



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 45 за 2016 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Гурылева Н.В., Иванькин М.А.,
Лاپинский Д.А., [Мартынов А.А.](#),
[Медведев С.Ю.](#), Терешин А.М.

Расчеты сверхзвукового
обтекания клинообразных
перегородок в канале

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Расчеты сверхзвукового обтекания клинообразных перегородок в канале / Н.В.Гурылева [и др.] // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2016. № 45. 18 с. doi:[10.20948/prepr-2016-45](https://doi.org/10.20948/prepr-2016-45)
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2016-45>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Российской академии наук**

**Н.В.Гурылева, М.А.Иванькин, Д.А.Лапинский,
А.А.Мартынов, С.Ю.Медведев, А.М.Терешин**

**Расчеты сверхзвукового обтекания
клинообразных перегородок в канале**

Москва — 2016

*Гурылева Н.В., Иванькин М.А., Лапинский Д.А., Мартынов А.А.,
Медведев С.Ю., Терешин А.М.*

**Расчеты сверхзвукового обтекания клинообразных перегородок
в канале**

Проведено численное моделирование физических экспериментов (ЦАГИ) со сверхзвуковым течением без горения в двойном канале прямоугольного сечения, разделенном на две части внутренней пластиной с переменной геометрией. В рамках двумерного плоского приближения использован пакет программ для газодинамических расчетов OpenFOAM с различными моделями турбулентности. Обсуждается возможность существования нескольких численных решений стационарной задачи.

Ключевые слова: прямооточный двигатель, уравнения Навье-Стокса, турбулентные течения, математическое моделирование, OpenFOAM

*Natalia Valerievna Guryleva, Mikhail Anatolievich Ivan'kin, Dmitrii
Alexandrovich Lapinskii, Alexander Alexandrovich Martynov, Sergei Yur'evich
Medvedev, Alexander Mikhailovich Tereshin*

Calculations of supersonic flow past wedge-shaped plates in a channel

A numerical simulation of the physical experiments (TSAGI) for supersonic flow without combustion in a rectangular channel with an inner plate of variable geometry was performed. In frame of two-dimensional planar approximation software package OpenFOAM was used for gas-dynamic calculations with various turbulence models. The possibility of multiple numerical solutions of the stationary problem is discussed.

Key words: scramjet, Navier-Stokes equations, turbulent flows, mathematical modeling, OpenFOAM

Введение

Увеличение скорости летательных аппаратов до гиперзвукового уровня требует разработки прямоточных воздушно-реактивных двигателей (ПВРД). Их отличительной особенностью является движение газа в тракте двигателя со сверхзвуковыми скоростями. Сложное сочетание процессов динамики вязкого сжимаемого газа и горения – непростой объект для математического моделирования.

Необходимыми условиями для успешного применения численных методов расчета параметров течений вязкого сжимаемого газа и оптимизации соответствующих двигательных установок являются верификация и валидация применяемых вычислительных кодов. Верификация, то есть проверка соответствия результатов численных расчетов предсказаниям математической модели, во многом упрощается при использовании многократно и последовательно опробованных пакетов программ для газодинамических расчетов, таких как OpenFOAM (Open source Field Operation And Manipulation, <http://www.opencfd.co.uk/>, см. также The OpenFOAM® Foundation, <http://www.openfoam.org/index.php>). С другой стороны, выбор подходящей математической модели, удовлетворительно описывающей физический эксперимент, то есть валидация, остается актуальной задачей, особенно в экстремальных условиях гиперзвуковых многокомпонентных высокотемпературных течений с горением. Применение пакета OpenFOAM обеспечивает доступ к различным моделям вязких течений, включая выбор модели турбулентности и моделей реагирующих многокомпонентных течений.

Таким образом, проведение проверочных расчетов, позволяющих оценить точность описания течения при помощи газодинамических расчетов, является необходимым этапом математического моделирования.

Также в данной работе приведены результаты физических экспериментов со сверхзвуковым течением без горения в канале прямоугольного сечения, разделенном на две части внутренней пластиной различной геометрии. Представлена серия расчетов, относящихся к математическому моделированию физического эксперимента. Так как рассматривалось течение без горения, в расчетах допустимо двумерное плоское приближение. Роль трехмерных эффектов возрастает при переходе к реальной переменной геометрии канала при впрыске и горении топлива.

Расчетные исследования в ИПМ им. М.В. Келдыша РАН проводились на многопроцессорном суперкомпьютерном комплексе К-100. Экспериментальные исследования проведены в ФГУП ЦАГИ им. проф. Н.Е. Жуковского.

1. Описание экспериментальной модели

Экспериментальные исследования проведены в АДТ ЦАГИ (Рис.1) в диапазоне чисел Маха $M = 2-3$ на модели, представляющей собой плоский прямоугольный канал (соотношение сторон $b/h = 36/40$, длина $L = 200$ мм) с острыми передними кромками. Для визуализации структуры течения канал оснащен прозрачными боковыми стенками. К боковым стенкам канала крепится продольная разделительная перегородка (толщина 5 мм, угол раствора входной кромки – 15°) различных типов. Передняя кромка перегородки располагалась в плоскости входной кромки канала.

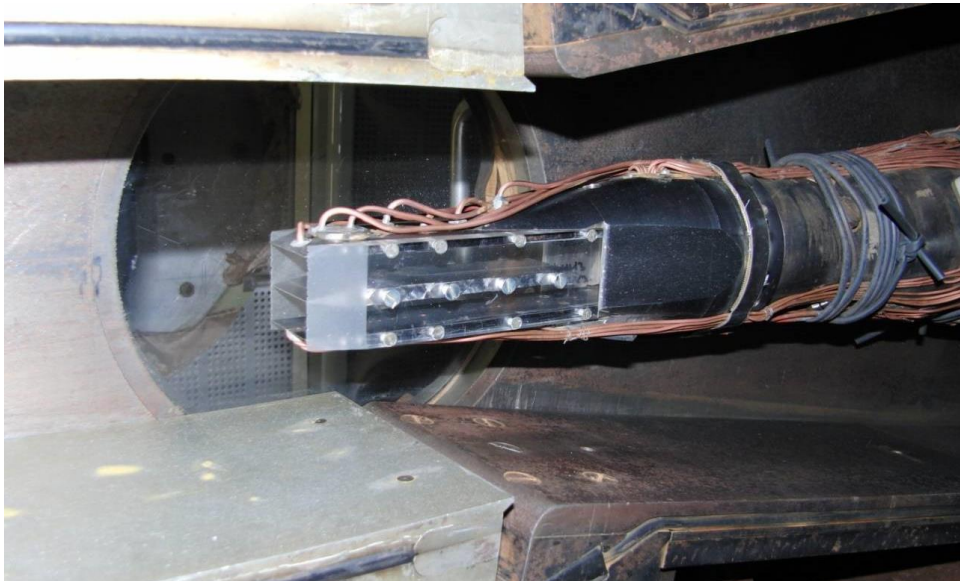


Рис. 1. Модель в рабочей части АДТ ЦАГИ.

Проводилось измерение распределения статического давления в продольном направлении датчиками статического давления, расположенными на верхней и нижней стенках канала. Поля полных давлений в глубине канала фиксируются при помощи гребенки датчиков полного давления.

Рассмотрены различные варианты горизонтальных разделительных перегородок: протяженная перегородка, установленная на всю длину прямоугольного канала и разделяющая исходный канал на два канала различной высоты, две коротких продольных перегородки, расположенные последовательно с разрывом.

