



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 30 за 2016 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Бахолдин И.Б.

Исследование
распространения волн в
трубах с упругими стенками
и анализ численных
методов

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Бахолдин И.Б. Исследование распространения волн в трубах с упругими стенками и анализ численных методов // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2016. № 30. 32 с. doi:[10.20948/prepr-2016-30](https://doi.org/10.20948/prepr-2016-30)
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2016-30>

ОРДЕНА ЛЕНИНА
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М. В. Келдыша
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

И. Б. Бахолдин

ИССЛЕДОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН
В ТРУБАХ С УПРУГИМИ СТЕНКАМИ
И АНАЛИЗ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ

Москва–2016

УДК 534.1+539.3+532.59+517.9+519.6

Бахолдин И. Б. Исследование распространения волн в трубах с упругими стенками и анализ численных методов

Работа посвящена разработке моделей для описания распространения волн в трубах с упругими стенками, разработке методов их расчета и анализу решений, содержащих обратимые структуры разрывов, для модели трубы с упругими стенками в случае заполнения трубы жидкостью, а также анализу численных методов для моделей с дисперсией. Для стенок трубы использована модель мембраны и модель пластины. Разработана численная методика решения уравнений. Проведен анализ возможности стабилизации численных схем посредством включения в уравнения производных высокого порядка. Решена задача о распаде произвольного разрыва. Полученные результаты соответствуют ранее разработанной теории обратимых разрывов. Выведены упрощенные уравнения длинных волн, уравнения для нелинейных волн малой амплитуды для трубы с жидкостью, уравнения нелинейных акустических волн для трубы с газом. Анализируется возможность опрокидывания волн. Проанализированы двухшаговые численные схемы, сформулированы основные особенности расчета классических и обобщенных решений.

Ключевые слова: труба, упругость, жидкость, дисперсия, нелинейность, структура разрыва, численный метод, задача о распаде разрыва.

Bakholdin I. B. Investigation of wave propagation in tubes with elastic walls and analysis of numerical methods

The paper is devoted to development of models for description of waves in tubes with elastic walls. It is also devoted to development and analysis of numerical methods for models with dispersion and analysis of solutions with reversible shock structures. Membrane model and plate model are used for tube. Numerical methods for solving equations are developed. The ability of stabilization of numerical method by the aid of inclusion of additional term with higher-order derivatives is analyzed. Riemann problem is solved. Results obtained for fluid-filled tube correspond to theory of reversible shocks. Simplified equations for description of long waves, equations for waves of nonlinear small amplitude for tube filled by fluid and equations for nonlinear acoustic waves for tube filled by gas are derived. Two-step numerical schemes are analyzed. Main features for calculation of classic and generalized solutions are presented.

Keywords: tube, elasticity, fluid, dispersion, nonlinearity, shock structure, numerical method, Riemann problem.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, номера проектов 14-01-00049а и 15-01-04347а.

1 Содержание работы

Осуществлен анализ и усовершенствованы известные модели уравнений, описывающих волны в трубах. Это уравнения с контролируемым давлением [1] и уравнения трубы с жидкостью [2], [3]. Рассмотрена возможность учета вязких свойств материала стенок трубы, учета жесткости на изгиб стенок трубы, возможность учета сжимаемости материала трубы, а также замены жидкости газом. Разработаны методы численного расчета трубы с жидкостью. Рассмотрены решения задачи о распаде произвольного разрыва и сделан вывод о том, что найденные решения соответствуют теории обратимых разрывов [4]-[8]. Ранее аналитически и методами численного анализа детально были исследованы уединенные волны и структуры разрывов для трубы с контролируемым давлением [9], [10], но учет сопротивления на изгиб и методика расчета для трубы, заполненной жидкостью, были разработаны только предварительно, поэтому в данной работе основное внимание уделено именно этим вопросам. Для трубы с жидкостью выведены упрощенные уравнения, описывающие длинные волны, а также уравнения без учета продольных волн, уравнения без учета продольных волн выведены и для трубы с газом. В связи со сложностью исследуемой модели потребовался детальный анализ численных методов и сопоставление с численными результатами для других моделей с дисперсией. Это позволило сделать некоторые обобщения. Поэтому далее рассмотрены вопросы, связанные с численными методами: проанализировано число граничных условий, необходимое для корректной математической постановки задачи, и число граничных условий, требуемое для используемой численной схемы, проанализированы методы стабилизации численных схем, рассмотрены дисперсионные и диссипативные свойства двухшаговых схем и трехслойных схем, а также методы их коррекции, сделаны некоторые выводы об особенностях расчета классических и обобщенных решений.

2 Основные уравнения и обобщения модели

Уравнения движения для волн в трубе с несжимаемыми упругими стенками и фиксированным внутренним и внешним давлением имеют вид [1]:

$$\left(R\sigma_1 \frac{z'}{\lambda_1^2} \right)' - P^* r r' = \rho R \ddot{z}, \quad (2.1)$$

$$\left(R\sigma_1 \frac{r'}{\lambda_1^2} \right)' - \frac{\sigma_2}{\lambda_2} + P^* r z' = \rho R \ddot{r}; \quad (2.2)$$

$$\lambda_1 = \sqrt{r'^2 + z'^2}, \quad \lambda_2 = \frac{r}{R}, \quad \lambda_3 = \frac{h}{H}, \quad P^* = \frac{P}{H}, \quad \sigma_i = \lambda_i \partial W / \partial \lambda_i - p, \quad i = 1, 2, 3.$$

Здесь $'$ обозначает дифференцирование по переменной Z , являющейся начальной Лагранжевой пространственной координатой, направленной вдоль трубы, $\dot{}$ обозначает дифференцирование по времени t , H и h — толщина стенки трубы в ненапряженном и напряженном состоянии, $W = W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ — упругий потенциал; p — давление, связанное с несжимаемостью материала (множитель Лагранжа). Параметр P — разность между внутренним и внешним давлением. Параметр ρ — плотность материала на единицу площади. Для описания трубы используется мембранная модель, неизвестные z и r задают поверхность трубы в цилиндрической системе координат, ось z этой системы совпадает с центральной линией трубы. Здесь λ_i — главные растяжения, а σ_i — главные компоненты тензора напряжений. Индексы 1, 2, 3 соответствуют меридианальному, широтному и ортогональному направлению деформируемой поверхности. Предполагается, что при отсутствии нагрузки $z = Z$, $r = R$, $h = H$. Модель с контролируемым давлением пригодна в случае заполнения трубы жидкостью или газом с пренебрежимо малой плотностью. Давление поддерживается за счет перетекания в трубу среды из резервуара большого объема или работы компрессора.

В случае применения для описания материала трубы вязкоупругой модели типа Кельвина–Фойтха [11] логично добавить вязкие напряжения, например, так: $\sigma_i \rightarrow \sigma_i + \sigma_{iv}$, $\sigma_{iv} = \varepsilon_{iv} \dot{\lambda}_i$, $i = 1, 2, 3$, коэффициенты вязкости могут зависеть от деформации. В предыдущих работах [9], [10] в качестве диссипативных членов предлагалось добавлять в левые части уравнений члены с \dot{z}'' и \dot{r}'' с некоторыми коэффициентами. Можно убедиться, что при предлагаемом выше способе учета вязкости подобные члены действительно появляются в уравнениях после соответствующих преобразований, но есть и другие члены.

Материал стенки считается несжимаемым, поэтому

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1, \quad \sigma_i = \lambda_i \partial \hat{W} / \partial \lambda_i, \quad \hat{W} = W(\lambda_1, \lambda_2, 1/(\lambda_1 \lambda_2)), \quad i = 1, 2.$$

Ниже используются обозначения $\hat{W}_{1,2} = \partial \hat{W} / \partial \lambda_{1,2}$. Приведенная выше формула для напряжений σ_1 и σ_2 выводится из предположения о равенстве нулю поперечных напряжений σ_3 (мембранная модель), точнее предполагается, что величины p и $\lambda_3 \partial W / \partial \lambda_3$ велики по сравнению с величиной разности давлений P . В случае применения описанной выше вязкоупругой модели аналогичным образом получаем $\sigma_{iv} = \varepsilon_{iv} \dot{\lambda}_i - \varepsilon_{3v} (1/(\dot{\lambda}_1 \lambda_2))$, $i = 1, 2$. В случае учета сжимаемости материала трубы, когда величина p определяется упругими деформациями, см. разд. 3, также можно вывести формулы для σ_1 и σ_2 , не содержащие λ_3 , воспользовавшись предположением $\sigma_3 = 0$. В случае большого внешнего давления P_e можно использовать условие $\sigma_3 = -P_e$.

Если же считать давление в трубе, наполненной жидкостью, не постоянным, то следует включить уравнения для жидкости [2]:

$$\dot{r}z' - r'\dot{z} + vr' + \frac{1}{2}rv' = 0, \quad (2.3)$$

$$\rho_f(\dot{v}z' - v'\dot{z} + vv') + P' = 0. \quad (2.4)$$

Здесь v — скорость жидкости, ρ_f — плотность жидкости.

Потенциал в данной работе соответствует модели материала Гента, считающейся пригодной для резиноподобных материалов:

$$W = -\mu J_m \ln \left(1 - \frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3}{J_m} \right). \quad (2.5)$$

Возможное использование иного потенциала не меняет методику исследования или учет сжимаемости. Отметим, что для существования структуры разрыва типа классического кинка, см. разд. 5, существенно свойство нелинейного усиления сопротивления при растяжении, характерное для резин, металлы обладают противоположными свойствами.

В качестве начальных данных для расчетов удобно брать распределения $r(Z)$ и $z'(Z)$. Тогда

$$z(Z) = \int_0^Z z'(\zeta) d\zeta.$$

Данные для решения задачи о распаде произвольного разрыва (задачи Римана) берутся такими, что на бесконечности выполняется условие равновесия: $P^* = \hat{W}_2(r_{\pm\infty}, z'_{\pm\infty}) / (r_{\pm\infty} z'_{\pm\infty})$. При решении этой задачи могут выявляться однородные области, соответствующие некоторым другим состояниям равновесия.

3 Учет сопротивления на изгиб

Целесообразность учета сопротивления стенок трубы на изгиб обусловлена тем, что помимо того, что это может уточнить модель, было показано [9], [10], что включение жесткости на изгиб в некоторых случаях необходимо для корректности уравнений. Кроме того, использование упрощенного варианта включения жесткости оказалось удобным для стабилизации численных схем.

