



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 22 за 2016 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Брагин М.Д., Рогов Б.В.

Новая гибридная схема для
расчета разрывных решений
гиперболических уравнений

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Брагин М.Д., Рогов Б.В. Новая гибридная схема для расчета разрывных решений гиперболических уравнений // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2016. № 22. 22 с. doi:[10.20948/prepr-2016-22](https://doi.org/10.20948/prepr-2016-22)
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2016-22>

Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М. В. Келдыша
Российской академии наук

М. Д. Брагин, Б. В. Рогов

**Новая гибридная схема
для расчета разрывных решений
гиперболических уравнений**

Москва — 2016

Брагин М. Д., Рогов Б. В.

Новая гибридная схема для расчета разрывных решений гиперболических уравнений

В работе проводится анализ гибридной схемы, предложенной ранее как способ монотонизации бикompактных схем для гиперболических уравнений и систем. Обсуждаются недостатки этого способа монотонизации: неучет разного поведения компонент решения в общем случае, зависимость характера монотонизации от выбора системы единиц и масштабов краевых условий, отсутствие априорных оценок для настраиваемого параметра гибридной схемы. Для устранения этих недостатков строится новая гибридная схема, включающая покомпонентную монотонизацию и нормировку решения. Находится корректная нормировка. Предлагается общий алгоритм априорной оценки параметра гибридной схемы. Рассуждения иллюстрируются на численных примерах в случае гибридной бикompактной схемы с монотонизацией схемой «явный уголок».

Ключевые слова: гибридная схема, бикompактная схема, сохраняющие монотонность схемы, гиперболические уравнения, разрывные решения.

Michael Dmitrievich Bragin, Boris Vadimovich Rogov

A new hybrid scheme for computing discontinuous solutions of hyperbolic equations

In this work, the hybrid scheme is analyzed. It was introduced earlier as a technique to monotonize bicomcompact schemes for hyperbolic equations and systems. Its imperfections are discussed. They include the disregard of the various behavior of solution components in the general case, monotonizing nature dependence on a system of units and on a scale of initial and boundary conditions; the lack of a priori estimations of the hybrid scheme tuned parameter. To eliminate these imperfections a new hybrid scheme is constructed. It involves the component-wise monotonization and the solution normalization. The correct normalization is obtained. The general algorithm for a priori estimation of the hybrid scheme parameter is proposed. Numerical examples for the hybrid bicomcompact scheme with the first-order explicit upwind scheme monotonizer are considered.

Keywords: hybrid scheme, bicomcompact scheme, monotonicity preserving schemes, hyperbolic equations, discontinuous solutions.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 14-01-00775.

Введение

Гиперболические уравнения и системы лежат в основе многих моделей, применяемых при решении различных физико-технических задач. В большинстве практически интересных случаев для отыскания решений данных уравнений используются численные методы, т. к. аналитические методы либо вовсе отсутствуют, либо ограничены в своей применимости. До сих пор остается актуальной проблема разработки надежных численных методов высокого порядка для гиперболических уравнений.

Нередко решения уравнений этого типа содержат сильные разрывы. Схемы же высокого порядка генерируют ложные, нефизичные осцилляции (немонотонности) вблизи разрывов. Такое поведение называется эффектом Гиббса [1] и объясняется известной теоремой Годунова [2]. В то же время, от численного метода требуется, чтобы получаемое с помощью него решение было адекватным, т. е. не содержало каких-либо нефизичных особенностей. Следовательно, возникает необходимость в монотонизации схемы высокого порядка, причем так, чтобы значительного падения точности при этом не происходило.

В настоящее время существует множество разнообразных методик монотонизации. Перечислим некоторые наиболее популярные и (или) новые.

В работах [3,4] осцилляции около разрывов подавляются введением в схему специальных ограничителей (limiters) численных потоков. В работах [5–8] для монотонизации используются численные фильтры. Классическая идея искусственной диссипации [9] развивается в работах [10–13]. Часто применяются схемы, в которых для расчета потоков на границах ячеек сетки используются компактные эрмитовы интерполяции на кандидатах-шаблонах, а затем используется либо ENO-алгоритм [14] для выбора подходящего шаблона, либо WENO-алгоритм [15–20] для расчета весовых коэффициентов компактных интерполяций на кандидатах-шаблонах.

Недавно в работах [21–25] была предложена оригинальная гибридная схема, продолжающая идеи работы Р. П. Федоренко [26]. Оператор послыного перехода этих схем строится как нелинейная выпуклая комбинация операторов перехода монотонной схемы первого порядка и немонотонной схемы высокого порядка. Ключевым отличием оператора перехода гибридных схем от других подобных операторов является его полная локальность: решение гибридной схемы зависит от значений решений схем-партнеров только в рассматриваемой пространственно-временной точке. Методика построения гибридных схем [21, 27] была успешно применена для монотонизации нецентральной мультиоператорной схемы девятого порядка аппроксимации по про-

странственным переменным и четвертого порядка по времени [28].

В настоящей работе предлагается новая гибридная схема, которая устраняет недостатки гибридной схемы [21–25]. Работа построена следующим образом. В разд. 1 анализируется гибридная схема из [24] (аналогичная схеме [21–23, 25]), выявляются ее недостатки. В разд. 2 предлагается новая гибридная схема, устраняющая недостатки, описанные в разд. 1. В разд. 3 строится корректная нормировка для новой гибридной схемы, рассматривается численный пример, проводится сравнение с нормировками из работы [25]. В разд. 4 обсуждается вопрос об априорной оценке параметра гибридной схемы C_1 .

1. Исходная гибридная схема и ее недостатки

Проведем анализ исходной гибридной схемы [24] и выявим некоторые ее недостатки, связанные с конструкцией весового множителя. Условимся называть также эту гибридную схему *старой*. Опишем сначала методику построения данной гибридной схемы в наиболее общем случае.

Рассмотрим следующую систему многомерных квазилинейных гиперболических уравнений:

$$\partial_t \mathbf{Q} + \sum_{k=1}^d \partial_{x_k} \mathbf{F}_k(\mathbf{Q}) = \mathbf{S}(\mathbf{x}, t, \mathbf{Q}), \quad \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d) \in D, \quad 0 < t \leq T. \quad (1)$$

Здесь $\mathbf{Q} = (Q_1, \dots, Q_m) = \mathbf{Q}(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^m$ — искомый вектор консервативных переменных, \mathbf{F}_k — векторы потоков, \mathbf{S} — вектор источников, $D \subset \mathbb{R}^d$ — расчетная область. Предполагается, что система (1) дополнена некоторыми условиями, включающими начальное условие при $t = 0$ и граничные условия на границе ∂D области D . Предположим также, что решение описанной выше краевой задачи существует и единственно в $\{\mathbf{x} \in \bar{D}, 0 \leq t \leq T\}$, где $\bar{D} = D \cup \partial D$.

Пусть краевая задача для системы (1) решается численно с применением двух одношаговых по времени схем: монотонной схемы A первого порядка и немонотонной схемы B высокого порядка. При этом в замкнутой области \bar{D} введена некоторая пространственная сетка $\Omega = \{\mathbf{x}_j\}_{j=0}^{N_x}$, а временной отрезок $[0, T]$ разбит (быть может, неравномерно) на слои t^n ($n = 0, \dots, N_t$), $t^0 = 0$, $t^{N_t} = T$. Обозначим шаг по времени $\tau = \tau^{n+1} = t^{n+1} - t^n$, далее верхний индекс $n + 1$ ради краткости записи опускаем.

