



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 57 за 2016 г.



ISSN 2071-2898 (Print)  
ISSN 2071-2901 (Online)

**Аванесов Г.А., Бессонов Р.В.,  
Куркина А.Н., Никитин А.В.,  
Сазонов В.В.**

Определение движения  
космического аппарата по  
измерениям четырех  
звездных датчиков

**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Определение движения космического аппарата по измерениям четырех звездных датчиков / Г.А.Аванесов [и др.] // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2016. № 57. 38 с. doi:[10.20948/prepr-2016-57](https://doi.org/10.20948/prepr-2016-57)  
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2016-57>

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК  
Ордена Ленина  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ  
им. М.В. Келдыша

**Г.А. Аванесов, Р.В. Бессонов, А.Н. Куркина,  
А.В. Никитин, В.В. Сазонов**

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА  
ПО ИЗМЕРЕНИЯМ ЧЕТЫРЕХ ЗВЕЗДНЫХ ДАТЧИКОВ**

Москва – 2016

## Аннотация

Звездный датчик БОКЗ-М60 (блок измерения координат звезд) предназначен для определения параметров ориентации собственной системы координат относительно инерциальной системы по наблюдениям участков звездного неба. В данной работе описаны методы и результаты обработки измерений комплекта из четырех датчиков БОКЗ-М60, выполненных на спутнике «Ресурс-П» № 2. Рассматривается отрезок времени более трех орбитальных витков (19003с), на котором спутник находился в орбитальной ориентации. Совместная обработка измерений четырех датчиков, выполненных в единые моменты времени, позволила связать с датчиками универсальную систему координат. Эта система со среднеквадратичной ошибкой менее 0.4" по каждому углу поворота вокруг ее осей согласуется с моделью вращательного движения спутника. Положение универсальной системы относительно приборной системы координат спутника определялось с использованием измерений угловой скорости. Среднеквадратичные ошибки такого определения по углам поворота универсальной системы вокруг ее осей составили 0.044°, 0.051° и 0.18°. Низкочастотные (с частотами менее 0.05 Гц) вариации положений собственных систем координат датчиков относительно универсальной системы не превышают 10". Эти вариации имеют периодический характер с основной частотой, равной орбитальной частоте. Среднеквадратичные значения высокочастотных составляющих указанных вариаций не превышают 18".

**G.A.Avanesov, R.V.Bessonov, A.N.Kurkina, A.V.Nikitin, V.V.Sazonov.**  
**Determination of a spacecraft attitude motion by measurements of four star sensors.** The star sensor BOKZ-M60 allows to find parameters that define the attitude of its own coordinate system with respect to an inertial one by observing regions in the sky. We describe techniques for processing measurements of the set of four star sensors BOKZ-M60 located onboard the spacecraft Resurs-P2, and we give examples of processing the measurements obtained in the time interval of more than three orbit revolutions (19003s). The spacecraft was in orbital orientation at that time. Joint processing the measurements of four sensors allowed to associate with their set the universal coordinate system. This system agrees with the model of spacecraft attitude motion with root-mean-square errors less than 0.4". The attitude of the universal system relative to the spacecraft device system was determined by measurements of the spacecraft angular rate. The root-mean-square errors of this determination on angles of rotation around the axes of the universal system are 0.044°, 0.051° и 0.18°. Low frequency (with frequencies less than 0.05 Hz) variations of star sensor own coordinate systems relative the universal system were not exceed 10". These variations were seemed to be periodic with main frequency equal to the orbital frequency. Mean squared values of a high frequency component of those variations were not exceeded 18".

**1. Введение.** Звездный датчик БОКЗ-М60 предназначен для определения параметров ориентации собственной системы координат относительно инерциальной системы по наблюдениям участков звездного неба. Собственная система координат звездного датчика – правая декартова система  $x_1x_2x_3$  – строится следующим образом. Плоскость  $x_1x_2$  параллельна плоскости ПЗС-матрицы, ось  $x_1$  параллельна строкам матрицы и направлена против направления считывания из регистра, ось  $x_2$  направлена вдоль столбцов матрицы против направления переноса строк в регистр. Ось  $x_3$  направлена от матрицы к объективу датчика. Ошибку одномоментного определения ориентации системы координат  $x_1x_2x_3$  в абсолютном пространстве удобно характеризовать вектором бесконечно малого поворота этой системы относительно ее найденного положения. Многочисленные натурные и стендовые испытания показали, что у покоящегося датчика среднеквадратичные значения компонент этого вектора вдоль осей  $x_1$  и  $x_2$  составляют менее 2", компонента вдоль оси  $x_3$  – около 15".

