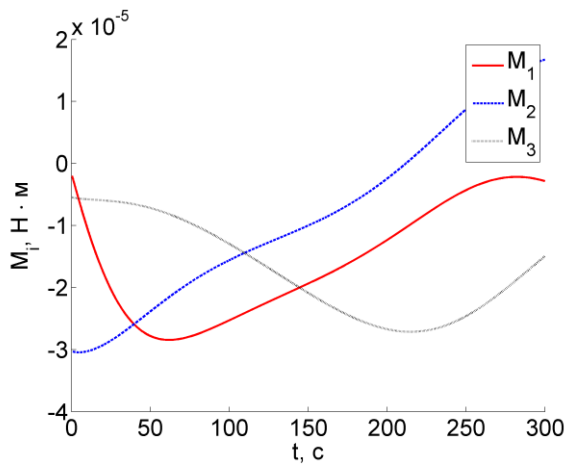


Рис. 8. Управляющие моменты

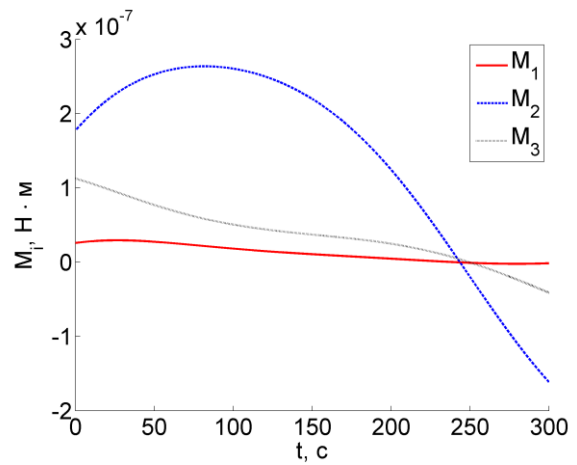


Рис. 9. Возмущения

Как видно из рис. 7, несмотря на наличие возмущений, ошибка в скорости бега изображения незначительна. В то же время отклонение точки визирования не превышает пятнадцати метров, что соответствует точности российского спутника ДЗЗ Ресурс-П и может считаться вполне приемлемым при выполнении миссий ДЗЗ. Небольшие скачки на рис. 6 и 7 происходят из-за того, что управляющий момент, который требуется создать в этот момент времени, настолько мал, что не может быть реализован системой управления ориентацией КА.

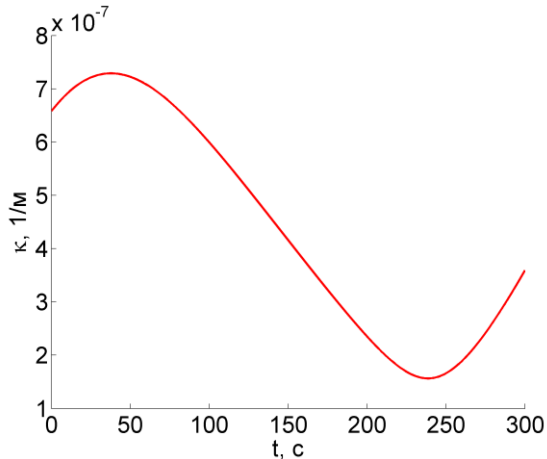


Рис. 10. Кривизна траектории

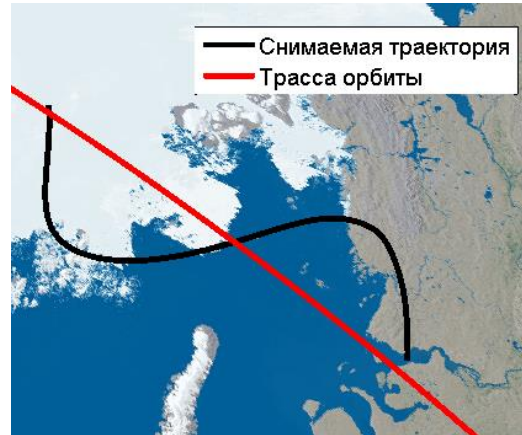


Рис. 11. Маршрут съемки

Как видно из рис. 10, кривизна траектории не превосходит 10^{-6} , что хорошо согласуется с полученной ранее оценкой. Для примера рассмотрим траекторию с большей кривизной: для этого положим $l = 3000$ в (13). Результаты моделирования для этого случая представлены ниже.

