ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 38 за 2016 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Яшунский А.Д.

Преобразования бернуллиевских распределений булевыми функциями из замкнутых классов

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Яшунский А.Д. Преобразования бернуллиевских распределений булевыми функциями из замкнутых классов // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2016. № 38. 23 с. doi:10.20948/prepr-2016-38
URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2016-38

О р д е н а   Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Р о с с и й с к о й   а к а д е м и и   н а у к

А. Д. Яшунский

Преобразования бернуллиевских распределений булевыми функциями из замкнутых классов

Москва — 2016

Яшунский А. Д.

Преобразования бернуллиевских распределений булевыми функциями из замкнутых классов

Рассматривается задача о приближенном выражении распределений бернуллиевских случайных величин путем применения произвольных булевых функций из замкнутого класса к независимым одинаково распределенным случайным величинам, имеющим заданное распределение. Для всех замкнутых классов булевых функций и всевозможных начальных распределений описаны множества аппроксимируемых распределений.

Ключевые слова: бернуллиевская случайная величина, преобразование, булева функция, замкнутый класс

Alexey Dmitrievich Yashunsky

Bernoulli distribution transformations by Boolean functions from closed classes

We consider the problem of approximating distributions of Bernoulli random variables by applying arbitrary Boolean functions from a closed class to independent identically distributed random variables with a given dsitribution. For every closed class of Boolean functions and any given initial distribution we provide a description of the approximable distribution set.

Key words: Bernoulli random variable, transformation, Boolean function, closed class

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 14–01–00598).

Оглавление

Введение

В задачах о преобразованиях дискретных распределений вероятностей обычно рассматривается применение некоторых операций к случайным величинам со значениями из конечного множества, имеющим заданные распределения. В результате получается новая случайная величина, распределение которой может быть вычислено. Исследуется вопрос об устройстве множества выразимых таким образом распределений.

В рамках этой общей постановки могут варьироваться: область значений случайных величин (обычно множество $E_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$), применяемые операции, множество начальных распределений, и, наконец, можно рассматривать точное или приближенное выражение распределений.

Наиболее изученным является класс задач о преобразованиях бернуллиевских распределений, т. е. случайных величин со значениями в множестве $\{0, 1\}$. Основное внимание исследователей уделялось точному выражению распределений с рациональными компонентами. Полученные в этой области результаты представлены в обзоре Р. М.Колпакова [1].

Одним из распространенных подходов к заданию множества используемых операций является следующий. Рассматривается некоторое множество операций $\mathcal{B}$ на случайных величинах; каждой операции $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{B}$ ставится в соответствие операция на распределениях $\hat{f}$, преобразующая распределения независимых случайных величин $X_1, \ldots, X_n$ в распределение случайной величины $f(X_1, \ldots, X_n)$. Затем рассматривается алгебра на множестве распределений с операциями $\hat{f}, f \in \mathcal{B}$. Такой подход, на самом деле, равносилен рассмотрению преобразований случайных величин всевозможными функциями, являющимися бесповторными суперпозициями функций из $\mathcal{B}$, т. е. функциями, выражаемыми над $\mathcal{B}$ формулой, в которой все переменные различны.

Ранние работы Р. Л. Схиртладзе в этой области показали, что даже простые системы обладают широкими возможностями по преобразованию распределений. В [2] показано, что начальное распределение $(1/2, 1/2)$ при преобразованиях параллельно-последовательными контактными схемами (или, эквивалентно, бесповторными формулами из конъюнкций и дизъюнкций) позволяет выразить произвольное распределение с двоично-рациональными компонентами. В [3] показано, что бесповторные формулы из конъюнкций, дизъюнкций и отрицаний позволяют приблизить произвольное распределение при любом заданном начальном распределении.

В дальнейшем чаще всего рассматривались либо бесповторные суперпозиции функций из «простых» множеств $\mathcal{B}$, либо в качестве $\mathcal{B}$ рассматривалось все множество P_2 — в этом рассмотрение суперпозиций несущественно.

В настоящей работе исследуется несколько иная постановка задачи. Предполагается, что задано множество булевых функций $\mathcal{B}$, из которых можно строить произвольные (не обязательно бесповторные) суперпозиции, которые затем применяются к независимым бернуллиевским случайным величинам с заданными распределениями для порождения новых распределений. Множество начальных распределений предполагается состоящим из одного распределения $(1-p,p)$, исследуется приближенное выражение распределений (с любой наперед заданной точностью) — аппроксимация.

Такой подход к задаче естественным образом приводит к рассмотрению преобразований распределений функциями из замкнутых классов, так как всевозможные суперпозиции функций из заданного множества $\mathcal{B}$ как раз образуют замкнутый класс.

Полученные ранее результаты о преобразованиях бесповторными суперпозициями позволяют описать свойства лишь некоторых замкнутых классов. Тем не менее, эти результаты существенно используются в данной работе. В частности, многие утверждения из работы автора [4] о бесповторных преобразованиях бернуллиевских распределений переформулированы в настоящей работе для функций из замкнутых классов.

Отметим, что в работе Ф. И. Салимова [5] некоторые результаты сформулированы в терминах замкнутых классов булевых функций, отличных от P_2, однако в действительности эти результаты касаются преобразований бесповторными суперпозициями и подобная формулировка является их ослаблением.

Результаты настоящей работы позволяют для любой конечной системы булевых функций $\mathcal{B}$ указать множество распределений, которые могут быть аппроксимированы путем применения суперпозиций функций из $\mathcal{B}$ к независимым случайным величинам с бернуллиевскими распределениями из заданного конечного множества.

Определения и простейшие свойства

Через x_1x_2 будем обозначать *конъюнкцию* переменных x_1 и x_2, через $x_1 \vee x_2$ будем обозначать *дизъюнкцию* переменных x_1 и x_2, через $\overline{x}$ будем обозначать *отрицание* переменной x.

Пусть задана булева функция $f(x_1, \ldots, x_n)$, и пусть $X_1, \ldots, X_n$ — независимые в совокупности бернуллиевские случайные величины, равные 1 с вероятностью p и 0 — с вероятностью $1 - p$.

Положим
$$h_f(p) = \mathsf{P}(f(X_1, \ldots, X_n) = 1),$$
т. е. $h_f(p)$ выражает вероятность обращения в 1 случайной величины, получающейся в результате подстановки $X_1, \ldots, X_n$ вместо переменных функции f.

Для заданной функции f можно легко выписать выражение для $h_f(p)$. Напомним, что *весом* набора $\alpha \in \{0,1\}^n$ называется число единичных компонент в α. Для булевой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ количество наборов веса i, на которых f равна единице, обозначим через A_i. Тогда
$$h_f(p) = \sum_{i=0}^{n} A_i p^i (1-p)^{n-i}.$$

Отметим, что $0 \leqslant A_i \leqslant \binom{n}{i}$. Будем называть $h_f(p)$ *характеристическим многочленом* функции $f(x_1, \ldots, x_n)$.

Для характеристических многочленов имеет место аналог разложения функции по переменной, а именно, если выполнено $f(x_1, \ldots, x_n) = \overline{x_1} f_0(x_2, \ldots, x_n) \vee x_1 f_1(x_2, \ldots, x_n)$, то $h_f(p) = (1-p)h_{f_0}(p) + p h_{f_1}(p)$. Отсюда и из определения характеристического многочлена легко вывести

Свойство 1. *Если функции f и g получаются друг из друга добавлением или изъятием несущественных переменных, а также переименованием переменных (без отождествления), то $h_f(p) = h_g(p)$.*

Напомним, что функция $f^*(x_1, \ldots, x_n) = \overline{f(\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n})}$ называется *двойственной* к функции $f(x_1, \ldots, x_n)$. Легко проверяется

Свойство 2. $h_{f^*}(p) = 1 - h_f(1-p)$.