Если на борту космического аппарата (КА) имеется несколько датчиков БОКЗ-М60, то комбинируя их измерения, можно ввести систему координат, положение которой в абсолютном пространстве будет заметно точнее, чем у собственных систем координат одиночных датчиков. Ниже описан способ введения такой системы координат на примере измерений четырех звездных датчиков БОКЗ-М60, установленных на КА «Ресурс-П» № 2. Получены оценки точности определения параметров ориентации этой системы. Данная работа является продолжением работы [1], посвященной решению той же задачи. Однако здесь эта задача решается иначе.

**2. Коррекция взаимной ориентации оптических осей четырех звездных датчиков.** Пусть КА снабжен четырьмя звездными датчиками. Будем называть их по номерам: датчик 1, датчик 2 и т.д. Собственную систему координат датчика с номером  $i$  обозначим  $x_1^{(i)}x_2^{(i)}x_3^{(i)}$ . Датчики в некоторые дискретные моменты времени  $t_n$ , где  $n$  – целое число и  $t_n < t_{n+1}$ , выдают измерения нормированных кватернионных функций  $\mathbf{Q}^{(i)}(t)$ , задающих угловое положение систем  $x_1^{(i)}x_2^{(i)}x_3^{(i)}$  относительно базовой инерциальной системы координат  $X_1X_2X_3$ . Измерения  $\mathbf{Q}_n^{(i)} \approx \mathbf{Q}^{(i)}(t_n)$  выполняются на единой временной сетке с шагом  $t_{n+1} - t_n = 1\text{с}$ . На суточном отрезке времени несколько сот измерений каждого датчика пропущены. В большинстве случаев пропущены одиночные измерения. Моменты пропущенных измерений у разных датчиков, вообще говоря, различны. Поскольку временные отрезки сплошных пропусков имеют длину не более нескольких секунд, они восполняются линейной интерполяцией. Ниже для упрощения обозначений индексам включенных в обработку моментов  $t_n$  приписываются значения  $n = 1, 2, \dots, N$ .

Введенные кватернионные функции имеют следующий смысл. Пусть некоторый вектор имеет в системе  $x_1^{(i)}x_2^{(i)}x_3^{(i)}$  компоненты  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)^T$ , в базисе

вой системе тот же вектор имеет компоненты  $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)^T$ . С помощью кватернионов  $\mathbf{Q}^{(i)}$  связь между компонентами вектора  $\mathbf{a}$  в разных системах координат можно выразить формулами

$$\mathbf{b} = \mathbf{Q}^{(i)} \circ \mathbf{a} \circ [\mathbf{Q}^{(i)}]^{-1} \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Здесь и в аналогичных формулах ниже вектор  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)^T$  следует рассматривать как кватернион  $(0, a_1, a_2, a_3) = (0, \mathbf{a})$ .

Согласно оценкам в п. 1 «сырые» измерения  $\mathbf{Q}_n^{(i)}$  задают направление оси  $x_3^{(i)}$  гораздо точнее направлений осей  $x_1^{(i)}$  и  $x_2^{(i)}$ , поэтому при совместной обработке показаний системы датчиков будем использовать только параметры ориентации осей  $x_3^{(i)}$ . Начнем с анализа углов между осями  $x_3^{(i)}$  и  $x_3^{(j)}$ ,  $i \neq j$ .

Орт оптической оси датчика с номером  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$  обозначим  $\mathbf{a}_i$ . Конфигурация этих ортов задается расстояниями  $|\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_j|$  при  $i < j$ , т.е. шестью величинами. Поскольку  $|\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_j|^2 = 2 - 2(\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j)$ , эту конфигурацию можно задать углами

$$\varphi_{ij} = \arccos(\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j).$$

Углы  $\varphi_{ij}$  можно рассчитать для каждой пары чисел  $i$  и  $j$  ( $1 \leq i < j \leq 4$ ) одномоментных измерений датчиков, полученных на некотором отрезке времени. Для каждого момента  $t_n$  из этого отрезка имеется 6 углов  $\varphi_{ij}(t_n)$ , отвечающих указанным парам. Средние значения углов на отрезке, отклонения углов от средних значений и среднеквадратичные значения отклонений обозначим соответственно

$$\langle \varphi_{ij} \rangle = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \varphi_{ij}(t_n), \quad \Delta \varphi_{ij}(t_n) = \varphi_{ij}(t_n) - \langle \varphi_{ij} \rangle,$$

$$\text{RMS}(\Delta \varphi_{ij}) = \left( \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N [\Delta \varphi_{ij}(t_n)]^2 \right)^{1/2}.$$