Для перемещения псевдоскачка вверх по потоку проводилось дросселирование канала модели механическим дросселем. Однако в данной работе приведены лишь результаты для режимов с полностью открытым дросселем.

В процессе испытаний осуществлялось визуальное наблюдение за картиной течения через прозрачные боковые стенки канала. Видимая в окно

прибора Теплера картина течения (Рис.2) фиксировалась при помощи видеокамеры.

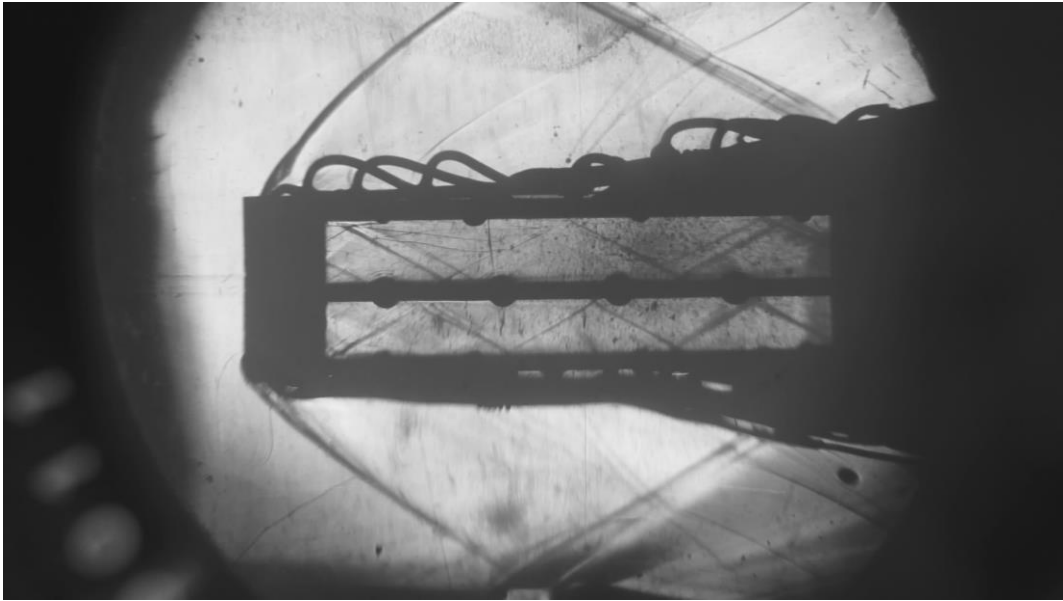


Рис. 2. Теневая картина течения для модели со сплошной разделительной перегородкой, наблюдаемая в прибор Теплера. $M=2.7$, без дросселирования (полностью открытый дроссель).

2. Валидационные расчеты элементов ПВРД

В эксперименте поток воздуха комнатной температуры с начальной скоростью $M=2.7$ продувает канал прямоугольного сечения с перегородкой, которая представляет собой одинарную или двойную пластину. Проницаемая перегородка (Рис.3) является более сложной геометрией, требующей трехмерного описания. Рассматривается самый простой случай со свободным потоком без дросселирования на выходе из канала.

Известны полное давление p_{total} и число Маха M на входе в канал. Для задания начальных условий для статического давления используется соотношение (1) с $\gamma=1.4$:

$$p_{total} = p_{static} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}. \quad (1)$$

В ходе эксперимента измеряется статическое давление на нижней и верхней стенке канала, а также полное давление при помощи «гребенки» на выходе ($X=0,2m$). Для определения связи статического давления с полным давлением за ударной волной перед трубкой Пито воспользуемся соотношением Релея (Rayleigh Pitot Relation):

$$p_{total\ RPR} = p_{static} \left(\frac{\gamma+1}{2} M^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} / \left(\frac{2\gamma}{\gamma+1} M^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}. \quad (2)$$

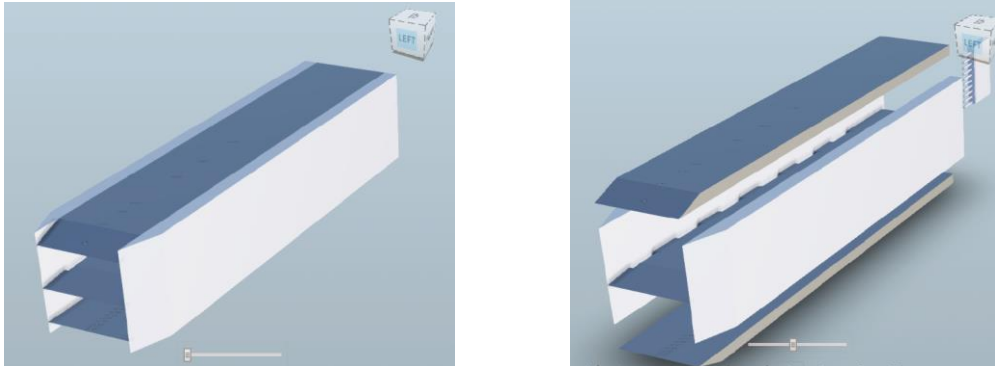


Рис. 3. Геометрия канала с перегородкой. Показан случай проницаемой одинарной перегородки: а) общий вид б) элементы канала, включая «ребенку» с трубками Пито для измерения полного давления.

Для расчетов использовались блочно-структурные сетки, построенные при помощи утилиты blockMesh из OpenFOAM с числом четырехугольных ячеек N от 40К до 800К. Сетки были сгущены к стенкам с условием прилипания (верхняя и нижняя стенки, перегородки) так, что на подробных сетках нормированное расстояние от первой точки сетки до вязкой границы $y^+ = y/l_w$, $l_w = \nu/u_\tau$ в среднем составляет 10 (оценка при помощи утилиты YplusRAS), что позволяет использовать приближенное решение в турбулентном пограничном слое (wall functions).

Численные эксперименты показали значительное преимущество солвера sonicFoam, основанного на PISO/SIMPLE/PIMPLE алгоритмах (итерации давление/скорость) [1] для расчета сжимаемых гиперзвуковых течений, над солвером rhoCentralFoam, реализующим так называемые «центрально-противопотоковые» схемы [2,3], в точности расчетов. По этой причине различные варианты моделей турбулентности были применены в расчетах с sonicFoam. Для модели турбулентности kOmegaSST во входном сечении было выбрано $k=1000 \text{ м}^2/\text{сек}^2$ – кинетическая энергия турбулентности, $\omega=2,6 \text{ сек}^{-1}$ – удельная скорость диссипации. Сравнение результатов расчетов с экспериментальными данными [4] показано на Рис.4 и Рис.5 для случая канала без перегородок. Отметим, что измеренные величины нормированного статического давления на верхней и нижней стенках в симметричном канале отличаются на 0,01 – 0,02 (расчетное течение симметрично), а измеренное полное давление на выходе отличается от расчетного менее чем на 25%. Изменение статического давления вдоль по потоку качественно передается расчетом, однако вариация давления слишком мала по сравнению с погрешностями измерения для того, чтобы сделать определенные выводы. Отметим, что локальный максимум давления при $X=0,3\text{мм}$ (т.е. еще до первого датчика давления на $X=2\text{мм}$) соответствует хорошо разрешенной вязкой структуре у передних кромок нижней и верхней стенок после косых скачков (Рис.5в). Расчетная сетка вне канала выбрана довольно редкой, поскольку эта

область не влияет на течение в канале. Кроме того, большие величины давления в этой области находятся выше (красный цвет) диапазона значений, выбранных для изображения линий уровня на Рис.5.