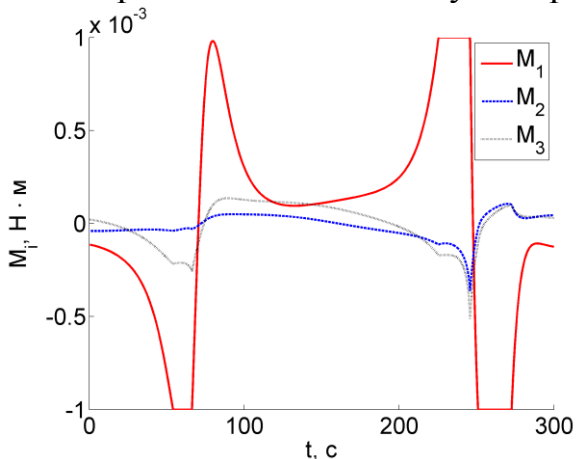


Рис. 12. Управление

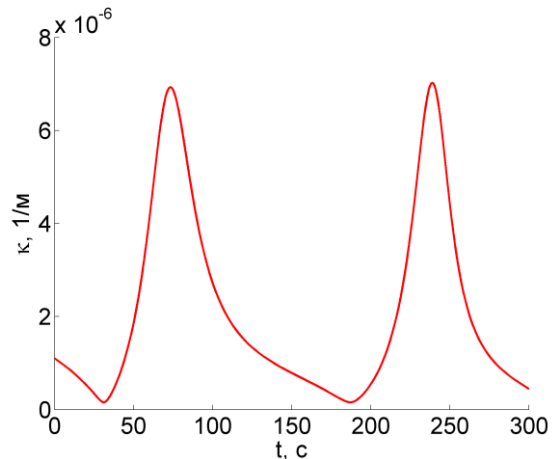


Рис. 13. Кривизна

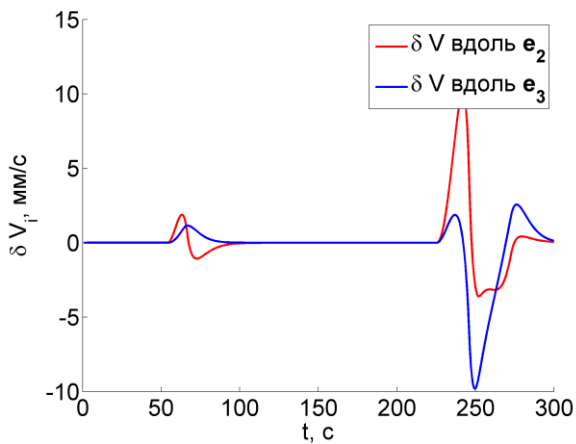


Рис. 14. Ошибка скорости бега изображения

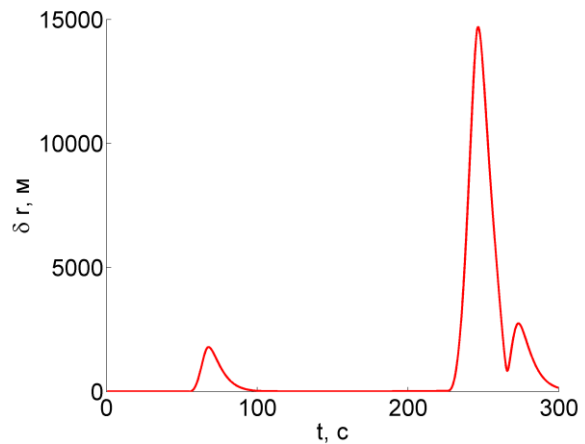


Рис. 15. Сдвиг точки визирования

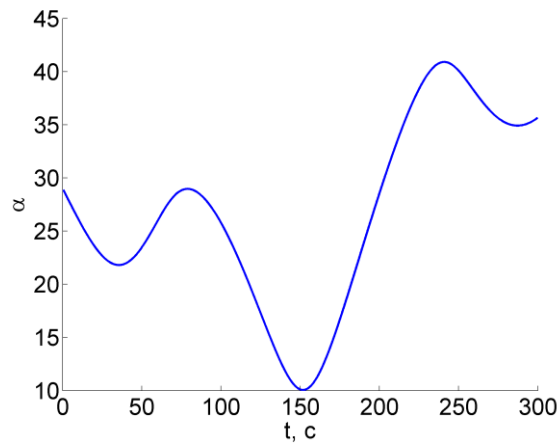


Рис. 16. Угол визирования

Как видно из этих рисунков, кривизна довольно сильно влияет на снимаемое изображение: в частности, при достаточно большой кривизне система управления ориентацией КА уже не способна обеспечить требуемый управляющий момент (рис. 12), и, как следствие, возрастает ошибка наведения и появляется ошибка скорости бега изображения. Близость съемки к надиру, как видно из рис. 14-16, также довольно сильно влияет на эти параметры.

Заключение

В настоящей работе предложен алгоритм синтеза углового движения космического аппарата при выполнении миссий по отслеживанию траекторий на поверхности Земли. Рассмотрена задача реализации полученного углового движения, а также проведен анализ влияния неучтенных возмущений на точность стабилизации и ориентации КА и качество получаемого изображения. Предложены относительно простые оценки для связи параметров системы управления ориентацией КА и качества съемки. Помимо этого, получена оценка для максимальной кривизны снимаемой траектории, при которой гарантированно возможно проведение съемки в зависимости от возможностей актюаторов.

Работа поддержана грантами РФФИ №№ 16-01-00739, 15-31-20058

Благодарим М.Ю. Овчинникова за внимание к работе и полезные замечания.

Список литературы

1. Ресурс-П [Electronic resource].
URL: http://samspace.ru/products/earth_remote_sensing_satellites/ka_resurs_p/.
2. World View [Electronic resource].
URL: <https://ru.wikipedia.org/wiki/WorldView-2>.
3. Lelong P., Lemercier C., Chegancas J. AstroBus S, the high performance and competitive Small Satellites platform for Earth Observation // 10th IAA Symposium on Small Satellites for Earth Observation / ed. Sandau R., Roser H.-P., Valenzuela A. 2015. P. 15–18.
