



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 42 за 2016 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Герцев М.Н., [Шильков А.В.](#),
[Аристова Е. Н.](#)

Расчёт переноса теплового
излучения в атмосфере
Земли

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Герцев М.Н., Шильков А.В., Аристова Е. Н. Расчёт переноса теплового излучения в атмосфере Земли // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2016. № 42. 28 с. doi:[10.20948/prepr-2016-42](https://doi.org/10.20948/prepr-2016-42)
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2016-42>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Российской академии наук**

М.Н.Герцев, А.В.Шильков, Е.Н.Аристова

**Расчёт переноса теплового излучения
в атмосфере Земли**

Москва — 2016

Герцев М.Н., Шильков А.В., Аристова Е.Н.

Расчёт переноса теплового излучения в атмосфере Земли

В работе проведено сравнение расчётов теплового излучения в атмосфере Земли, проведенное тремя методами: прямым поточечным «line-by-line» расчётом спектра, точным лебеговским расчётом и приближённым лебеговским расчётом. Приближённый лебеговский расчёт использует упрощенную процедуру сборки лебеговых коэффициентов. Показано, что отличие точного и лебеговских расчётов составляет менее 5%. При этом экономия времени в лебеговских расчётах составляет более 10000 раз. Ускоренная сборка даёт дополнительную существенную экономию вычислительных ресурсов на этапе подготовки оптических констант. Все расчёты выполняются с помощью конечно-аналитической дискретной схемы для системы чётно-нечётных кинетических уравнений. Ускоренная сборка оптических констант позволяет проводить серийные расчёты атмосферной радиации и может быть использована неподготовленным пользователем в расчётах, базирующихся на любом другом транспортном коде.

Ключевые слова: перенос излучения, чётно-нечётная система кинетических уравнений, конечно-аналитическая схема, метод квазидиффузии, метод лебеговского осреднения

Gertsev M.N., Shilkov A.V., Aristova E.N.

Heat radiation transfer in the Earth atmosphere

There are three types of heat radiation transfer in the Earth atmosphere calculation compared at this work. They are: direct (exact precise) line-by-line calculation, exact Lebesgue average method calculation and fast approximate Lebesgue calculation. An approximate Lebesgue calculation use simplified procedure of Lebesgue's coefficient assembly. The difference between the direct and the both Lebesgue's methods doesn't exceed 5%. The computing resources retrenchment are more than 10000 times in Lebesgue's calculations. The fast procedure of Lebesgue's coefficient assembly leads to additional essential operations economy. All calculations are executing by the finite-analytic discrete scheme for the even-odd kinetic equations set. The fast procedure of Lebesgue's coefficient assembly makes it possible to execute a set of similar calculations of atmospheric radiations. The database of fast Lebesgue's coefficient assembly might be used by unqualified users on the base of any transport code.

Key words: radiation transfer, even-odd kinetic equation set, finite-analytic discrete scheme, quasidiffusion method, Lebesgue average method

Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда (проект № 14-11-00699).

Введение

В работе проводится сравнение результатов расчётов переноса атмосферной радиации, полученных точным поточечным (line-by-line) методом и методом лебеговского осреднения спектров. Метод лебеговского осреднения использует точные и приближённые лебеговы коэффициенты. Вариант с приближёнными коэффициентами предназначен для проведения серийных расчётов атмосферной радиации, где требуется быстрый пересчет коэффициентов при изменении концентраций атмосферных газов.

Работа является продолжением работ [1]–[2], посвященных разработке комплекса программ, предназначенных для численного решения задач переноса атмосферной радиации. В работе [1] описана процедура расчёта детальных спектральных сечений поглощения атмосферных газов из банка параметров линий HITRAN [3]. В работе [2] кратко описаны метод лебеговского осреднения и методика подготовки базы данных лебеговых сечений и коэффициентов для выполнения расчётов.

Перенос излучения в плоской атмосфере описывается уравнением:

$$\mu \frac{\partial I}{\partial z} + (\chi^{ab} + \chi^{(0)})I = Q, \quad (1)$$

$$Q = c\chi^{ab} \frac{U^{Pl}}{2} + \sum_{n=0}^{2N+1} \frac{2n+1}{2} \chi^{(n)} I^{(n)} P_n(\mu), \quad I^{(n)} = \int_{-1}^1 P_n(\mu) I(\mu) d\mu,$$

$$\chi^{(n)} = 2\pi \int_{-1}^1 K^{sc}(\mu_0) P_n(\mu_0) d\mu_0, \quad \mu_0 = \Omega \Omega', \quad (n=0,1,\dots,2N+1).$$

$$U^{Pl}(E, T) = \frac{4\sigma}{c} \cdot \frac{15}{\pi^4} \frac{a^4 E^3}{e^{aE/T} - 1},$$

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15c^2 h^3} = 5.670373 \cdot 10^{-5} \frac{\text{эрг}}{\text{сек см}^2 \text{К}^4}, \quad a = \frac{ch}{k} = 1.4387770 \text{ смК}.$$

Здесь: $I(E, \mu, z)$ — интенсивность излучения, зависящая от энергии фотона E , косинуса зенитного угла μ и пространственной координаты z ; $I^{Pl}(E, T)$ — равновесное планковское распределение; $\chi^{(ab)}(E, z)$ — коэффициент поглощения излучения, зависящий от энергии фотонов E , концентраций атмосферных газов и сечений поглощения излучения; сечения зависят от температуры T и давления P ; $K^{sc}(\mu_0)$ — индикатриса рассеяния, μ_0 — косинус угла рассеяния, $\chi^{(0)}(E, z)$ — коэффициент рассеяния излучения, $P_n(\mu)$ — многочлены Лежандра.

Граничные условия на нижней (z_{in}) и верхней (z_{out}) границах атмосферы записываются в виде:

$$I_{in}(E, \mu)|_{\mu>0} = \kappa_{in}^M I_{in}(E, -\mu) + \kappa_{in}^D \int_{-1}^0 I_{in}(E, \mu) d\mu + I_{in}^{ext}(E)|_{\mu>0} \quad (2)$$

$$I_{in}^{ext}(E)|_{\mu>0} \approx [1 - \kappa_{in}^M - \kappa_{in}^D] \frac{cU^{Pl}(E, T_{in})}{2}, \quad I_{out}(E, \mu)|_{\mu<0} = I_{out}^{ext}(E)|_{\mu<0}.$$

Здесь κ^M и κ^D — коэффициент зеркального и коэффициент диффузного отражения от поверхности земли, I_{in}^{ext} — тепловое излучение поверхности земли.

Одной из трудностей решения уравнения (1) является сложная зависимость коэффициента поглощения $\chi^{(ab)}(E, z)$ от энергии фотонов, которая содержит множество резонансов (линий поглощения), соответствующих переходам молекул между уровнями колебательно-вращательной энергии.

Метод лебеговского осреднения эффективно сокращает число требуемых операций при расчёте многорезонансных спектров фотонов. В работах [2,4–7] было показано, что после применения метода лебеговского осреднения уравнение переноса излучения на системе лебеговых множеств имеет тот же функциональный вид, что и уравнение (1). Роль переменной спектра (энергии фотонов) играет мера лебеговых множеств. Выполним дискретизацию по переменной условного спектра и запишем оба уравнения в едином виде:

$$\mu \cdot \frac{\partial I_q}{\partial z} + [\chi_q^{ab} + \chi_q^{(0)}] I_q = Q_q. \quad (3)$$

Здесь « q » — номер узла сетки по переменной условного спектра. Для решения уравнения (3), т.е. для выполнения расчётов поточечным методом и методом лебеговского осреднения, мы будем использовать одни и те же численные схемы и методы.

Процесс подготовки коэффициентов поглощения для проведения расчётов прямым поточечным «line-by-line» методом и методом лебеговского осреднения спектра описан в работе [2].

Процесс подготовки лебеговых коэффициентов состоит из двух этапов. На первом этапе производится деление спектра энергий фотонов на носители резонансов. Перенос излучения на каждом носителе рассматривается независимо.

На втором этапе внутри каждого носителя резонансов производится построение лебеговых множеств $\varepsilon(\gamma)$ и расчёт лебеговых сечений и коэффициентов поглощения. Лебеговым множеством $\varepsilon(\gamma)$ называется множество интервалов на шкале энергий E , принадлежащее носителю резонансов, где спектральный коэффициент поглощения ниже заданного значения: $\chi^{ab}(E) < \gamma$. Вводится

мера множества « m » как интеграл по множеству с весовой функцией S , обеспечивающей изменение меры в интервале $0 \leq m \leq 1$. Приведём вид формул из [2] для расчёта лебеговых коэффициентов в интервалах сетки условного спектра:

$$\chi_q^{ab} = \frac{\int_{\varepsilon(m_q)}^{\varepsilon(m_{q-1})} \chi^{ab}(E) S(E) dE - \int_{\varepsilon(m_q)}^{\varepsilon(m_{q-1})} \chi^{ab}(E) S(E) dE}{\int_{\varepsilon(m_q)}^{\varepsilon(m_{q-1})} S(E) dE - \int_{\varepsilon(m_q)}^{\varepsilon(m_{q-1})} S(E) dE},$$

$$\chi_q^{(n)} = \frac{\int_{\varepsilon(m_q)}^{\varepsilon(m_{q-1})} \chi^{(n)}(E) S(E) dE - \int_{\varepsilon(m_q)}^{\varepsilon(m_{q-1})} \chi^{(n)}(E) S(E) dE}{\int_{\varepsilon(m_q)}^{\varepsilon(m_{q-1})} S(E) dE - \int_{\varepsilon(m_q)}^{\varepsilon(m_{q-1})} S(E) dE}.$$

Схема численного решения

Чётно-нечётная система кинетических уравнений. Уравнение (3) представляет собой интегро-дифференциальное уравнение первого порядка. Для упрощения поиска решения в случае рассеивающих, облачных атмосфер, когда рассеяние излучения определяет угловую направленность излучения, целесообразно перейти от уравнения (3) к его эквивалентной форме — системе чётно-нечётных кинетических уравнений относительно чётной и нечётной частей функции распределения. Введем чётную и нечётную интенсивности излучения:

$$I^+(\mu) = \frac{I(\mu) + I(-\mu)}{2}, \quad I^-(\mu) = \frac{I(\mu) - I(-\mu)}{2}, \quad I(\mu) = I^+(\mu) + I^-(\mu).$$