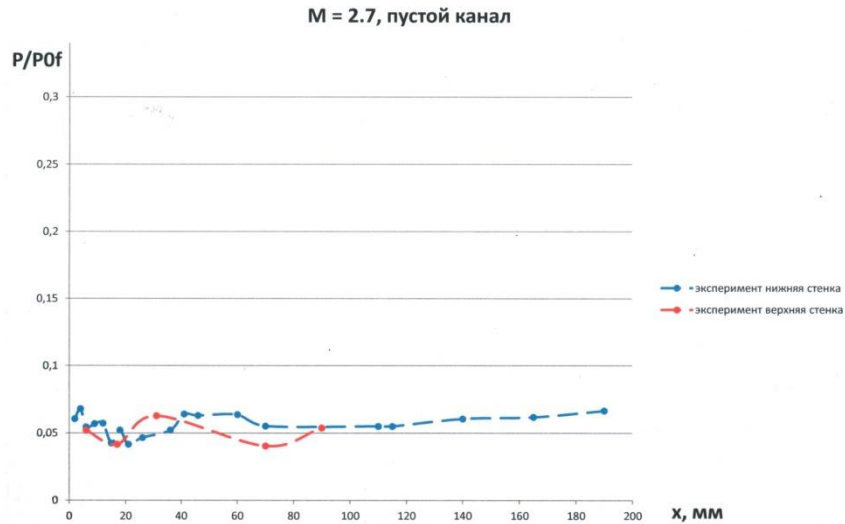


Рис. 4. Экспериментальное распределение статического давления, нормированное на полное давление на входе, на нижней и верхней стенках для случая канала без перегородок.

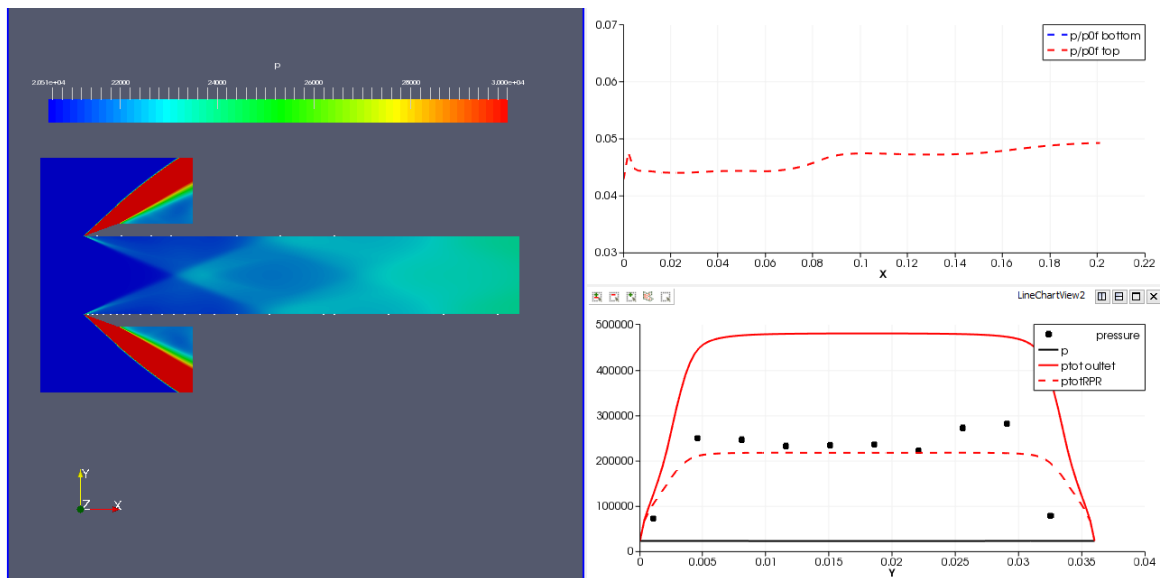


Рис. 5. Расчет sonicFoam/kOmegaSST а) линии уровня статического давления в канале без перегородки; б) распределение статического давления по нижней и верхней стенкам (вверху), распределение полного давления (сплошная линия) и давления (в Па) в трубках Пито (пунктир) по формуле (2) в выходном сечении $X=0.2$ м (внизу). Экспериментальные данные [4] показаны точками.

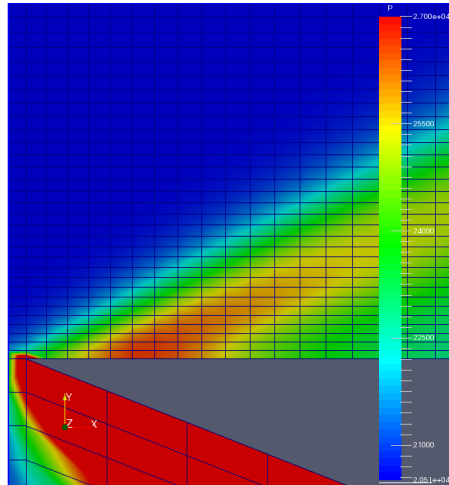


Рис. 5в. Расчет sonicFoam/kOmegaSST: линии уровня статического давления у передней кромки нижней стенки, показаны ячейки расчетной сетки.

На Рис.6 и Рис.7 показано то же сравнение для течения с одинарной перегородкой, расположенной в канале несимметрично: на расстоянии 16мм от нижней и 20мм от верхней стенок. Отметим, что локальные максимумы в продольных распределениях статического давления в расчете меньше экспериментальных значений на $\sim 0,02$ в единицах полного входного давления (по крайней мере, вблизи передней кромки) и смещены к большим значениям X .

Возможным объяснением этого смещения могла бы быть погрешность в оценке входного значения числа Маха: меньше M , больше угол косога скачка уплотнения, ближе максимум. Для оценки зависимости положения первого скачка давления на стенках от значения M воспользуемся известным уравнением, связывающим угол клина θ , угол косога скачка α и значение M набегающего потока [5]:

$$\operatorname{ctg} \theta = \operatorname{tg} \alpha \left[\frac{(\gamma + 1)M^2}{2(M^2 \sin^2 \alpha - 1)} - 1 \right], \quad (3)$$

справедливым для сверхзвуковых течений невязкого газа. Решая это уравнение для значений $M=2.7$, $\theta=7.5^\circ$, получаем угол косога скачка $\alpha=27.6^\circ$ и, соответственно, значения координаты X падения скачка на стенки: $X_{down} = 16 \operatorname{ctg} \alpha = 30.6$ мм для нижней стенки и $X_{up} = 20 \operatorname{ctg} \alpha = 38.3$ мм – для верхней, что вполне соответствует первым скачкам давления на рассчитанных распределениях (Рис.7, вверху). Сдвигу скачка в сторону меньших значений X , скажем, в точку $X_{up} = 35$ мм на верхней стенке, соответствовало бы значение угла $\alpha=29.7^\circ$ и значение числа Маха $M=2.48$, что заметно отличается от диагностированного в эксперименте и не может быть объяснено погрешностями измерений. Отдельные расчеты вязких турбулентных течений со значениями $M < 2.7$ подтверждают эти оценки.