Положим, что решение \mathbf{Q}^n на слое t^n известно. Используем его как начальное условие для схем A и B и вычислим независимо их решения \mathbf{Q}_A^{n+1}

и \mathbf{Q}_B^{n+1} соответственно на слое t^{n+1} . Тогда результирующее решение на слое t^{n+1} в каждом узле \mathbf{x}_j сетки Ω вычисляется по формуле:

$$\mathbf{Q}^{n+1}(\mathbf{x}_j) = \alpha(\mathbf{x}_j)\mathbf{Q}_A^{n+1}(\mathbf{x}_j) + (1 - \alpha(\mathbf{x}_j))\mathbf{Q}_B^{n+1}(\mathbf{x}_j), \quad (2)$$

где весовой множитель α в узле \mathbf{x}_j дается выражением

$$\alpha(\mathbf{x}_j) = f(w(\mathbf{x}_j)), \quad w(\mathbf{x}_j) = \frac{C_1 \|\mathbf{Q}_A^{n+1}(\mathbf{x}_j) - \mathbf{Q}_B^{n+1}(\mathbf{x}_j)\|_\infty}{\tau}. \quad (3)$$

Норма в формуле (3) берется не по пространству, а по компонентам разности $\mathbf{Q}_A^{n+1} - \mathbf{Q}_B^{n+1}$ в узле \mathbf{x}_j ; таким образом, в разных узлах сетки Ω весовой множитель α принимает, вообще говоря, разные значения. Функция $f(w)$ считается известной, заданной на всей полуоси $w \geq 0$ и должна удовлетворять следующим требованиям:

- 1) $0 \leq f(w) \leq 1$ для всех $w \geq 0$ (комбинация (2) выпуклая);
- 2) $f(0) = 0$, $f(+\infty) = 1$, $f(w)$ монотонно неубывает при $w \geq 0$;
- 3) $f(w) = \text{const} \cdot w^q + o(w^q)$ при $w \rightarrow 0$, где $q \geq p - 1$, p — порядок точности схемы B .

Например, функцию $f(w)$ можно выбрать так:

$$f(w) = \frac{w^q}{1 + w^q}, \quad q \geq p - 1. \quad (4)$$

Функция (4) принадлежит классу $C^\infty[0, +\infty)$. Величина $C_1 = \text{const} > 0$ — единственный настраиваемый параметр гибридной схемы. Параметр C_1 зависит от решаемой задачи (конкретных выражений для \mathbf{F}_k и \mathbf{S} , начальных и граничных условий) и от выбора схем A , B .

Смысл формулы (2) заключается в следующем. В областях плавного, гладкого изменения точного решения $\mathbf{Q}_E(\mathbf{x}, t)$ начально-краевой задачи для системы (1) отличие между решениями схем A и B мало, $\alpha \approx 0$ и $\mathbf{Q}^{n+1} \approx \mathbf{Q}_B^{n+1}$. В областях же резкого либо скачкообразного изменения $\mathbf{Q}_E(\mathbf{x}, t)$ схема B генерирует нефизичные, ложные осцилляции (эффект Гиббса), отличие между решениями A и B велико (т.к. схема A монотонная), $\alpha \approx 1$ и $\mathbf{Q}^{n+1} \approx \mathbf{Q}_A^{n+1}$.

Заметим, что если в качестве f выбрана функция (4), то в областях гладкости точного решения все равно происходит монотонизация решения схемы B , т.к. $f(w) = 0$ только при $w = 0$. Однако, это не приводит к понижению точности гибридной схемы в этих областях. Чтобы показать это, перепишем формулу (2) в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}^{n+1}(\mathbf{x}_j) &= \mathbf{Q}_B^{n+1}(\mathbf{x}_j) + \alpha(\mathbf{x}_j) (\mathbf{Q}_A^{n+1}(\mathbf{x}_j) - \mathbf{Q}_B^{n+1}(\mathbf{x}_j)) = \\ &= \mathbf{Q}_B^{n+1}(\mathbf{x}_j) + \mathbf{Z}^{n+1}(\mathbf{x}_j), \end{aligned}$$

где $\mathbf{Z}^{n+1}(\mathbf{x}_j) = \alpha(\mathbf{x}_j) (\mathbf{Q}_A^{n+1}(\mathbf{x}_j) - \mathbf{Q}_B^{n+1}(\mathbf{x}_j))$. В силу гладкости точного решения, выражения для весового множителя (3) и третьего свойства функции f имеем $\mathbf{Z}^{n+1} \sim \tau^q \cdot \tau^2 \leq \tau^{p+1}$, т.е. добавка к решению \mathbf{Q}_B^{n+1} схемы B пренебрежимо мала по сравнению с погрешностью аппроксимации последней. Следовательно, если в качестве f выбрана функция (4), то точность гибридной схемы не понижается до точности схемы A в областях гладкости точного решения, что и требовалось показать.

Важно отметить, что формула гибридной схемы (2) включает величины только в рассматриваемой пространственно-временной точке (\mathbf{x}_j, t^{n+1}) и в этом смысле является полностью локальной. В эту формулу не входят соседние узлы ни по \mathbf{x} , ни по t . Именно поэтому конструкция гибридной схемы универсальна по отношению к геометрии области D и сетке Ω . Последняя может быть как структурированной, так и неструктурированной. Легко видеть, что вид уравнений системы (1) также не влияет на запись гибридной схемы (2): левые части уравнений системы (1) могут быть записаны в дивергентном виде, ее коэффициенты могут зависеть от \mathbf{x} и t и т.д. Ни выбор самих схем A и B , ни их шаблоны не влияют на запись гибридной схемы. Эти черты выгодно отличают гибридную схему от прочих методов монотонизации, упомянутых во Введении.

Тем не менее, все перечисленные выше факторы определяют выбор параметра C_1 , а от порядка точности схемы B зависит конкретный вид функции f . Константу C_1 рекомендуется находить методом последовательных приближений во время предварительных расчетов на грубых сетках.

Обсудим теперь конструкцию весового множителя α (3). Она обладает несколькими недостатками.

Первый недостаток: взвешивание всех компонент Q_{Ai} и Q_{Bi} ($i = 1, \dots, m$) векторов $\mathbf{Q}_A, \mathbf{Q}_B$ в точке (\mathbf{x}_j, t^{n+1}) с одним и тем же весом $\alpha(\mathbf{x}_j)$. Пусть, например, в окрестности \mathbf{x}_j часть компонент меняется плавно, а часть резко. Тогда монотонизируются даже те компоненты, которые меняются плавно, хотя для них в этом нет никакой необходимости. Это видно из формулы (3): норма $\|\mathbf{Q}_A^{n+1}(\mathbf{x}_j) - \mathbf{Q}_B^{n+1}(\mathbf{x}_j)\|_\infty$ достигается на «разрывной» компоненте, вычисленный по ней вес $\alpha(\mathbf{x}_j)$ не близок к 0, что приводит к существенной и нежелательной монотонизации «непрерывных» компонент. Замена нормы $\|\cdot\|_\infty$ на, скажем, нормы $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ и т.д. ситуацию принципиально не меняет: всегда можно выбрать начальное условие так, чтобы существовал некоторый номер i_0 , для которого

$$\begin{aligned} |Q_{Ai_0}(\mathbf{x}_j, t^{n+1}) - Q_{Bi_0}(\mathbf{x}_j, t^{n+1})| &\gg \\ &\gg (m-1)|Q_{Ai}(\mathbf{x}_j, t^{n+1}) - Q_{Bi}(\mathbf{x}_j, t^{n+1})|, \quad i \neq i_0 \end{aligned}$$

(сильный «разрыв» компоненты с номером i_0), и нормы $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ и т. д. сведутся к норме $\|\cdot\|_\infty$.