Графики отклонений для продолжительного ( $N = 19004$ ) отрезка данных, полученных 14.01.2015 г., приведены на рис. 1. Величины  $\langle \varphi_{ij} \rangle$  и  $\text{RMS}(\Delta \varphi_{ij})$  указаны в подписи к этому рисунку. Отклонения оказались весьма малыми. Они выглядят как случайные временные ряды, содержащие заметные циклические тренды. Спектральный анализ показал, что частоты этих трендов совпадают или кратны орбитальной частоте (среднему движению) спутника. Возможно, эти тренды обусловлены тепловыми деформациями посадочных мест датчиков.

Выясним, что может дать учет отклонений  $\Delta \varphi_{ij}(t_n)$  для устранения указанных трендов. Примем, что средние углы  $\langle \varphi_{ij} \rangle$  задают свободную от разного

рода деформаций конфигурацию ортов  $\mathbf{a}_k$ . Орты этой конфигурации обозначим  $\mathbf{a}_k^\circ$ . Вариации исходных ортов представим в виде  $\mathbf{a}_k - \mathbf{a}_k^\circ = \boldsymbol{\theta}_k \times \mathbf{a}_k^\circ$ , где  $\boldsymbol{\theta}_k$  – векторы бесконечно малого поворота. Эти векторы зависят от времени и описывают полные (суммарные) вариации исходных ортов. Вариации  $\Delta\varphi_{ij}(t_n)$  можно выразить через  $\boldsymbol{\theta}_k(t_n)$ :

$$\Delta\varphi_{ij} = \mathbf{b}_{ij} \cdot (\boldsymbol{\theta}_j - \boldsymbol{\theta}_i), \quad \mathbf{b}_{ij} = \frac{\mathbf{a}_i \times \mathbf{a}_j}{|\mathbf{a}_i \times \mathbf{a}_j|}. \quad (1)$$

В этих формулах векторы  $\mathbf{b}_{ij}$  должны выражаться через  $\mathbf{a}_k^\circ$ , но поскольку разности  $|\mathbf{a}_k - \mathbf{a}_k^\circ| \leq |\boldsymbol{\theta}_k|$  весьма малы, в (1) вместо  $\mathbf{a}_k^\circ$  можно подставить исходные  $\mathbf{a}_k$ . Формулы (1) сохраняют свой вид при замене

$$\boldsymbol{\theta}_i \rightarrow \boldsymbol{\theta}_i + \alpha_i \mathbf{a}_i + \boldsymbol{\theta} \quad (i=1, 2, 3, 4), \quad (2)$$

где  $\alpha_i$  – произвольные числа,  $\boldsymbol{\theta}$  – произвольный вектор. При заданных  $\Delta\varphi_{ij}(t_n)$  формулы (1) можно рассматривать как уравнения относительно  $\boldsymbol{\theta}_k(t_n)$ . Имеем 6 уравнений относительно 12 неизвестных. Произвол в задании  $\boldsymbol{\theta}_k$  можно уменьшить, дополнив уравнения (1) уравнениями

$$\mathbf{a}_i \cdot \boldsymbol{\theta}_i = 0 \quad (i=1, 2, 3, 4). \quad (3)$$

Получили 10 уравнений для определения 12 неизвестных. Казалось бы, имеем два свободных параметра. Однако из формул (2) следует, что система (1), (3) выдерживает замену  $\boldsymbol{\theta}_i \rightarrow \boldsymbol{\theta}_i + \boldsymbol{\theta} - (\mathbf{a}_i \cdot \boldsymbol{\theta}) \mathbf{a}_i$  ( $i=1, 2, 3, 4$ ) при произвольном  $\boldsymbol{\theta}$ . Такая инвариантность означает допустимость поворота набора ортов  $\mathbf{a}_k$  как твердого тела и геометрически очевидна. Следовательно, система (1), (3) имеет не менее трех свободных параметров и содержит не более 9 независимых уравнений. Для системы датчиков «Ресурса-П» № 2 их 9.