Для множества $X \subseteq [0,1]$ через $cl(X)$ будем обозначать *замыкание* X, т. е. множество X, дополненное всеми своими предельными точками. Пусть $\mathcal{A}$ — множество булевых функций. Положим
$$W_{\mathcal{A}}(p) = cl(\{h_f(p) : f \in \mathcal{A}\}).$$

Множество $W_{\mathcal{A}}(p)$ будем называть *множеством распределений, аппроксимируемых функциями*[1] *из $\mathcal{A}$ в точке* p. Содержательно $W_{\mathcal{A}}(p)$ состоит из

[1]Отметитм, что в работе [4] обозначение $W_{\mathcal{B}}(p)$ использовалось для распределений, аппроксимируемых *бесповторными суперпозициями* функций из $\mathcal{B}$.

всех значений на отрезке $[0,1]$, которые могут быть сколь угодно точно приближены значениями характеристических многочленов функций из множества $\mathcal{A}$ в точке p. В частности, если $W_{\mathcal{A}}(p) = [0,1]$, то, подставляя в функции из множества $\mathcal{A}$ независимые одинаково распределенные случайные величины с заданным бернуллиевским распределением $(1-p,p)$, можно сколь угодно точно приблизить произвольное бернуллиевское распределение.

Отметим, что для любого множества $\mathcal{A}$ имеет место $W_{\mathcal{A}}(0), W_{\mathcal{A}}(1) \subseteq \subseteq \{0,1\}$. В дальнейшем будем рассматривать $W_{\mathcal{A}}(p)$ для $p \in (0,1)$.

Для множества $\mathcal{A}$ пусть $\mathcal{A}^* = \{f^* : f \in \mathcal{A}\}$ — множество двойственных функций. Из свойства 2 следует

Свойство 3. $W_{\mathcal{A}^*}(p) = \{1-w : w \in W_{\mathcal{A}}(1-p)\}$.

Кроме того, несложно проверить

Свойство 4. *Если $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$, то $W_{\mathcal{A}'}(p) \subseteq W_{\mathcal{A}}(p)$.*

Наконец, если множество $\mathcal{A}$ замкнуто относительно бесповторной суперпозиции, то из непрерывности характеристических многочленов по своей переменной p вытекает

Свойство 5. *Если $\mathcal{A}$ замкнуто и $p' \in W_{\mathcal{A}}(p)$, то $W_{\mathcal{A}}(p) \supseteq W_{\mathcal{A}}(p')$.*

В дальнейшем для упрощения записи, если не оговорено иное, будем считать, что запись $f(f_1,\ldots,f_n)$, где $f, f_1, \ldots, f_n$ — символы булевых функций, обозначает бесповторную суперпозицию этих функций, т. е. выражает функцию $f(f(\tilde{x}^{(1)}),\ldots,f_n(\tilde{x}^{(n)}))$, где $\tilde{x}^{(1)},\ldots,\tilde{x}^{(n)}$ — непересекающиеся наборы переменных. Отметим, что бесповторная суперпозиция в определенном смысле согласована с композицией характеристических многочленов, а именно $h_{f(g,\ldots,g)}(p) = h_f(h_g(p))$.

Замкнутые классы

Множество булевых функций A называется *замкнутым классом*, если оно замкнуто относительно операции суперпозиции функций и операций добавления/изъятия несущественных переменных (такое определение замыкания согласовано со свойством 1). Перечислим для полноты изложения все замкнутые классы булевых функций. Будем использовать обозначения классов, принятые в [6].

Введем некоторые определения, все прочие необходимые сведения о замкнутых классах булевых функций содержатся в [6].

Функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ сохраняет $c \in \{0, 1\}$, если $f(c, \ldots, c) = c$.

Для наборов $\alpha, \beta \in \{0, 1\}^n$ будем говорить, что $\alpha \leqslant \beta$, если для всех i выполнено $\alpha_i \leqslant \beta_i$. Функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется *монотонной*, если для любых таких наборов α, β, что $\alpha \leqslant \beta$, выполнено $f(\alpha) \leqslant f(\beta)$.

Функция f называется *самодвойственной*, если $f = f^*$.

Функция f *удовлетворяет условию* $\langle 1^\mu \rangle$ (*условию* $\langle 0^\mu \rangle$), $\mu = 2, 3, 4, \ldots$, если любые μ наборов, на которых функция равна 1 (соответственно 0), имеют общую единичную (соответственно нулевую) компоненту. Функция f *удовлетворяет условию* $\langle 1^\infty \rangle$ (*условию* $\langle 0^\infty \rangle$), если для некоторой переменной x_i: $f \leqslant x_i$ (соответственно $f \geqslant x_i$).

Будем обозначать $x_1 \oplus x_2$ сумму по модулю 2 переменных x_1 и x_2. Функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется *линейной*, если она равна $c_0 \oplus c_1 x_1 \oplus \oplus c_2 x_2 \oplus \ldots \oplus c_n x_n$ для некоторых констант $c_0, c_1, \ldots, c_n \in \{0, 1\}$.

Функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется *конъюнкцией*, если она равна $c_0(c_1 \vee \vee x_1)(c_2 \vee x_2) \cdots (c_n \vee x_n)$ для некоторых констант $c_0, c_1, \ldots, c_n \in \{0, 1\}$. Функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется *дизъюнкцией*, если она равна $c_0 \vee (c_1 x_1) \vee \vee (c_2 x_2) \vee \ldots \vee (c_n x_n)$ для некоторых констант $c_0, c_1, \ldots, c_n \in \{0, 1\}$.

Множество замкнутых классов булевых функций исчерпывается следующим списком.

1. Класс всех булевых функций — P_2.

2. Класс функций, сохраняющих 0, — T_0; сохраняющих 1, — T_1; сохраняющих обе константы 0 и 1, — T_{01}.

3. Класс монотонных функций — M; монотонных функций, сохраняющих 0, — M_0; монотонных функций, сохраняющих 1, — M_1; монотонных функций, сохраняющих 0 и 1, — M_{01}.

4. Класс самодвойственных функций — S; самодвойственных функций, сохраняющих 0 и 1, — S_{01}; монотонных самодвойственных функций — SM.

5. I^μ, MI^μ, I_1^μ, MI_1^μ — счетные семейства классов ($\mu = 2, 3, \ldots, \infty$) функций, обладающих свойством $\langle 1^\mu \rangle$, являющихся монотонными (MI^μ, MI_1^μ) и сохраняющих 1 (I_1^μ, MI_1^μ).

6. O^μ, MO^μ, O_0^μ, MO_0^μ — счетные семейства классов ($\mu = 2, 3, \ldots, \infty$) функций, обладающих свойством $\langle 0^\mu \rangle$, являющихся монотонными (MO^μ, MO_0^μ) и сохраняющих 0 (O_0^μ, MO_0^μ).

7. Класс линейных функций — L; линейных функций, сохраняющих 0, — L_0; линейных функций, сохраняющих 1, — L_1; самодвойствен-

ных линейных функций — SL; линейных функций, сохраняющих 0 и 1, — L_{01}.

8. Класс конъюнкций — K; конъюнкций, сохраняющих 0, — K_0; конъюнкций, сохраняющих 1, — K_1; конъюнкций, сохраняющих 0 и 1, — K_{01}.

9. Класс дизъюнкций — D; дизъюнкций, сохраняющих 0, — D_0; дизъюнкций, сохраняющих 1, — D_1; дизъюнкций, сохраняющих 0 и 1, — D_{01}.

10. Класс функций одной переменной — U; самодвойственных функций одной переменной — SU; монотонных функций одной переменной — MU; функций одной переменной, сохраняющих 0 и 1, — U_{01}.

11. Класс констант — C; констант, сохраняющих 0, — C_0; констант, сохраняющих 1, — C_1.

Диаграмма включений замкнутых классов изображена на рис. 1.

Классы, содержащие M_{01}

Утверждение 1 [4]. $W_{M_{01}}(p) = [0,1]$ *при всех* $p \in (0,1)$.