С первым недостатком можно столкнуться, к примеру, в таком практическом случае: в качестве системы (1) выступает система газодинамических уравнений Эйлера, решением которой является сильный контактный разрыв, причем в качестве искомым выступают не консервативные переменные Q_i (плотность, поток массы, энергия единицы объема), а примитивные U_i (плотность, скорость, давление). В окрестности контактного разрыва большой скачок в плотности приведет к монотонизации там же и давления, несмотря на то, что оно меняется непрерывно.

Второй недостаток: разность $Q_A^{n+1}(\mathbf{x}_j) - Q_B^{n+1}(\mathbf{x}_j)$ входит в формулу для аргумента $w(\mathbf{x}_j)$ в (3) без какой-либо нормировки. Хотя наличие нормы по компонентам неявно подразумевает, что система (1) уже обезразмерена, т. е. $[Q_i] = 1$ ($i = 1, \dots, m$)¹, однако при выборе других размерных масштабов или же при изменении амплитуды начальных и граничных условий в безразмерных единицах произойдет изменение всех весов α во всех узлах $\mathbf{x}_j \in \Omega$. Это будет так, если константа C_1 останется неизменной. Следовательно, в этом случае необходимо либо заново подбирать C_1 , либо мириться с изменением характера монотонизации. Первое представляется неудобным, а последнее неразумным.

Наличие в (3) шага τ необоснованно. Утверждение, что параметр C_1 может подбираться при предварительных расчетах на грубых сетках справедливо до тех пор, пока при измельчении сетки слабо меняется отношение $r = \tau/h$, где h — характерный линейный масштаб пространственной сетки Ω . (Если сетка Ω декартова, то $h = \max(h_1, \dots, h_d)$, где h_1, \dots, h_d — шаги сетки по осям Ox_1, \dots, Ox_d соответственно.)

Третий недостаток: необходимость подбирать константу C_1 для каждой конкретной задачи. Хотелось бы иметь некоторое «оптимальное» значение параметра C_1 , пускай даже найденное не в общем случае, а в некоторых частных случаях (простейшее одномерное линейное уравнение переноса, одномерная газодинамика). Конечно, оно не будет строго годиться в общем случае. Это значение будет либо годиться в рамках инженерной точности, либо служить как хорошее начальное приближение при подборе C_1 в конкретной задаче.

Далее целью настоящей работы будет устранение всех перечисленных выше недостатков.

¹Здесь и далее квадратные скобки означают размерность величины.

2. Новая гибридная схема

Построим новую схему так, чтобы устранить недостатки старой гибридной схемы. Первые два недостатка устраняются без затруднений, сам метод их устранения уже содержится в их описании. Чтобы избавиться от первого недостатка, необходимо перейти от векторного к покомпонентному взвешиванию. Вторым недостатком разрешается путем введения подходящей нормировки и удаления τ из формулы для аргумента w .

С учетом этих рассуждений старая гибридная схема (2), (3) переписывается так: в каждом узле \mathbf{x}_j сетки Ω для всех $i = 1, \dots, m$

$$Q_i^{n+1}(\mathbf{x}_j) = \alpha_i(\mathbf{x}_j)Q_{Ai}^{n+1}(\mathbf{x}_j) + (1 - \alpha_i(\mathbf{x}_j))Q_{Bi}^{n+1}(\mathbf{x}_j), \quad (5)$$

где весовой множитель

$$\alpha_i(\mathbf{x}_j) = f(w_i(\mathbf{x}_j)), \quad w_i(\mathbf{x}_j) = \frac{C_1|Q_{Ai}^{n+1}(\mathbf{x}_j) - Q_{Bi}^{n+1}(\mathbf{x}_j)|}{\mathcal{N}(Q_{Ai}^{n+1})}. \quad (6)$$

Здесь $\mathcal{N}(\cdot)$ — функционал, определяющий упомянутую выше *нормировку*. Каждой скалярной функции, заданной на сетке Ω , он ставит в соответствие неотрицательное число. Назовем гибридную схему (5), (6) *новой*.

Нетрудно видеть, что принцип работы у старой и новой гибридных схем одинаков. Для новой гибридной схемы применимо рассуждение разд. 1 о непонижении точности до схемы A в областях гладкости точного решения в случае, когда функция f определяется формулой (4). Новая гибридная схема наследует все положительные свойства старой, в т. ч. локальность. Внесенная в формулах (5), (6) модификация не является качественной, она носит количественный характер. Эта модификация делает монотонизацию более точной, т. к. монотонизируются только «разрывные» компоненты численного решения.

Для того, чтобы полностью избавиться от второго недостатка, необходимо найти такую нормировку $\mathcal{N}(\cdot)$, которая всегда переводит область значений Q_{Ai}^{n+1} и Q_{Bi}^{n+1} (для Q_{Bi}^{n+1} приближенно в силу наличия немонотонностей) в стандартный отрезок $[0, 1]$.

3. Построение корректной нормировки

Решим сформулированную в конце предыдущего раздела задачу о выборе нормировки $\mathcal{N}(\cdot)$.

Пусть ξ , η — некоторые величины, значения которых принадлежат отрезку $[a, b]$. Тогда значения величин

$$\xi' = \frac{\xi - a}{b - a}, \quad \eta' = \frac{\eta - a}{b - a}$$

принадлежат отрезку $[0, 1]$. Рассмотрим их разность $\xi' - \eta'$:

$$\xi' - \eta' = \frac{\xi - \eta}{b - a} \in [-1, 1],$$

а также ее абсолютное значение

$$|\xi' - \eta'| = \frac{|\xi - \eta|}{b - a} \in [0, 1].$$

Следовательно, искомая нормировка

$$\mathcal{N}_{\text{span}}(\mathbb{Q}_{Ai}^{n+1}) = \max_{\Omega} \mathbb{Q}_{Ai}^{n+1} - \min_{\Omega} \mathbb{Q}_{Ai}^{n+1}. \quad (7)$$

Заметим, что $\mathcal{N}_{\text{span}}(\text{const}) = 0$. Ясно, что функционал $\mathcal{N}_{\text{span}}(\cdot)$ является полунормой в линейном пространстве сеточных функций, заданных на Ω .

Ранее в работе [25] предлагались глобальная и локальные нормировки. Глобальная нормировка суть

$$\mathcal{N}_{\text{global}}(\mathbb{Q}_{Ai}^{n+1}) = \|\mathbb{Q}_{Ai}^{n+1}\|_{\infty} = \max_{\Omega} |\mathbb{Q}_{Ai}^{n+1}|, \quad (8)$$

а локальная

$$\mathcal{N}_{\text{local}, \mathbf{x}_j}(\mathbb{Q}_{Ai}^{n+1}) = |\mathbb{Q}_{Ai}^{n+1}(\mathbf{x}_j)|. \quad (9)$$

Локальная нормировка (9) отличается от той, что предложена в работе [25]: она записана так, чтобы ее можно было использовать на любой сетке Ω при произвольной геометрии области D ; это отличие не меняет сути данной нормировки. Отметим, что функционал $\mathcal{N}_{\text{local}, \mathbf{x}_j}(\cdot)$ определяется не только сеточной функцией, но еще и узлом, в котором он вычисляется.