Чтобы получить единственность решения системы (1), (3), можно, например, положить  $\boldsymbol{\theta}_1 = 0$ , т.е. фактически находить разности  $\boldsymbol{\theta}_i - \boldsymbol{\theta}_1$  при  $i=2, 3, 4$ . Можно минимизировать сумму квадратов

$$\sum_{i=1}^4 |\boldsymbol{\theta}_i|^2. \quad (4)$$

Эти способы связаны. Если разности  $\Delta\boldsymbol{\theta}_i = \boldsymbol{\theta}_i - \boldsymbol{\theta}_1$  найдены, то в силу равенства

$$\sum_{i=1}^4 |\boldsymbol{\theta}_i|^2 = |\boldsymbol{\theta}_1|^2 + \sum_{i=2}^4 |\Delta\boldsymbol{\theta}_i + \boldsymbol{\theta}_1|^2$$

значение  $\boldsymbol{\theta}_1 = -(\Delta\boldsymbol{\theta}_2 + \Delta\boldsymbol{\theta}_3 + \Delta\boldsymbol{\theta}_4)/4$  минимизирует выражение (4).

Чтобы решить систему (1), (3) с помощью стандартных процедур вычислительной линейной алгебры, представим ее в виде

$$Ax = b. \quad (5)$$

Здесь матрица  $A$  имеет размер  $10 \times 12$ , вектор неизвестных  $x$  составлен из компонент векторов  $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$  и имеет размерность 12, вектор в правой части  $b = (\Delta\varphi_{12}, \Delta\varphi_{13}, \Delta\varphi_{14}, \Delta\varphi_{23}, \Delta\varphi_{24}, \Delta\varphi_{34}, 0, 0, 0, 0)^T$  имеет размерность 10. Найдем сингулярное разложение матрицы  $A^T$  (в используемой процедуре такого разложения SVD [2] число строк матрицы должно быть не меньше числа ее столбцов):  $A^T = USV^T$ . Здесь  $V$  – ортогональная матрица порядка 10,  $U$  – матрица размером  $12 \times 10$  с ортонормированными столбцами,  $S$  – диагональная матрица порядка 10 с неотрицательными диагональными элементами. Во всех точках  $t_n$  из диагональных элементов матрицы  $S$  один был меньше  $10^{-15}$  (с учетом сказанного выше он равен 0), а остальные элементы лежали на отрезке  $[1, 2]$ .

Подставим сингулярное разложение  $A$  в (5) и сделаем в этой системе подстановку  $x = Uy$ . Получим систему  $Sy = c$ ,  $c = V^T b$ . Скалярная форма новой системы  $s_k y_k = c_k$  ( $k = 1, 2, \dots, 10$ ), где  $s_k$  – диагональные элементы матрицы  $S$ ,  $y_k$  и  $c_k$  – компоненты векторов  $y$  и  $c$ . Решение новой системы возьмем в виде:  $y_k = c_k / s_k$  при  $s_k > 10^{-5}$ ,  $y_k = 0$  при  $s_k < 10^{-5}$ . Как уже говорилось, одно из  $s_k$  меньше  $10^{-15}$ , остальные – не меньше 1, причем минимальному  $s_k$  отвечает  $|c_k| < 10^{-9}$  (согласно сказанному выше при  $s_k = 0$  должно быть  $c_k = 0$ ). Соответствующее решение системы (5) имеет минимальную евклидову норму.

Найденное решение позволяет внести в  $\mathbf{a}_k$  поправку, т.е. заменить значение этого орта, отвечающего «сырым» измерениям, значением  $\mathbf{a}_k - \theta_k \times \mathbf{a}_k$ . Затем, чтобы оценить внесенную поправку, следует снова вычислить  $\varphi_{ij}$ . Такие вычисления были сделаны для всех моментов времени  $t_n$ . Результат представлен на рис. 2. Судя по графикам новых отклонений  $\Delta\varphi_{ij}(t_n)$  и соответствующим значениям  $\text{RMS}(\Delta\varphi_{ij})$  (указаны в подписи к рисунку), можно считать, что первоначальные вариации исключены. Графики компонент корректирующих векторов бесконечно малого поворота  $\theta_k$  ( $k = 1, 2, 3, 4$ ) с исключенными средними значениями приведены на рис. 3, 4. Средние значения компонент и их среднеквадратичные отклонения от среднего приведены в подписях к рисункам.