Доказательство. Рассмотрим булевы функции

$$f_{n,m} = \bigvee_{i=1}^{m} x_{i1}x_{i2}\cdots x_{in}.$$

Очевидно, что $f_{n,m} \in M_{01}$. Легко проверить, что $h_{f_{n,m}}(p) = 1-(1-p^n)^m$. Покажем, что при всех $p \in (0,1)$ для любого $\xi \in [0,1]$ и любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие N, M, что $h_{f_{N,M}}(p) \in (\xi-\varepsilon, \xi+\varepsilon)$.

Если $\xi = 0$, рассмотрим функции $f_{n,1}$: $h_{f_{n,1}}(p) = p^n$. Легко видеть, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое N, что $p^N < \varepsilon$, откуда следует, что $h_{f_{N,1}}(p)$ аппроксимирует точку $\xi = 0$ с точностью ε. Аналогично найдется такое M, что $h_{f_{1,M}}(p)$ аппроксимирует точку $\xi = 1$ с точностью ε. Далее рассматриваем $\xi \in (0,1)$.

Пусть N таково, что $1-p^N > 1-\xi$ и $p^N < \varepsilon$. Заметим, что последовательность $(1-p^N)^m$, $m = 1,2,\ldots$ является убывающей к нулю, так как $1-p^N < 1$ и $\lim\limits_{m\to\infty}(1-p^N)^m = 0$. Тогда найдется такое M, что

$$(1-p^N)^{M+1} \leqslant 1-\xi < (1-p^N)^M.$$

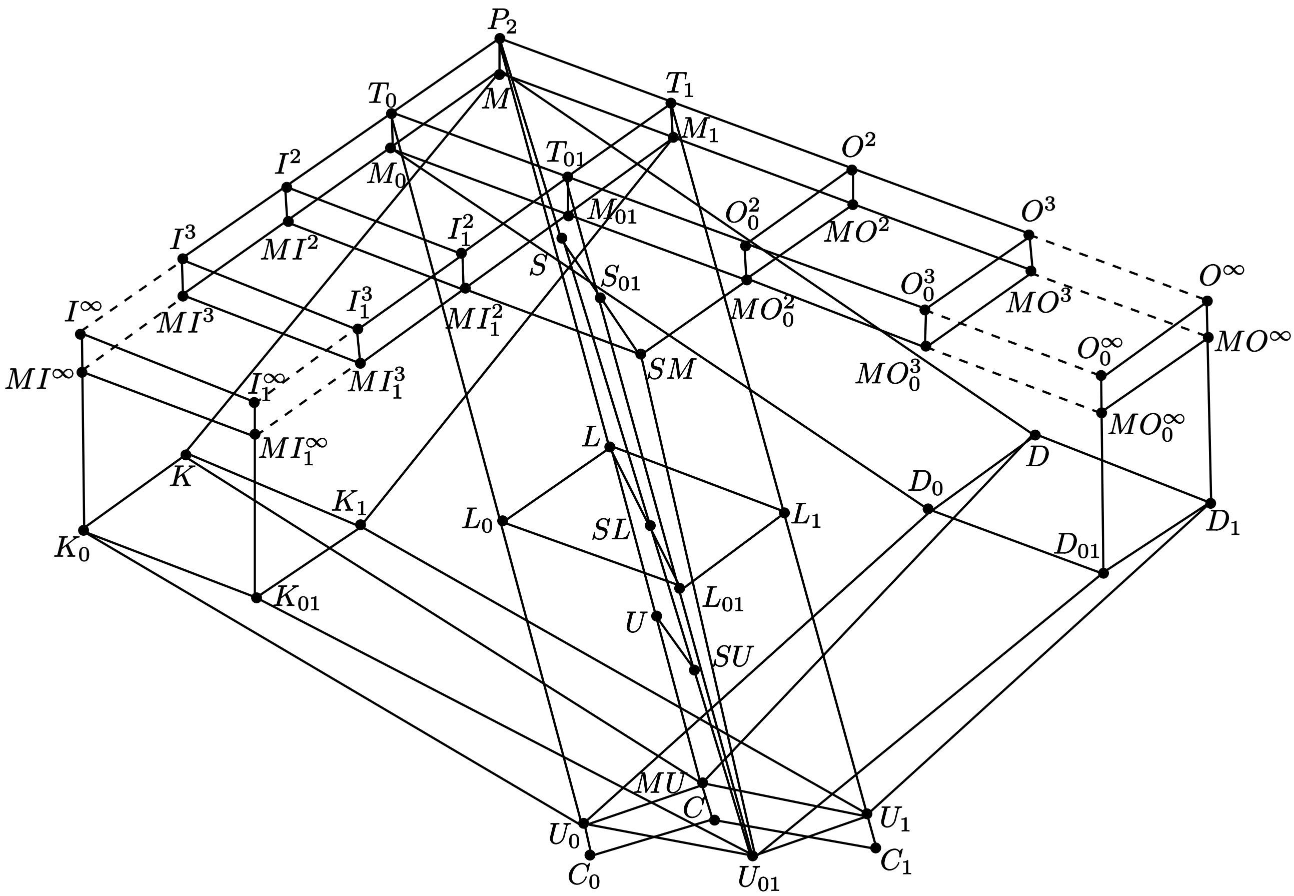


Рис. 1

Рассмотрим разность:

$$(1-p^N)^M - (1-\xi) \leqslant (1-p^N)^M - (1-p^N)^{M+1} = (1-p^N)^M p^N \leqslant p^N < \varepsilon.$$

Следовательно, $(1-p^N)^M \in (1-\xi, 1-\xi+\varepsilon)$, откуда $1-(1-p^N)^M \in$ $\in (\xi-\varepsilon, \xi) \subset (\xi-\varepsilon, \xi+\varepsilon)$. $\square$

В силу свойства 4 утверждение 1 легко обобщается в

Утверждение 2. *Пусть $\mathcal{A}$ — один из замкнутых классов M_{01}, M_0, M_1, T_0, T_1, T_{01}, M, P_2. Тогда $W_{\mathcal{A}}(p) = [0,1]$ при всех $p \in (0,1)$.*

Следствие. *Пусть заданы $p \in (0,1)$, $\xi \in [0,1]$, $\varepsilon > 0$ и $\mathcal{A}$ — один из замкнутых классов M_{01}, M_0, M_1, T_0, T_1, T_{01}, M, P_2. Тогда существует такая $f \in \mathcal{A}$, что $h_f(p) \in (\xi-\varepsilon, \xi+\varepsilon)$.*

Классы S и S_{01}

В силу свойства 2 для любой самодвойственной функции f имеет место $h_f(p) = 1 - h_f(1-p)$, и, следовательно, $h_f(1/2) = 1/2$, что влечет

Утверждение 3. $W_S(1/2) = \{1/2\}$*,* $W_{S_{01}}(1/2) = \{1/2\}$.

Покажем, что за исключением «особой» точки $p = 1/2$ функции из классов S и S_{01} также позволяют аппроксимировать произвольное бернуллиевское распределение.

Будем говорить, что булева функция f в точке $p \in (0, 1)$ является 0_ε-функцией, если $h_f(p) < \varepsilon$ (соответственно, является 1_ε-функцией, если $h_f(p) > 1 - \varepsilon$).

Покажем, что подстановка в функцию 0_ε- и 1_ε-функций мало отличается от подстановки констант 0 и 1 соответственно.