Система чётно-нечётных уравнений для нахождения $I^\pm(\mu)$ выводится взятием полусуммы и полуразности уравнения (3) и сопряженного к нему уравнения, записанного для характеристики с обратным направлением $-\mu$. Запишем систему в общем виде:

$$\begin{cases} \mu \frac{\partial I^-}{\partial z} + \chi^+ I^+ = Q^+, & I_{in}^- = -\frac{1 - \chi_{in}}{1 + \chi_{in}} I_{in}^+ + \frac{I_{in}^{ext}}{1 + \chi_{in}}, \\ \mu \frac{\partial I^+}{\partial z} + \chi^- I^- = Q^-, & I_{out}^- = \frac{1 - \chi_{out}}{1 + \chi_{out}} I_{out}^+ - \frac{I_{out}^{ext}}{1 + \chi_{out}}, \end{cases} \quad (4)$$

для задачи (2), (3) коэффициенты системы (4) принимают значения:

$$\chi^+ = \chi_q^{ab} + \chi_q^{(0)}, \quad \chi^- = \chi_q^{ab} + \chi_q^{(0)}. \quad (5)$$

Источники следует положить равными

$$Q^+ = c_2 \chi_q^{ab} \frac{U_q^{Pl}}{2} + \sum_{n=0}^{N-1} \frac{4n+1}{2} \chi^{(2n)} I_q^{(2n)} P_{2n}(\mu), \quad (6)$$

$$Q^- = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{4n+3}{2} \chi^{(2n+1)} I_q^{(2n+1)} P_{2n+1}(\mu).$$

Система дополняется граничными условиями, которые следуют из (2):

$$\chi_{in}(\mu)|_{\mu>0} = \kappa_{in}^M + \frac{\kappa_{in}^D}{I_{in}^+(\mu) - I_{in}^-(\mu)} \cdot \int_0^1 [I_{in}^+(\mu) - I_{in}^-(\mu)] d\mu, \quad \chi_{out} = 0,$$

$$I_{in}^{ext}(E)|_{\mu>0} \approx [1 - \kappa_{in}^M - \kappa_{in}^D] \frac{cU^{Pl}(E, T_{in})}{2}, \quad I_{out}^{ext} = 0.$$

Здесь χ_{in} — вычисляемый на итерациях функционал.

Дискретизация по угловым переменным. Для вычисления интегралов по углу используется квадратурная формула Гаусса чётного порядка $2N$:

$$\int_{-1}^1 F(\mu) d\mu \approx \sum_{l=1}^N \gamma_l [F(\mu_l) + F(-\mu_l)], \quad \sum_{l=1}^N \gamma_l = 1, \quad (7)$$

$$P_{2N}(\pm\mu_l) = 0, \quad 0 < \mu_l < 1, \quad \gamma_l = 1 / \sum_{n=0}^{2N-1} [2n+1] P_n^2(\mu_l), \quad (l=1, 2, \dots, N),$$

где $F(\mu)$ — интегрируемая функция, γ_l, μ_l — веса и узлы квадратурной формулы. μ_l есть неотрицательные нули полинома Лежандра степени $2N$.

В соответствии с (7) угловые моменты интенсивности излучения вычисляются по формулам:

$$I_q^{(2n)} = \int_{-1}^1 P_{2n}(\mu) I_q(\mu) d\mu = 2 \sum_{l=1}^N \gamma_l P_{2n}(\mu_l) I_q^+(\mu_l), \quad (8)$$

$$I_q^{(2n+1)} = \int_{-1}^1 P_{2n+1}(\mu) I_q(\mu) d\mu = 2 \sum_{l=1}^N \gamma_l P_{2n+1}(\mu_l) I_q^-(\mu_l), \quad (n=0, \dots, N-1).$$

Источники системы Q^\pm вычисляются подстановкой (8) в (6).

Дискретизация задачи по пространственной переменной. Диапазон изменений спектрального коэффициента поглощения и лебегова коэффициента поглощения велик — от малых значений в крыльях линий до очень больших значений в центрах линий. Поэтому при любом разумном выборе расчётной пространственной сетки каждая ячейка является оптически толстой в одних

точках условного спектра (энергиях фотонов — поточечный расчёт, значениях лебеговой меры — лебеговский расчёт) и оптически тонкой в других точках. Эта ситуация трудна для численного расчёта, т.к. далеко не все разностные схемы сохраняют аппроксимацию *одновременно* в этих двух предельных случаях.

Для решения задачи (4)-(8) на пространственной сетке с оптически тонкими и оптически толстыми ячейками была разработана конечно-аналитическая схема [8–9]. Схема строится на принципах «точной схемы», предложенной в [10] для численного решения уравнения теплопроводности:

$$\begin{aligned} I_{i-1}^- &= [e_i + g_i]I_{i-1}^+ - e_i I_i^+ - Z_i^+, \\ I_i^- &= e_i I_{i-1}^+ - [e_i + g_i]I_i^+ + Y_i^+. \end{aligned} \quad (9)$$

Коэффициенты схемы:

$$\begin{aligned} e_i &= \sqrt{\frac{\tau_i^+}{\tau_i^-}} \frac{1}{\sinh \sqrt{\tau_i^+ \tau_i^-}}, & g_i &= e_i \left[\cosh \sqrt{\tau_i^+ \tau_i^-} - 1 \right] = \sqrt{\frac{\tau_i^+}{\tau_i^-}} \tanh \frac{\sqrt{\tau_i^+ \tau_i^-}}{2}, \\ Y_i^+ &= g_i \frac{Q_i^+}{\kappa_i^+} + \frac{Q_i^-}{\kappa_i^-}, & Z_i^+ &= g_i \frac{Q_i^+}{\kappa_i^+} - \frac{Q_i^-}{\kappa_i^-}, & \tau_i^\pm &= \frac{1}{\mu} \int_{z_{i-1}}^{z_i} \kappa^\pm(z) dz. \end{aligned}$$

Величины τ_i^\pm имеют смысл оптической толщины ячейки в направлении μ при средних коэффициентах поглощения κ_i^\pm , величины Q_i^\pm — средних источников.

Алгоритм потоковой прогонки. Решение системы дискретных уравнений (9) с граничными условиями (4) при фиксированном значении μ (значении узла квадратурной формулы Гаусса (7)) ищется с помощью алгоритма потоковой прогонки:

$$\begin{cases} I_i^+ = \alpha_i I_{i-1}^+ + \beta_i, \\ I_i^- = \gamma_i I_{i-1}^- - \delta_i, \end{cases}$$

где $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i$ — прогоночные коэффициенты. Вывод формул для расчёта прогоночных коэффициентов $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ приведён в работе [9]. Алгоритм потоковой прогонки является объединением обычной и дифференциальной прогонок [11]. Алгоритм реализует процедура **Progonka(...)** (файл `./programs/source/inc/progonka.f90`)¹.

Входными данными для процедуры являются:

- N — количество точек начальной сетки;

¹ Все тексты программ находятся по адресу <http://cpt.imamod.ru/people/gertsev.html/atrad/>

- Заданные в ячейках сетки ($i = \overline{2; i_{\max}}$) оптические толщины τ^+, τ^- , и средние источники Q_i^+ :
- Граничные условия (4):

$$\begin{aligned} \text{Boundary}[1] &= \frac{1 - \chi_{in}}{1 + \chi_{in}}, & \text{Boundary}[2] &= \frac{I_{in}^{ext}}{1 + \chi_{in}}, \\ \text{Boundary}[3] &= \frac{1 - \chi_{out}}{1 + \chi_{out}}, & \text{Boundary}[4] &= \frac{I_{out}^{ext}}{1 + \chi_{out}}. \end{aligned}$$

Прогоночные формулы:

Прямой ход:

- 1) процедура начинается с последнего слоя ($i = i_{\max}$) и определяет вспомогательные коэффициенты:

$$\gamma_{i+1} = 0, \quad \delta_{i+1} = 0, \quad e_{i+1} = 0, \quad Z = \text{Boundary}[4], \quad g_{i+1} = \text{Boundary}[3];$$

- 2) поочередно для всех слоёв i от i_{\max} до 2 вычисляются вспомогательные величины (e_i, g_i, Y, Z) и прогоночные коэффициенты ($\alpha, \beta, \gamma, \delta$) по формулам:

$$Y = Y_i^+$$

$$\alpha_i = \frac{e_i}{e_i + g_i + g_{i+1} + e_{i+1} \frac{\gamma_{i+1} + g_{i+1}}{e_{i+1} + g_{i+1}}};$$

$$\beta_i = \frac{Y + Z + e_{i+1} \beta_{i+1}}{e_i + g_i + g_{i+1} + e_{i+1} \frac{\gamma_{i+1} + g_{i+1}}{e_{i+1} + g_{i+1}}};$$

$$\gamma_i = \alpha_i \left(g_{i+1} + e_{i+1} \frac{\gamma_{i+1} + g_{i+1}}{e_{i+1} + g_{i+1}} \right);$$

$$\delta_i = \frac{Y \left(g_{i+1} + e_{i+1} \frac{\gamma_{i+1} + g_{i+1}}{e_{i+1} + g_{i+1}} \right) + Z + e_{i+1} \beta_{i+1}}{e_i + g_i + g_{i+1} + e_{i+1} \frac{\gamma_{i+1} + g_{i+1}}{e_{i+1} + g_{i+1}}};$$

$$Z = Z_i^+.$$

3) для вычисления прогоночных коэффициентов на первом слое ($i=1$), процедура определяет

$$g_i = \text{Boundary}[1], \quad e_i = 0, \quad Y = \text{Boundary}[2]$$

и вычисляет β_i , δ_i по формулам выше.

Обратный ход:

4) полученные процедурой β_1 и δ_1 являются решениями задачи (9) — (4) в первой расчётной точке: $I_1^+ = \beta_1$, $I_1^- = -\delta_1$;

5) решение в остальных точках i ($i = 2, \overline{i_{\max}}$) вычисляется по формулам:

$$\begin{cases} I_i^+ = \alpha_i I_{i-1}^+ + \beta_i, \\ I_i^- = \gamma_i I_{i-1}^+ - \delta_i. \end{cases}$$

Процедура сохраняет результаты в переменные **I_p** и **I_m** и заканчивает свою работу.