Приведем выражения для аргументов весовых множителей (6), соответствующих нормировкам (7), (8), (9). При $\mathcal{N} = \mathcal{N}_{\text{span}}$

$$w_i(\mathbf{x}_j) = \frac{C_1 |\mathbb{Q}_{Ai}^{n+1}(\mathbf{x}_j) - \mathbb{Q}_{Bi}^{n+1}(\mathbf{x}_j)|}{\max_{\Omega} \mathbb{Q}_{Ai}^{n+1} - \min_{\Omega} \mathbb{Q}_{Ai}^{n+1} + \varepsilon_m}. \quad (10)$$

При $\mathcal{N} = \mathcal{N}_{\text{global}}$

$$w_i(\mathbf{x}_j) = \frac{C_1 |\mathbb{Q}_{Ai}^{n+1}(\mathbf{x}_j) - \mathbb{Q}_{Bi}^{n+1}(\mathbf{x}_j)|}{\max_{\Omega} |\mathbb{Q}_{Ai}^{n+1}| + \varepsilon_m}. \quad (11)$$

При $\mathcal{N} = \mathcal{N}_{\text{local}, \mathbf{x}_j}$

$$w_i(\mathbf{x}_j) = \frac{C_1 |Q_{Ai}^{n+1}(\mathbf{x}_j) - Q_{Bi}^{n+1}(\mathbf{x}_j)|}{|Q_{Ai}^{n+1}(\mathbf{x}_j)| + \varepsilon_m}. \quad (12)$$

Величина ε_m — малое положительное число, предотвращающее деление на нуль (например, «машинная точность»).

В отличие от нормировки (7), нормировки (8) и (9) не лишены проблем. Обе они «уязвимы» к сдвигам области значений Q_{Ai}^{n+1} . Продемонстрируем это на следующем примере. Рассмотрим два варианта краевых условий для системы (1). Зафиксируем индекс i и момент времени t_0 . Пусть в момент времени $t = t_0$ в некоторой части D имеется разрыв i -й компоненты точного решения. Пусть в первом варианте краевых условий значения Q_{Ei} по разные стороны от фронта скачка суть q_1, q_2 , а во втором $q_1 + \Delta q, q_2 + \Delta q$, где $\Delta q > 0, \Delta q \gg |q_1 - q_2|$. Пусть $\|Q_{Ei}|_{t=t_0}\|_\infty \sim \max(|q_1|, |q_2|)$. Обратимся к слою $t^{n+1} = t_0$. Тогда весовые множители, сосчитанные с (11) или (12), на слое t^{n+1} вблизи фронта скачка окажутся разными для этих двух вариантов краевых условий. Для второго варианта эти веса будут меньше, т. к. аргументы $w_i(\mathbf{x}_j)$ станут меньше из-за добавки Δq в знаменателе и в силу свойств функции f . Следовательно, немонотонности во втором варианте будут значительнее по сравнению с первым вариантом. Таким образом, простой сдвиг области значений приводит к изменению характера монотонизации, что совершенно неразумно, т. к. размах скачка $|q_1 - q_2|$ не изменился. Добавим, что если $q_1 \approx 0$ или $q_2 \approx 0$, то при локальной нормировке схемная диссипация вблизи фронта скачка будет неприемлемо большой.

Рассмотрим простейший частный случай системы (1) — одномерное однородное скалярное линейное уравнение переноса

$$\partial_t u + a \partial_x u = 0, \quad a = \text{const} > 0, \quad x > 0, \quad 0 < t \leq T, \quad (13)$$

$$(d = 1, \quad \mathbf{x} = x_1 = x, \quad D = (0, +\infty), \quad \mathbf{Q} = u, \quad \mathbf{F}_1 = au, \quad \mathbf{S} = 0),$$

где $u = u(x, t)$ — искомая функция, а также 4 варианта постановки начальных и граничных условий для уравнения (13). Назовем их *тестами*.

Тест 1:

$$u|_{t=0} = \begin{cases} 1, & x < x_s, \\ 0, & x \geq x_s, \end{cases} \quad x \geq 0; \quad u|_{x=0} = 1, \quad 0 < t \leq T. \quad (14)$$

Тест 2:

$$u|_{t=0} = \begin{cases} 10^6, & x < x_s, \\ 0, & x \geq x_s, \end{cases} \quad x \geq 0; \quad u|_{x=0} = 10^6, \quad 0 < t \leq T. \quad (15)$$

Тест 3:

$$u|_{t=0} = \begin{cases} 1001, & x < x_s, \\ 1000, & x \geq x_s, \end{cases} \quad x \geq 0; \quad u|_{x=0} = 1001, \quad 0 < t \leq T. \quad (16)$$

Тест 4:

$$u|_{t=0} = \begin{cases} 2 \cdot 10^6, & x < x_s, \\ 10^6, & x \geq x_s, \end{cases} \quad x \geq 0; \quad u|_{x=0} = 2 \cdot 10^6, \quad 0 < t \leq T. \quad (17)$$

Обозначим решения уравнения (13) с краевыми условиями (14)–(17) как $u_{1,2,3,4}(x, t)$ соответственно. Вне зависимости от того, точные они или же полученные по произвольной линейной схеме для (13), эти решения в любой точке $(x, t) \in \{0 \leq x < +\infty, 0 \leq t \leq T\}$ удовлетворяют равенству

$$u_1(x, t) = \frac{u_2(x, t)}{10^6} = u_3(x, t) - 1000 = \frac{u_4(x, t)}{10^6} - 1. \quad (18)$$

Очевидно, данное равенство — следствие принципа суперпозиции, справедливого для линейных уравнений и схем.

Поясним смысл этих тестов. Тест 1 — это стандартная монотонно невозрастающая «ступенька» единичной амплитуды. В тестах 2–4 данная «ступенька» подвергается линейному преобразованию: в тесте 2 это растяжение в 10^6 раз, в тесте 3 сдвиг на 1000, в тесте 4 сдвиг на 1 и растяжение в 10^6 раз.

Покажем работу нормировок (7)–(9), а также нормировки $\mathcal{N}_{\text{но}} \equiv 1$ (отсутствие нормировки, что соответствует старой гибридной схеме) на примере тестов 1–4. В качестве схемы A возьмем «явный уголок», а в качестве схемы B — бикompактную схему [24] с интегрированием по t L-устойчивым жестко точным диагонально-неявным методом Рунге–Кутты 3-го порядка (табл. (20) в [24]). Параметры расчетов выберем так:

$$a = 1, \quad T = 1, \quad x_s = 1, \quad h = 0.01, \quad \kappa = 0.4, \quad C_1 = 100,$$

где $\kappa = at/h$ — число Куранта. В функции f (4) параметр $q = 2$. Полуцелые узлы в схеме B полагаются целыми в схеме A . В частности, число Куранта для схемы A равно 2κ , а не κ .