Лемма 1 [4]. *Пусть* $f(x_1, \ldots, x_n)$ *— произвольная булева функция, задано* $p \in (0, 1)$*,* $\varepsilon > 0$ *и булева функция* g *является* α_ε*-функцией в точке* p*. Положим* $f_\alpha = f(\alpha, x_2, \ldots, x_n)$*,* $f' = f(g, x_2, \ldots, x_n)$*. Тогда* $|h_{f_\alpha}(p) - h_{f'}(p)| < \varepsilon$*.*

Доказательство. Обозначим $f_{\bar{\alpha}} = f(\bar{\alpha}, x_2, \ldots, x_n)$. Используя разложение функции f по переменной x_1, получаем, что

$$h_{f'}(p) = (1 - h_g(p))h_{f_0}(p) + h_g(p)h_{f_1}(p). \tag{1}$$

Рассмотрим сначала $\alpha = 0$. Тогда $f_\alpha = f_0$, и из (1) получаем:

$$h_{f_\alpha}(p) - h_{f'}(p) = h_{f_0}(p) - h_{f'}(p) = h_g(p)(h_{f_0}(p) - h_{f_1}(p)).$$

Поскольку g является 0_ε-функцией, получаем, что $|h_{f_\alpha}(p) - h_{f'}(p)| < \varepsilon|h_{f_0}(p) - h_{f_1}(p)|$.

Пусть теперь $\alpha = 1$. Тогда $f_\alpha = f_1$, и из (1) получаем:

$$h_{f_\alpha}(p) - h_{f'}(p) = (1 - h_g(p))(h_{f_1}(p) - h_{f_0}(p)).$$

Поскольку g является 1_ε-функцией, получаем, что $|h_{f_\alpha}(p) - h_{f'}(p)| < \varepsilon|h_{f_1}(p) - h_{f_0}(p)|$.

Заметим, что $|h_{f_1}(p) - h_{f_0}(p)| \leqslant \max\{h_{f_1}(p), h_{f_0}(p)\} \leqslant 1$, откуда в обоих случаях $|h_{f_\alpha}(p) - h_{f'}(p)| < \varepsilon$. Лемма доказана. □

Следствие [4]. *Пусть* $f(x_1, \ldots, x_n)$ *— произвольная булева функция, задано* $p \in (0, 1)$*,* $\varepsilon > 0$*, константы* $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \{0, 1\}$ *и булевы функции* $g_1, \ldots, g_m$*, являющиеся* $(\alpha_i)_\varepsilon$*-функциями в точке* p*. Положим*

$$f_\alpha = f(\alpha_1, \ldots, \alpha_m, x_{m+1}, \ldots, x_n), \quad f' = f(g_1, \ldots, g_m, x_{m+1}, \ldots, x_n).$$

Тогда $|h_{f_\alpha}(p) - h_{f'}(p)| < m\varepsilon$*.*

Данное следствие позволяет для многих замкнутых классов свести проверку аппроксимируемости всех точек отрезка $[0, 1]$ к проверке только двух точек — 0 и 1.

Лемма 2 [4]. *Пусть $\mathcal{A}$ — замкнутый класс булевых функций, $\mathcal{A} \not\subseteq L, K, D$. Для заданного $p \in (0,1)$ множество $W_{\mathcal{A}}(p)$ совпадает с $[0,1]$ тогда и только тогда, когда $0, 1 \in W_{\mathcal{A}}(p)$.*

Доказательство. Необходимость условия очевидна, покажем достаточность. Пусть задано $p \in (0,1)$, покажем, что для любого $\xi \in [0,1]$ и $\varepsilon > 0$ существует такая функция $f \in \mathcal{A}$, что $h_f(p) \in (\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon)$.

Рассмотрим класс $[\mathcal{A} \cup \{0,1\}]$. Поскольку $\mathcal{A} \not\subseteq L, K, D$, класс $[\mathcal{A} \cup \{0,1\}]$ равен либо M, либо P_2. В обоих случаях по следствию из утверждения 2, существует такая функция $g \in [\mathcal{A} \cup \{0,1\}]$, что $h_g(p) \in (\xi - \varepsilon/2, \xi + \varepsilon/2)$.

Тогда существует такая функция $\varphi \in \mathcal{A}$, что

$$g(x_1, \ldots, x_n) = \varphi(\alpha_1, \ldots, \alpha_m, x_1, \ldots, x_n),$$

где $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \{0,1\}$. Поскольку, по условию леммы, $0, 1 \in W_{\mathcal{A}}(p)$ в заданной точке p, в классе $\mathcal{A}$ имеются функции φ_0 и φ_1, являющиеся $0_{\varepsilon/2m}$- и $1_{\varepsilon/2m}$-функциями соответственно.

Рассмотрим функцию

$$f = \varphi(\varphi_{\alpha_1}, \ldots, \varphi_{\alpha_m}, x_1, \ldots, x_n).$$

По следствию из леммы 1 получаем, что

$$|h_f(p) - h_g(p)| < m \cdot \frac{\varepsilon}{2m} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Вместе с условием $h_g(p) \in (\xi - \varepsilon/2, \xi + \varepsilon/2)$ это влечет $h_f(p) \in (\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon)$, что и требовалось доказать. □

Доказанная выше лемма позволяет получить полное описание $W_S(p)$.

Утверждение 4. $W_S(p) = \begin{cases} [0,1] \text{ *при* } p \neq 1/2, \\ \{1/2\} \text{ *при* } p = 1/2. \end{cases}$

Доказательство. Случай $p = 1/2$ описывается утверждением 3. Поскольку класс S двойственен себе, свойство 3 позволяет ограничиться рассмотрением $p \in (0, 1/2)$. Покажем, что для таких значений p выполнено $0, 1 \in W_S(p)$.

Пусть $m(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3$ — функция голосования (медиана). Рассмотрим последовательность функций, заданную следующим образом: $f_0 = m$, $f_{n+1} = m(f_n, f_n, f_n)$. Очевидно, что $f_n \in S$.

Пусть $F(p) = h_m(p) = 3p^2(1-p) + p^3$. Несложно проверить, что

$$h_{f_{n+1}}(p) = F(h_{f_n}(p)) = \underbrace{F(F(\ldots F}_{n+1 \text{ раз}}(p))).$$

При $p \in (0,1/2)$ выполнено $F(p) < p$, откуда следует, что $h_{f_n}(p)$ монотонно убывает с ростом n. Поскольку $h_{f_n}(p) \geqslant 0$, существует предел $\xi = \lim\limits_{n\to\infty} h_{f_n}(p)$, для которого выполнено $F(\xi) = \xi$. Легко видеть, что $\xi = 0$, и, следовательно, $h_{f_n}(p) \to 0$ при $n \to \infty$. Таким образом, среди f_n найдутся 0_ε-функции для любого $\varepsilon > 0$, и, следовательно $0 \in W_S(p)$.

Кроме того, $\overline{f_n} \in S$ и $h_{\overline{f_n}}(p) \to 1$ при $n \to \infty$, откуда получаем, что $1 \in W_S(p)$. Таким образом, $0, 1 \in W_S(p)$ при $p \in (0, 1/2)$ и по лемме 2 имеет место $W_S(p) = [0,1]$. □

В отличие от класса S, класс S_{01} не содержит отрицания, однако и в нем можно аппроксимировать произвольное бернуллиевское распределение при $p \neq 1/2$.

Утверждение 5. $W_{S_{01}}(p) = \begin{cases} [0,1] \text{ \textit{при} } p \neq 1/2, \\ \{1/2\} \text{ \textit{при} } p = 1/2. \end{cases}$

Доказательство. Как и в доказательстве выше, достаточно рассматривать лишь $p \in (0,1/2)$. Функции f_n, построенные в доказательстве утверждения 4, принадлежат также классу S_{01}, поэтому $0 \in W_{S_{01}}(p)$.

Покажем, что $1 \in W_{S_{01}}(p)$. Рассмотрим последовательность булевых функций

$$g_n(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} 0, \text{ если } x_1 = \ldots = x_n = 0, \\ 1, \text{ если } x_1 = \ldots = x_n = 1, \\ \overline{x_1}, \text{ на всех прочих наборах.} \end{cases}$$

Заметим, что $g_n \in S_{01}$, $h_{g_n}(p) = 1 - p - (1-p)^n + p^n$.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$, и пусть $f \in S_{01}$ — некоторая $0_{\varepsilon/2}$-функция при заданном $p \in (0,1/2)$. Так как $0 \notin S_{01}$, имеет место $0 < h_f(p) < \varepsilon/2$.