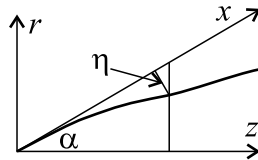


Рис. 1: К выводу уравнений с учетом сопротивления на изгиб

Учтем сопротивление на изгиб по аналогии с известным уравнением колебаний пластины: $-M_{xx} + (\sigma\eta_x)_x + P = \rho\eta_{tt}$, $M = D\eta_{xx}$. Здесь η — смещение по вертикали, x — горизонтальная координата, D — жесткость на

изгиб, σ — натяжение, P — давление на пластину, M — момент. Учтем влияние сопротивления на изгиб, формально включив в уравнения (2.1)-(2.2) дополнительное давление:

$$P_b = -\cos\alpha \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(D \frac{\partial^2}{\partial x^2} r \right) - \operatorname{tg}\alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(D \frac{\partial^2}{\partial x^2} z \right) \right], \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\cos\alpha}{z'} \frac{\partial}{\partial Z}, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{r'}{z'}. \quad P \rightarrow P + P_b,$$

Здесь $\alpha(Z)$ — угол наклона по отношению к оси Z касательной к кривой, образованной пересечением поверхности трубы с плоскостью, проходящей через ее ось, x — координата в локальной системе координат, ось которой направлена по касательной к рассматриваемой кривой в некоторой точке $(r_0(Z), z_0(Z))$, рис. 1; в такой системе координат величина смещения $\eta = [(r-r_0) - (z-z_0)\operatorname{tg}\alpha_0]\cos\alpha_0$.

Жесткость на изгиб вычисляется с использованием упругого потенциала W , линейризованного относительно значений $\lambda_{10}(Z) = (r'^2 + z'^2)^{1/2}$, $\lambda_{20}(Z) = r/H$, $\lambda_{30}(Z) = (\lambda_{10}\lambda_{20})^{-1}$, здесь предполагается, что сопротивление на изгиб невелико, поскольку труба тонкостенная. Уравнения бегущих волн, описывающие стационарные решения, при такой модификации уравнений (2.1)-(2.2) имеют восьмой порядок. В наиболее упрощенном варианте ($\alpha \approx 0$, $z' \approx 1$, $h \approx H$, $r \approx R$) имеется изотропия линейризованного потенциала, можно применять стандартную формулу $D = Eh^3/[12(1-\nu^2)]$, применяемую для обычного линейно упругого материала, E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона. Сделаем дополнительное предположение о слабой сжимаемости материала (велик первый параметр Ламе λ), $E = \mu(3\lambda + 2\mu)/(\lambda + \mu) \approx 3\mu$, $\nu = \lambda/[2(\lambda + \mu)] \approx 1/2$, $D = \mu h^3/3$.

Поэтому в случае упрощенного учета жесткости на изгиб только в правую часть уравнения (2.2) добавляется член $-c_b r''''$, где $c_b = DR/H = \mu H^2 R/3$:

$$-c_b r'''' + \left(R\sigma_1 \frac{r'}{\lambda_1^2} \right)' - \frac{\sigma_2}{\lambda_2} + P^* r z' = \rho R \ddot{r}. \quad (3.1)$$

При таком упрощенном учете жесткости на изгиб уравнения бегущих волн имеют шестой порядок в случае трубы с контролируемым давлением и восьмой порядок в случае трубы, заполненной жидкостью (из-за наличия дополнительных интегралов в последнем случае порядок уравнений бегущих волн может быть понижен).

В случае линейно упругого материала приведенные выше коэффициенты жесткости на изгиб можно использовать и при конечных деформациях стенок трубы. Для нелинейно упругого материала, исследуемого здесь, коэффициент жесткости при конечных деформациях иной.

Пусть компоненты линейризованного тензора деформации описываются соотношением

$$\Delta\sigma_i = \hat{\lambda}_i(e_{11} + e_{22} + e_{33}) + 2\hat{\mu}_i e_{ii}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.2)$$

где e_{ii} — компоненты тензора малой деформации относительно состояния, обозначенного индексом 0, а $\hat{\mu}_i$ и $\hat{\lambda}_i$ — анизотропные аналоги параметров Ламе. В результате анализа и обобщения стандартных методов расчета жесткости пластины на изгиб [12] можно получить формулу

$$D = \left[\hat{\lambda}_1 + 2\hat{\mu}_1 - \frac{\hat{\lambda}_1 \hat{\lambda}_3}{\hat{\lambda}_3 + 2\hat{\mu}_3} \right] \frac{h^3}{12}.$$

Индексом 1 здесь отмечено направление вдоль пластины, а индексом 3 — ортогональное направление.

Предположим, что материал сжимаем и напряжения описываются соотношением:

$$\sigma_i = \lambda f(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3) + \lambda_i W_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.3)$$

Здесь f — некоторая функция. Очевидно, при $\lambda \rightarrow \infty$ это соотношение можно использовать для описания рассматриваемого здесь несжимаемого материала. Заметим, что наиболее простое соотношение, пригодное для вывода коэффициента D для несжимаемого материала, такое:

$$\sigma_i = \lambda(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + \lambda_i W_i.$$

Но (3.3) лучше соответствует реальным материалам. Формулой такого вида описывается, например, материал Генки (модель, применяемая для эластомеров): $\sigma_i = \lambda \ln(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3) + 2\mu \ln(\lambda_i)$ [13]. Некоторые другие модели нелинейно упругих материалов (в том числе и слабо сжимаемых), также приводящие при линеаризации к соотношению (3.2), даны в работе [14]. Подставляя значения обобщенных параметров Ламе, полученных на основе линеаризации формулы (3.3), находим

$$D = \left[\lambda \lambda_{20} \lambda_{30} + 2W_1 - \frac{\lambda^2 f_0'^2 \lambda_{20} \lambda_{30} \lambda_{20} \lambda_{10}}{\lambda f_0' \lambda_{20} \lambda_{10} + 2W_3} \right] \frac{h^3}{12}.$$

При переходе к несжимаемой модели $\lambda \rightarrow \infty$, $D = (W_1 + W_3)h^3/6$.

При полном учете жесткости на изгиб порядок уравнений бегущих волн повышается на два по сравнению с упрощенным вариантом.

В ранее разработанной теории обратимых структур разрывов была дана классификация возможных эволюционных типов структур. Исследовались в основном модели, приводящие к системам бегущих волн четвертого порядка, но математические формулировки были абстрактные, они были даны для систем произвольного порядка. Проведенные здесь исследования показывают, что системы более высокого порядка реально появляются при исследовании уравнений, имеющих практическое значение, что подтверждает целесообразность такого абстрактного подхода.

4 Разработка методики расчета для трубы с жидкостью

Методика расчета уравнений с контролируемым давлением была разработана в предыдущих работах [9], [10], поэтому основное внимание здесь уделено случаю уравнений трубы, заполненной жидкостью.

Дисперсионное соотношение для уравнений трубы, заполненной жидкостью, было выведено в [2]. Уединенные волны изучались в [3]. Основное отличие от случая уравнений с контролируемым давлением состоит в том, что все четыре дисперсионные ветви пересекаются в точке $\omega = 0$, $k = 0$, тогда как в случае контролируемого давления только две из них пересекают начало координат. С каждым таким пересечением при решении задачи о распаде разрыва связана некоторая структура разрыва или центрированная простая волна, поэтому в случае учета массы жидкости в трубе решения оказываются более сложными.

Один из способов расчета таких уравнений — заменить жидкость слабо сжимаемым газом. Требуемая модификация гидродинамической части уравнений дана ниже:

$$(\dot{\rho}_f z' - \rho'_f \dot{z})r^2 + 2\rho_f r(\dot{r}z' - r'\dot{z}) + (\rho_f v r^2)' = 0,$$

$$P = P(\rho_f).$$

Здесь модифицировано уравнение сохранения массы (2.3). Добавлено уравнение состояния. В этом случае можно применять явную численную схему, однако требование слабой сжимаемости, необходимое для моделирования несжимаемой жидкости приведет к мелкому временному шагу для обеспечения устойчивости и обеспечения правильной области зависимости в расчете. В этой модели появятся еще две дисперсионные ветви, связанные с распространением звуковых волн. В случае исследования собственно газонаполненной трубы, потребуется еще включение уравнения энергии с учетом термодинамики. В изотермическом и адиабатическом случаях можно обойтись уравнением состояния.

Другой способ — исключить давление и получить уравнения для v , r , z и $q = \dot{z}$. Для вывода этих уравнений делается подстановка \dot{r} из (2.3) в (2.2), в полученное уравнение подставляется \ddot{z} из (2.1), затем из полученного уравнения выражается P и делается подстановка в (2.4) и (2.1). Формула для давления имеет вид:

$$P^* + P_b^* = \frac{P + P_b}{H} = \frac{-1}{1 + \frac{r'^2}{z'^2}} \left[\frac{r'\rho R}{r z'^2} \dot{v} + \frac{\rho R}{2z'^2} \dot{v}' + \mathcal{P} \right],$$

$$\mathcal{P} = \frac{\left(R\sigma_1 \frac{r'}{\lambda_1^2}\right)' - \frac{r'}{z'} \left(R\sigma_1 \frac{z'}{\lambda_1^2}\right)' - \frac{\sigma_2}{\lambda_2}}{rz'}$$

$$-\frac{\rho R}{rz'^2}(q-v) \left(\frac{z'q - vr' - \frac{1}{2}rv'}{z'}\right)' - \frac{\rho R}{rz'^3}(r'q - vr' - \frac{1}{2}rv')\left(\frac{1}{2}v' - q'\right).$$

Уравнения для расчета теперь такие:

$$\left[\rho_f^* z' - \left(\frac{\frac{r'\rho R^2}{rz'^2}}{1 + \frac{r'^2}{z'^2}}\right)'\right] \dot{v} - \left[\left(\frac{\frac{r'\rho R^2}{rz'^2}}{1 + \frac{r'^2}{z'^2}}\right) + \left(\frac{\frac{\rho R^2}{2z'^2}}{1 + \frac{r'^2}{z'^2}}\right)'\right] \dot{v}' - \left(\frac{\frac{\rho R^2}{2z'^2}}{1 + \frac{r'^2}{z'^2}}\right) \dot{v}'' =$$

$$\rho_f^*(v'q - vv') + \left[-P_b^* + \frac{\mathcal{P}}{1 + \frac{r'^2}{z'^2}}\right]' + \{c_{v2}v''\} - \{c_{v4}v''''\}, \quad \rho_f^* = \frac{\rho f}{H},$$
(4.4)

$$\dot{r}z' - r'q + vr' + \frac{1}{2}rv' = 0 + \{c_{r6}r''''''z'\},$$
(4.5)

$$\dot{z} = q - \{c_{z4}z''''\}, \quad \rho R \dot{q} = \left(R\sigma_1 \frac{z'}{\lambda_1^2}\right)' - (P^* + P_b^*)rr'.$$
(4.6)

В фигурных скобках здесь добавлены некоторые члены, иногда полезные для стабилизации численных схем. В случае вязкоупругой модели, см. разд. 2, для применения описанного ниже численного метода потребуется еще исключение пространственно-временных производных \dot{r}' и \dot{r}'' в формулах для σ_{iv} с помощью уравнения (2.3).