На каждом из рис. 1–4 изображены профили решений $u_{1,2,3,4}(x, T)$, полученные по новой гибридной схеме при той или иной фиксированной нормировке. Значения всех профилей приведены к отрезку $[0, 1]$ согласно соотношениям (18). На рис. 1 хорошо видно, что нормировка $\mathcal{N}_{\text{span}}$ устойчива к линейным преобразованиям области значений, чего и следовало ожидать. Следовательно, формально нелинейная новая гибридная схема с $\mathcal{N}_{\text{span}}$ наследует это свойство линейных схем. Обратимся к рис. 2, 3. Ясно, что глобальная

и локальная нормировка невосприимчивы к растяжению (масштабированию) решения, но они восприимчивы к сдвигам, о чем упоминалось выше. Видно также, что чем больше сдвиг, тем меньше весовые множители и тем ближе решение гибридной схемы к решению немонотонной схемы B . Схема без нормировки (см. рис. 4) игнорирует сдвиги, но чувствительна к растяжению.

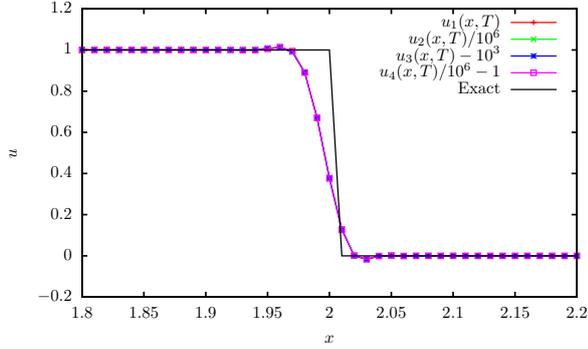


Рис. 1. Решения тестов 1—4, полученные по новой гибридной схеме с нормировкой $\mathcal{N}_{\text{span}}$

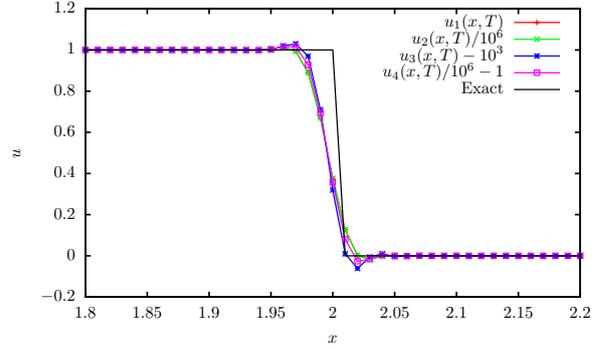


Рис. 2. Решения тестов 1—4, полученные по новой гибридной схеме с глобальной нормировкой

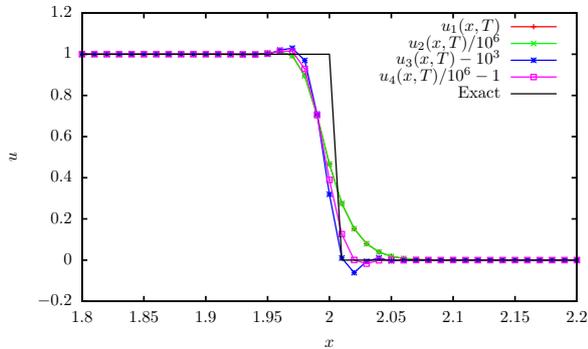


Рис. 3. Решения тестов 1—4, полученные по новой гибридной схеме с локальной нормировкой

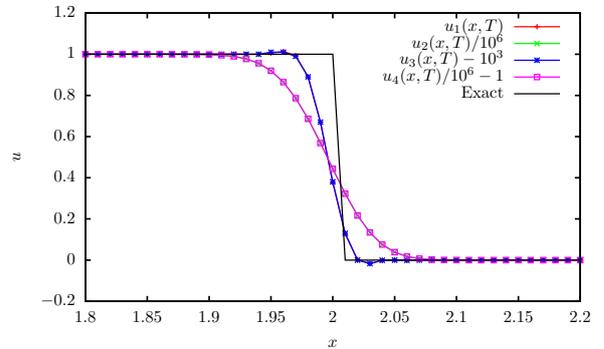


Рис. 4. Решения тестов 1—4, полученные по новой гибридной схеме без нормировки

На каждом из рис. 5—8 изображены профили решений, полученные по новой гибридной схеме с разными нормировками, тестовая задача при этом фиксирована. На них видно, какие отклонения дают по сравнению с $\mathcal{N}_{\text{span}}$ прочие нормировки. В тесте 1 (см. рис. 5) все нормировки кроме локальной $\mathcal{N}_{\text{local}}$ приводят к одним и тем же результатам. Отличие локальной нормировки вызвано тем, что при $x > 2$, $t = T$ решение схемы A выходит на нулевое значение, знаменатель в формуле для w уменьшается (12), сам $w \rightarrow +\infty$, $f(w) \rightarrow 1$, и решение гибридной схемы страдает от избыточной диссипации,

выходя на решение схемы A . Аналогично себя ведет локальная нормировка и в тесте 2 (см. рис. 6). Ясно, что растяжение краевых условий приводит и к растяжению $(u_A - u_B)$; в схеме без нормировки аргументы w во всех узлах пропорционально увеличиваются, все α становятся ближе к единице, и, как результат, включается лишняя диссипация (см. рис. 6, 8). Заметим, что глобальная и локальная нормировки в тесте 3 (см. рис. 7) ведут себя одинаково: сдвиг приводит к занижению весовых множителей (11), (12) во всех узлах и диссипации, напротив, не хватает, проявляются немонотонности схемы B .

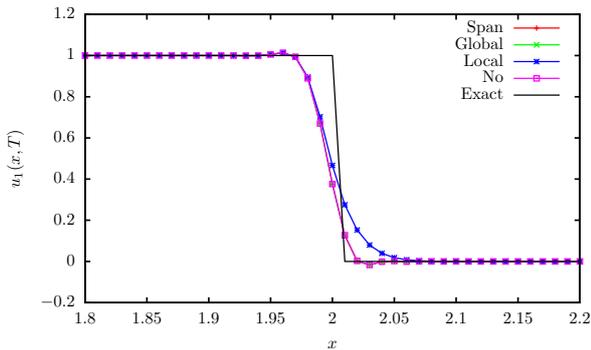


Рис. 5. Графики решений, полученных по новой гибридной схеме с различными нормировками, тест 1

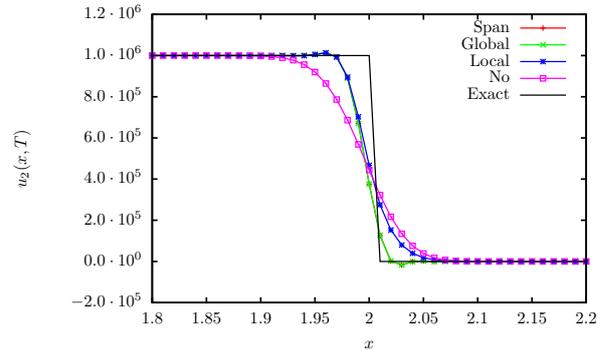


Рис. 6. Графики решений, полученных по новой гибридной схеме с различными нормировками, тест 2