Рассмотрим функции $\varphi_n = g_n(f, \ldots, f)$. Тогда

$$h_{\varphi_n}(p) = h_{g_n}(h_f(p)) = 1 - h_f(p) - (1 - h_f(p))^n + (h_f(p))^n \geqslant 1 - (h_f(p) + (1 - h_f(p))^n).$$

Поскольку $h_f(p) > 0$, выполнено $1 - h_f(p) < 1$, и, следовательно, найдется такое N, что $(1 - h_f(p))^N < \varepsilon/2$. Тогда

$$h_{\varphi_N}(p) \geqslant 1 - \left(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}\right) = 1 - \varepsilon.$$

Следовательно, φ_N в точке p является 1_ε-функцией. Тогда $1 \in W_{S_{01}}(p)$ и по лемме 2 имеет место $W_{S_{01}}(p) = [0,1]$. □

Классы, содержащиеся в L, K или D

Легко проверяются следующие утверждения.

Утверждение 6 [4]. *Пусть $\mathcal{A}$ — один из классов K, K_0, K_1, K_{01}. Тогда при любом $p \in (0,1)$ имеет место $W_{\mathcal{A}}(p) \subseteq \bigcup\limits_n \{p^n\} \cup \{0,1\}$.*

Утверждение 7 [4]. *Пусть $\mathcal{A}$ — один из классов D, D_0, D_1, D_{01}. Тогда при любом $p \in (0,1)$ имеет место $W_{\mathcal{A}}(p) \subseteq \bigcup\limits_n \{1-(1-p)^n\} \cup \{0,1\}$.*

Классы линейных функций также имеют не более чем счетные множества $W_{\mathcal{A}}(p)$.

Утверждение 8 [4]. *Пусть $\mathcal{A}$ — один из классов L, L_0, L_1, L_{01}, SL. Тогда при любом $p \in (0,1)$ имеет место $W_{\mathcal{A}}(p) \subseteq \bigcup\limits_n \{\frac{1}{2}(1 \pm (1-2p)^n)\} \cup \{\frac{1}{2}\}$.*

Доказательство. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \in L$. Без ограничения общности можно считать, что все переменные функции f — существенные. Тогда $f = x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n \oplus c$. Следовательно, $h_f(p) = \sum\limits_{i \text{ нечет.}} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$ при $c = 0$ и $h_f(p) = \sum\limits_{i \text{ чет.}} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$ при $c = 1$.

Поскольку $\sum\limits_i \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} = 1$ и $\sum\limits_i \binom{n}{i} (-p)^i (1-p)^{n-i} = (1-2p)^n$, получаем, что $2\sum\limits_{i \text{ нечет.}} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} = 1-(1-2p)^n$ и $2\sum\limits_{i \text{ чет.}} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} = 1+(1-2p)^n$, откуда $h_f(p) = \frac{1}{2}(1 \pm (1-2p)^n)$. Легко видеть, что единственной предельной точкой таких значений является $1/2$. Утверждение доказано. □

Практически очевидным является

Утверждение 9. *Пусть $\mathcal{A}$ — один из классов U, SU, U_0, U_1, MU, C, C_0, C_1, U_{01}. Тогда при любом $p \in (0,1)$ имеет место $W_{\mathcal{A}}(p) \subseteq \{0, 1, p, 1-p\}$.*

Классы, удовлетворяющие условиям $\langle 0^\mu \rangle$, $\langle 1^\mu \rangle$, $\langle 0^\infty \rangle$, $\langle 1^\infty \rangle$

Сначала установим вид множества $W_{\mathcal{A}}(p)$ для классов, обладающих свойствами $\langle 0^\infty \rangle$, $\langle 1^\infty \rangle$.

Утверждение 10. *Пусть $\mathcal{A}$ — один из классов I^∞, MI^∞, I_1^∞, MI_1^∞. Тогда $W_{\mathcal{A}}(p) = [0, p]$.*

Пусть $\mathcal{A}$ — один из классов O^∞, MO^∞, O_0^∞, MO_0^∞. Тогда $W_{\mathcal{A}}(p) = [p, 1]$.

Доказательство. Поскольку классы O^∞, MO^∞, O_0^∞, MO_0^∞ двойственны классам I^∞, MI^∞, I_1^∞, MI_1^∞ соответственно, достаточно доказать утверждение для I^∞, MI^∞, I_1^∞, MI_1^∞.

Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \in I^\infty$. Тогда без ограничения общности можно считать, что $f = x_1 f'(x_2, \ldots, x_n)$, откуда $h_f(p) = p h_{f'}(p) \leqslant p$. Следовательно, $W_{I^\infty}(p) \subseteq [0, p]$.

По следствию из утверждения 2, для любого $\xi \in [0, 1]$, $\varepsilon > 0$ существует такая функция $f(x_1, \ldots, x_n) \in M_{01}$, что $h_f(p) \in (\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon)$. Рассмотрим $g = y f(x_1, \ldots, x_n)$, где y — булева переменная, отличная от $x_1, \ldots, x_n$. Тогда $g \in MI_1^\infty$ и $h_g(p) = p h_f(p)$. В силу произвольности ξ получаем, что $W_{MI_1^\infty}(p) \supseteq [0, p]$.

Учитывая соотношения между рассматриваемыми замкнутыми классами и свойство 4, получаем, что

$$W_{I^\infty}(p) = W_{MI^\infty}(p) = W_{I_1^\infty}(p) = W_{MI_1^\infty}(p) = [0, p].$$

Утверждение доказано. □

Для описания множеств распределений, аппроксимируемых классами со свойствами $\langle 0^\mu \rangle$, $\langle 1^\mu \rangle$, нам потребуются два вспомогательных утверждения.

Лемма 3 (обобщение теоремы Эрдёша — Ко — Радо [7]). *Пусть X — конечное множество мощности n. Пусть $\mathcal{F}$ — семейство подмножеств X мощности i, в котором для любых $F_1, \ldots, F_k \in \mathcal{F}$ выполнено $\bigcap\limits_{j=1}^{k} F_j \neq \varnothing$. Если при этом $ki/(k-1) \leqslant n$, то $|\mathcal{F}| \leqslant \binom{n-1}{i-1}$.*

Следствие. *Пусть булева функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ удовлетворяет условию $\langle 1^\mu \rangle$ и $\mu i/(\mu - 1) \leqslant n$. Тогда A_i (число наборов веса i, на которых f обращается в 1) не превышает $\binom{n-1}{i-1}$.*

Лемма 4. *Пусть $q \in (0, 1)$ и $k < nq$. Тогда*

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} q^i (1-q)^{n-i} \leqslant \frac{nq(1-q)}{(qn-k)^2}.$$

Доказательство. Пусть X — случайная величина, имеющая биномиальное распределение с параметрами n и q. Тогда

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} q^i (1-q)^{n-i} = \mathsf{P}\{X \leqslant k\} = \mathsf{P}\{\mathsf{E}X - X \geqslant \mathsf{E}X - k\} \leqslant \mathsf{P}\{|X - \mathsf{E}X| \geqslant \mathsf{E}X - k\},$$

где $\mathsf{E}X$ — математическое ожидание случайной величины X. Для выбранной величины X математическое ожидание равно $\mathsf{E}X = nq$, а дисперсия равна $\mathsf{D}X = nq(1-q)$. В силу предположения $k < nq$ имеет место $\mathsf{E}X - k > 0$. Используя неравенство Чебышёва [8], получаем

$$\mathsf{P}\{|X - \mathsf{E}X| \geqslant \mathsf{E}X - k\} \leqslant \frac{\mathsf{D}X}{(\mathsf{E}X - k)^2} = \frac{nq(1-q)}{(qn-k)^2}.$$

Лемма доказана. □

Утверждение 11. *Пусть $\mathcal{A}$ — один из классов I^μ, MI^μ, I_1^μ, MI_1^μ. Тогда*

$$W_{\mathcal{A}}(p) = \begin{cases} [0,p], & \text{если } 0 < p \leqslant 1 - \frac{1}{\mu}, \\ [0,1], & \text{если } 1 - \frac{1}{\mu} < p < 1. \end{cases}$$

Пусть $\mathcal{A}$ — один из классов O^μ, MO^μ, O_0^μ, MO_0^μ. Тогда

$$W_{\mathcal{A}}(p) = \begin{cases} [0,1], & \text{если } 0 < p < \frac{1}{\mu}, \\ [p,1], & \text{если } \frac{1}{\mu} \leqslant p < 1. \end{cases}$$

Доказательство. В силу свойства 3 достаточно доказать утверждение для классов I^μ, MI^μ, I_1^μ, MI_1^μ. Учитывая свойство 4 и утверждение 10, получаем, что $W_{I^\mu}(p), W_{MI^\mu}(p), W_{I_1^\mu}(p), W_{MI_1^\mu}(p) \supseteq [0,p]$.