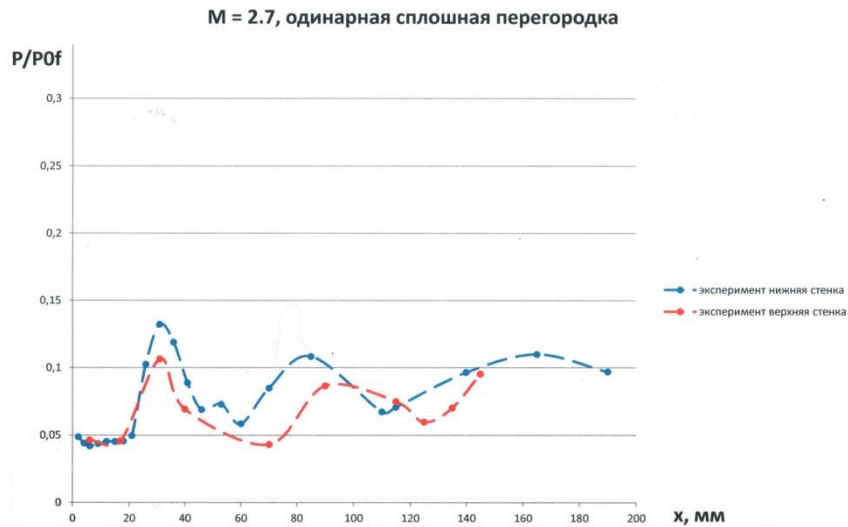


Рис. 6. Экспериментальное распределение статического давления, нормированное на полное давление на входе, на нижней и верхней стенках для случая одинарной перегородки [4].

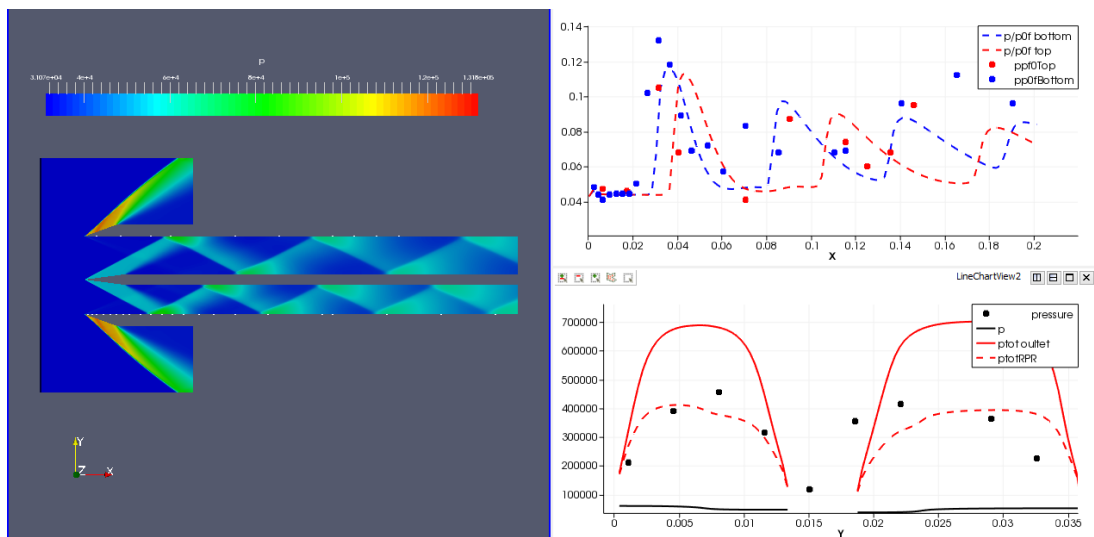


Рис. 7. Расчет sonicFoam/kOmegaSST а) линии уровня статического давления в канале с одинарной перегородкой; б) распределение статического давления по нижней и верхней стенкам (вверху), распределение полного давления и давления в трубках Пито по формуле (2) в выходном сечении $X=0.2\text{м}$ (внизу). Экспериментальные данные [4] показаны точками.

3. Чувствительность к модели турбулентности

Как и в [6], для тестирования при расчетах сверхзвуковых течений помимо kOmegaSST используются модели realizableKE и RNGkEpsilon.

Переход к модели турбулентности `realizableKE` с $\varepsilon = C_\mu k \omega = 234 \text{ м}^2/\text{сек}^3$ – скоростью диссипации, $C_\mu = 0.09$, не устраняет смещения максимумов по X , но в среднем приводит к лучшему согласию в распределении статического давления по всей длине канала (Рис.8). В то же время применение модификации модели `RNGkEpsilon` (Re-Normalisation Group k-epsilon) дает значения статического давления, близкие к результатам с моделью турбулентности `kOmegaSST` (Рис.9). При этом распределение полного давления в выходном сечении слабо зависит от модели турбулентности. Заметим, что при использовании модели `realizableKE` появляется более широкая дозвуковая область у стенок канала в выходном сечении, где формула (2) для соотношения Релея не применима, что приводит к изломам в соответствующем распределении (красный пунктир на Рис.8).

В расчетах с двойной перегородкой (Рис.10-13) основное качественное отличие в распределениях статического давления, помимо смещения максимумов к бóльшим значениям X , состоит в падении статического давления ниже входного значения, что связано с локальным достижением $M=1$ с образованием возвратного течения за отрывом (Рис.14).

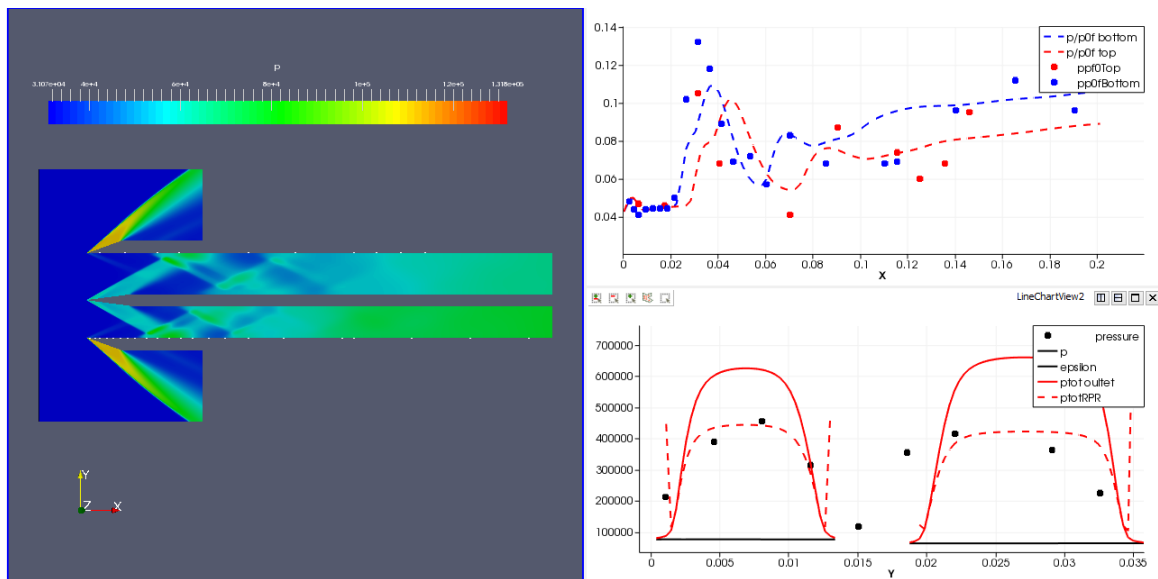


Рис. 8. Расчет `sonicFoam/realizableKE` а) линии уровня статического давления в канале с одинарной перегородкой, белыми точками показаны положения датчиков статического давления; б) распределение статического давления по нижней и верхней стенкам (вверху), распределение полного давления и давления в трубках Пито по формуле (2) в выходном сечении $X=0.2\text{м}$ (внизу). Экспериментальные данные показаны точками.