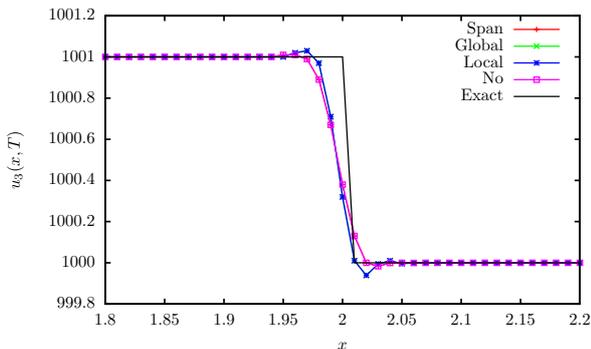


Рис. 7. Графики решений, полученных по новой гибридной схеме с различными нормировками, тест 3

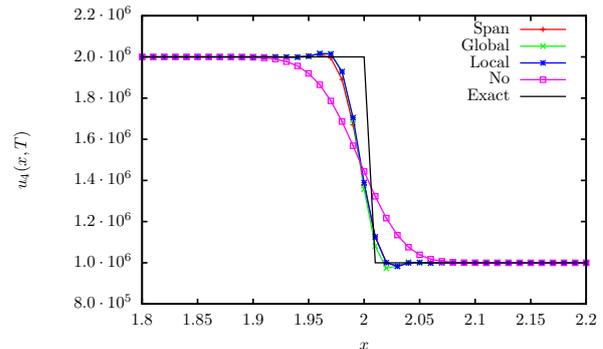


Рис. 8. Графики решений, полученных по новой гибридной схеме с различными нормировками, тест 4

Таким образом, построена корректная нормировка (10) для новой гибридной схемы (5)–(6) и рассмотрен численный пример, наглядно иллюстрирующий ее работу и ее отличия от прочих нормировок.

4. Нахождение оптимального значения параметра гибридной схемы

Обсудим теперь вопрос о выборе «оптимального» значения параметра C_1 (см. третий недостаток в разд. 1). Представляется разумным рассмотреть этот вопрос применительно к типичной задаче линейного переноса ступенчатого профиля, а именно, тесту 1 из разд. 3.

Прежде чем сформулировать то, что понимается под «оптимальностью», сделаем два замечания. Во-первых, при $C_1 \rightarrow +\infty$ решение гибридной схемы стремится к решению схемы A . Во-вторых, ни при каком C_1 решение гибридной схемы не является в точности монотонным в смысле определения Годунова. Всюду далее в качестве определения монотонности мы будем использовать только определение Годунова.

Следовательно, необходимо ослабить требование монотонности. Пусть условие монотонности по Годунову выполняется не совершенно точно, а с абсолютной погрешностью ε . Тогда *оптимальный* выбор параметра C_1 таков: выбрать наименьшее C_1 , при котором условие монотонности по Годунову выполнено с абсолютной погрешностью ε .

Например, для гибридной бикompактной схемы из разд. 3 приближенное условие монотонности на слое t^n записывается так ($u_E(x, t)$ монотонно не возрастает при всяком $0 \leq t \leq T$):

$$u_{j+\frac{1}{2}}^n - u_{j+1}^n \geq -\varepsilon, \quad u_j^n - u_{j+\frac{1}{2}}^n \geq -\varepsilon, \quad j = 0, 1, \dots \quad (19)$$

Оптимальный параметр C_1 :

$$C_1^{\text{opt}} = \inf\{C_1 : \text{выполнено условие (19) при } t = T\}. \quad (20)$$

Условие $t = T$ в (20) эквивалентно $n = N_t$.

Ясно, что C_1^{opt} — это функция, которая зависит от множества аргументов:

$$C_1^{\text{opt}} = C_1^{\text{opt}}(A, B, f; \varepsilon, h, \tau, a, T). \quad (21)$$

Пусть $[u] = 1$. Тогда, если не принимать во внимание очевидную зависимость C_1^{opt} от A, B, f (далее не пишем в списке аргументов), то функция (21) определяется четырьмя размерными аргументами h, τ, a и T и одним безразмерным ε . Из четырех размерных аргументов лишь два имеют независимые размерности, это шаги h и τ . Воспользуемся известной П-теоремой [29] и получим, что функция C_1^{opt} зависит только от трех безразмерных аргументов: абсолютной погрешности ε в условии Годунова (19), числа шагов по времени $N_t = T/\tau$ и числа Куранта $\kappa = a\tau/h$, т. е.

$$C_1^{\text{opt}} = C_1^{\text{opt}}(\varepsilon, N_t, \kappa). \quad (22)$$

Несмотря на то, что функция (22) зависит только от трех аргументов, желательно исключить зависимость от числа Куранта. Это связано с тем, что в нелинейных задачах число Куранта меняется от узла к узлу, в то время как параметр C_1 берется единым если не для всего расчета, то по крайней мере для одного шага по времени; необходимо иметь оценку для C_1 , которая зависела бы только от ε и N_t . Другими словами, требуется отыскать некоторое эффективное значение оптимального параметра C_1^{opt} .

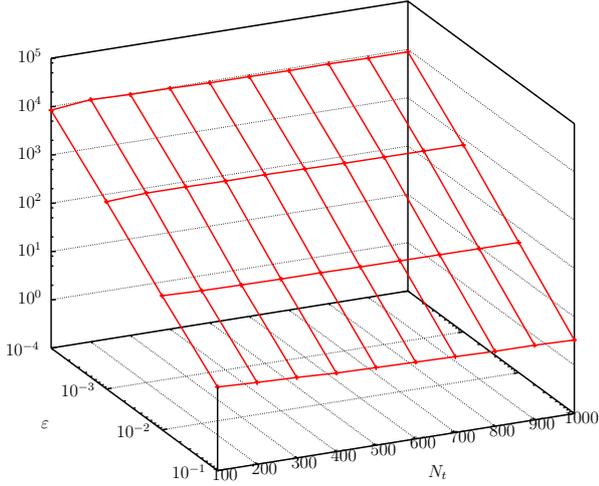


Рис. 9. График $\bar{C}_1(\varepsilon, N_t)$

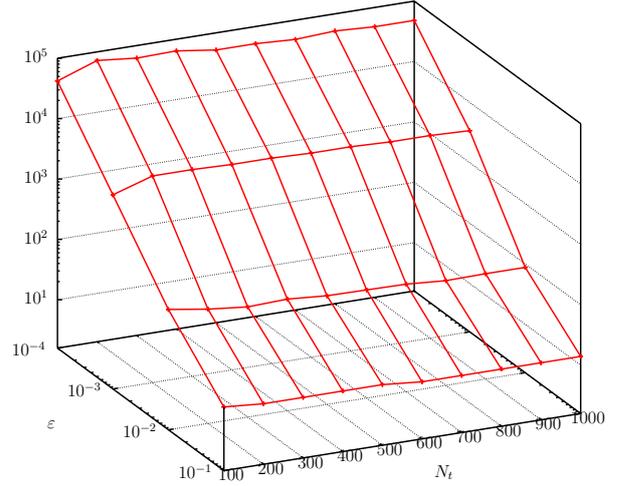


Рис. 10. График $C_1^*(\varepsilon, N_t)$

Пусть $\kappa_{1,2}$ (где $\kappa_1 < \kappa_2$) — практически используемые границы устойчивости гибридной схемы. Для гибридной бикомпактной схемы с монотонизацией «явным уголком» $\kappa_1 = 0.05$, $\kappa_2 = 0.45$ (0.1, 0.9 соответственно для «явного уголка»). Можно ввести два варианта описанного выше эффективного значения: среднее

$$\bar{C}_1 = \frac{1}{\kappa_2 - \kappa_1} \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} C_1^{\text{opt}}(\varepsilon, N_t, \kappa) d\kappa \quad (23)$$

и максимальное

$$C_1^* = \max_{[\kappa_1, \kappa_2]} C_1^{\text{opt}}(\varepsilon, N_t, \kappa). \quad (24)$$

По построению

$$\bar{C}_1 = \bar{C}_1(\varepsilon, N_t), \quad C_1^* = C_1^*(\varepsilon, N_t).$$

На рис. 9, 10 приведены графики рассчитанных численно зависимостей $\bar{C}_1(\varepsilon, N_t)$, $C_1^*(\varepsilon, N_t)$ для гибридной бикомпактной схемы с монотонизацией «явным уголком» и нормировкой $\mathcal{N}_{\text{span}}$. Опишем методику расчета.