Эти уравнения были решены численно при помощи двухшаговой схемы. Это схема типа предиктор-корректор, в которой на шаге предиктор расчет осуществляется для половины временного шага. Полученные значения используются для расчета коэффициентов и аппроксимации пространственных производных на шаге корректор, в схеме предиктор эти значения берутся с нижнего слоя. Все аппроксимации пространственных производных центрированные. Схема имеет второй порядок точности по пространству и по времени и обладает низкой схемной вязкостью, описываемой производными высокого порядка. Для аппроксимации уравнения для скорости требуется неявная схема. С целью дальнейшего использования метода прогонки неявность вводилась только для аппроксимации производных \dot{v}' , \dot{v}'' (для этих членов неявность совершенно необходима по математическим соображениям) и v' (здесь неявность не обязательна, но она улучшает устойчивость схемы, явный вариант также использовался):

$$\dot{v}' \rightarrow \frac{v_{k+1}^{n+1} - v_{k-1}^{n+1} - (v_{k+1}^n - v_{k-1}^n)}{2\zeta\tau},$$

$$\dot{v}'' \rightarrow \frac{v_{k+1}^{n+1} + v_{k+1}^{n+1} - 2v_k^{n+1} - (v_{k+1}^n + v_{k-1}^n - 2v_k^n)}{\zeta^2\tau},$$

$$v' \rightarrow \frac{v_{k+1}^{n+1} - v_{k-1}^{n+1} + (v_{k+1}^n - v_{k-1}^n)}{4\zeta}.$$

Здесь ζ и τ — пространственные и временные шаги, k — пространственный индекс, n — временной, аппроксимация дана для шага корректор, для шага предиктор временной шаг уменьшается в два раза. Метод прогонки здесь хорошо обусловлен при не слишком больших шагах по времени. Системы уравнений, порожденные неявными аппроксимациями, можно решать также методом простой итерации [9]. Но программа с методом прогонки работает быстрее. Вначале рассчитывалось первое уравнение. После его расчета значение \dot{v} в формуле для давления, используемой в последнем уравнении, становится известным. При выборе временного шага условие устойчивости схемы $\tau < C\zeta$ (или $\tau < C\zeta^2$ в случае существенного влияния жесткости на изгиб или вязкости) определялось экспериментально. Расчет по аналогичной трехслойной центрированной схеме также возможен. Аппроксимация соответствующих членов такая:

$$\begin{aligned} \dot{v}' &\rightarrow \frac{v_{k+1}^{n+1} - v_{k-1}^{n+1} - (v_{k+1}^{n-1} - v_{k-1}^{n-1})}{4\zeta\tau}, \\ \dot{v}'' &\rightarrow \frac{v_{k+1}^{n+1} + v_{k+1}^{n+1} - 2v_k^{n+1} - (v_{k+1}^{n-1} + v_{k-1}^{n-1} - 2v_k^{n-1})}{2\zeta^2\tau}, \\ v' &\rightarrow \frac{v_{k+1}^{n+1} - v_{k-1}^{n+1} + (v_{k+1}^{n-1} - v_{k-1}^{n-1})}{8\zeta}. \end{aligned}$$

Остальные пространственные производные аппроксимируются на слое n за исключением диссипативных членов, если таковые имеются. Диссипативные члены в случае появления неустойчивости аппроксимируются на слое $n - 1$ или по шаблону "ромб", как в схеме Дюфорта–Франкеля, см. разд. 12, для уравнения теплопроводности. Но при такой схеме не удастся обеспечить краевую устойчивость без включения дополнительных диссипативных зон (вблизи левой границы она развивается быстрее, если $v > 0$). Коэффициент вязкости при этом брался обратно пропорциональным пространственному шагу, аппроксимация по схеме Дюфорта–Франкеля. В связи с необходимостью введения диссипативных зон от применения трехслойной схемы было решено отказаться.

При расчете без сопротивления на изгиб для некоторых начальных данных была обнаружена медленно развивающаяся нелинейная численная неустойчивость в области с большим градиентом величины r . Она не устраняется при уменьшении τ , но устраняется путем включения дополнительной жесткости на изгиб по упрощенному варианту, т.е. с модификацией только уравнения (2.2), заменой его на (3.1). При этом для сходимости схемы достаточно выбрать величину коэффициента $c_b = c\zeta^2$, c — некоторая константа.

Это связано с тем, что используемая двухшаговая схема имеет второй порядок точности. Таким образом, корректировка не меняет порядок аппроксимации. Можно также аналогичным образом включить высшую диссипацию, описываемую производной четвертого порядка в уравнение (4.4), см. член в фигурных скобках, величина коэффициента c_{v4} также выбирается порядка квадрата пространственного шага. Заметим, что нет сходимости в случае включения таким способом обычной диссипации, описываемой производной второго порядка, хотя расчеты на грубых сетках делать можно. Это связано с тем, что используемая схема имеет второй порядок точности, см. разд. 10. Поскольку рассматриваемая здесь численная схема имеет аппроксимацию второго порядка, то коэффициент при добавляемых членах берется пропорциональным квадрату шага или ниже, таким образом, порядок аппроксимации откорректированной схемы не меняется. Проблему такой численной неустойчивости устраняет также схема типа предиктор-корректор первого порядка точности по времени. Эта схема отличается от описанной выше схемы тем, что в предикторе используется полный временной шаг, а не полшага. В связи с однотипностью методики расчета для обеих схем может использоваться одна программа, куда вводится параметр доли временного шага, используемого в предикторе. Заметим, что в таком стиле, т.е. с применением предиктора, приводящего к аппроксимации первого порядка, сконструирована и схема Годунова, обладающая высокой устойчивостью при расчетах нелинейных моделей. Однако численные эксперименты показали, что такая схема с целым шагом в предикторе, как и схема Годунова, обладает заметной схемной вязкостью, поэтому она не использовалась, метод корректировки оказался эффективнее. Заметим также, что, регулируя величину временного шага в предикторе, в принципе можно управлять величиной схемной вязкости.

Аналогичным образом было обнаружено, что для некоторых начальных данных формальное включение жесткости по упрощенному варианту с произвольным значением коэффициента c_b требует дополнительного включения диссипации, описываемой производной шестого порядка, в уравнение (4.5), член в фигурных скобках. Но случае малых значений коэффициента жесткости этого не требуется, а это именно так для тонкостенных труб.

5 Расчет задачи о распаде разрыва

Рассматриваемые уравнения в бездиссипативном случае относятся к классу уравнений обратимого типа, для которых была разработана теория бездиссипативных разрывов [4]-[7]. Были проведены расчеты задачи о распаде разрыва. Начальные данные брались в виде сглаженной ступеньки. Были выявлены типичные ранее встречавшиеся структуры разрывов. Как и в случае контролируемого давления, при некоторых значениях параметров был выявлен флаттер, а также неустойчивость структур солитонного типа. На рис. 2

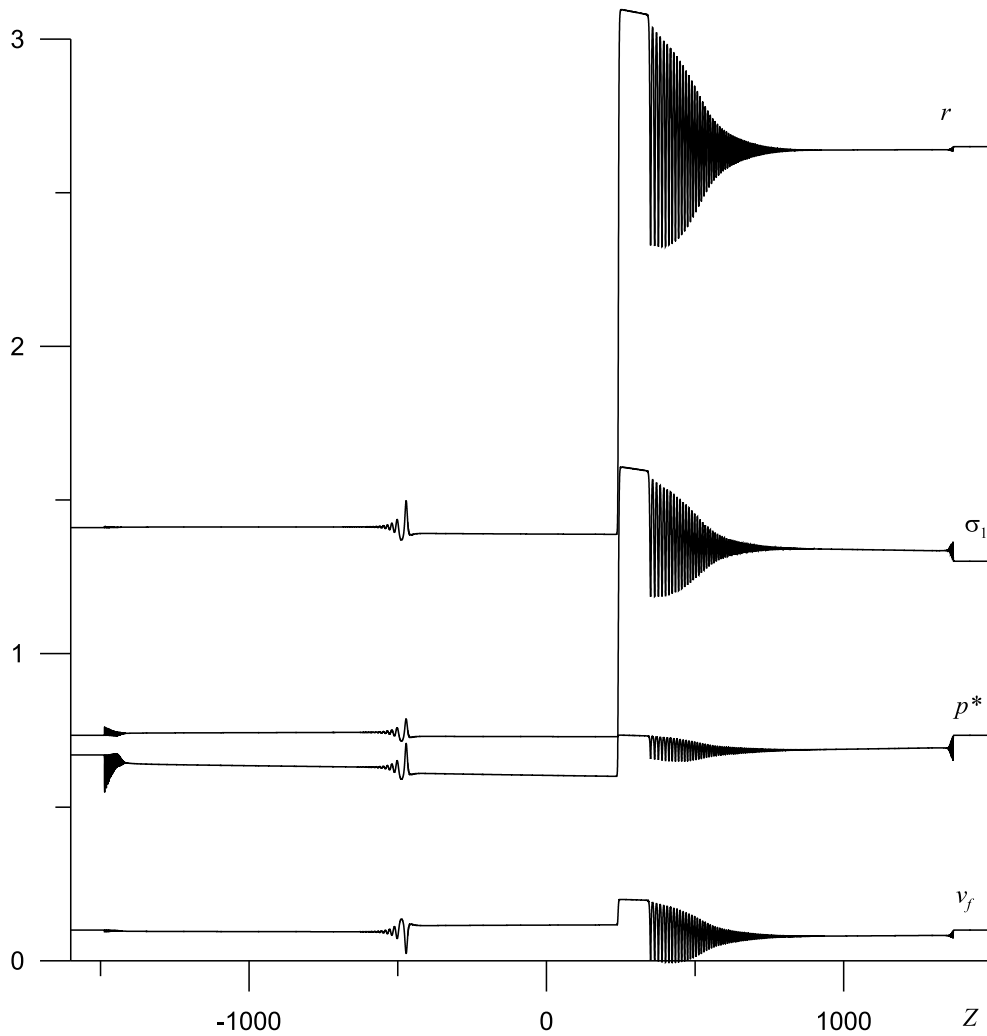


Рис. 2: Решение задачи о распаде разрыва

приведен пример графиков, полученных в результате расчета. В качестве начальных данных была взята smoothed step function для r и z' , скачка давления и скорости не было, $v_f = 0.1$, $R = 1$, $\rho = 1$, $\rho_f^* = 1$, $\mu = 2$, $J_m = 30$, $z'_{-\infty} = 1.1$, $c_b = 0.001$, $t = 1000$. Видны кинк и структуры солитонного типа (допускается, что некоторые из них не являются в точности солитонными структурами в связи с наличием члена с высшей производной и малым коэффициентом c_b). Здесь заметны более медленные, в основном поперечные, волны и более быстрые, в основном продольные, волны.

Рис. 3 иллюстрирует влияние коэффициента c_b на характер структуры разрыва, здесь данные те же, что и для рис. 2, но $c_b = 0.1$ (для стабилизации численной схемы при $\zeta = 0.1$ достаточно выбрать $c_{r6} = 10^{-6}$). Солитонная структура для продольных волн, движущихся вправо, заменяется разрывом с излучением, а солитонная структура для продольных волн, движущихся влево, замещается нестационарной структурой хаотического типа с волновыми зонами по обе стороны от разрыва. Характер остальных структур не изменился, хотя незначительно изменилась скорость их распространения.