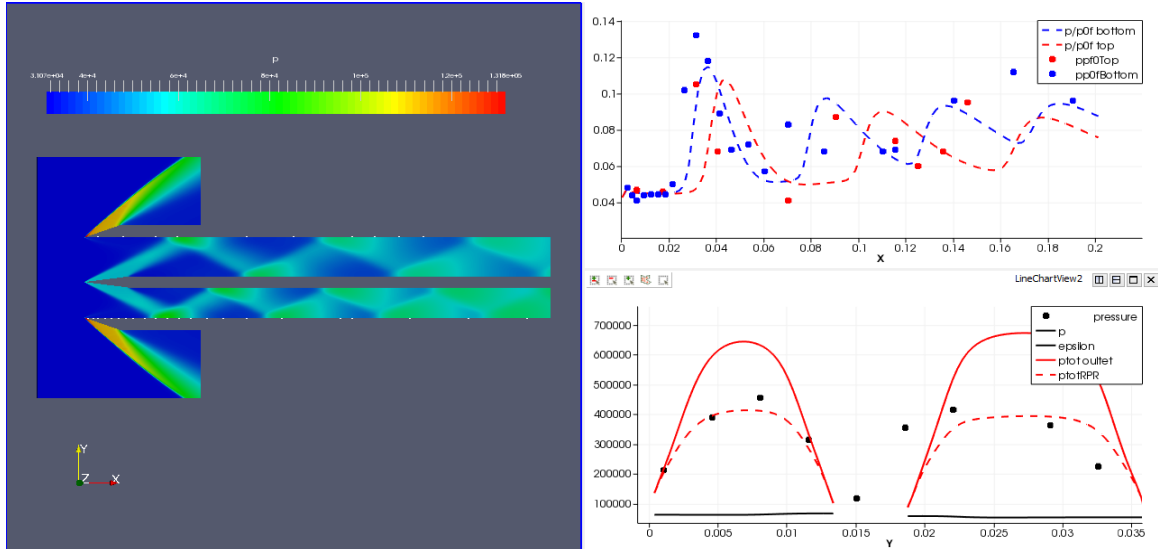


Рис. 9. Расчет sonicFoam/RNGkEpsilon а) линии уровня статического давления в канале с одинарной перегородкой; б) распределение статического давления по нижней и верхней стенкам (вверху), распределение полного давления и давления в трубках Пито по формуле (2) в выходном сечении $X=0.2\text{м}$ (внизу). Экспериментальные данные показаны точками.



Рис. 10. Экспериментальное распределение статического давления, нормированное на полное давление на входе, на нижней и верхней стенках для случая двойной перегородки.

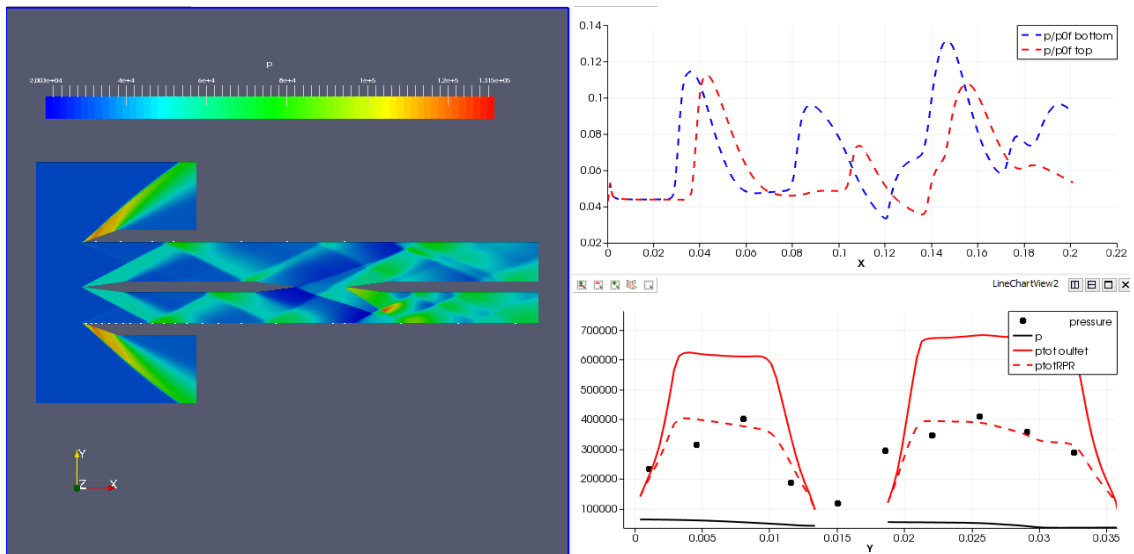


Рис. 11. Расчет sonicFoam/kOmegaSST а) линии уровня статического давления в канале с двойной перегородкой; б) распределение статического давления по нижней и верхней стенкам (вверху), распределение полного давления и давления в трубках Пито по формуле (2) в выходном сечении $X=0.2\text{м}$ (внизу). Экспериментальные данные показаны точками.

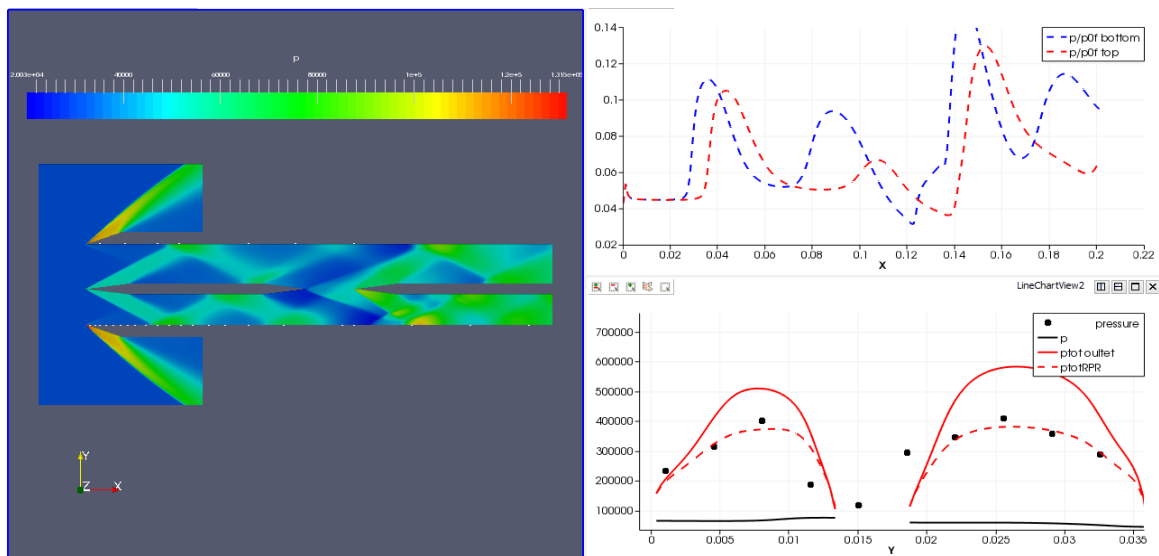


Рис. 12. Расчет sonicFoam/realizableKE а) линии уровня статического давления в канале с двойной перегородкой; б) распределение статического давления по нижней и верхней стенкам (вверху), распределение полного давления и давления в трубках Пито по формуле (2) в выходном сечении $X=0.2\text{м}$ (внизу). Экспериментальные данные показаны точками.