На отрезке $[\kappa_1, \kappa_2]$ вводится равномерная сетка с узлами θ_l ($l = 0, \dots, N_\kappa$; число N_κ полагалось равным 100). Точка (ε, N_t) фиксируется. Далее для набора аргументов $(\varepsilon, N_t, \theta_l)$ ищется $C_1^{\text{opt}}(\varepsilon, N_t, \theta_l)$. Поиск ведется так: сначала берется $C_1 = 2$, для параметров $\varepsilon, N_t, \theta_l, C_1$ проводится расчет теста 1 по гибридной схеме, проводится проверка условия (19). Если оно выполнено, то $C_1^{\text{opt}} = C_1$, иначе C_1 увеличивается на ΔC_1 и эта процедура повторяется заново. Приращение C_1 неравномерно:

$$\Delta C_1 = \begin{cases} 2 & \text{если } 2 \leq C_1 < 200, \\ 20 & \text{если } 200 \leq C_1 < 2000, \\ 200 & \text{если } 2000 \leq C_1 < 20000, \\ \dots & \end{cases}$$

Далее искомые \bar{C}_1 и C_1^* приближенно вычисляются согласно своим определениям (23) и (24):

$$\bar{C}_1 \approx \frac{1}{N_\kappa + 1} \sum_{l=0}^{N_\kappa} C_1^{\text{opt}}(\varepsilon, N_t, \theta_l), \quad C_1^* \approx \max_l C_1^{\text{opt}}(\varepsilon, N_t, \theta_l).$$

Сделаем следующее замечание. Очевидно, в реальном расчете на компьютере индекс j не может пробегать до бесконечности, в действительности $j = 0, \dots, N_x$. Другими словами, x меняется от 0 до некоторого L . Однако, если L достаточно велико, то оно не входит в число определяющих параметров в формуле (21), поскольку при $t = T$ решение гибридной схемы (и схем A и B) довольно быстро выходит на нулевую постоянную. В тесте 1 при $t = T$ скачок оказывается в точке $x = x_s + aT$. Начальное положение скачка x_s также не играет никакой роли, пусть например $x_s = aT$. Тогда достаточно $L = 3aT$. Выразим теперь N_x через κ и N_t :

$$\kappa = \frac{a\tau}{h} = a \frac{T/N_t}{L/N_x} = \frac{N_x}{3N_t}; \quad N_x = 3\kappa N_t.$$

Проанализируем результаты, изображенные на рис. 9, 10. Хорошо видно, что эффективные значения \bar{C}_1 и C_1^* параметра C_1 практически не зависят от N_t и зависят линейно (в логарифмическом масштабе) от ε . Слабая зависимость от N_t и отклонение от линейности по ε для C_1^* обусловлены, по видимому, достаточно грубым выбором ΔC_1 . Для \bar{C}_1 выбор ΔC_1 менее важен из-за осреднения, нивелирующего погрешности в вычислении C_1^{opt} при заданных $\varepsilon, N_t, \theta_l$.

На рис. 11, 12 приведены сечения зависимостей $\bar{C}_1(\varepsilon, N_t)$, $C_1^*(\varepsilon, N_t)$ в плоскости $N_t = 500$ (точки с погрешностями), а также их аппроксимации

по методу наименьших квадратов (сплошные линии). Последние оказались таковыми:

$$\overline{C}_1(\varepsilon) = 0.3076 \cdot \varepsilon^{-1.126}, \quad C_1^*(\varepsilon) = 0.7015 \cdot \varepsilon^{-1.214}. \quad (25)$$

Итак, мы решили задачу о нахождении параметра C_1 для гибридной би-компактной схемы с монотонизацией «явным уголком», получив явные формулы (25) для вычисления C_1 в зависимости от ε . Параметр ε имеет ясный смысл: максимально допустимые немонотонности в целых узлах не превосходят по своей относительной величине 2ε .

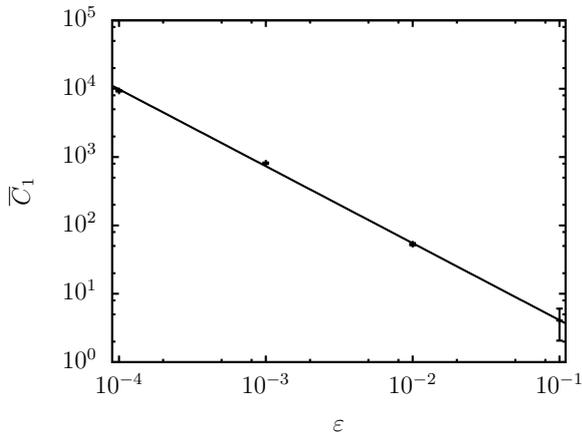


Рис. 11. Зависимость $\overline{C}_1(\varepsilon, 500)$, линия — метод наименьших квадратов

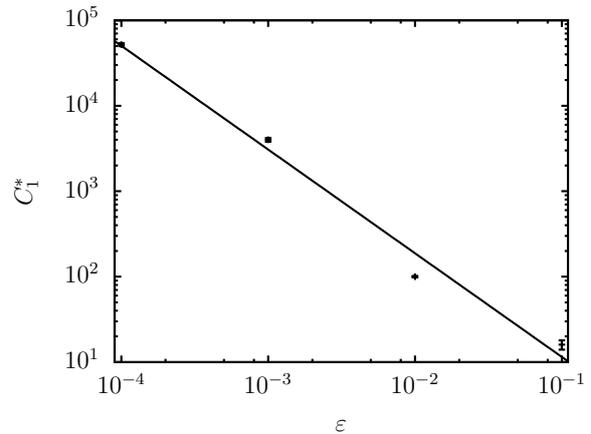


Рис. 12. Зависимость $C_1^*(\varepsilon, 500)$, линия — метод наименьших квадратов

Рассуждения настоящего раздела допускают обобщение на случай произвольных схем A и B . Приведем алгоритм действий (пробная задача — тест 1):

- 1) Выбрать монотонную схему A .
- 2) Выбрать высокоточную схему B . Найти ее порядок аппроксимации p . Выбрать функцию f по формуле (4), положив $q = p - 1$.
- 3) Построить гибридную схему по формулам (5), (6), (7). Найти $\kappa_{1,2}$.
- 4) В зависимости от схем A, B сформулировать приближенное условие монотонности по Годунову аналогично (19).