Ускорение итераций по интегралу рассеяния. Для ускорения сходимости итераций по источникам Q^\pm применяется метод квазидиффузии [12, 13]. Проинтегрируем уравнение переноса излучения (1) по угловой переменной с весом 1 и μ . В результате мы получим два уравнения, связывающие три угловых момента интенсивности:

$$\begin{cases} \frac{\partial I^{(1)}}{\partial z} + \chi^{ab} I^{(0)} = c \chi^{ab} U^{Pl}, \\ \frac{\partial \pi}{\partial z} + [\chi^{ab} + \chi^{(0)} - \chi^{(1)}] I^{(1)} = 0, \end{cases}$$

$$\pi = \int_{-1}^1 \mu^2 I(\mu) d\mu = 2 \int_0^1 \mu^2 I^+(\mu) d\mu, \quad I^{(2)} = \int_{-1}^1 \frac{3\mu^2 - 1}{2} I(\mu) d\mu = \frac{3\pi - I^{(0)}}{2}.$$

Здесь π — нецентрированный угловой момент второго порядка, пропорциональный давлению излучения. Если дополнить уравнения алгебраическим соотношением, связывающим моменты нулевого и второго порядка: $\pi = D \cdot I^{(0)}$, где D — коэффициент квазидиффузии излучения (фактор Эддингтона), то мы получим замкнутую систему уравнений для определения первых трёх угловых моментов:

$$\begin{cases} \frac{\partial I^{(1)}}{\partial z} + \frac{\chi^{ab}}{D} \pi = c \chi^{ab} U^{Pl}, \\ \frac{\partial \pi}{\partial z} + [\chi^{ab} + \chi^{(0)} - \chi^{(1)}] I^{(1)} = 0, \end{cases} \quad (10)$$

$$I^{(0)} = \pi/D, \quad I^{(2)} = \frac{3-1/D}{2} \pi = \frac{3D-1}{2} I^{(0)}.$$

Система (10) дополняется граничными условиями, следующими из (4):

$$\begin{aligned} I_{in}^{(1)} &= -d_{in} \cdot \frac{1-\chi_{in}}{1+\chi_{in}} \cdot I_{in}^{(0)} + \frac{2}{1+\chi_{in}} \cdot I_{in}^{ext,(1)} \\ I_{out}^{(1)} &= d_{out} \cdot \frac{1-\chi_{out}}{1+\chi_{out}} \cdot I_{out}^{(0)} + \frac{2}{1+\chi_{out}} \cdot I_{out}^{ext,(1)}, \end{aligned} \quad (11)$$

$$d = \int_{-1}^1 |\mu| I(\mu) d\mu \Big/ \int_{-1}^1 I(\mu) d\mu, \quad I_{in}^{ext,(1)} \approx [1 - \kappa_{in}^M - \kappa_{in}^D] \frac{cU^{Pl}(E, T_{in})}{4}, \quad I_{out}^{ext} = 0,$$

$$\chi_{in} = \kappa_{in}^M + \frac{\kappa_{in}^D}{2} \int_{-1}^0 I(\mu) d\mu \Big/ \int_{-1}^0 |\mu| I(\mu) d\mu, \quad \chi_{out} = 0.$$

Метод квазидиффузии состоит в том, что итерационный процесс решения задачи (4)-(8) заменяется на процесс параллельного решения двух задач. В задаче (а) решается система (10), (11) при заданных коэффициентах D , d , χ_{in} . Эти коэффициенты являются дробно-линейными функционалами решения. Они слабо меняются на итерациях. Расчёт этих коэффициентов производится в задаче (б). В результате решения задачи (а) с хорошей точностью вычисляются два первых угловых момента интенсивности излучения $I^{(0)}$ и $I^{(1)}$. Задача (б) состоит в решении системы (4) с модифицированными источниками Q^\pm . В источниках выделяются главные части Q^0 и Q^1 , зависящие от первых двух угловых моментов, и остаточные части Q^3 и Q^4 :

$$Q^+ = Q^0 + Q^4, \quad Q^- = Q^1 + Q^3, \quad (12)$$

$$Q^0 = c\chi_q^{ab} \frac{U_q^{Pl}}{2} + \chi_q^{(0)} \frac{I_q^{(0)}}{2} + \chi_q^{(2)} \frac{5}{2} I_q^{(2)} \frac{3\mu^2 - 1}{2}, \quad Q^4 = \sum_{n=2}^{N-1} \frac{4n+1}{2} \chi^{(2n)} I_q^{(2n)} P_{2n}(\mu),$$

$$Q^1 = \chi^{(1)} \frac{3}{2} I_q^{(1)} \cdot \mu, \quad Q^3 = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{4n+3}{2} \chi^{(2n+1)} I_q^{(2n+1)} P_{2n+1}(\mu).$$

Главные части источников Q^0 и Q^1 с хорошей точностью вычисляются *на текущей итерации* в результате решения задачи (а) при замене момента $I^{(2)} = \frac{3-1/D}{2} \pi$ через текущую величину π и коэффициент квазидиффузии D предыдущей итерации. Остаточные части Q^3 и Q^4 берутся с *предыдущей ите-*

рации. Погрешность, допускаемая при их вычислении, слабо влияет на общее решение задачи, т.к. остаточные члены малы в сравнении с главными частями источников. Такая организация итерационного процесса решения интегро-дифференциального уравнения обеспечивает очень высокую скорость сходимости. Практика показывает, что данный нелинейный итерационный процесс сходится за несколько итераций при любых соотношениях между коэффициентом поглощения и коэффициентом рассеяния излучения.

Для решения задачи (а) — системы уравнений (10), (11) — используется та же дискретная схема (9), что и для решения задачи (б) — системы чётно-нечётных уравнений (4)–(8), (12). Следует только в формулах (9) произвести замену:

$$I^+ \rightarrow \pi, \quad I^- \rightarrow I^{(1)} \quad \mu=1, \quad \varkappa^+ \rightarrow \varkappa^{ab}/D, \quad \varkappa^- \rightarrow \varkappa^{ab} + \varkappa^{(0)} - \varkappa^{(1)}. \quad (13)$$

Аналитическое восстановление решения внутри ячейки. Решение задачи по конечно-аналитической схеме (9) позволяет с высокой точностью получать решение задачи в узлах пространственной сетки z_n (и между ними) при любых размерах однородных пространственных ячеек. Решение внутри ячеек сетки — в любых промежуточных точках $z = z_n + \alpha(z_{n+1} - z_n)$, $0 < \alpha < 1$ интервала (z_n, z_{n+1}) восстанавливается по аналитическим формулам:

$$\begin{cases} I_{n+\alpha}^+ = I_n^+ \frac{\sinh((1-\alpha)\tau_n)}{\sinh(\tau_n)} + I_{n+1}^+ \frac{\sinh(\tau_n)}{\sinh((1-\alpha)\tau_n)} + Q_n^+ \frac{1 - \cosh((\alpha - 1/2)\tau_n)}{\cosh(1/2 \cdot \tau_n)}, \\ I_{n+\alpha}^- = I_n^- \frac{\sinh((1-\alpha)\tau_n)}{\sinh(\tau_n)} + I_{n+1}^- \frac{\sinh(\tau_n)}{\sinh((1-\alpha)\tau_n)} + Q_n^- \frac{1 - \cosh((\alpha - 1/2)\tau_n)}{\cosh(1/2 \cdot \tau_n)}, \end{cases} \quad (14)$$

где $\tau_n = \sqrt{\tau_n^+ \tau_n^-}$.

Расчётная программа `Linear_solver.exe`

Программа проводит расчёт решения уравнения переноса (1) для всех групп энергий k в соответствии с итерационным алгоритмом из предыдущего пункта. После решения уравнения для очередной энергетической группы происходит прибавление результата работы программы в итоговые массивы:

$$\begin{aligned} U_{n,l} &= \sum_k I_{n,l}^+(E_{k-1}; E_k), & W_{n,l} &= \sum_k \mu_l I_{n,l}^-(E_{k-1}; E_k), \\ A_{n,l} &= \sum_k \varkappa^{ab}(z_n) \left(I^{Pl}(z_n) - I_{n,l}^+(E_{k-1}; E_k) \right). \end{aligned}$$

Представление дано для случая поточечного расчёта, аналогичные суммы имеют место и для лебеговского расчёта заменой индекса k на индекс q и энергии E на меру m .

Пройдя все энергии k , программа рассчитывает плотность $U(z_n)$, поток $W(z_n)$ и обменный член $\varkappa^{ab}(z_n)(U^{Pl}(z_n) - U(z_n))$ как интегралы от интенсивности излучения I по всем энергиям E и направлениям μ :

$$\begin{aligned} U(z_n) &= \int_{-1}^1 \int I(E, \mu, z_n) dE d\mu = 2 \int_0^1 \int I^+(E, \mu, z_n) dE d\mu = 2 \sum_l^L \int_E \gamma_l I^+(E, \mu_l, z_n) dE = \\ &= 2 \sum_l^L \sum_k \gamma_l I_{n,l}^+(E_{k-1}; E_k) = 2 \sum_l^L \gamma_l U_{n,l}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W(z_n) &= \int_{-1}^1 \int \mu I(E, \mu, z_n) dE d\mu = 2 \int_0^1 \int \mu I^-(E, \mu, z_n) dE d\mu = 2 \sum_l^L \int_E \gamma_l \mu_l I^-(E, \mu_l, z_n) dE = \\ &= 2 \sum_l^L \sum_k \gamma_l \mu_l I_{n,l}^-(E_{k-1}; E_k) = 2 \sum_l^L \gamma_l W_{n,l}. \end{aligned}$$

$$Q_{rm} \equiv \varkappa^{ab}(z_n)(U^{Pl}(z_n) - U(z_n)) = \sum_l^L \gamma_l A_{n,l}$$

Величины $U(z_n)$, $W(z_n)$ и Q_{rm} суть результат работы программы.

Для запуска программы необходимо использовать команду

`bin\Linear_Solver.exe ATM mlc.dat .\var\`

Здесь: **ATM** показывает, что рабочей папкой для программы является `..\results\ATM\`. В ней содержатся все начальные данные и здесь сохраняются результаты работы.

mlc.dat — показывает, что расчётная сетка по энергетической переменной содержится в файле `..\db\grids\mlc.dat`.

`.\var\` — указывает модификацию пути для чтения и сохранения данных (соответствует методу осреднения начальных данных и номеру носителя резонанса).

Дополнительным параметром можно дописать в конце **silence**. В этом случае программа не будет выводить данные на экран.

Содержание рабочей папки

В приведённом случае — `..\results\ATM\`:

1. Файл **atmosphere.inf** с информацией о рассчитываемой модели атмосферы [2].
2. Папка **Tau**, которая, в свою очередь, содержит вычисленные оптические толщины для программы [2].
3. Файл **transition.ini** с начальными данными программы.

Пример файла **transition.ini**:

[base]

ni=0.0 0.0 $\kappa_{in}^{(0)}$, $\kappa_{out}^{(0)}$ из граничных условий;
d=1.0 1.0 d_{in} , d_{out} из граничных условий;
border T=288.2 0.0 граничные температуры для вычисления I_{in}^{ext} , I_{out}^{ext} ;
L = 10 величина L , определяющая сетку по углам;
Addition Points=5 указатель досчёта решения в 5 промежуточных точках каждого слоя. Т.е. вычислить по формуле (14) значения для всех n и $\alpha = 1/6 \cdot \{1; 2; 3; 4; 5\}$.