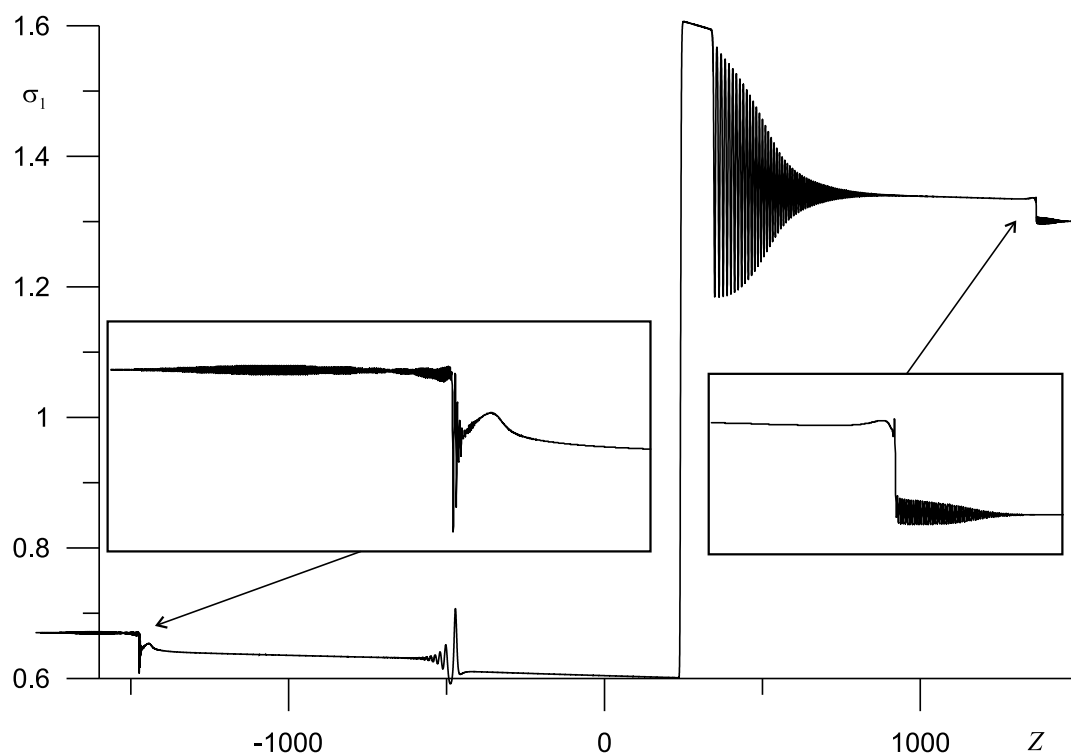


Рис. 3: Изменение типа структуры разрыва в результате влияния жесткости на изгиб

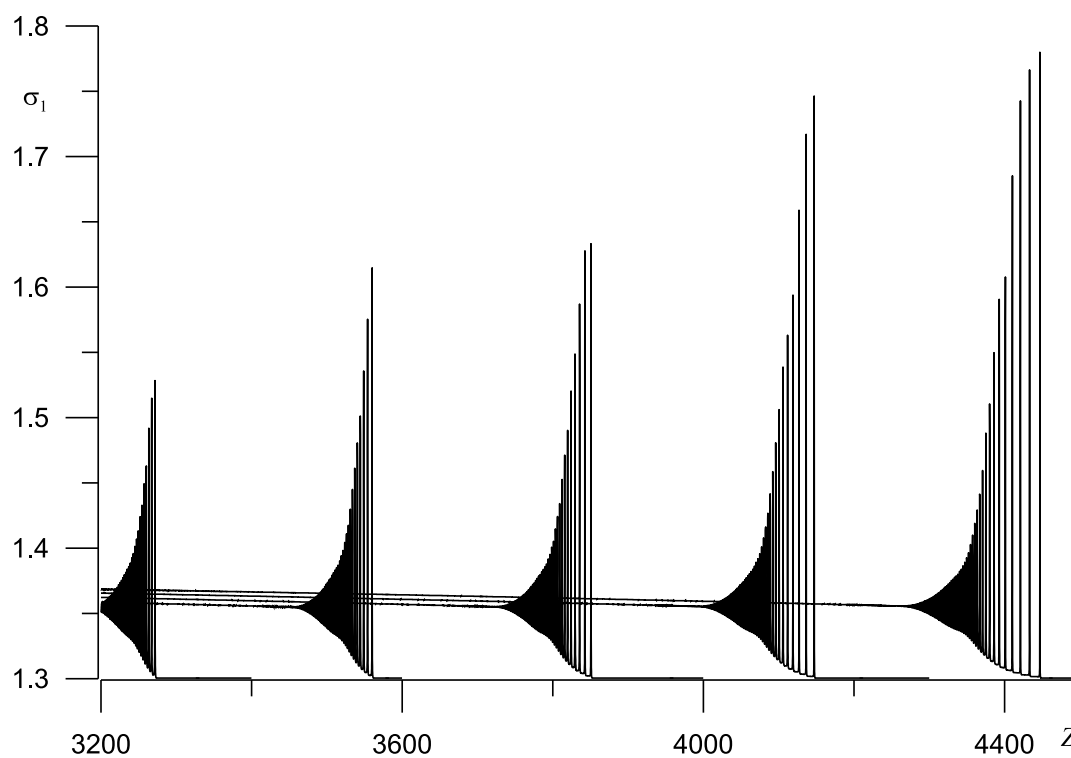


Рис. 4: Развитие численной неустойчивости солитонной структуры

Рис. 4 иллюстрирует развитие численной неустойчивости солитонной структуры разрыва для (в основном) продольных волн, движущихся вправо, $t =$

2400; 2600; 2800; 3000, $v_f = 0.5$, остальные параметры те же, что и для рис. 2. При измельчении шага сетки скорость роста амплитуды первой волны уменьшается. Это численный эффект, устранимый введением дополнительного диссипативного члена $c_{Z4}Z''''$ в уравнении для продольной волны, величина c_{Z4} бралась пропорциональной ζ^2 . Он связан с тем, что уединенная волна рассматриваемого типа (класс 0) [7] обладает нейтральной устойчивостью. Если какие-то возмущения приводят к уменьшению или наоборот к увеличению амплитуды, то волна не возвращается в исходное состояние, а сохраняет новую амплитуду и новую скорость. Если численные эффекты таковы, что они систематически снижают амплитуду волны, то это не влияет на качественный вид решения при расчете структуры солитонного типа, поскольку такое снижение компенсируется за счет притока энергии в структуру разрыва. Если же численные эффекты наоборот систематически увеличивают амплитуду первой волны, то у нее меняется скорость, она со временем отрывается от структуры, а рост амплитуды продолжается. Со временем это может привести к остановке расчета вследствие вычислительного блоуапа.

Расчеты по версии программы с полным учетом жесткости на изгиб также проводились, однако в случае тонких стенок для большинства начальных данных результаты мало отличаются от случая, когда такого учета нет. Коррекция численной схемы в случае возникновения нелинейной неустойчивости, рассмотренной в разд. 4, делалась с помощью члена $c_{v4}r''''$ в уравнении (4.4). Такой учет для тонкостенных труб становится актуальным в случае слабого продольного натяжения или при $\sigma_1 < 0$, без такого учета уравнения в последнем случае становятся некорректными [10].

6 Упрощенные уравнения

Упрощенные уравнения, применяемые для описания не волновых зон в задаче о распаде произвольного разрыва, получаем отбрасыванием высших производных:

$$\begin{aligned} \rho_f^* z' \dot{v} &= \rho_f^* (v'q - vv') - \left(\frac{\sigma_2}{\lambda_2 z'} \right)', \quad \rho_f^* = \frac{\rho_f}{H}, \\ \dot{r}z' - r'q + vr' + \frac{1}{2}rv' &= 0, \\ \dot{z} = q, \quad \rho R \dot{q} &= \left(R\sigma_1 \frac{z'}{\lambda_1^2} \right)' - \frac{\sigma_2}{\lambda_2 z'} r', \quad \lambda_1 = z'. \end{aligned}$$

У линеаризованного варианта этих уравнений две дисперсионные ветви, представляющие собой прямые. Однако это не классические гиперболические уравнения, поскольку они не являются квазилинейными и их невозможно записать как уравнения в характеристиках. Для более ясного пони-

мания свойств этих уравнений введем новую переменную $u = z'$. Уравнения теперь можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \rho_f^* u \dot{v} &= \rho_f^* (v'q - vv') - \left(\frac{\sigma_2}{\lambda_2 u} \right)', & \rho_f^* &= \frac{\rho_f}{H}, & q &= \frac{\partial}{\partial t} \int u dZ \\ & & \dot{r}z' - r'q + vr' + \frac{1}{2}rv' &= 0, \\ \rho R \ddot{u} &= \left(R\sigma_1 \frac{u}{\lambda_1^2} \right)'' - \left(\frac{\sigma_2}{\lambda_2 z' r'} \right)', & \lambda_1 &= u. \end{aligned}$$

Эти уравнения допускают автомодельные решения, зависящие от x/t однако их свойства отличаются от свойств решений, ранее рассматривавшихся упрощенных уравнений для различных моделей механики сплошной среды (в том числе и в случае уравнений трубы с контролируемым давлением), поскольку это теперь интегро-дифференциальные уравнения. Аналогичные усредненные уравнения, описывающие волновые зоны тоже должны относиться к этому типу. В расчетах задачи о распаде разрыва в частности наблюдалось примыкание классического кинка к области с непостоянными значениями переменных, что ранее не встречалось. Типичным стало также включение солитонной структуры внутрь области с непостоянными значениями переменных. На рис.5 показаны графики эволюции решения со временем, хорошо иллюстрирующие сказанное выше, $t = 300 - 2700$, $c_b = 0$, $v_f = 0.4$.