Покажем, что при $p < 1 - \frac{1}{\mu}$ имеет место $W_{I^\mu}(p) \subseteq [0,p]$. Пусть $\xi = \max W_{I^\mu}(p)$. Поскольку множество $W_{I^\mu}(p)$ замкнуто, ξ определено. Если $\xi = 1$, то по лемме 2 имеем $W_{I^\mu}(p) = [0,1]$. В остальных случаях с учетом свойства 5 получаем

$$[0,\xi] \supseteq W_{I^\mu}(p) \supseteq W_{I^\mu}(\xi) \supseteq [0,\xi].$$

Следовательно, $W_{I^\mu}(p) = [0,\xi]$. Пусть $f(x_1,\ldots,x_n) \in I^\mu$. Тогда $h_f(p) = \sum\limits_{i=0}^{n} A_i p^i (1-p)^{n-i}$. Согласно следствию из леммы 3 имеем $A_i \leqslant \binom{n-1}{i-1}$ при $i \leqslant n(1-\frac{1}{\mu})$. При прочих i используем тривиальную оценку $A_i \leqslant \binom{n}{i}$. Пусть $k = \lfloor n(1-\frac{1}{\mu}) \rfloor$. Тогда

$$h_f(p) \leqslant \sum_{i=0}^{k} \binom{n-1}{i-1} p^i (1-p)^{n-i} + \sum_{i=k+1}^{n} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \binom{n-1}{i-1} p^i (1-p)^{n-i} + \sum_{i=k+1}^{n} \left(\binom{n-1}{i} + \binom{n-1}{i-1} \right) p^i (1-p)^{n-i} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \binom{n-1}{i-1} p^i (1-p)^{n-i} + \sum_{i=k+1}^{n} \binom{n-1}{i} p^i (1-p)^{n-i} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} p^{i+1} (1-p)^{n-1-i} + \sum_{j=0}^{n-k-1} \binom{n-1}{j-1} (1-p)^j p^{n-j} =$$

$$= p + (1-p) \sum_{j=0}^{n-k-2} \binom{n-1}{j} (1-p)^j p^{n-1-j}.$$

К полученной сумме применим неравенство из леммы 4, полагая $q = = 1 - p$. Убедимся в выполнении неравенства $(n-1)(1-p) > n-k-2$. Действительно:

$$(n-1)(1-p) - (n-k-2) = n - 1 - p(n-1) - n + k + 2 = k + 1 - (n-1)p.$$

В силу выбора k имеем $k \geqslant n\left(1 - \frac{1}{\mu}\right) - 1$, кроме того, $p < 1 - \frac{1}{\mu}$, откуда

$$k + 1 - (n-1)p \geqslant n\left(1 - \frac{1}{\mu}\right) - (n-1)\left(1 - \frac{1}{\mu}\right) = 1 - \frac{1}{\mu} > 0.$$

Таким образом, с учетом неравенства из леммы 4 имеем

$$h_f(p) \leqslant p + (1-p)\frac{(n-1)p(1-p)}{(k+1-(n-1)p)^2}.$$

Несложно проверить, что, рассматривая k как $k(n)$ — функцию, зависящую от n, при $p < 1 - \frac{1}{\mu}$ имеем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)p(1-p)}{(k(n)+1-(n-1)p)^2} = 0.$$

Иначе говоря, характеристические многочлены функций из I^μ от большого числа переменных в точке p не могут существенно превышать значение p. Из полученной оценки несложно вывести, что для каждого N может найтись лишь конечное число таких функций $f \in I^\mu$, что

$$h_f(p) > p + (1-p)\frac{(N-1)p(1-p)}{(k(N)+1-(N-1)p)^2}.$$

Вместе с тем, если бы нашлась хоть одна такая функция f', то, по ранее доказанному, $[0, h_{f'}(p)] \subseteq W_{I^\mu}(p)$ и, следовательно, таких функций должно быть бесконечно много. Полученное противоречие показывает, что в действительности для всех $f \in I^\mu$ при $p < 1 - \frac{1}{\mu}$ выполнено $h_f(p) \leqslant p$.

Пусть теперь $p = 1 - \frac{1}{\mu}$. По доказанному выше для любой функции $f \in I^\mu$ при всех $p' < 1 - \frac{1}{\mu}$ выполнено $h_f(p') \leqslant p' < 1 - \frac{1}{\mu}$. В силу непрерывности $h_f(p)$ получаем, что $h_f\left(1 - \frac{1}{\mu}\right) \leqslant 1 - \frac{1}{\mu}$.

Итак, при $p \leqslant 1 - \frac{1}{\mu}$ имеет место $W_{I^\mu}(p) = [0, p]$, а в силу свойства 4 и утверждения 10 то же верно и для классов I_1^μ, MI^μ, MI_1^μ.

Рассмотрим теперь значения $p > 1 - \frac{1}{\mu}$. Определим последовательность функций f_n от $n\mu+1$ переменной следующим образом: на наборах веса $n\mu - n + 1$ и более положим f_n равной 1, на всех прочих наборах — равной 0 (такие функции рассматривались также в [9]). Тогда в любых μ наборах, на которых f_n равна 1, имеется всего не более μn нулей, а следовательно, найдется позиция, в которой во всех наборах стоит 1. Таким образом, f_n удовлетворяют условию $\langle 1^\mu \rangle$. Кроме того, легко видеть, что f_n — монотонные, сохраняющие 1. Итак, $f_n \in MI_1^\mu$.

Легко проверить, что

$$h_{f_n}(p) = \sum_{i=n\mu-n+1}^{n\mu+1} \binom{n\mu+1}{i} p^i (1-p)^{n\mu+1-i} = 1 - \sum_{i=0}^{n\mu-n} \binom{n\mu+1}{i} p^i (1-p)^{n\mu+1-i}.$$

Применим к получившейся сумме неравенство из леммы 4, полагая $q = p$. Отметим, что в силу предположения $p > 1 - \frac{1}{\mu}$ имеет место $(n\mu+1)p - (n\mu - n) > (n\mu+1)(1-\frac{1}{\mu}) - n\mu(1-\frac{1}{\mu}) = 1 - \frac{1}{\mu} > 0$. Следовательно,

$$h_{f_n}(p) \geqslant 1 - \frac{(n\mu+1)p(1-p)}{((n\mu+1)p - n(\mu-1))^2}.$$

Отсюда видно, что $h_{f_n}(p) \to 1$ при $n \to \infty$, и, следовательно, в силу леммы 2, имеет место $W_{MI_1^\mu}(p) = [0, 1]$. В силу свойства 4 то же верно и для классов I^μ, I_1^μ, MI^μ. Утверждение доказано. $\square$

Класс SM

Утверждение 12. $W_{SM}(p) = \begin{cases} [0, p], \text{ \textit{при} } 0 < p < 1/2, \\ 1/2, \text{ \textit{при} } p = 1/2, \\ [p, 1], \text{ \textit{при} } 1/2 < p < 1. \end{cases}$

Доказательство. Включение $W_{SM}(p)$ в множество, описанное в условии утверждения, вытекает непосредственно из включения $SM \subseteq MI_1^2 \cap \cap MO_0^2$. Для доказательства утверждения требуется установить, что при каждом $p \in (0,1)$ все точки указанного множества действительно аппроксимируются.