4. Файл **ind.txt** с коэффициентами разложения индикатрисы рассеяния.
5. Папки **u**, **w**, **add** содержат результаты работы программы: плотность излучения, поток излучения и обменный член соответственно.

Алгоритм проведения расчётов

1. В директории **..\results** нужно создать для задачи папку (например — **Pr1**).
2. Далее подготавливаются файлы:
 - a. **atmosphere.inf** с моделью атмосферы;
 - b. **transition.ini** с коэффициентами граничных условий и параметрами задачи;
 - c. **ind.txt** с коэффициентами разложения индикатрис по полиномам Лежандра.
3. Подготавливаются коэффициенты полного поглощения.
4. Проводится расчёт переноса излучения.

Запуск программ

- для «line-by-line» расчёта

REN Расчёт line-by-line коэффициентов (пп. 3)

```
bin\prepare_koef.exe Pr1 "" mol.dat
```

REN Решение задачи (пп. 4)

```
bin\Linear_Solver.exe Pr1 mol.dat .\
```

- для лебеговского расчёта

REN Расчёт лебеговых коэффициентов (пп. 3)

```
bin\prepare_lebeg_koef_from_moesuar.exe Pr1 leb.dat mol.dat
```

REN Решение задачи (пп. 4)

```
bin\Linear_Solver.exe Pr1 mol.dat Lebeg\A_
```

REN Суммирование результатов

```
Summator ..\results\Pr1\U\Lebeg U_trans
```

```
Summator ..\results\Pr1\W\Lebeg w_tran
```

```
Summator ..\results\Pr1\add\Lebeg add
```

- метод быстрой сборки лебегового коэффициента

```

REN Расчёт лебеговых коэффициентов (пп. 3)
bin\prepare_lebeg_koef_from_bin.exe Pr1 1 leb.dat 1
bin\prepare_lebeg_koef_from_bin.exe Pr1 1 leb.dat 2
.....
bin\prepare_lebeg_koef_from_bin.exe Pr1 6 leb.dat 18

REN Решение уравнения переноса на каждом квантиле (пп 4)
bin\Linear_Solver.exe Pr1 mo1.dat Lebeg\1\1_
bin\Linear_Solver.exe Pr1 mo1.dat Lebeg\1\2_
.....
bin\Linear_Solver.exe Pr1 mo1.dat Lebeg\6\29_

REN Суммирование результатов
Summator ..\results\Pr1\U\Lebeg U_trans
Summator ..\results\Pr1\W\Lebeg W_tran
Summator ..\results\Pr1\add\Lebeg add

```

Результаты численных исследований

Спектральный line-by-line расчёт переноса излучения

Были подготовлены спектральные данные и проведён расчёт для теплового излучения в зимней субарктической атмосфере (Latitude 60) [14].

На *Рис. 1* представлена чётная часть спектральной интенсивности излучения $I^+(E)$ для направления $\mu \approx 0.68$ у поверхности земли $z = 0$ км. На участках спектра вблизи центров линий, где коэффициент поглощения/испускания излучения велик, чётная интенсивность должна приближаться к планковскому распределению с локальной температурой земли и приповерхностного слоя атмосферы (они одинаковы). В окнах прозрачности, где коэффициент поглощения/испускания излучения мал, она должна приближаться к половине планковского распределения. Первая часть распределения формируется поверхностью твердой земли, и она одинакова для всех участков спектра. Вторая часть — формируется атмосферными газами. В окнах прозрачности вторая часть равна нулю. *Рис. 1* демонстрирует изменение чётной интенсивности излучения между двумя этими пределами.

На *Рис. 2* представлена та же чётная часть спектральной интенсивности излучения, но на высоте 3.8 км. Сравнение *Рис. 1* и *Рис. 2* показывает значительную перестройку интенсивности излучения в интервале спектра от 0 до 400[cm^{-1}]. Это связано с тем, что основная масса водяного пара, определяющего поглощение/испускание излучения в этом диапазоне энергий, расположена в слое до 2км. Поэтому около поверхности земли интенсивность совпадает с

планковской функцией, а с увеличением высоты начинает проявляться линейчатая структура интенсивности.

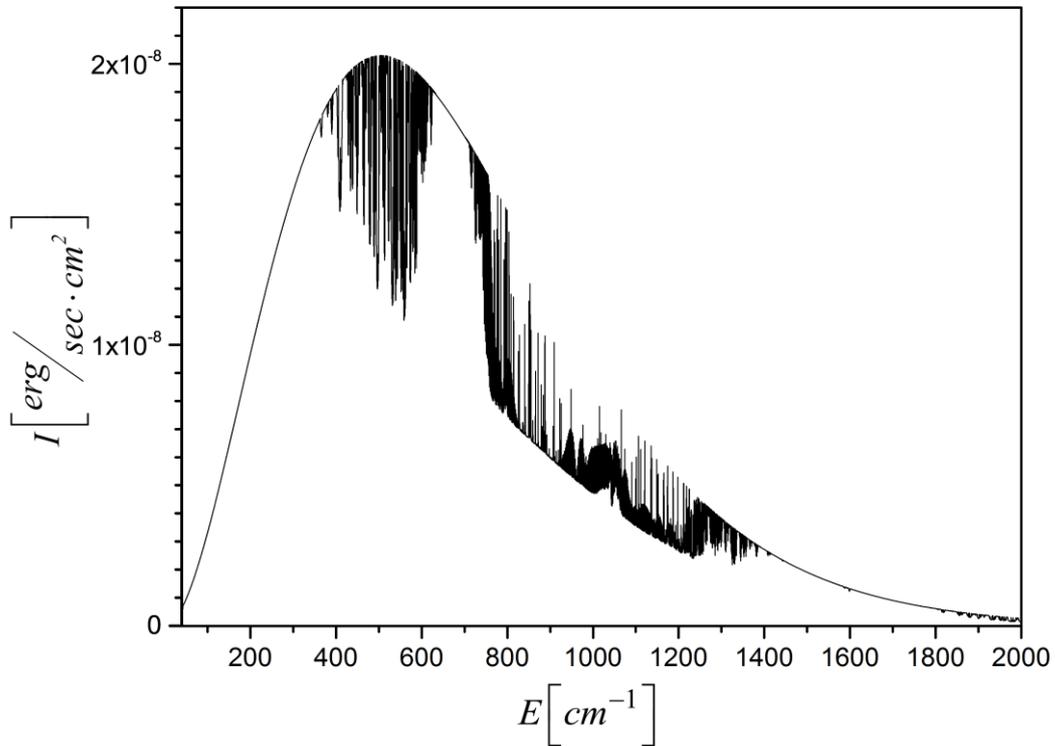


Рис. 1. Чётная интенсивность $I^+(E)$ у поверхности земли для $\mu \approx 0.68$.

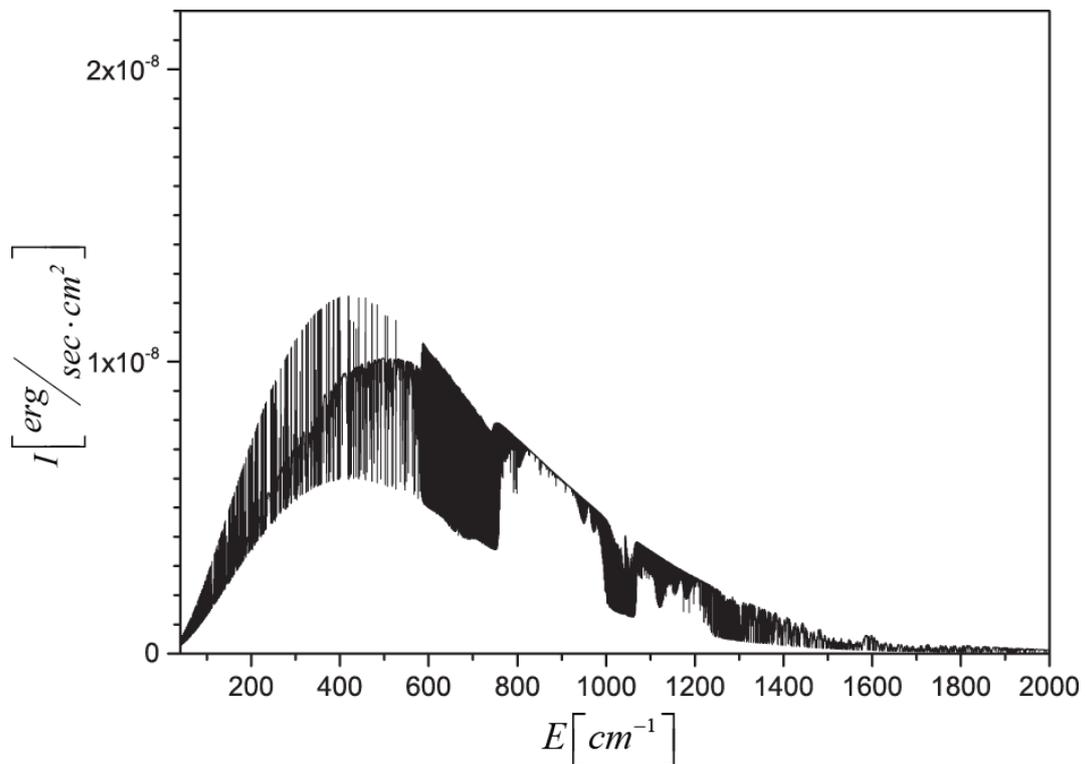


Рис. 2. Чётная интенсивность излучения $I^+(E)$ на высоте 3.8 км для $\mu \approx 0.68$.