5) Рассчитать аналитически или численно зависимости $\overline{C}_1(\varepsilon, N_t)$, $C_1^*(\varepsilon, N_t)$. Далее в реальной задаче, имея ε и N_t , можно оценить C_1 , используя найденные ранее зависимости $\overline{C}_1(\varepsilon, N_t)$ или $C_1^*(\varepsilon, N_t)$. Наконец, можно либо ограничиться этой оценкой, либо уточнить ее на грубой сетке (если это возможно).

Заключение

Проведен анализ старой гибридной схемы [24], в результате которого выявлены три ее недостатка. Первый недостаток — векторное взвешивание

с единым весовым множителем для всех компонент решения. Вторым недостатком — существенная и вместе с тем ложная зависимость характера монотонизации от выбора системы единиц и (или) от амплитуды начальных и граничных условий. Третий недостаток — необходимость подбирать параметр гибридной схемы в отсутствие каких-либо априорных оценок.

Предложена новая гибридная схема с покомпонентным взвешиванием и иной нормировкой. Эта схема лишена первого недостатка по построению. Для новой гибридной схемы найдена корректная нормировка, позволяющая устранить также и второй недостаток. Предложена методика вычисления априорной оценки параметра гибридной схемы в зависимости от ограничения на немонотонности и числа шагов по времени. Тем самым, устранен и третий недостаток. На примере гибридной бикompактной схемы с монотонизацией «явным уголком» показано, что предлагаемая оценка не зависит от числа шагов по времени; найдены явные формулы для вычисления параметра данной гибридной схемы.

Библиографический список

1. Lax P. D. Gibbs phenomena // J. Sci. Comput. — 2006. — Vol. 28, no. 2/3. — P. 445–449.
2. Годунов С. К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Матем. сб. — 1959. — Т. 47 (89), № 3. — С. 271–306.
3. Cockburn B., Shu C.-W. Nonlinearly stable compact schemes for shock calculations // SIAM J. Numer. Anal. — 1994. — Vol. 31, no. 3. — P. 607–627.
4. Yee H. C. Explicit and implicit multidimensional compact high-resolution shock-capturing methods: Formulation // J. Comput. Phys. — 1997. — Vol. 131, no. 1. — P. 216–232.
5. Ekaterinaris J. A. Implicit, high-resolution, compact schemes for gas dynamics and aeroacoustics // J. Comput. Phys. — 1999. — Vol. 156, no. 2. — P. 272–299.
6. Yee H. C., Sandham N. D., Djomehri M. J. Low-dissipative high-order shock-capturing methods using characteristic-based filters // J. Comput. Phys. — 1999. — Vol. 150, no. 1. — P. 199–238.
7. Yee H. C., Sjögreen B. Adaptive filtering and limiting in compact high order methods for multiscale gas dynamics and MHD systems // Comput. Fluids. — 2008. — Vol. 37, no. 5. — P. 593–619.
8. Darian H. M., Esfahanian V., Hejranfar K. A shock-detecting sensor for filtering of high-order compact finite difference schemes // J. Comput. Phys. — 2011. — Vol. 230, no. 3. — P. 494–514.
9. Von Neumann J., Richtmyer R. D. A method for the numerical calculation of hydrodynamic shocks // J. Appl. Phys. — 1950. — Vol. 21, no. 3. — P. 232–237.
10. Остапенко В. В. Симметричные компактные схемы с искусственными вязкостями повышенного порядка дивергентности // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2002. — Т. 42, № 7. — С. 1019–1038.
11. Fiorina B., Lele S. K. An artificial nonlinear diffusivity method for supersonic reacting flows with shocks // J. Comput. Phys. — 2006. — Vol. 222. — P. 246–264.

12. Kawai S., Lele S. K. Localized artificial diffusivity scheme for discontinuity capturing on curvilinear meshes // *J. Comput. Phys.* — 2008. — Vol. 227, no. 22. — P. 9498–9526.
13. Kurganov A., Liu Y. New adaptive artificial viscosity method for hyperbolic systems of conservation laws // *J. Comput. Phys.* — 2012. — Vol. 231, no. 24. — P. 8114–8132.
14. Deng X., Maekawa H. Compact high-order accurate nonlinear schemes // *J. Comput. Phys.* — 1997. — Vol. 130, no. 1. — P. 77–91.
15. Deng X., Zhang H. Developing high-order weighted compact nonlinear schemes // *J. Comput. Phys.* — 2000. — Vol. 165, no. 1. — P. 22–44.
16. Jiang L., Shan H., Liu C. Weighted compact scheme for shock capturing // *Int. J. Comput. Fluid Dyn.* — 2001. — Vol. 15, no. 2. — P. 147–155.
17. Zhang S., Jiang S., Shu C.-W. Development of nonlinear weighted compact schemes with increasingly higher order accuracy // *J. Comput. Phys.* — 2008. — Vol. 227, no. 15. — P. 7294–7321.
18. Ghosh D., Baeder J. D. Compact reconstruction schemes with weighted ENO limiting for hyperbolic conservation laws // *SIAM J. Sci. Comput.* — 2012. — Vol. 34, no. 3. — P. A1678–A1706.
19. Guo Y., Xiong T., Shi Y. A positivity-preserving high order finite volume compact-WENO scheme for compressible Euler equations // *J. Comput. Phys.* — 2014. — Vol. 274. — P. 505–523.
20. Modified weighted compact scheme with global weights for shock capturing / Huankun Fu, Zhengjie Wang, Yonghua Yan, Chaoqun Liu // *Comput. Fluids.* — 2014. — Vol. 96. — P. 165–176.
21. Михайловская М. Н., Рогов Б. В. Монотонные компактные схемы бегущего счета для систем уравнений гиперболического типа // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* — 2012. — Т. 52, № 4. — С. 672–695.
22. Рогов Б. В., Михайловская М. Н. Монотонная высокоточная компактная схема бегущего счета для квазилинейных уравнений гиперболического типа // *Матем. моделирование.* — 2011. — Т. 23, № 12. — С. 65–78.
23. Рогов Б. В. Монотонная бикompактная схема для квазилинейных уравнений гиперболического типа // *Докл. АН.* — 2012. — Т. 446, № 5. — С. 504–509.

24. Рогов Б. В. Высокоточная монотонная компактная схема бегущего счета для многомерных уравнений гиперболического типа // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2013. — Т. 53, № 2. — С. 264–274.
25. Chikitkin A. V., Rogov B. V., Utyuzhnikov S. V. High-order accurate monotone compact running scheme for multidimensional hyperbolic equations // Appl. Numer. Math. — 2015. — Vol. 93. — P. 150–163.
26. Федоренко Р. П. Применение разностных схем высокой точности для численного решения гиперболических уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 1962. — Т. 2, № 6. — С. 1122–1128.
27. Рогов Б. В., Михайловская М. Н. Монотонные бикомпактные схемы для линейного уравнения переноса // Докл. АН. — 2011. — Т. 436, № 5. — С. 600–605.
28. Толстых А. И. О гибридных схемах с мультиоператорами высокого порядка для счета разрывных решений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2013. — Т. 53, № 9. — С. 1481–1502.
29. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. — Москва : Наука, 1977. — 440 с.

Оглавление

Введение	3
1. Исходная гибридная схема и ее недостатки	4
2. Новая гибридная схема	8
3. Построение корректной нормировки	8
4. Нахождение оптимального значения параметра гибридной схемы	14
Заключение	17
Библиографический список	19