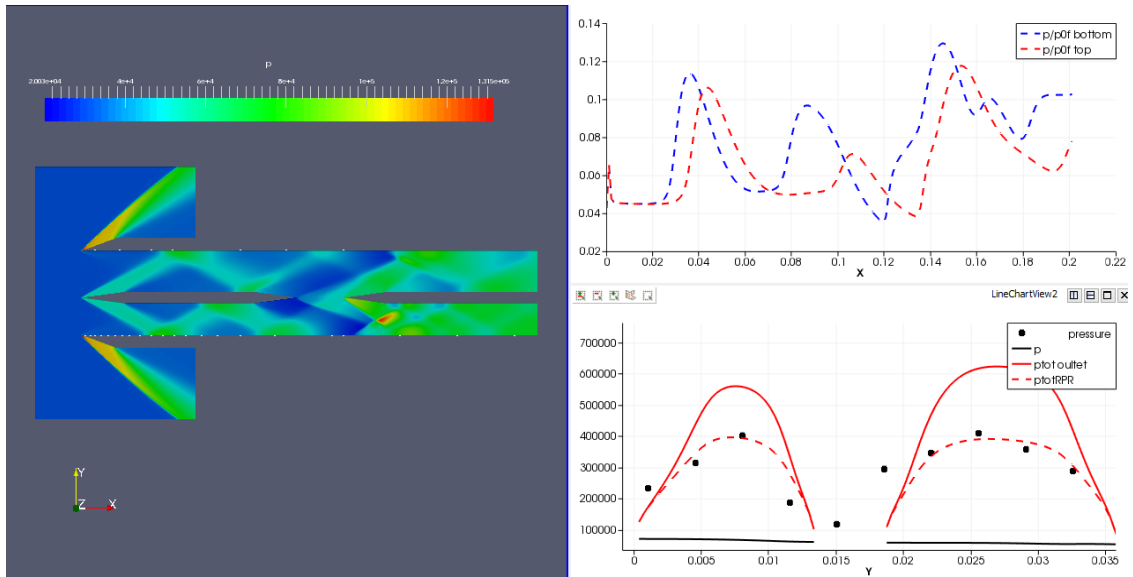


Рис. 13. Расчет `sonicFoam/RNGkEpsilon` а) линии уровня статического давления в канале с двойной перегородкой; б) распределение статического давления по нижней и верхней стенкам (вверху), распределение полного давления и давления в трубках Пито по формуле (2) в выходном сечении $X=0.2\text{м}$ (внизу). Экспериментальные данные показаны точками.

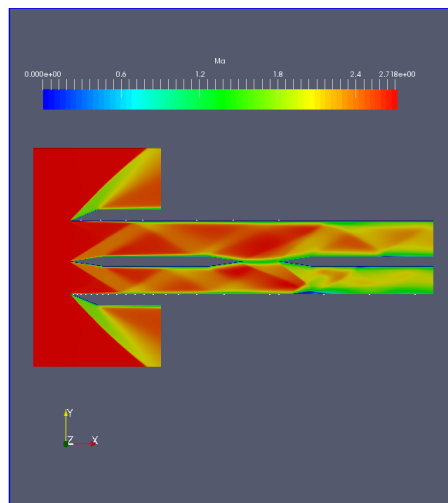


Рис. 14. Расчет `sonicFoam/realizableKE` – линии уровня числа Маха в канале с двойной перегородкой.

4. Возможность неединственного решения

Для задач газовой динамики возможность существования нескольких решений обсуждается и демонстрируется давно и в различных постановках. В частности, для трансзвуковых течений невязкого газа найдено несколько решений [7,8], отличающихся различным положением ударных волн относительно обтекаемого профиля. Гистерезис решений при изменении числа Маха входного потока в канале демонстрируется в [9], в том числе и для

вязкого турбулентного газа. Несколько численных решений, полученных с машинной точностью, для трехмерных задач обтекания крыла продемонстрировано в [10], причем с различными моделями турбулентности и с использованием двух солверов.

Для сверх- и гиперзвуковых течений невязкого газа возможность двух решений – сильного и слабого – известна из теории косых ударных волн. Более сложная задача рассматривается в связи с явлением отражения косых ударных волн [11]. В зависимости от угла падения и входного значения числа Маха возможны два типа конфигураций: двухскачковая – регулярная, и трехскачковая – маховская, а в некоторой области параметров – оба варианта. Возможность гистерезиса при изменении угла падения показана и в численных и в натуральных экспериментах [12,13]. Область двойного решения на плоскости (M, α) показана на рис.15 (из работы [12]). Как видно, параметры рассматриваемых нами течений (ромб на рис.15), далеки от этой области, то есть ожидать двойного решения указанного типа не приходится.

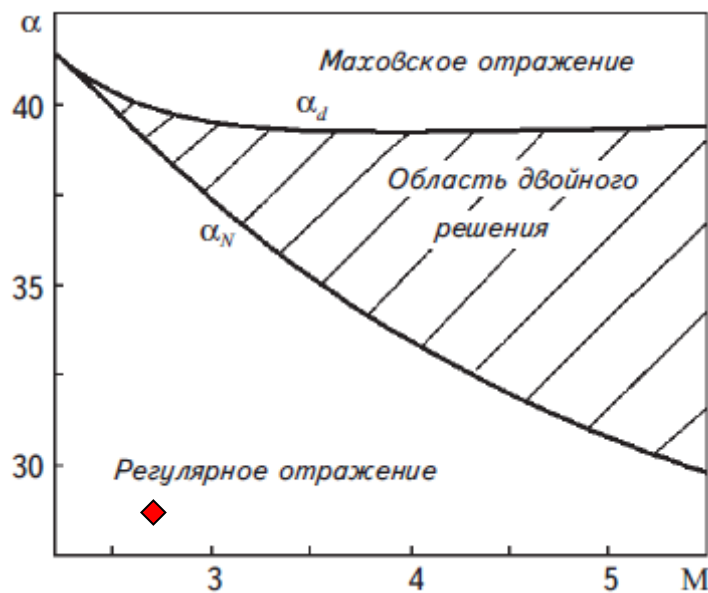


Рис. 15. Области маховского, $\alpha > \alpha_N$, и регулярного, $\alpha < \alpha_d$, отражения косых скачков; α – угол падения скачка в градусах, M – число Маха набегающего потока. Ромб соответствует параметрам рассматриваемых здесь течений.

Учет вязкости и турбулентности усложняют ситуацию благодаря таким эффектам, как отрыв и присоединение пограничного слоя. Возможно, при фиксированных входных параметрах ширина такой отрывной зоны может быть неединственной, приводя к нескольким стационарным решениям.