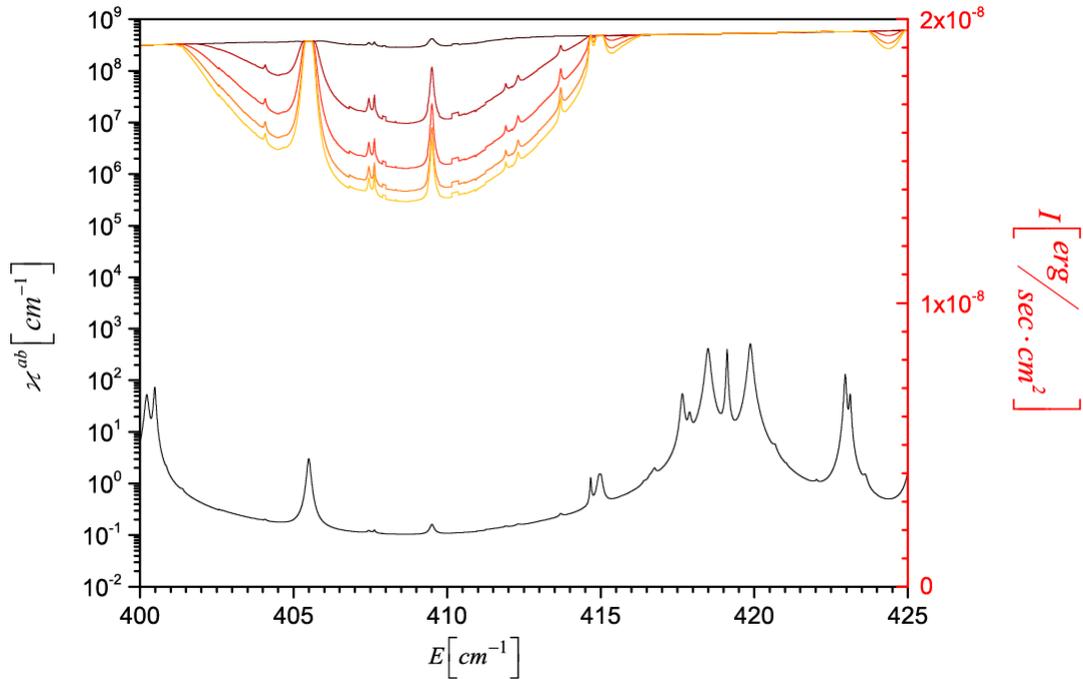


Рис. 3. Чётная интенсивность излучения $I^+(E)$ у поверхности земли (правая шкала) при разных μ (разных оптических толщинах атмосферы). Внизу приведен график оптической толщины нижнего полукилометрового слоя атмосферы в зенитном направлении (левая шкала).

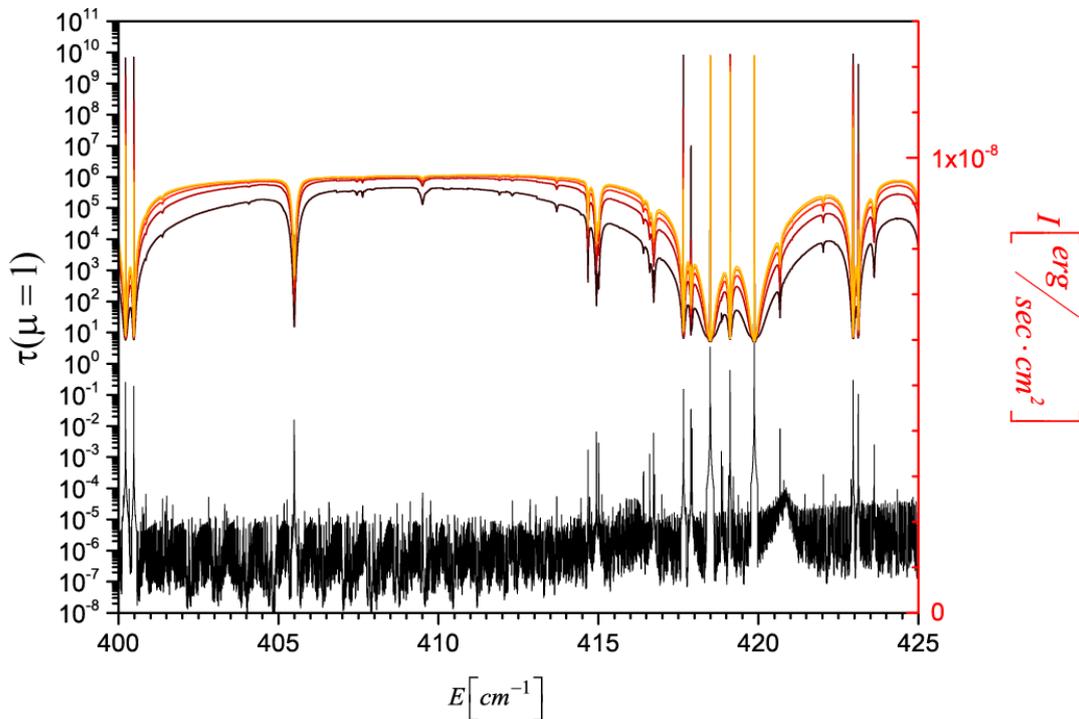


Рис. 4. Чётная интенсивность излучения $I^+(E)$ на высоте 3.8 км (правая шкала) при разных μ (разных оптических толщинах атмосферы). Внизу приведен график оптической толщины слоя атмосферы от 3 до 4 км в зенитном направлении (левая шкала).

На *Рис. 3* также представлена чётная часть спектральной интенсивности излучения у поверхности земли $z = 0$ км при разных « μ », т.е. разных оптических толщинах атмосферы. При $\mu = 1$ (направление зенита) оптическая толщина атмосферы минимальна. При $\mu \rightarrow 0$ оптическая толщина атмосферы стремится к бесконечности. Более тёмные линии соответствуют большим оптическим толщинам (меньшим значениям μ). Внизу рисунка для справки представлена оптическая толщина нижнего полукилометрового слоя атмосферы в зенитном направлении $\mu = 1$. Кривые демонстрируют тот факт, что оптическая толщина порядка единицы является границей, которая делит спектр на спектр оптически толстого и спектр оптически тонкого тела.

На *Рис. 4* представлены те же данные на высоте 3.8 км. Сравнение с *Рис. 3* показывает существенное изменение ширины сильных линий в коэффициенте поглощения и проявление слабых линий с высотой. Из рисунка видно, что излучение верхних слоёв атмосферы приходит только в ядрах линий. В крыльях атмосфера прозрачна.

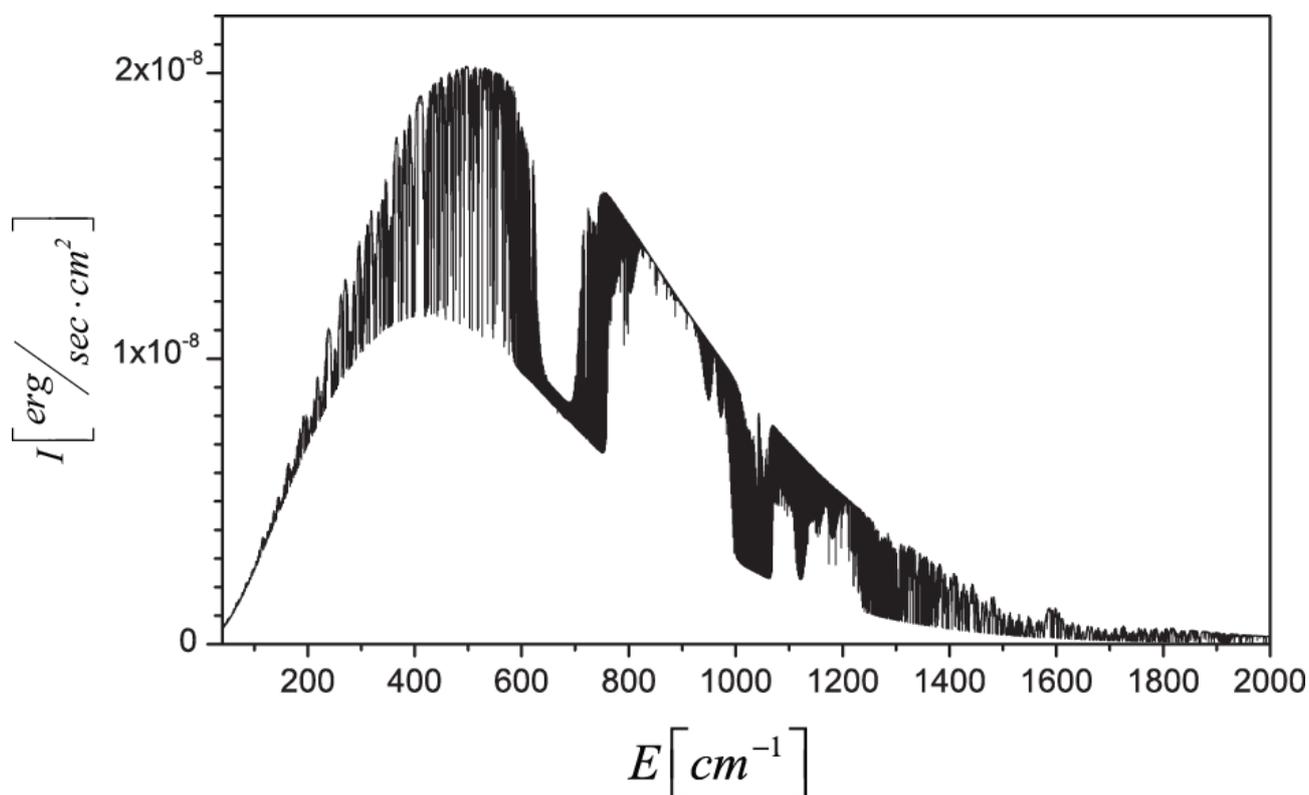


Рис. 5. Интенсивность излучения $I(\mu, z)$ для $\mu \approx 0.68$ на высоте $z = 3.8$ км.

На *Рис. 5* и *Рис. 6* представлены полная интенсивность $I = I^+ + I^-$ для угла $\mu \approx 0.68$ на высоте $z = 3.8$ км и оптическая толщина слоя атмосферы в зенитном направлении.

Для положительных направлений μ наибольшее поглощение происходит также в центре линий, в которых оптическая толщина больше некоторого пре-

дельного значения. Если Рис. 4 увеличить до разрешения отдельной линии, то можно увидеть, что максимальное значение интенсивности для всех отрицательных направлений μ одинаково и определяется локальной планковской функцией. Для различных направлений μ ширина пика интенсивности тем выше, чем ближе направление к горизонтالي.