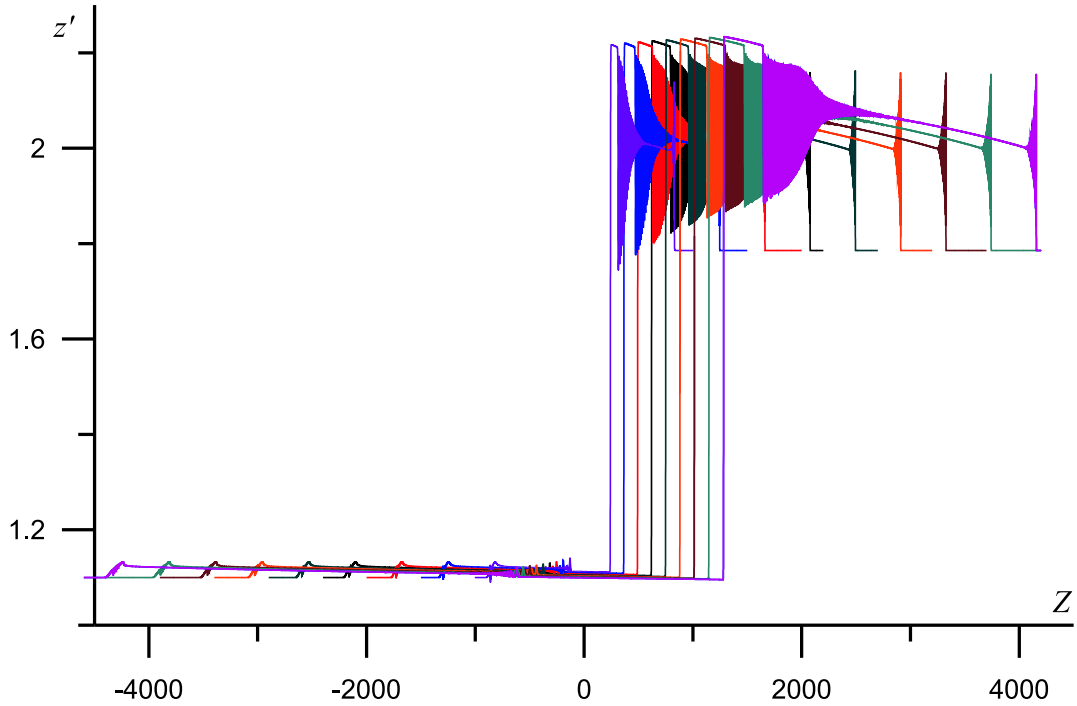


Рис. 5: Эволюция решения со временем

7 Уравнения без учета продольных волн в случае заполнения трубы жидкостью

В случае рассмотрения малых деформаций относительно некоторого исходного деформированного состояния r_0 , z'_0 и длинных волн, возмущения продольных деформаций будут иметь порядок квадрата поперечных возмущений поперечных деформаций. Можно пренебречь продольными волнами и вывести уравнения, аналогичные классическим или обобщенным (если учитывается жесткость на изгиб) уравнениям Буссинеска:

$$\rho_f^* z'_0 \dot{v} - \frac{\rho R^2}{2z_0'^2} \dot{v}'' = -\rho_f^* v v' + (-P_b^* + \mathcal{P})', \quad \dot{r} z'_0 + v r' + \frac{1}{2} r v' = 0.$$

$$\mathcal{P} = \frac{\left(R \sigma_{10} \frac{r'}{\lambda_{10}^2} \right)' - \frac{\sigma_2}{\lambda_2}}{r z'_0} - \frac{\rho R}{r z_0'^2} (-v) \left(\frac{-v r' - \frac{1}{2} r v'}{z'_0} \right)' - \frac{\rho R}{r z_0'^3} (-v r' - \frac{1}{2} r v') \frac{1}{2} v',$$

$$P_b = -D r_0 r'''';$$

При использовании данного приближения допустимо некоторое дальнейшее упрощение выражения для \mathcal{P} : замена в некоторых членах r на r_0 , использование линеаризации при вычислении σ_2 , но это не вносит существенных изменений в характер уравнений. Возможно также исключение пространственно-временной производной из первого уравнения путем подстановки низшего приближения для величины v , но полезность такого изменения не очевидна. В полученных таким образом уравнениях скорость распространения коротких волн будет сколь угодно большой даже при отсутствии учета жесткости на изгиб, что не адекватно реальности, требуется также проверка корректности уравнений.

Применяя стандартные методы, из этих уравнений можно вывести обычное или обобщенное уравнение Кортвега–де Вриза а также упрощенные уравнения гиперболического типа.

8 Уравнения без учета продольных волн для случая заполнения трубы газом

Как и в случае заполнения жидкостью, для малых относительных деформаций можно не учитывать продольные волны. Имеем систему из трех уравнений:

$$\left(R \sigma_1 \frac{r'}{\lambda_1^2} \right)' - \frac{\sigma_2}{\lambda_2} + (P_b^* + P^*) r z'_0 = \rho R \ddot{r}; \quad (8.7)$$

$$\dot{\rho}_f z_0' r^2 + 2\rho_f r r' z_0' + (\rho_f v r^2)' = 0, \quad (8.8)$$

$$\rho_f (\dot{v} z_0' + v v') + P' = 0. \quad (8.9)$$

$$P = P(\rho_f)$$

Теперь можно вывести уравнения описывающие только акустические волны. Для этого воспользуемся соотношением

$$-\frac{\sigma_2}{\lambda_2} + (P^*) r z_0' = 0$$

являющимся приближением уравнения (8.7) в низшем порядке. Найдем зависимость $r = F(P)$, далее воспользовавшись уравнением состояния, найдем зависимость $r = r(\rho_f)$. Далее подставляем эту зависимость в выражения с производными от r в уравнение (8.7). Найдем уточненную зависимость $r = f(\rho_f, \rho_f', \rho_f'', \dot{\rho}_f)$ После подстановки этой зависимости вместо r в уравнения (8.9) и (8.8) и удаления лишних членов получаем уравнения, аналогичные уравнениям Буссинеска.

9 Об опрокидывании волн и коррекции модели

В случае уравнений трубы с контролируемым давлением дисперсия вызывается членами с низшими производными. Если их выбросить и оставить только члены с производными второго порядка, то получится нелинейная гиперболическая система. Эта система применима при больших значениях производных и не предполагает компенсацию дисперсии нелинейностью. Можно предвидеть, что для некоторых начальных данных формально непрерывного решения нет. В данном случае опрокидывание волны с физической точки зрения вполне допустимо. Более того, поскольку используется Лагранжева начальная система координат, то при некотором исправлении знаков уравнений в области после опрокидывания соответствующее решение является однозначным решением, в котором есть непрерывность неизвестных, но производная обращается в бесконечность в двух точках. Правильно может описывать явления такое решение только в случае контролируемого давления, в случае заполнения газом или жидкостью формально такое решение возможно, но оно противоречит гипотезам, сделанным при выводе уравнений. Анализ показывает, что в случае опрокидывания упругих волн труба должна быть не растянута а сжата, т.е. уравнения становятся некорректными. Выход в некорректную область действительно наблюдается при некоторых начальных данных. В этом случае в расчете возникают хаотические волны с растущей амплитудой и последующий вычислительный блоуап, причем, чем мельче сетка, тем быстрее он наступал, схемные эффекты обеспечивают некоторую корректировку системы на грубых сетках. Включение жесткости

на изгиб или вязкости по упрощенному варианту (с геометрической линейностью) превращает систему в типичную дисперсионную систему, где дисперсия связана с высшими производными, некорректность исчезает, в этом случае опрокидывания волн нет, получаются структуры разрывов с хаотическими волновыми зонами, что и следовало ожидать. Включение же этих эффектов с полным учетом геометрической нелинейности тоже корректирует систему, предотвращает изломы стенок трубы (разрывы производных), но в принципе не исключает возможность опрокидывания волн. Так что нельзя однозначно утверждать, что для данной модели опрокидывание волн не возможно.

Пример еще одной системы с нелинейными членами с высшими производными — уравнения электронной магнитной гидродинамики плазмы [4], [15]. Для этих уравнений при сохранении только старших производных возникают уравнения вида

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{d}{dt}(v, w, B_y, B_z) = 0, \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x}$$

Здесь v, w и B_y, B_z — ортогональные компоненты вектора скорости и магнитного поля, u — продольная компонента скорости. Наличие полной производной в уравнениях предполагает возможность опрокидывание волны для производных от неизвестных. Можно допустить отсутствие классических решений в некоторых случаях. Если в эти уравнения включается магнитная или обычная вязкость, то она описывается производными второго порядка, и возможно компенсирует нелинейные эффекты опрокидывания волн не всегда.

Для таких систем существуют бездиссипативные и диссипативные структуры разрывов, но возможна и ситуация, когда для некоторых начальных данных, например приводящих к большим значениям высших производных, нет классического решения. Такие свойства систем могут породить и численную неустойчивость, поскольку большие производные могут возникать и в результате численных эффектов. Отсутствие классического решения можно рассматривать как дефект системы уравнений, это требует уточнения модели, исходя из физических соображений, не обязательно потребуются обобщенные решения или добавление физической вязкости или дисперсии.

10 О стабилизации численных схем

Уравнения, аппроксимирующие численную схему, могут содержать члены с производными высокого порядка, приводящими к некорректности. Вопрос о способах корректировки некорректных уравнений обсуждался в [10] на примере обобщенных уравнений Буссинеска. Вывод такой: с помощью членов с производными более низкого порядка, чем порядок членов, вызвавших некорректность, не удастся корректировать уравнения рассматриваемого

типа. При применении же производных более высокого порядка величина коэффициента при корректирующем члене может быть сколь угодно малой. Очевидно, этот принцип можно распространить и на численные схемы. Необходимость включения дополнительных членов с высшими производными связана с тем, что, вероятно, вычислительную неустойчивость можно интерпретировать как некорректность уравнений, получаемых в качестве дифференциальных приближений численной схемы. Поэтому корректировать неустойчивую численную схему и добиваться ее сходимости удастся с помощью добавления в уравнения членов с производными более высокого порядка, чем члены, аппроксимация которых вызвала численную неустойчивость. В случае схемы второго порядка точности, такая некорректность может быть обусловлена дополнительными членами с производными на два порядка выше, чем члены в исходных уравнениях. В частности, для подавления численной неустойчивости, порожденной аппроксимацией членов с производными второго порядка, приходится вводить корректирующий член с производной четвертого порядка, члены с производными четвертого порядка корректируются производными шестого порядка, см. разд. 4.

В ряде современных численных схем для расчетов газовой динамики применяется коррекция схемы, основанная на принципе максимума. Такая коррекция позволяет проводить расчеты при наличии разрывов, т.е. расчеты обобщенных решений, и в то же время обеспечивать низкую схемную вязкость или ее отсутствие для гладких решений. Анализ показывает, что такая коррекция позволяет одновременно устранять и нелинейную численную неустойчивость, например, медленно развивающуюся неустойчивость центрированной схемы. При расчетах моделей с дисперсией не диссипативного типа коррекция для расчета разрывов не требуется, решения гладкие. Но проблемы нелинейной неустойчивости остаются, а принцип максимума не выполняется, возникновение новых колебаний — естественное свойство самой модели, поэтому коррекцию на основе принципа максимума для стабилизации нелинейной неустойчивости применить здесь нельзя. Добавление членов с высшими производными оказывается эффективной альтернативой. При этом оказывается возможным применять коррекцию как диссипативными, так и недиссипативными дополнительными членами.

В случае численных схем для нелинейных уравнений спектральным методом можно исследовать только применение схем к линеаризованным вариантам уравнений. Для неоднородных участков можно также пытаться искать собственные функции. Но наличие линейной неустойчивости не исключает возможность возникновения нелинейной неустойчивости, встречавшейся выше.

11 Анализ диссипативных и дисперсионных свойств некоторых двухшаговых схем

С целью выяснения свойств различных двухшаговых численных схем, а именно двухшаговая схема применялась выше, сопоставим их на примере уравнения переноса (такие схемы иногда называются схемами типа Лакса-Вендроффа). Приведем ниже некоторые из них. Наименования классических схем типа Лакса-Вендроффа даны согласно [16].