Так, для конфигурации с двойной перегородкой, помимо представленного на Рис.11, было найдено и другое численное решение с более широкими зонами отрыва течения, Рис.16. При этом использовались одни и те же расчетные сетки

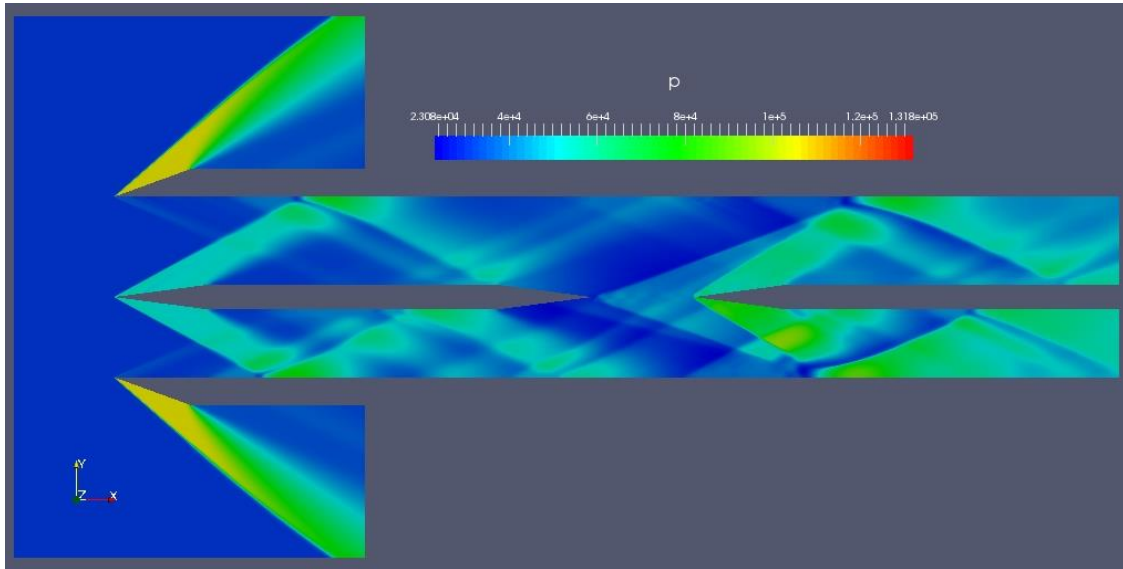


Рис. 16. Расчет sonicFoam/kOmegaSST в канале с двойной перегородкой : второе решение. Линии уровня статического давления. Расчетная сетка с числом ячеек порядка 785К.

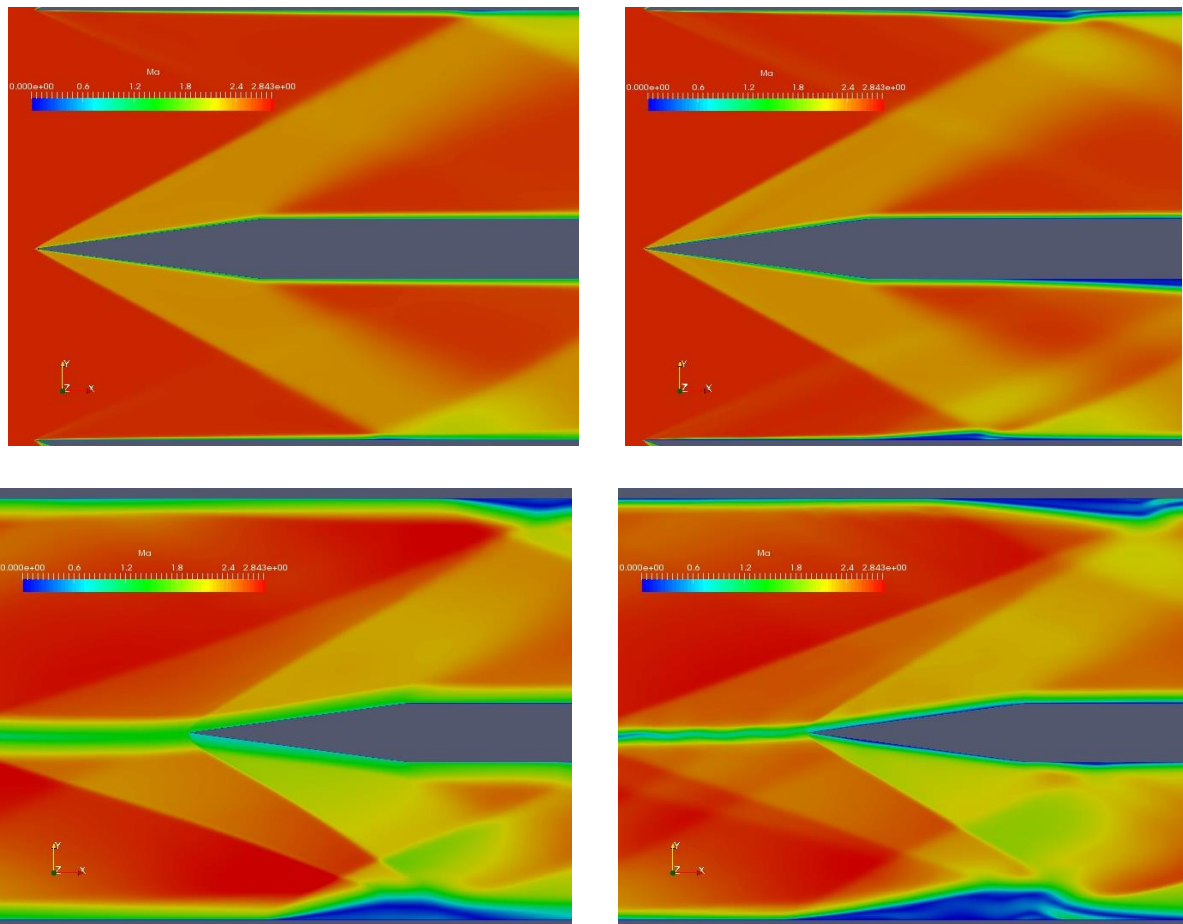


Рис. 17. Расчет sonicFoam/kOmegaSST в канале с двойной перегородкой : сравнение двух решений. Линии уровня числа Маха. Слева – фрагменты первого решения (Рис.11), справа – второго решения (Рис.16).

с числом ячеек порядка 785К и 3141К, решались одинаковые уравнения и граничные условия, но разные начальные приближения для вектора решения. Применялся солвер `sonicFoam` с моделью турбулентности `kOmegaSST`. Детальное сравнение решений показано на Рис. 17,18.