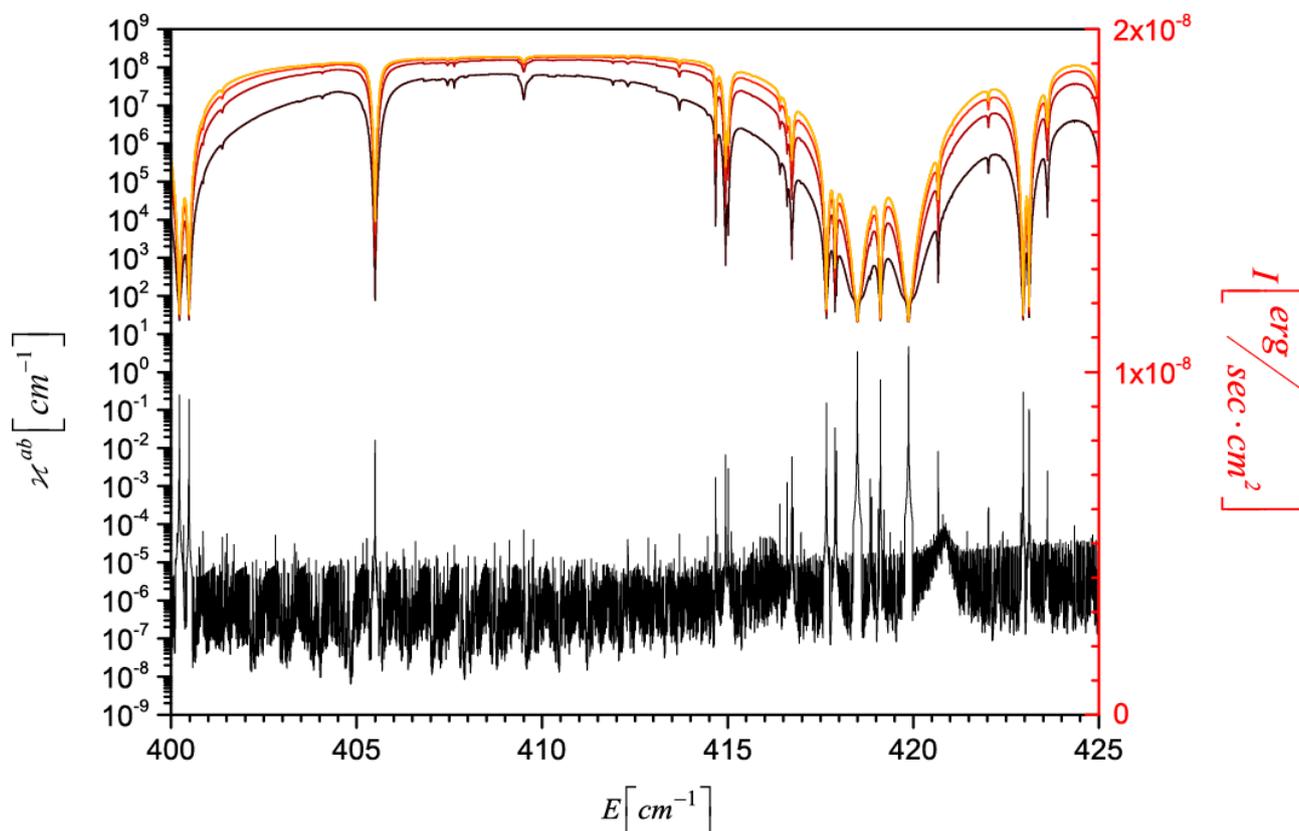


Рис. 6. Интенсивность излучения I на высоте 3.8 км (правая шкала) при разных μ (разных оптических толщинах атмосферы). Внизу приведен график оптической толщины слоя атмосферы от 3 до 4 км в зенитном направлении (левая шкала).

Тестирование метода лебеговского осреднения

Тестирование метода лебеговского осреднения ранее проводилось в работах [15–17]. Данное исследование отличается тем, что все расчёты, включая «опорный» (line-by-line) расчёт детального спектра излучения (с ним производилось сравнение) были выполнены с помощью одного транспортного кода, использующего одну и ту же схему пространственно-угловой дискретизации кинетического уравнения. Это обеспечило чистоту сравнения, т.к. исключило все посторонние факторы, которые могут влиять на результаты и конечные выводы о точности метода лебеговского осреднения спектров излучения.

Расчётные варианты отличались способом дискретизации кинетического уравнения по энергетической переменной (см. Таблицу 1).

Таблица 1. Варианты расчётов с различным способом дискретизации кинетического уравнения по переменной спектра

Название варианта	Независимая дискретная переменная спектра
Опорный поточечный расчёт спектра излучения	Энергия фотона
Метод лебеговского осреднения с k-распределением	Величина коэффициента поглощения
Метод лебеговского осреднения с мерой лебегова множества	Мера лебегова множества

Первый вариант — поточечный спектральный расчёт; второй — расчёт с коэффициентами, подготовленными подобно методу k-distribution, который отличается от метода лебеговского осреднения тем, что в качестве независимой переменной выбирается не мера, а нормированная величина коэффициента поглощения; вариант три есть расчёт с коэффициентами, подготовленными для метода лебеговского осреднения.

Результаты расчётов представлены на *Рис. 7* (плотность энергии излучения, умноженная на скорость света) и на *Рис. 8* (поток лучистой энергии в зависимости от высоты над землей).

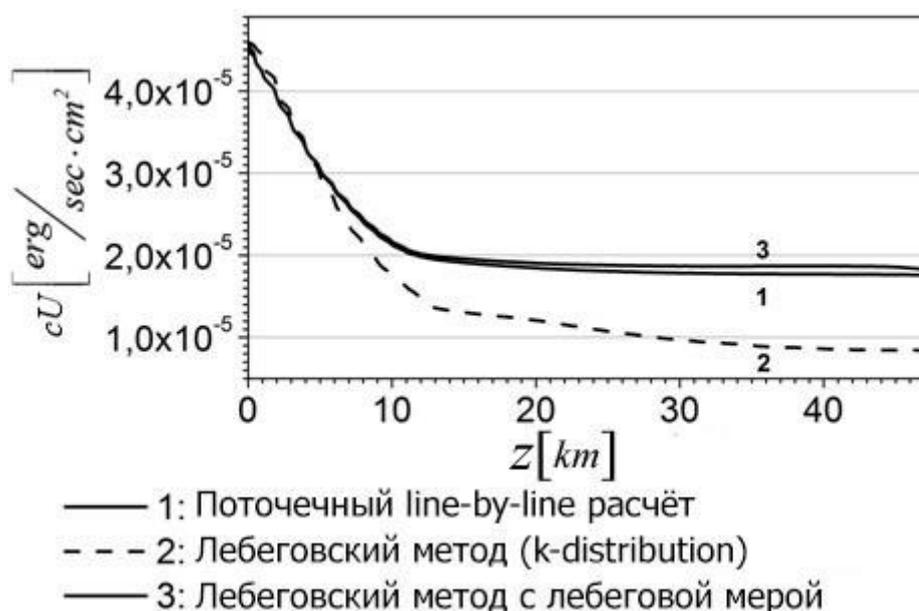


Рис. 7. Распределение плотности энергии излучения с высотой в трёх приближениях учёта зависимости решения по энергии.

Графики показывают незначительное отличие результатов варианта 3 от результатов прецизионного варианта 1. Максимальная относительная погрешность не превышает 5%. В то же время результаты варианта 2 заметно отличаются от точного решения. Это связано с тем, что данный вариант плохо учиты-

вает эффекты изменения границ лебеговых множеств с высотой атмосферы. Погрешности возрастают в верхних слоях атмосферы, где линии поглощения имеют узкий профиль.

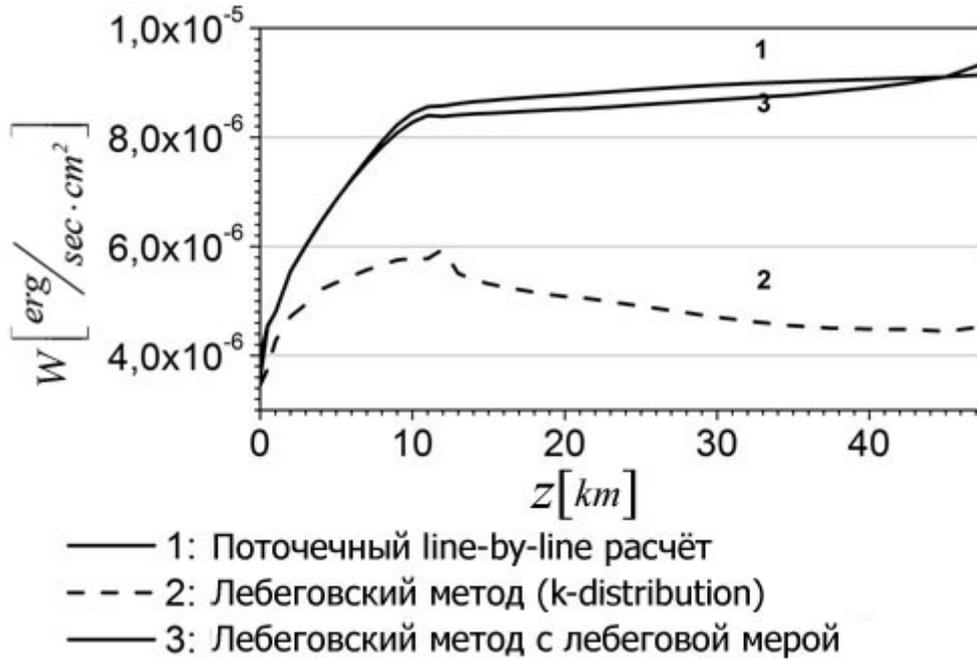


Рис. 8. Распределение потока лучистой энергии с высотой в трёх приближениях учёта зависимости решения по энергии.

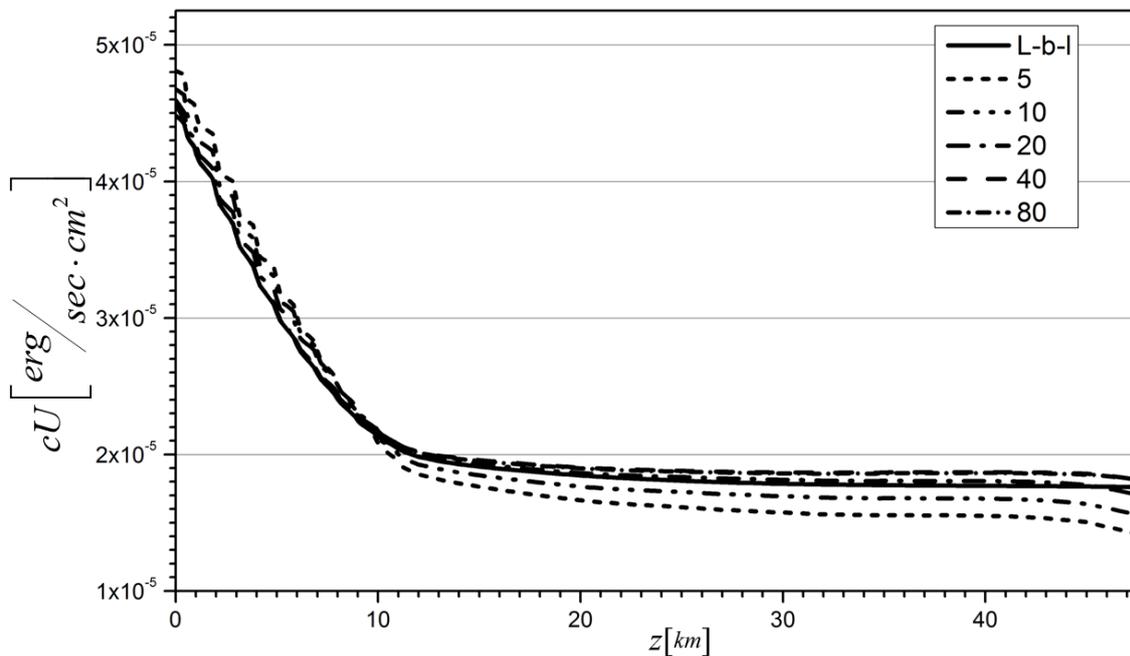


Рис. 9. Сходимость расчётов методом лебеговского осреднения в сравнении с line-by-line (l-b-l) расчётом. Кривые демонстрируют распределение плотности лучистой энергии по высоте атмосферы в расчётах, использующих 5, 10, 20, 40 и 80 узлов по лебеговой переменной.