Двухшаговая схема Лакса-Вендроффа (Рихтмаера), переходящая в классическую одношаговую схему Лакса-Вендроффа для линейных уравнений:

$$\frac{u_k^{n+1/2} - \frac{u_{k+1}^n + u_{k-1}^n}{2}}{\tau/2} + c \frac{u_{k+1}^n - u_{k-1}^n}{2h} = 0$$

$$\frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{\tau} + c \frac{u_{k+1}^{n+1/2} - u_{k-1}^{n+1/2}}{2h} = 0$$

Двухшаговая схема Лакса-Вендроффа (Бёрнштейна):

$$\frac{u_{k+1/2}^{n+1/2} - \frac{u_{k+1}^n + u_k^n}{2}}{\tau/2} + c \frac{u_{k+1}^n - u_k^n}{h} = 0$$

$$\frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{\tau} + c \frac{u_{k+1/2}^{n+1/2} - u_{k-1/2}^{n+1/2}}{h} = 0$$

Использованная выше схема второго порядка точности:

$$\frac{u_k^{n+1/2} - u_k^n}{\tau/2} + c \frac{u_{k+1}^n - u_{k-1}^n}{2h} = 0$$

$$\frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{\tau} + c \frac{u_{k+1}^{n+1/2} - u_{k-1}^{n+1/2}}{2h} = 0$$

Использованная выше схема первого порядка точности:

$$\frac{\tilde{u}_k^n - u_k^n}{\tau} + c \frac{u_{k+1}^n - u_{k-1}^n}{2h} = 0$$

$$\frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{\tau} + c \frac{\tilde{u}_{k+1}^n - \tilde{u}_{k-1}^n}{2h} = 0$$

Последние две схемы вряд ли можно назвать схемами типа Лакса-Вендроффа, поскольку в них отсутствует усреднение $\frac{u_{k+1}^n + u_{k-1}^n}{2}$, что как раз характерно для схемы Лакса [16]. Использованную выше схему второго порядка можно называть схемой с аппроксимацией по времени по методу Рунге-Кутты.

Одношаговые представления и старшие остаточные диссипативные и обратимые дисперсионные члены в правой части уравнений при аппроксимации схем такие:

$$\begin{aligned}
& \frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{\tau} + c \frac{u_{k+2}^n - u_{k-2}^n}{4h} - c^2 \tau \frac{u_{k+2}^n + u_{k-2}^n - 2u_k^n}{8h^2} = 0 \\
& \left(-\frac{1}{3!} \tau^2 u_{ttt} - c \frac{4}{3!} h^2 u_{xxx} - c^2 \left(\frac{4}{3!} - \frac{4}{4!} \right) \tau h^2 u_{xxxx} - \frac{1}{4!} \tau^3 u_{tttt} \right) \\
& \frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{\tau} + c \frac{u_{k+1}^n - u_{k-1}^n}{2h} - c^2 \tau \frac{u_{k+1}^n + u_{k-1}^n - 2u_k^n}{2h^2} = 0 \\
& \left(-\frac{1}{3!} \tau^2 u_{ttt} - c \frac{1}{3!} h^2 u_{xxx} - c^2 \left(\frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} \right) \tau h^2 u_{xxxx} - \frac{1}{4!} \tau^3 u_{tttt} \right) \\
& \frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{\tau} + c \frac{u_{k+1}^n - u_{k-1}^n}{2h} - c^2 \tau \frac{u_{k+2}^n + u_{k-2}^n - 2u_k^n}{8h^2} = 0 \\
& \left(-\frac{1}{3!} \tau^2 u_{ttt} - c \frac{1}{3!} h^2 u_{xxx} - \frac{1}{4!} \tau^3 u_{tttt} \right) \\
& \frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{\tau} + c \frac{u_{k+1}^n - u_{k-1}^n}{2h} - c^2 2\tau \frac{u_{k+2}^n + u_{k-2}^n - 2u_k^n}{8h^2} = 0 \\
& \left(+c^2 \frac{1}{2} \tau u_{xx} - \frac{1}{3!} \tau^2 u_{ttt} - c \frac{1}{3!} h^2 u_{xxx} + \frac{1}{4} c^2 \tau^3 u_{ttx} + c^2 \frac{1}{3!} \tau h^2 u_{xxxx} - \frac{1}{4!} \tau^3 u_{tttt} \right)
\end{aligned}$$

При анализе остаточных членов аппроксимации допустима замена $u_t = -cu_x$ для приведения членов.

Существует однопараметрическое семейство подобных схем второго порядка точности на пятиточечном пространственном шаблоне, его можно создать за счет перераспределения комбинаций широкого и узкого шаблона для производных первого и второго порядка.

Использованная схема второго порядка точности имеет нулевую пространственную вязкость, т.е. минимальную из всех возможных, а имеющаяся временная вязкость пропорциональна τ^3 , т.е. путем уменьшения временного шага ее можно сделать очень малой. В то же время схема первого порядка точности оказывается с вязкостью первого порядка. Заметим, что управляя величиной шага в предикторе можно при необходимости управлять и схемной вязкостью.

Приведенные численные схемы фактически представляют собой коррекцию простейшей одношаговой центрированной по пространству схемы путем добавки в нее вязкости. Одношаговая схема и остаточные члены, выявляемые при анализе аппроксимации имеют, вид:

$$\frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{\tau} + c \frac{u_{k+1}^n - u_{k-1}^n}{2h} = 0$$

$$\left(-c^2 \frac{1}{2} \tau u_{xx} - \frac{1}{3!} \tau^2 u_{ttt} - c \frac{1}{3!} h^2 u_{xxx} - \frac{1}{4} c^2 \tau^3 u_{txx} - \frac{1}{4!} \tau^3 u_{tttt}\right)$$

У этой схемы выявляется отрицательный диссипативный член первого порядка, что предполагает некорректность. Неустойчивость схемы выявляется при подстановке $u = q^n \exp ik\phi$, $\max |q| = \sqrt{1 + c^2 \tau^2 / h^2}$. Но $\max |q| = 1 + c^2 C^2 \tau / 2$, если $\tau < Ch^2$, C — некоторое число, что меньше $\exp c^2 C^2 \tau / 2$. Расчет возможен [17], но возмущения при таком расчете растут со временем по экспоненте, хотя показатель роста можно сделать как угодно малым. Схема может быть улучшена введением вязкости

$$\frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{\tau} + c \frac{u_{k+1}^n - u_{k-1}^n}{2h} - \frac{h^2}{\tau} \frac{u_{k+1}^n + u_{k-1}^n - 2u_k^n}{2h} = 0$$

Этот вариант коррекции совпадает со схемой Бернштейна, в этом случае можно брать $\tau < Ch$. Эта схема в работе [17] названа "тренога".

Для используемой двухшаговой схемы второго порядка точности

$$q = 1 - i(c\tau/h) \sin \phi + (c^2 \tau^2 / h^2)(\cos 2\phi - 1)/4$$

Следовательно, условие устойчивости $\tau < Ch$. Для использованной схемы первого порядка условие устойчивости аналогичное.

Классическая двухшаговая схема Лакса-Вендроффа (Рихтмаера) неустойчива при включении диффузионных членов [16], можно проверить неустойчивость для уравнения теплопроводности. По схеме Бернштейна с узким шаблоном вторую производную для предиктора аппроксимировать невозможно. Требуются альтернативные способы аппроксимации диффузных членов. В использованных же в данной работе схемах диссипативные члены считаются однотипно с недиссипативными, что упрощает разработку программ.

Таким образом, коррекция, сделанная выше, аналогична, но корректируется неустойчивость на неоднородном фоне или нелинейная неустойчивость возмущений.

12 О коррекции трехслойной схемы

Трехслойная схема типа крест оказывается неустойчивой при наличии диссипативных членов, рассмотрим методы ее коррекции на примере уравнения теплопроводности.

Простейшая трехслойная схема для уравнения теплопроводности неустойчива

$$\frac{u_k^{n+1} - u_k^{n-1}}{2\tau} = a^2 \frac{u_{k+1}^n + u_{k-1}^n - 2u_k^n}{h^2}$$

Неустойчивость выявляется посредством применения спектрального признака, но ее можно и предвидеть, поскольку аппроксимация содержит член с $u_{xxxx}h^2$ в правой части. Добавление диссипативного члена с производной по пространству четвертого порядка с обратным знаком с целью компенсировать эту неустойчивость только замедлит ее, поскольку останутся некорректные члены с высшими производными.

Двухслойная явная схема для уравнения теплопроводности условно устойчива, но в случае применения двухслойной аппроксимации для диссипативных членов и трехслойной для обратимых членов развивается неустойчивость, не устранимая уменьшением временного шага. Одно из решений проблемы — аппроксимация диссипативных членов по нижнему слою:

$$u_{xx} \rightarrow a^2 \frac{u_{k+1}^{n-1} + u_{k-1}^{n-1} - 2u_k^{n-1}}{h^2}$$

Заметим, что в случае решения собственно уравнения теплопроводности, такая схема приводит фактически к двум независимым расчетам.

Коррекция трехслойной схемы для уравнения теплопроводности возможна также путем добавления члена с производной второго порядка по времени, схема Дюфорта-Франкеля:

$$\begin{aligned} \frac{u_k^{n+1} - u_k^{n-1}}{2\tau} &= a^2 \frac{u_{k+1}^n + u_{k-1}^n - u_k^{n+1} - u_k^{n-1}}{h^2} \\ &= a^2 \frac{u_{k+1}^n + u_{k-1}^n - 2u_k^n}{h^2} - a^2 \frac{\tau^2}{h^2} \frac{u_k^{n+1} + u_k^{n-1} - 2u_k^n}{\tau^2} \end{aligned}$$

Она аппроксимирует уравнение

$$u_t + a^2 \frac{\tau^2}{h^2} u_{tt} + a^2 \frac{\tau^4}{h^2} \frac{2}{4!} u_{tttt} = a^2 u_{xx} + a^2 \frac{2}{4!} h^2 u_{xxxx}$$

Схема абсолютно устойчива, т.е. не имеет никаких ограничений на шаг по времени. Аппроксимация диссипативных членов по схеме Дюфорта-Франкеля не вызывает неустойчивости при расчетах уравнений с основными обратимыми членами. Если поддерживается условие $\tau < h^2$, то считается уравнение теплопроводности. Если же $\tau = h$, то при больших значениях a фактически считается гибридное уравнение, которое можно интерпретировать и как уравнение теплопроводности и как волновое уравнение. При расчетах с большим коэффициентом вязкости, как это было сделано выше, для устранения граничной неустойчивости, влияние члена с u_t пренебрежимо мало, фактически считается волновое уравнение, для которого математически необходимое число граничных условий совпадает с числом условий, необходимым для использования схемы.