Поскольку класс SM двойственен сам себе, достаточно доказать утверждение для $0 < p < 1/2$, т. е. показать, что при любом $p \in (0, 1/2)$ для любого $\xi \in (0,p)$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется такая функция $f \in SM$, что $h_f(p) \in (\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon)$.

Пусть m — медиана, рассмотрим последовательность функций:

$$f_n(x_0, x_1, \ldots, x_n) = m(x_0, x_1, m(x_0, x_2, m(x_0, x_3, m(\ldots, m(x_0, x_{n-1}, x_n) \ldots)))).$$

Несложно проверить, что

$$h_{f_n}(p) = p(1 - (1-p)^n) + (1-p)p^n = p - (p(1-p)^n - (1-p)p^n).$$

Рассмотрим $\chi_n(p) = p - h_{f_n}(p) = p(1-p)^n - (1-p)p^n$. При всех $p \in (0, 1/2)$ имеет место $\chi_n(p) \geqslant 0$ и $\chi_n(p) \to 0$ при $n \to \infty$. Покажем, что $\chi_n(p)$ сходится к нулю равномерно на отрезке $[0, 1/2]$.

Поскольку $\chi_n(0) = \chi_n(1/2) = 0$ и $\chi_n(p) \geqslant 0$, на отрезке $[0, 1/2]$ функция $\chi_n(p)$ имеет глобальный максимум в точке p_0, где выполнено $\chi'_n(p_0) = 0$. Дифференцируя $\chi_n(p)$ по переменной p, получаем, что условие $\chi'_n(p_0) = 0$ равносильно

$$(1-p_0)^n + p_0^n = n(p_0(1-p_0)^{n-1} + p_0^{n-1}(1-p_0)),$$

откуда

$$\left(\frac{1-p_0}{p_0}\right)^{n-1} = \frac{1}{n}\left(\left(\frac{1-p_0}{p_0}\right)^n + 1\right) - \frac{1-p_0}{p_0}. \tag{2}$$

Поскольку в точке p_0 функция $\chi_n(p)$ имеет глобальный максимум на отрезке $[0, 1/2]$, а также в силу соотношения (2), получаем

$$\chi_n(p) \leqslant \chi_n(p_0) = p_0(1-p_0)^n - p_0^n(1-p_0) = p_0^n(1-p_0)\left(\left(\frac{1-p_0}{p_0}\right)^{n-1} - 1\right) =$$

$$= p_0^n(1-p_0)\left(\frac{1}{n}\left(\frac{1-p_0}{p_0}\right)^n + \frac{1}{n} - \frac{1-p_0}{p_0} - 1\right) \leqslant \frac{2}{n}.$$

Отсюда видно, что $\chi_n(p)$ сходится к нулю равномерно на всем отрезке $[0, 1/2]$.

Пусть задано $\varepsilon > 0$. Тогда существует такой номер N, что $\chi_N(p) < \varepsilon$ при всех $p \in [0, 1/2]$. Построим последовательность булевых функций g_i следующим образом. Положим $g_0 = f_N$, $g_{i+1} = f_N(g_i, \ldots, g_i)$. Тогда легко проверить, что

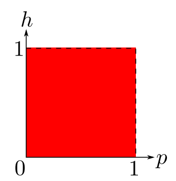
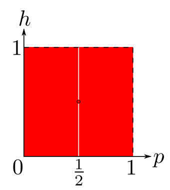
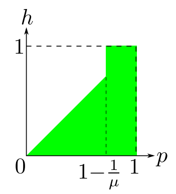
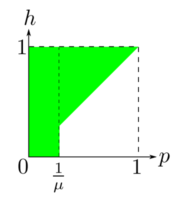
$$h_{g_i}(p) = \underbrace{h_{f_N}(h_{f_N}(\ldots h_{f_N}}_{i \text{ раз}}(p))). \tag{3}$$

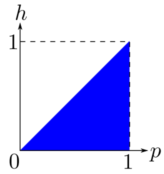
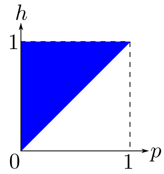
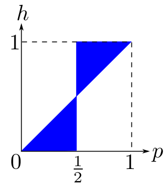
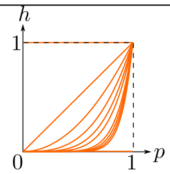
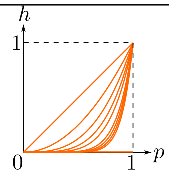
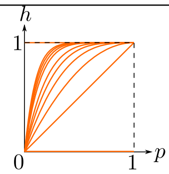
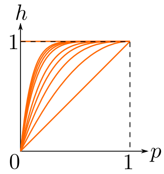
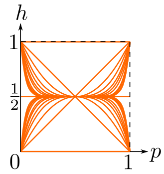
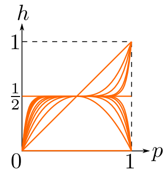
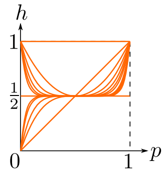
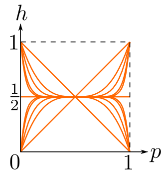
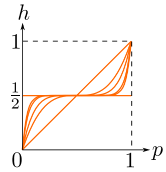
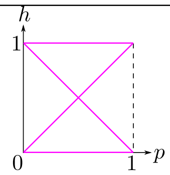
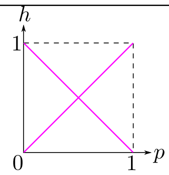
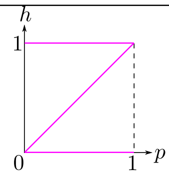
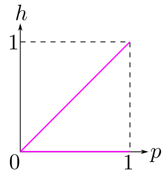
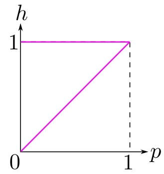
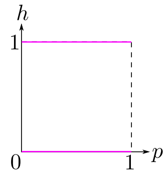
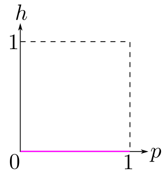
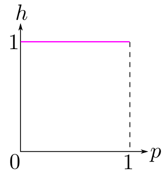
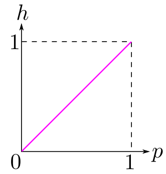
Из выбора N вытекает, что $h_{g_i}(p) - h_{g_{i+1}}(p) < \varepsilon$, при этом $h_{g_i}(p)$ убывают с ростом i так как $h_{f_N}(p) < p$, и, из уравнения (3), а также равенства $h_{f_N}(0) = 0$ аналогично доказательству утверждения 4 получаем, что $\lim\limits_{i\to\infty} h_{g_i}(p) = 0$. Отсюда следует, что для любой точки $\xi \in [0, p]$ найдется такой номер i, что $h_{g_i}(p) \in (\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon)$. Утверждение доказано. $\square$

Аппроксимируемые множества

Объединяя утверждения 1–12, получаем группировку замкнутых классов булевых функций по типу множеств распределений, которые аппроксимируются функциями из этих классов. На рис. 2 различные типы замкнутых классов изображены цветом. Цвета классов и характеристики аппроксимируемых множеств приведены в таблице ниже.

Полученная таким образом классификация позволяет, в частности, формулировать необходимые условия аппроксимируемости распределений также и для случая преобразования распределений бесповторными суперпозициями булевых функций.