Для тестирования сходимости метода лебеговского осреднения по сетке были проведены расчёты с 5, 10, 20, 40 и 80 узлами на сетке по лебеговой переменной. Результаты расчётов изображены на *Рис. 9*, где показывается, насколько каждый из них отличается от опорного (line-by-line) расчёта. Графики расчётов с 40 и 80 узлами сливаются в одну кривую.

Тестирование точности методик быстрой сборки констант

Тестирование различных вариантов быстрой методики сборки лебеговых коэффициентов проводилось на двух группах расчётов. В первой группе расчётная и опорная модели атмосфер совпадали. Исследовались только погрешности, вносимые упрощениями, допускаемыми при быстрой сборке лебеговых коэффициентов. Во второй группе расчётов тестировалась универсальность методик. Проводилось сравнение распределения атмосферной радиации в некоторой пробной атмосфере с оптическими константами, подготовленными на основе опорной атмосферы и их интерполяции.

Для тестирования упрощённых методик были проведены следующие расчёты для высотных профилей температуры, давления и концентраций газов из стандартной среднегодовой «U.S. Standard Atmosphere».

Методика «1» («точная» лебеговская методика). Лебеговы коэффициенты берутся непосредственно из базы данных коэффициентов, подготовленной для данной модели атмосферы.

Методика «2». Упрощённая методика подготовки и использования лебеговых коэффициентов (быстрая сборка коэффициентов из базы данных лебеговых молекулярных сечений, подготовленных для серии опорных атмосфер). Источником неточностей при совпадении расчётной и опорной атмосферы является качество разбиения шкалы энергий на носители резонансов. В [2] было введено понятие качества разбиения на носители резонансов (формула (5)). В представленном расчёте оно составляло немногим более 98%.

Методика «3». Модификация методики «2» в части разбиения на носители резонансов. Было введено три эффективных газа в соответствии с высотным распределением концентраций (*Рис. 10*): 1 — CO_2 -подобные, 2 — H_2O -подобные, 3 — O_3 -подобные. Качество разбиения на носители резонансов составило 99.1% при совпадении опорной и расчётной атмосфер. На следующий этап уже используются реальные газы со своими характеристиками, а не эффективные. Этапы получения коэффициента и построения носителей резонанса выполняются в точности, как в методике «2».

Методика «4». Модификация методики «2» в части упрощения процедуры построения лебеговых множеств. Носители резонансов строятся, как в методике «2». В качестве коэффициента для построения лебеговых множеств на носителе резонансов используется молекулярное сечение порождающего газа (а не суммарный коэффициент некоторой опорной атмосферы). При этом для фор-

мирования окончательного лебегового коэффициента поглощения используются все атмосферные газы.

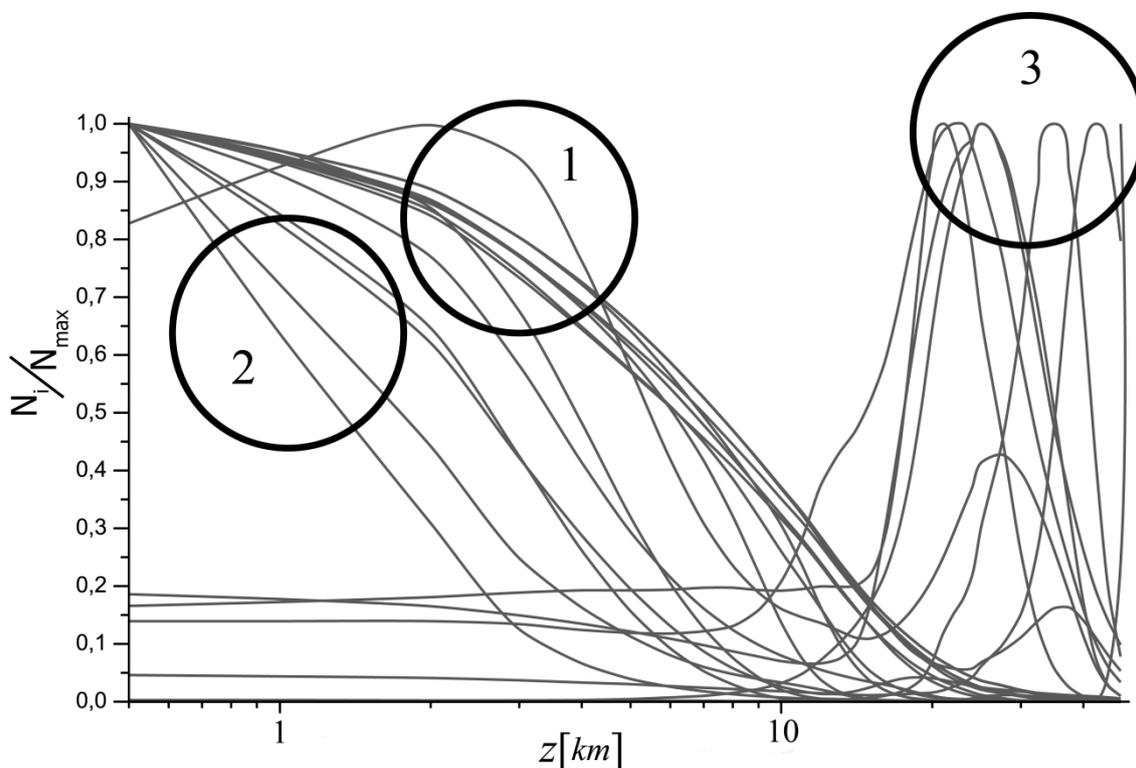


Рис. 10. Изменение концентраций атмосферных газов с высотой в отношении к максимальному значению для «U.S. Standard Atmosphere».

Результаты расчётов 1) — 4) приведены на *Рис. 11*. Видно, что результат 3-го расчёта с введением трёх эффективных газов оказался ближе всего к расчёту 1 при совпадении опорной и расчётной атмосфер, а расчёт 4 с неточным построением лебеговых множеств — наименее точный. Отметим, что второй вариант требует наименьшей квалификации пользователя при использовании базы данных. Максимальные отличия расчётов 2) — 4) от расчёта 1 составляют: 4%, для расчёта 2; 2.5% — для третьего; 8% — для четвертого.

Методика подготовки лебеговых коэффициентов (см. тестирование лебеговского осреднения) несколько завышала решение кинетической задачи в пределах $\approx 5\%$ (в сравнении с точным «line-by-line» решением) в высоких слоях атмосферы (при малом давлении). «Быстрые», упрощённые методики подготовки лебеговых коэффициентов, наоборот, «занижают» решение в верхних слоях атмосферы примерно на ту же величину. В ряде случаев они лежат даже ближе к точному результату.

Дальнейшее тестирование проводилось для ситуации различных опорной и расчётной атмосфер. В качестве расчётной атмосферы была взята «Sub-Arctic Winter (60N Jan)» [15], а опорная атмосфера была сохранена из предыдущего расчёта. На *Рис. 12* приведён график изменения концентраций газов по отно-

шению к максимальному. Одинаковым образом промаркированы концентрации газов, входящих в одну эффективную группу в опорной атмосфере (сплошная — H_2O -подобные, точки — CO_2 -подобные, пунктирная — O_3 -подобные). Видно, что подобие распределения газов каждой группы по высоте практически утеряно.

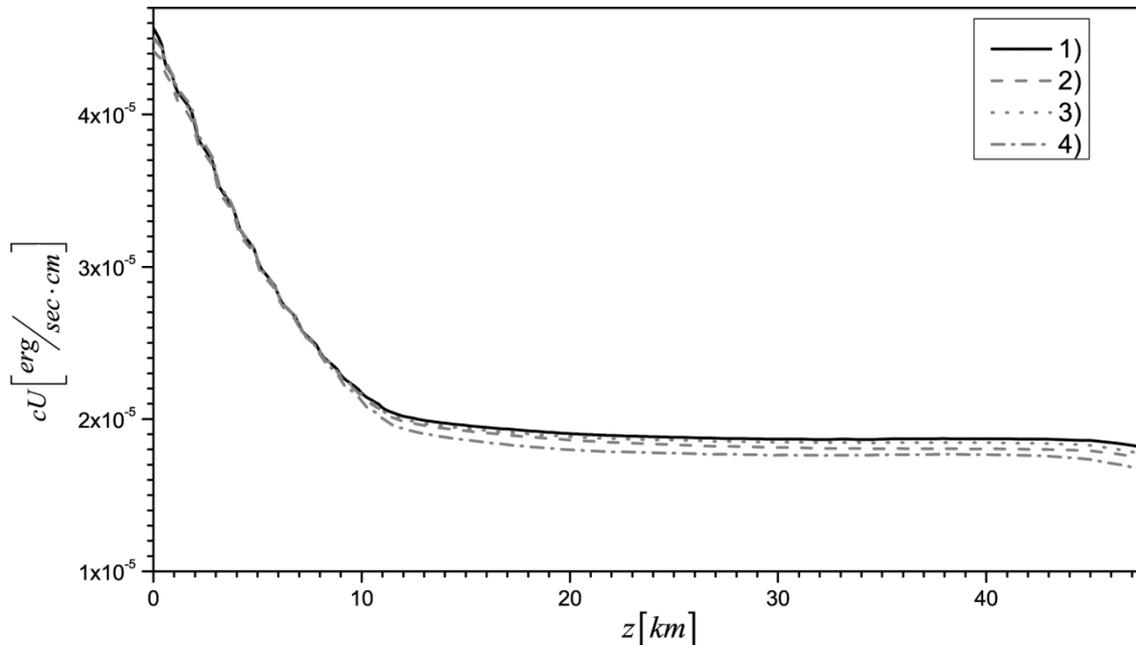


Рис. 11. Результаты расчёта плотности излучения, полученные при использовании разных методик подготовки данных.