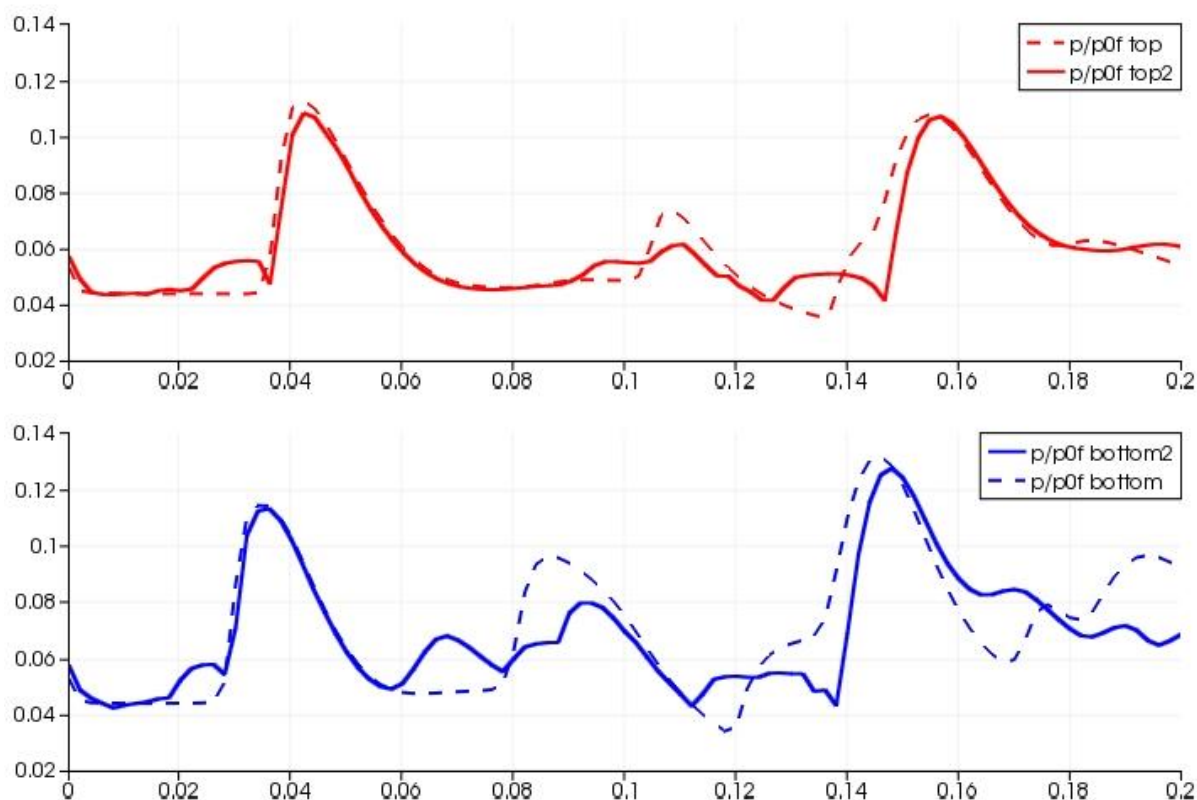


Рис. 18. Расчет `sonicFoam/kOmegaSST` в канале с двойной перегородкой : сравнение двух решений. Распределение статического давления по верхней (красные) и нижней (синие) стенкам. Пунктирные и сплошные линии – первое (Рис.11) и второе решение (Рис.16) соответственно.

Из сравнения двух решений видно, что во втором решении, благодаря относительно широкой зоне отрыва при первом падении косога скачка на стенки (при $X \sim 30-38$ мм), структура всего течения усложняется; в частности, более сложным становится распределение давления по стенкам, Рис.18.

Относительно второго найденного решения возникают вопросы о его существовании и чувствительности относительно значения входных параметров и выбора модели турбулентности, солвера, геометрии и т.п. В частности, отметим, что для более простого случая – с одинарной перегородкой – второго решения найти не удалось. Кроме того, на менее подробной сетке с числом ячеек порядка 196К это второе решение воспроизвести не удалось: взяв его в качестве начального приближения с подробной сетки, итерационный процесс сошелся к первому решению.

Заключение

Для моделирования высокоскоростных потоков целесообразно использовать систему осредненных уравнений Навье-Стокса, дополненную турбулентными напряжениями и тепловыми потоками. На основе модулей открытого пакета OpenFOAM опробованы инструменты для математического моделирования геометрии и течений в элементах проточного тракта ПВРД.

Расчеты усредненных по числу Рейнольдса уравнений Навье-Стокса для экспериментов ЦАГИ со сверхзвуковым течением в двойном канале прямоугольного сечения с переменной геометрией внутренней пластины показали качественное совпадение таких измеряемых параметров течения, как распределение статического давления на стенках канала и полного давления на выходе из него. В этих валидационных расчетах использовалось двумерное плоское приближение. Модель турбулентности `kOmegaSST` (модель турбулентности Ментера) в сочетании с солвером для уравнений Навье-Стокса `sonicFoam` дает наилучшие по точности и робастности результаты. Изменение параметров входного потока дает слабое изменение расчетных распределений. Несмотря на качественное совпадение, в рамках использованной модели пока нет объяснения заметному отклонению расчетного статического давления от экспериментальных значений на верхней стенке по сравнению с нижней.

Использование различных начальных приближений может приводить к нескольким численным решениям. Надежность этих результатов и их чувствительность к параметрам модели, к выбору сеток и солверов – предмет дальнейшего изучения.

Библиографический список

1. R. I. Issa. Solution of the implicitly discretised fluid flow equations by operator splitting, *J. Comput. Phys.*, Vol. 62, 1986, p. 40.
2. A. Kurganov and E. Tadmor. New high resolution central schemes for nonlinear conservation laws and convection-diffusion equations, *J. Comput. Phys.*, Vol. 160, 2000, pp. 241-282.
3. A. Kurganov and E. Tadmor. Solution of two-dimensional Riemann problems for gas dynamics without Riemann problem solvers, *Numer. Methods Partial Differential Equations*, Vol. 18, 2002, pp. 584-608.
4. Н.В. Гурьева, М.А. Иванькин, Д.А. Лапинский, А.М. Терешин. Расчетные и экспериментальные исследования течений торможения в коротких каналах // Материалы Двенадцатой Международной школы-семинара «Модели и методы аэродинамики», Евпатория, 2012.
5. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теоретическая физика. Гидродинамика. М.: Наука, 1986, с.487.

6. О.Н. Засухин, П.В. Булат, Н.В. Продан. Особенности применения моделей турбулентности при расчете сверхзвуковых течений в трактах перспективных воздушно-реактивных двигателей, Двигатель, Т. 79, 2012, с. 20-23.

7. A. Jameson, J.C. Vassberg, and K. Ou, Further Studies of Airfoils Supporting Non-Unique Solutions in Transonic Flow, AIAA Journal, Vol. 50, No. 12, Dec. 2012, pp. 2865–2881.

8. A. Kuzmin, Non-unique transonic flows over airfoils, Computers & Fluids 63 (2012) pp. 1–8.

9. A. Kuzmin, Shock wave bifurcation in channels with a bend, Archive of Applied Mechanics (2015), pp. 1-9, DOI 10.1007/s00419-015-1062-z.

10. D.S. Kamenetskiy, J.E. Bussoletti, C.L. Hilmes, V. Venkatakrishnan, L.B. Wigton, and F.T. Johnson. Numerical Evidence of Multiple Solutions for the Reynolds-Averaged Navier–Stokes Equations, AIAA Journal, Vol. 52, No. 8 (2014), pp. 1686-1698. doi: 10.2514/1.J052676.

11. G. Ben-Dor, Shock wave reflection phenomena. N.Y., Springer Verlag, 1991, 307 p.

12. М.С. Иванов, А.Н. Кудрявцев, С.Б. Никифоров, Д.В. Хотяновский. Переход между регулярным и маховским отражением ударных волн: новые численные и экспериментальные результаты, Аэромеханика и газовая динамика. 2002. №3. с. 3–12.

<http://www.itam.nsc.ru/users/dima/Papers/AMGD.pdf>

13. А.Н. Кудрявцев. Вычислительная аэродинамика сверхзвуковых течений с сильными ударными волнами, Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук, 2015, ИТПМ СО РАН, Новосибирск, <http://www.itam.nsc.ru/ru/thesis/?ID=347506>