Цвет	**Описание**	**Аппроксимируемые множества**
Красный	Классы, позволяющие аппроксимировать произвольное распределение при всех $p \in (0, 1)$, за исключением, быть может, $p = 1/2$	 $P_2, T_0, T_1, T_{01}, M_0, M_1, M_{01}$  S, S_{01}
Зеленый	Классы, позволяющие аппроксимировать произвольное распределение при некоторых $p \in (0, 1)$ и имеющие континуальное множество аппроксимируемых распределений при прочих p	 $I^\mu, I_1^\mu, MI^\mu, MI_1^\mu$  $O^\mu, O_0^\mu, MO^\mu, MO_0^\mu$ $\mu = 2, 3, \ldots$

Цвет	Описание	Аппроксимируемые множества
Синий	Классы, имеющие континуальное множество аппроксимируемых распределений при всех $p \in (0,1)$, но ни при каком p не позволяющие аппроксимировать всевозможные распределения	 $I^\infty, I_1^\infty, MI^\infty, MI_1^\infty$  $O^\infty, O_0^\infty, MO^\infty, MO_0^\infty$  SM
Оранже-вый	Классы, имеющие счетные множества аппроксимируемых распределений при всех $p \in (0,1)$	 K, K_1  K_0, K_{01}  D, D_0  D_1, D_{01}  L  L_0  L_1  SL  L_{01}
Лиловый	Классы, имеющие конечные множества аппроксимируемых распределений при всех $p \in (0,1)$	 U  SU  MU  U_0  U_1  C  C_0  C_1  U_{01}

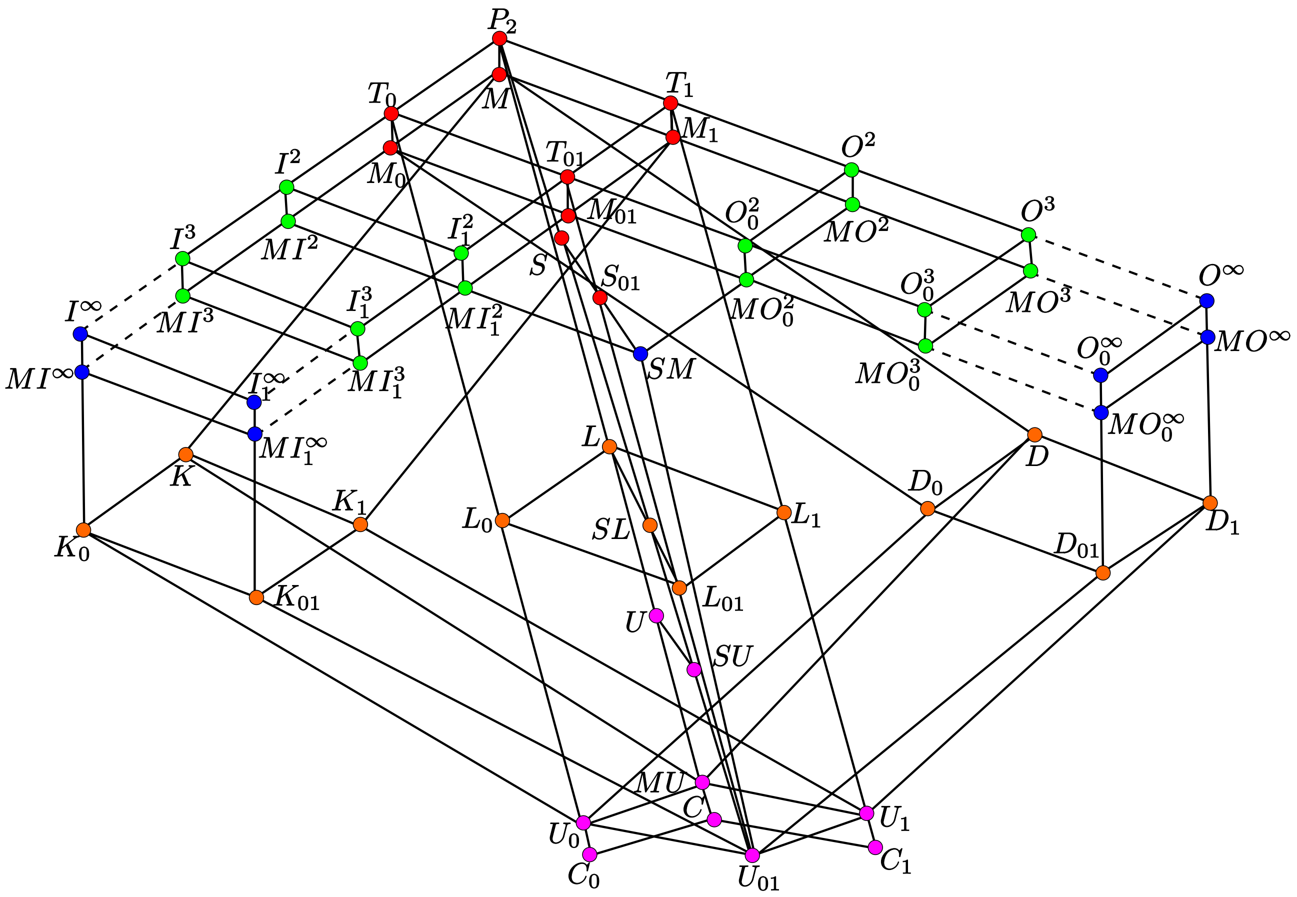


Рис. 2

Установленный вид множеств без существенных изменений распространяется на случай, когда в функции из замкнутых классов подставляются независимые случайные величины, распределения которых принадлежат некоторому конечному множеству начальных распределений.

Легко проверить, что для всех классов, содержащих MI_1^∞ или MO_0^∞, множество аппроксимируемых распределений для заданного конечного множества начальных распределений определяется одним из элементов этого множества, дающим наибольшее множество аппроксимируемых распределений.

Для класса SM наличие в множестве начальных распределений двух распределений, у которых вероятность единицы больше и меньше $1/2$ соответственно, позволяет аппроксимировать произвольное распределение. В противном случае, множество аппроксимируемых распределений так же, как и в предыдущем случае, определяется одним элементом множества начальных распределений.

В классах, где множество аппроксимируемых распределений имеет не более одной предельной точки, рассмотрение конечного множества начальных распределений не увеличивает множество предельных точек.

Автор выражает признательность О. М. Касим-Заде за внимание к работе, а также участникам семинара сектора теоретической кибернетики ИПМ им. М. В. Келдыша за творческую атмосферу, способствовавшую написанию данной работы.

Список литературы

[1] Колпаков Р. М. Дискретные преобразования вероятностных распределений // Современные проблемы математики и механики. Т. III. Математика. Вып. 3. Дискретная математика / Под ред. О. М. Касим-Заде. М.: Изд-во МГУ, 2009. С. 35–50.

[2] Схиртладзе Р. Л. О синтезе p-схемы из контактов со случайными дискретными состояниями // Сообщ. АН ГрССР. 1961. Т. 26. № 2. С. 181–186.

[3] Схиртладзе Р. Л. О методе построения булевой величины с заданным распределением вероятностей // Дискретный анализ. Вып. 7. Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1966. С. 71–80.

[4] Яшунский А. Д. О преобразованиях вероятности бесповторными булевыми формулами // Материалы XVI Международной школы-семинара «Синтез и сложность управляющих систем» (Санкт-Петербург, 26–30 июня 2006 г.) М.: Изд-во механико-математического факультета МГУ, 2006. С. 150–155.

[5] Салимов Ф. И. К вопросу моделирования булевых случайных величин функциями алгебры логики // Вероятностные методы и кибернетика. Вып. 15. Казань, КГУ, 1979. С. 68–89.

[6] Угольников А. Б. Классы Поста. Учебное пособие: М.: Изд-во ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ имени М. В. Ломоносова, 2008.

[7] Frankl P. On Sperner families satisfying an additional condition // J. Comb. Theory (A), 1976. V. 20. P. 1–11.

[8] Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Тт.1–2. М.: Мир, 1984.

[9] Гиндикин С. Г., Мучник А. А. Решение проблемы полноты для систем функций алгебры логики с ненадежной реализацией // Проблемы кибернетики. Вып. 15. М.: Наука, 1965. С. 65–84.