На Рис. 13 представлены результаты расчётов тех же четырёх вариантов для плотности теплового излучения. Был проведён полный комплекс расчётов по точной схеме лебеговского осреднения. Для трёх упрощённых расчётов были использованы базы данных, построенные до этого для опорной атмосферы «U.S. Standard Atmosphere»[15]. В данном случае использована следующая маркировка расчётов: **precise lebeg** — лебеговский расчёт по точной схеме; **lebeg from dbP** (P=2, 3, 4) — лебеговский расчёт, соответствующий использованию упрощённой базы данных из расчёта номер P для опорной атмосферы.

Видно, что базы данных, построенные для 2-го и 4-го расчётов, позволяют получить достаточно точные результаты расчёта переноса излучения при сильном отличии опорной атмосферы от расчётной. А вот результаты расчёта на основании базы данных, построенной для проведения расчёта 3), дала результаты намного хуже.

Таким образом, можно сделать вывод, что хотя построение носителей резонансов по трём эффективным газам даёт наилучший результат при совпадении опорной и расчётной атмосфер, эта упрощённая методика «3» наименее универсальна. Она оказалась чувствительной к смене расчётной модели атмосферы. Наибольшую универсальность показали методики «2» и «4». Напомним, что методика «2» обеспечивает наиболее точный учёт высотных изменений

концентраций газов при фиксированной структуре лебеговых множеств, построенных для некоторой опорной атмосферы. Она же является и наиболее «дружественной» при использовании неподготовленным пользователем.

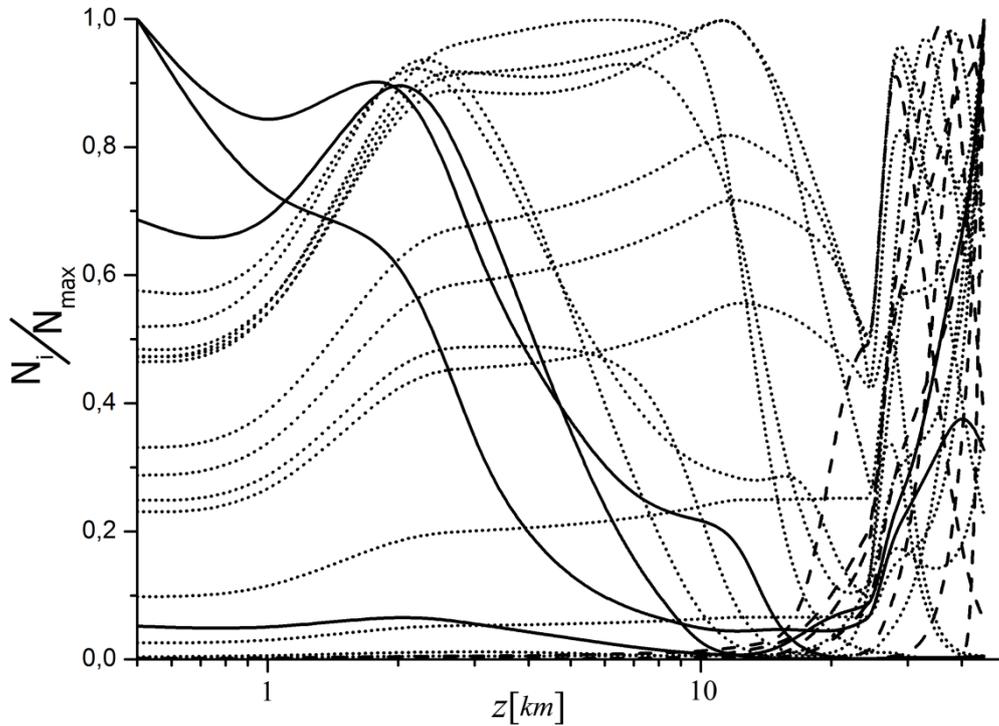


Рис. 12. Изменение концентраций атмосферных газов по отношению к максимальному значению с высотой «Sub-Arctic Winter (60N Jan)».

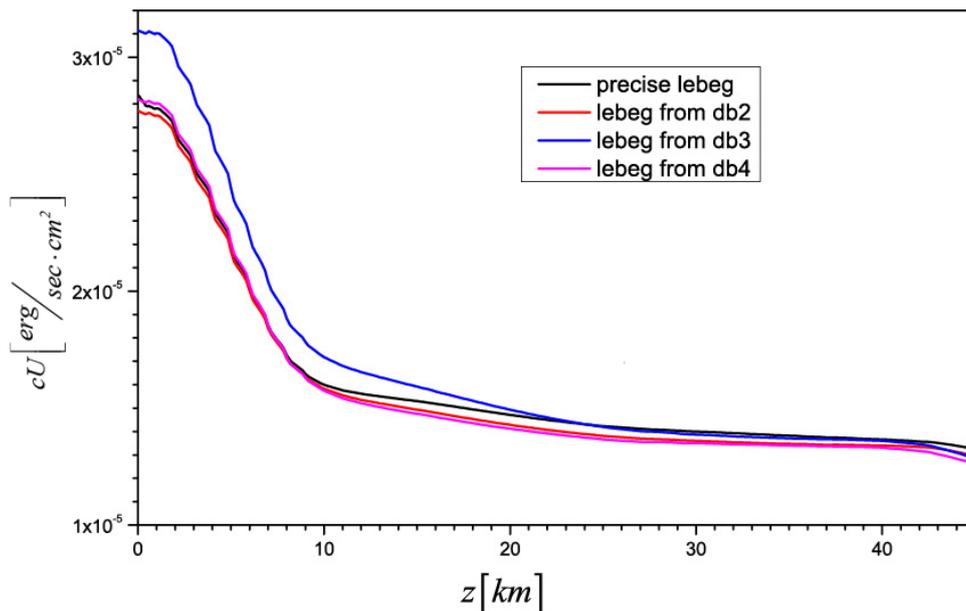


Рис. 13. Расчёт плотности излучения в «Sub-Arctic Winter (60N Jan)» при точной методике и при быстрой сборке оптических данных из базы данных лебеговых сечений.

Выводы

В работе приводятся результаты ряда расчётов переноса теплового излучения в атмосфере Земли поточечным методом и методом лебеговского осреднения. Результаты позволили протестировать как метод лебеговского осреднения, так и процедуру быстрой сборки лебеговых коэффициентов. Показано:

1. точность результатов метода лебеговского осреднения не превышает 5% для более 40 точек по лебеговой переменной;
2. сходимость метода лебеговского осреднения по сетке (40 точек достаточно для проведения расчётов);
3. процедура быстрой сборки лебеговых коэффициентов существенно ускоряет процедуру подготовки данных, при этом незначительно изменяет результаты расчётов;
4. среднегодовая атмосфера может выполнять функцию универсальной опорной атмосферы для проведения серийных расчётов переноса атмосферной радиации в атмосфере Земли.

Литература

- [1] Герцев М.Н. Восстановление сечений молекулярного поглощения излучения из базы данных HITRAN // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2016. №19. 22с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2016-19>
- [2] Герцев М.Н., Шильков А.В. Подготовка оптических констант для поточечных и лебеговских расчётов атмосферной радиации // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2016. №31. 24с.
doi:10.20948/prepr-2016-31
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2016-31>
- [3] Rothman L.S., et al. The HITRAN 2008 molecular spectroscopic database // JQSRT 110, 533-572 (2009).
- [4] Цветкова И.Л., Шильков А.В. Осреднение уравнения переноса в резонансно поглощающей среде. // Матем. моделирование, 1989, т.1, №1, с.91-100.
- [5] Шильков А.В. Методы осреднения сечений и энергетического спектра в задачах переноса нейтронов // Матем. моделирование, 1991, т.3, №2, с.63-81.
- [6] Shil'kov A.V. Generalized Multigroup Approximation and Lebesgue Averaging Method in Particle Transport Problems. // Transp. Theory and Stat. Physics. 1994, v.23, No 6, p.781-814.
- [7] Шильков А.В., Цветкова И.Л., Шилькова С.В. Система ATRAD для расчётов атмосферной радиации: лебеговское осреднение спектров и сечений поглощения // Матем. моделирование, 1997, т.9, № 6, с.3–24.
- [8] Шильков А.В. Чётно-нечётные кинетические уравнения переноса частиц. 1: Алгебраическая и центрированная формы интеграла рассеяния // Матем. моделирование, 2014 **26**:3, с.75–96
- [9] Шильков А.В., Чётно-нечётные кинетические уравнения переноса частиц. 2: Конечно-аналитическая характеристическая схема для одномерных задач // Матем. моделирование, 2014 **26**:7, с.33–53
- [10] Тихонов А.И., Самарский А.А. Уравнение математической физики, М: Наука, 1972, 763 с.
- [11] Федоренко Р.П. Введение в вычислительную физику, М: МФТИ, 1994
- [12] Гольдин В.Я. Квазидиффузный метод решения кинетического уравнения // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1964 **4**:6, с.1078–1087.
- [13] Аристова Е.Н. моделирование взаимодействия излучения с веществом. Применение метода квазидиффузии. Изд-во Lambert, Academic Publishing Saarbrucken, 2011, 297 стр.
- [14] Можейко С.В., Цветкова И.Л., Шильков А.В. Расчёт переноса излучения в горячем воздухе // Матем. моделирование, 1992, т.4, №1, с. 65–82;
- [15] McClatchey R.A., Benedict W.S., Clough S.A., Burch D.E., Calfee R.F., Fox K., Rothman L.S., Garing J.S. AFCRL atmospheric absorption line param-

ters compilation. Air Force Cambridge Research Lab, 1973, Techn. Rep. AFCRLTR-0096, 87 p.

- [16] Шильков А.В., Шилькова С.В. Система ATRAD для расчётов атмосферной радиации: расчёты переноса теплового излучения для безоблачной летней атмосферы средних широт // Матем. моделирование, 1999, т.11, №1, с.18–24.
- [17] Аристова Е.Н., Гольдин В.Я., Шильков А.В., Шилькова С.В. Система ATRAD для расчётов атмосферной радиации: расчёты переноса солнечного излучения для летней атмосферы средних широт // Матем. моделирование, 1999, т.11, №5, с.117–125.

Оглавление

Введение	3
Схема численного решения	5
Расчётная программа <code>Linear_Solver.exe</code>	11
Алгоритм проведения расчётов	13
Результаты численных исследований	14
Спектральный line-by-line расчёт переноса излучения	14
Тестирование метода лебеговского осреднения	18
Тестирование точности методик быстрой сборки констант	21
Выводы	25
Литература	26