Аналогичные схемы можно построить и для уравнений с производными четвертого и шестого порядка

$$\begin{aligned} \frac{u_k^{n+1} - u_k^{n-1}}{2\tau} &= a^2 \frac{u_{k+3}^n + u_{k-3}^n - 6u_{k+2}^n - 6u_{k-2}^n + 15u_{k+1}^n + 15u_{k-1}^n - 10u_k^{n+1} - 10u_k^{n-1}}{h^6} \\ &= a^2 \frac{u_{k+3}^n + u_{k-3}^n - 6u_{k+2}^n - 6u_{k-2}^n + 15u_{k+1}^n + 15u_{k-1}^n - 20u_k^n}{h^6} \\ &\quad + 10a^2 \frac{u_k^{n+1} + u_k^{n-1} - 2u_k^n}{h^6} \end{aligned}$$

$$u_t + 10a^2 \frac{\tau^2}{h^2} u_{tt} = a^2 u_{xxxxxx} + a^2 \frac{2}{4!} (3^4 - 2^2 \cdot 6 + 15) h^2 u_{xxxxxxxx}$$

Устойчивость (по крайней мере условная) проверяется с помощью спектрального признака.

Попытка устранить граничную неустойчивость для уравнений трубы с жидкостью с помощью поглощающей зоны с производной шестого порядка оказалась неудачной. Тем не менее поглощающие зоны с дополнительным членом с производной шестого порядка эффективно применялись для обобщенного уравнения Кортевега–де Вриза с производной пятого порядка, это обеспечивает для этого уравнения математически корректную постановку задачи.

Сглаживающий оператор с производной второго порядка по времени иногда вводят и для расчетов уравнений типа уравнения переноса:

$$u_t + a^2 u_{tt} + cu_x = 0$$

Это может позволить обойти условие Куранта и применяется для расчетов неоднородных сред в случае наличия узких участков с большими скоростями распространения волн.

13 О числе граничных условий

Существует метод определения по дисперсионному соотношению числа граничных условий, необходимых для математически корректной постановки задачи в случае уравнений эволюционного типа [4], [18], [19]. Пусть существует $B > 0$ такое что, если $\text{Im}\omega > B$, то все корни $k(\omega)$ расположены строго в верхней или нижней комплексной полуплоскости. Это условие корректности уравнений. Число граничных условий слева определяется числом корней в верхней полуплоскости, а число условий справа — числом корней в нижней полуплоскости. Предыдущие исследования численного моделирования задачи Коши показали, что в случае превышения числа граничных условий, что связано с особенностями численных схем, расчет обычно проводить можно.

Будем обозначать число граничных условий слева и справа в виде $n|m$, где n и m — целые числа. В случае контролируемого давления число граничных условий правильное — $2|2$ для схемы крест и для схемы Лакса-Вендроффа в версии Бернштейна и неправильное, повышенное, — $4|4$ для используемой двухшаговой схемы и классической схемы Лакса-Вендроффа.

При газодинамическом варианте уравнений правильное число условий — $3|3$ при дозвуковом режиме и $4|2$ или $2|4$ при сверхзвуковом режиме. При использовании схемы крест ставится $4|4$ условий, при применяемой двухслойной схеме — $8|8$, т.е. больше, чем нужно.

В трубе с жидкостью число граничных условий, определяемое по дисперсионному соотношению — $2|2$. Заметим, что в пределе при переходе от газовой динамики к несжимаемой жидкости — $3|3$. При использовании схемы крест по описанной выше методике ставится $3|3$ условия, но нет устойчивости на границе. При применении двухшаговой схемы число граничных условий — $6|6$, устойчивость на границе есть. Заметим также, что для гидравлики (а эта модель является ее расширением) пишутся только обыкновенные дифференциальные уравнения $(\rho_f r^2)' = 0$ и $(P + \rho_f v^2/2)' = 0$. Здесь всего два граничных условия, которые могут быть распределены по правой и левой границе произвольным образом.

Похожая ситуация с устойчивостью на границе встречалась для уравнений магнитной гидродинамики плазмы, где также имелись пространственно-временные производные [4], [15]. Заметим, что для плазмы необходимое число граничных условий $3|3$ или $4|2$ ($2|4$), $5|1$ ($1|5$), $6|0$ ($0|6$) в зависимости от скорости системы координат наблюдателя. При применении схемы крест к исходным уравнениям число граничных условий было $6|6$, возникала граничная неустойчивость. Уравнения были преобразованы так, чтобы в каждом были временные и пространственно-временные производные только от одного неизвестного. В результате этого в уравнениях появились пространственные производные третьего порядка, теперь с граничной неустойчивостью, в устойчивых схемах, число граничных условий для схемы крест — $10|10$, а для двухшаговой — $20|20$, устойчивость на границе есть.

В обоих случаях устойчивость на границе достигнута увеличением числа граничных условий.

Правильное число граничных условий по схеме крест для уравнений, может быть достигнуто для уравнений со старшими пространственными производными четного порядка. Но и в случае нечетных старших производных для некоторых систем уравнений можно использовать схемы типа крест с полуцелым расположением части неизвестных. Тогда добиться правильного числа граничных условий тоже можно, например, такая схема обычно используется для уравнений Максвелла. Можно еще вводить диссипативные зоны с четными производными вблизи границ, тогда тоже правильное число граничных условий достижимо. Это также устраняет отраженные волны и помогает уменьшить область расчета.

Введение диссипативной зоны с производной второго порядка по схеме Дюфорты-Франкеля, сделанное выше, в принципе исправляет число граничных условий для уравнения переноса, аналогом которого для неизвестного v в некоторой степени является первое уравнение системы, полученной исключением давления, но здесь система уравнений, поэтому полное исправление не достигается. Введение диссипативной зоны второго порядка по чисто неявной схеме здесь помогает, но нужен большой коэффициент диссипации и наверное нужно одновременное введение диссипативной зоны для r . Не удастся добиться нужного эффекта при применении диссипативных зон четвертого и шестого порядка по схеме Дюфорты-Франкеля, а также включением в левую часть уравнения оператора v_{tt} .

14 Некоторые выводы о методиках расчета обобщенных и классических решений с помощью конечно-разностных методов

Основные отличия методик. Есть некоторые принципиальные различия в методиках расчета классических решений и обобщенных решений (решений с разрывами неизвестной или ее производных). В обоих случаях достоверность полученных результатов определяется наличием аппроксимации уравнений и наличием предельного решения при уменьшении шагов сетки. Но в первом случае это непрерывное, а во втором — кусочно-непрерывное решение или решение с разрывами производных.

При расчете обобщенных решений возникает ряд проблем.

Первая проблема — необходимость выполнения условий на разрывах. Для того, чтобы полученное решение можно было применять практически, это должны быть физически адекватные условия на разрывах, обычно они получаются из физически выполняемых законов сохранения, в этом случае обобщенное решение фактически определяется как решение интегральной формы уравнений. В некоторых случаях требуются еще дополнительные условия, получаемые как условия существования структуры разрыва. Поэтому численная схема должна обеспечивать выполнение этих законов сохранения (консервативность) и дополнительных условий. В то же время математических законов сохранения и формальных математических граничных условий корректно вводимых и иными способами, не связанными с законами сохранения, может быть много. При отсутствии консервативности численной схемы или выполнении в численной схеме не того закона сохранения, который нужен, также может быть получено предельное решение, которое можно рассматривать как обобщенное решение системы уравнений, но такое решение не имеет приложений. Подобный подход к определению обобщенного решения иногда применяется в математике. Обобщенное решение уравнений вида $\mathbf{u}_t = \mathbf{f}_x(t, \mathbf{u}, \mathbf{u}_x)$ определяют как предельное решение

системы $(\mathbf{u}(t + \tau) - \mathbf{u}(t))/\tau = \mathbf{f}_x(t + \tau, \mathbf{u}, \mathbf{u}_x)$ при $\tau \rightarrow 0$, можно ожидать, что такое решение можно получить с помощью чисто неявной схемы. Для тепловых задач и газовой динамики при подходящем выборе неизвестных определенное таким образом обобщенное решение совпадает с решением, в котором условия на разрыве определены общепринятым способом из физически значимых законов сохранения.

Вторая проблема — вычислительный блоуап. Во многих численных схемах часто возникает вычислительный блоуап при попытке расчета решений с разрывами. Этот блоуап может быть устранен за счет схемной или искусственной вязкости. В случае схемной вязкости ее воздействие стремится к нулю для гладких решений при уменьшении шага сетки, это обычно позволяет проводить расчет на грубых сетках, но для некоторых схем есть и предельное решение с разрывами, ширина расчетной структуры разрыва стремится к нулю при уменьшении шага сетки. При необходимости использования дополнительных условий на разрыве придется либо выделять разрыв, либо рассчитывать полную систему уравнений с реальной вязкостью и дисперсией. В случае искусственной вязкости фактически рассчитывается некоторая система уравнений, отличная от исходной, она содержит дополнительные вязкие члены, протяженность структуры разрыва при уменьшении шага сетки остается конечной. Подчеркнем, что описанная выше коррекция уравнений приводит именно к схемной вязкости или схемной дисперсии и делается не с целью расчета разрывных решений, а для преодоления численной неустойчивости. Для некоторых систем уравнений (гиперболические системы, уравнение теплопроводности, уравнения Навье-Стокса) справедлив принцип максимума, согласно которому в решении не должно возникать новых колебаний. Если это выполнено и для численной схемы, то схема считается монотонной. В некоторых современных численных схемах используется коррекция, основанная на принципе максимума. Она состоит в том, что лишние колебания либо удаляются либо вводится что-то вроде вязкости каким-то образом растущей с ростом этих новых колебаний. В последнем случае монотонность не полная и в численных структурах разрывов возникают колебания. При наличии аппроксимации (с учетом коррекции) длина численных структур разрывов должна стремиться к нулю при уменьшении шага сетки. Если колебания сохраняются и при измельчении шага сетки, то это может создать некоторые неудобства, поскольку максимальное значение неизвестной будет большим (или меньшим), чем значение на правой или левой стороне от разрыва. Однако с формальной математической точки зрения расчет дает верные результаты, поскольку в точке разрыва значение обобщенного решения не определено. Полученное решение для практического использования потребует последующей коррекции. Анализ показывает, что методы коррекции, основанные на принципе максимума, позволяют не только рассчитывать решения с разрывами, но и устраняют численную неустойчивость.

Третья проблема — существование обобщенного решения. Например, до сих пор не доказано что обобщенные решения всегда существуют для газовой динамики при использовании уравнений Эйлера в двумерном и трехмерном случае. При таких газодинамических расчетах часто наблюдаются вихревые структуры, которые иногда связаны с диссипативными свойствами схемы, можно говорить о сходимости в среднем, а проверить поточечную сходимость не удастся возможно из-за недостаточности вычислительных ресурсов. При применении некоторых схем вместо вихревых структур возникают тангенциальные разрывы, которые согласно теории должны быть неустойчивыми. Это может означать, что для существования обобщенного решения необходимо допустить наличие таких разрывов. Практическая применимость полученных результатов требует отдельного анализа в каждом конкретном случае, часто апеллируют к натурному эксперименту.