4. Бутырин С.А. Кинематический синтез программного углового движения космического аппарата при оптико-электронной съемке Земли // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. 2007. Т. 9, № 3. С. 664–670.
5. Бутырин С.А. Программный комплекс для расчета и визуализации маршрутов оптико-электронной съемки Земли // Вестник Самарского государственного технического университета. 2007. Т. 2. С. 11–17.
6. Сомов С.Е., Бутырин С.А., Сомова Т.Е. Оптимизация законов наведения, имитация и анимация движения спутника землеобзора // XII Всероссийское совещание по проблемам ВСПУ-2014. 2014. С. 3489–3500.
7. Wie B., Lu J. Feedback control logic for spacecraft eigenaxis rotations under slew rate and control constraints // J. Guid. Control. Dyn. 1995. Vol. 18, № 6. P. 1372–1379.
8. Wie B., Barba P.M. Quaternion feedback for spacecraft large angle maneuvers. // J. Guid. Control. Dyn. 1985. Vol. 8, № 3. P. 360–365.
9. Tsiotras P. New Control Laws for the Attitude Stabilization of Rigid Bodies // 13th IFAC Symposium on Automatic Control in Aerospace. 1994. P. 316–321.
10. Яковенко Г.Н. Краткий курс аналитической динамики. М.: БИНОМ, 2004.
11. Малкин И.Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. Изд. 2-е. М.: Едиториал УРСС, 2004. 496 с.
12. Роджерс Д., Адамс Д. Математические основы машинной графики. М.: Мир, 2001. 604 с.

Оглавление

Введение.....	3
1. Постановка задачи, системы координат.....	4
1.1 Постановка задачи.....	4
1.2 Особенности оптического сенсора.....	4
1.3 Системы координат.....	6
2. Синтез углового движения КА.....	7
3. Построение управления, влияние возмущений.....	9
3.1 ПД-регулятор.....	9
3.2 Влияние возмущений.....	10
3.3 Оценка максимального отклонения.....	15
3.4 Влияние ошибок на съемку траектории.....	18
3.5 Влияние кривизны траектории.....	22
4. Численное моделирование.....	24
Заключение.....	29
Список литературы.....	30