Возможно по указанным выше причинам иногда возникают высказывания о том, что и при наличии аппроксимации предельное решение может не являться решением системы уравнений.

В системах с дисперсией (здесь подразумевается дисперсия, порожденная как диссипативными, так и недиссипативными членами) как правило дисперсия обусловлена линейными членами с высшими производными, поэтому нелинейные эффекты подавляются дисперсией и разрывов не возникает (если только разрывы они не заложены в самой структуре уравнений, как например в тепловых задачах с фазовыми переходами). Рассчитываются бесконечно гладкие решения и при наличии аппроксимации предельное численное решение является решением уравнений независимо от наличия консервативности или монотонности. Кроме того, для систем с дисперсионными членами обратимого (недиссипативного) типа принцип максимума не выполняется. Появление новых колебаний в этом случае — естественное свойство решения. Методы коррекции, основанные на принципе максимума, в этом случае применять нельзя. Поэтому в данной работе для устранения численной неустойчивости применялись подходы, основанные на включении членов с высшими производными. Можно предвидеть, что устранение разрывов за счет дисперсии достигается не для всех систем уравнений, см разд.9.

Признаком отсутствия классического решения при численном расчете может служить вычислительный блоуап, не устранимый путем коррекции схемы посредством изменения схемной вязкости или обратимой схемной дисперсии, отсутствие предельного решения, сходимость к решению с разрывами. В случае реального, а не вычислительного блоуапа при уменьшении шага сетки время его возникновения стремится к вполне определенному значению, при меньших значениях времени имеется предельное решение.

О влиянии схемных эффектов на качественный вид решения. Основное внимание здесь обращено именно на схемную вязкость, а не на обратимую схемную дисперсию, поскольку именно от нее зависит качествен-

ный вид решения. Поэтому применение центрированных трехслойных схем в недиссипативном случае обычно предпочтительнее, чем двухшаговых схем. В этих схемах в силу обратимости наличие убывающей со временем волны означает наличие и растущей волны, то есть неустойчивость. Следовательно, в устойчивых случаях схемная вязкость отсутствует. Обратимая схемная дисперсия либо суммируется с дисперсией уравнений и оказывает некоторое влияние на длины волн в волновых зонах, либо порождает короткие дополнительные волны малой амплитуды, отсутствие которых предсказывается теорией, длина этих волн сильно зависит от шага сетки, а амплитуда этих волн резко уменьшается при уменьшении шага, что позволяет легко устранить этот численный эффект уменьшения шага сетки.

О накоплении волн за счет дисперсионных схемных эффектов. Обычно такие волны сносятся к границам и, если все время расширять область расчета или ставить ловушки-поглотители вблизи границы, то это не мешает расчету. В некоторых расчетах для других моделей (плазма, обобщенное нелинейное уравнение Шредингера) внутри расчетной области, встречалось накопление и рост амплитуды коротких волн, порожденных схемными эффектами. Это разновидность неустойчивости. Ее наверняка можно корректировать включением дополнительных диссипативных членов.

О коррекции двухшаговых и трехслойных численных схем. При применении двухшаговой схемы с аппроксимацией по методу Рунге-Кутты удается устранить неустойчивость посредством добавления дополнительных дисперсионных или диссипативных членов с пространственными производными. В то же время при применении трехслойной схемы типа крест методы коррекции оказываются более сложными они требуют добавления членов с производными по времени или производными смешанного типа.

О применении схем повышенного порядка точности. Рассматриваемые уравнения сложные, формулы для схем получаются сложными и без повышения порядка точности выше второго. Основное внимание уделялось собственно возможности проведения расчета, т.е. устранения неустойчивости. Возможно применение схем повышенной точности улучшит расчеты сложных решений, например, структур разрывов колебательного типа, но здесь возникают и дополнительные трудности. Применение метода Рунге-Кутты второго порядка для аппроксимации по времени вместо метода Ньютона первого порядка действительно устраняет неустойчивость центрированной по пространству схемы для уравнения переноса. Однако, нет гарантии, что так будет в общем случае. Схема повышенного порядка точности тоже может оказаться неустойчивой, а корректировать ее будет труднее. В силу сложного строения таких схем при расчетах будет и большая машинная погрешность, а в случае расчетов неустойчивых состояний происходит усиление таких ошибок со временем, растет хаотизация.

О достоверности численных решений. В классе гладких решений

наиболее достоверны расчеты для небольших периодов времени, предельное решение получить удастся. Например, достаточно достоверно можно осуществить расчет взаимодействия уединенных волн. При больших промежутках времени достоверно считаются также решения, стационарные в некоторой системе координат наблюдателя, автомодельные решения, а также решения с автомодельными зонами огибающей, решения со стоячими волнами, т.е. решения стремящиеся к чему-то, самовоспроизводящиеся. При этом наиболее достоверен качественный вид решения, длина автомодельных зон, количество волн, заполняющих их, с течением времени может постепенно отклоняться от точного решения, но такое отклонение носит систематический характер и не мешает исследованию таких решений. Для проверки правильности решений с автомодельными зонами огибающей можно использовать ранее разработанные методы поиска структур разрывов и метод усредненные уравнений. Эти методы основаны на исследовании обыкновенных дифференциальных уравнений и поэтому они достаточно точные. В случае наличия неустойчивых волн, исследования решений стохастического характера при больших промежутках времени при стремлении шага сетки к нулю получить предельное решение обычно не удастся из-за накопления ошибки как в следствие схемных эффектов, так и машинных ошибок. Заметим, что при наличии линейно неустойчивых волн при проверке численной схемы спектральным методом тоже выявляется неустойчивость, поэтому приходится применять расширенный признак устойчивости $|q| \leq \exp C\tau$. При этом вычислительные ошибки быстро нарастают, расчет приходится вести с мелким шагом по времени. Путем увеличения порядка точности схемы можно частично устранить схемные ошибки, но машинные ошибки при этом возрастают за счет усложнения схемы, необходимо искать некоторый оптимальный вариант схемы. В частности опыт расчета неустойчивых инвариантных многообразий для системы обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка показал, что метод Рунге-Кутты второго порядка предпочтительнее, чем этот же метод третьего порядка. В случае возникновения стохастического режима можно надеяться, на наличие сходимости в среднем, требуются какие-то методы проверки. В газовой динамике обычно отсылают к натурному эксперименту.

Список литературы

- [1] Fu Y.B., Pearce S.P. Characterization and stability of localized bulging/necking in inflated membrane tubes // IMA J. Appl. Math. 2010. V. 75. P. 581-602.
- [2] Fu Y.B., Il'ichev A. Solitary waves in fluid-filled elastic tubes: existence, persistence, and the role of axial displacement // IMA J. Appl. Math. 2010. V. 75. P. 257-268.

- [3] Plichev A. T., Fu I. B. Stability of aneurism solutions in fluid-filled elastic membrane tube // *Acta Mechanica Sinica*. 2012. V. 28. P. 1209-1218.
- [4] Бахолдин И. Б. Бездиссипативные разрывы в механике сплошной среды. Москва: Физматлит. 2004. 318 с.
- [5] Бахолдин И. Б. Разрывы, описываемые обобщенными уравнениями Кортевега–де Вриза // *Изв. РАН. Мех. жидк. и газов*. 1999. №4. С. 95-109.
- [6] Бахолдин И. Б. Стационарные и нестационарные структуры разрывов для моделей, описываемых обобщенным уравнением Кортевега–Бюргерса // *ПММ*. 2011. Т. 75. Вып. 2. С. 271–302.
- [7] Бахолдин И. Б. Методы исследования, теория и классификация обратимых структур в моделях гидродинамического типа // *Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша*. 2013. №30. 40 с.
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2013-30>
- [8] Бахолдин И. Б. Теория и классификация обратимых структур разрывов в моделях гидродинамического типа // *ПММ*. 2014. Т. 78. Вып. 6.
- [9] Бахолдин И. Б. Методы исследования уединенных волн и обратимых структур разрывов в трубах с упругими стенками // *Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша*. 2014. № 73. 32 с.
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2014-73>.
- [10] Бахолдин И. Б. Численное исследование уединенных волн и структур разрывов в трубах с контролируемым давлением // *Журн. Выч. Матем. и Матем. Физики*. 2015. Т. 55. № 11. С. 120–136.
- [11] Куликовский А. Г., Свешникова Е. И. Нелинейные волны в упругих средах. М.: Московский лицей. 1998. 412 с.
- [12] Саченков А. А. Цикл лекций по теории изгиба пластин. // Учебное пособие. Казань, 2012.-53 с. http://www.kpfu.ru/f5/bin_files/ip!158doc. Подробности: http://repository.kpfu.ru/?p_id=51751
- [13] Коробейников С. Н., Олейников А. А., Ларичкин А. Ю., Бабичев А. В., Алехин В. В., Численная реализация лагранжевой формулировки определяющих соотношений изотропного гиперупругого материала Генки // *Дальневост. матем. журн.* 2013. Т. 13. № 2. С. 222–249.
- [14] Адамов А. А. Сравнительный анализ двухконстантных обобщений закона Гука для изотропных упругих материалов при конечных деформациях // *Прикладная механика и техническая физика*. 2001. Т. 42. № 5. С. 183-192.

- [15] Бахолдин И.Б., Егорова Е.Р., Исследование магнитозвуковых уединенных волн для уравнений электронной магнитной гидродинамики // Журн. выч. матем. и матем. физики. 2011. Т. 51. № 3. С. 515-528.
- [16] Роуч П. Дж. Вычислительная гидродинамика. - М.: Мир, 1980. - 616 с.
- [17] Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М.:БИНОМ. 2003. 632с.
- [18] Куликовский А. Г. Об устойчивости однородных состояний // Прикл. матем. и мех. 1966. Т. 30, Вып. 1. С. 148-153.
- [19] Куликовский А.Г., Свешникова Е.И., Чугайнова А.П. Математические методы изучения разрывных решений нелинейных гиперболических систем уравнений. Лекционные курсы НОЦ. Выпуск 16. 2010. Москва: МИАН. 120 с.

Оглавление

1. Структура работы	3
2. Основные уравнения и обобщения модели	3
3. Учет сопротивления на изгиб	5
4. Разработка метода расчета для трубы с жидкостью	8
5. Расчет задачи о распаде разрыва	11
6. Упрощенные уравнения	14
7. Уравнения без учета продольных волн в случае заполнения трубы жидкостью	16
8. Уравнения без учета продольных волн для случая заполнения трубы газом	16
9. Об опрокидывании волн и коррекции модели	17
10. О стабилизации численных схем	18
11. Анализ диссипативных и дисперсионных свойств некоторых двухшаговых схем	20
12. О коррекции трехслойной схемы	22
13. О числе граничных условий	24
14. Некоторые выводы о методиках расчета обобщенных и классических решений с помощью конечно-разностных методов	26
Список литературы	30