Описанный способ коррекции исходных данных дает эффективный способ внесения в эти данные поправки, обусловленной физическими причинами. Надо выделить из отклонений  $\Delta\varphi_{ij}(t_n)$  составляющую, которой можно приписать реальный физический смысл, и решить для нее систему (5) в точках  $t_n$ .

Как следует из способа решения системы (1), (3) и видно из графиков на рис. 3, 4, зависимость от времени компонент векторов бесконечно малого поворота  $\theta_k$  очень похожа на аналогичную зависимость величин  $\Delta\varphi_{ij}$  ( $i < j$ ). Спектральный анализ показал, что существенные составляющие этих вариаций представляют собой (очень похожи на) периодические функции с орбитальной

частотой, к которым добавлен случайный шум. Периодическую составляющую в отклонениях  $\Delta\varphi_{ij}(t_n)$  естественно принять обусловленной физически реальными причинами и использовать для коррекции исходных данных. Аппроксимации отклонений  $\Delta\varphi_{ij}(t_n)$  выражениями вида

$$\chi(t) = a_0 + \sum_{m=1}^M (a_m \cos 2\pi m f t + b_m \sin 2\pi m f t) \quad (6)$$

приведены на рис. 5. Они построены при  $f = 0.00017734$  Гц (орбитальная частота) и  $M = 150$ . Ошибки аппроксимации  $\sigma_{ij} = \text{RMS}(\Delta\varphi_{ij} - \chi_{ij})$  приведены в подписи к рисунку. Универсальная аппроксимация рядами Фурье с частотами, определяемыми длиной отрезка данных (ср. формулы (7), (8) ниже), дает такую же погрешность.

Использование величин  $\chi_{ij}(t_n)$  вместо отклонений  $\Delta\varphi_{ij}(t_n)$  в описанных выше построениях приводит к результату, приведенному на рис. 6. Здесь изображены графики отклонений  $\Delta\varphi_{ij}(t_n)$  после такой коррекции, в подписи к рисунку указаны новые значения  $\langle\varphi_{ij}\rangle$  и  $\text{RMS}(\Delta\varphi_{ij})$ . Новые отклонения  $\Delta\varphi_{ij}(t_n)$  весьма точно совпадают с разностями  $\Delta\varphi_{ij}(t_n) - \chi_{ij}(t_n)$ , где  $\Delta\varphi_{ij}(t_n)$  – исходные отклонения (линейность коррекции). В частности, практически совпадают среднеквадратические значения этих величин. Графики на рис. 6 выглядят как случайный шум, что подтверждается спектральным анализом.

Функции (6), построенные по отрезку данных длиной около орбитального одного витка, в силу их периодичности можно использовать и за пределами этого отрезка для прогноза вариаций оптических осей датчиков. Чтобы проверить это предположение, функции (6) были построены по первой трети точек  $t_n$ , представленных на рисунках. Затем эти функции были использованы для коррекции оптических осей на всей совокупности точек. Характеризующие коррекцию среднеквадратичные отклонения возросли незначительно.

Было:  $\text{RMS}(\Delta\varphi_{12}) = 1.66''$ ,  $\text{RMS}(\Delta\varphi_{13}) = 2.19''$ ,  $\text{RMS}(\Delta\varphi_{14}) = 1.44''$ ,  
 $\text{RMS}(\Delta\varphi_{23}) = 2.74''$ ,  $\text{RMS}(\Delta\varphi_{24}) = 2.12''$ ,  $\text{RMS}(\Delta\varphi_{34}) = 1.55''$ .

Стало:  $\text{RMS}(\Delta\varphi_{12}) = 1.70''$ ,  $\text{RMS}(\Delta\varphi_{13}) = 2.29''$ ,  $\text{RMS}(\Delta\varphi_{14}) = 1.46''$ ,  
 $\text{RMS}(\Delta\varphi_{23}) = 2.86''$ ,  $\text{RMS}(\Delta\varphi_{24}) = 2.18''$ ,  $\text{RMS}(\Delta\varphi_{34}) = 1.59''$ .

**3. Построение одномоментной равноточной системы координат.** Если на спутнике имеется 4 звездных датчика и каждый имеет собственную систему координат, то какая из них наиболее подходит для описания углового положения спутника? В такой ситуации естественно ввести новую систему координат, в определении которой равноправно или с заданными весами участвуют все датчики. Такую систему назовем равноточной. Поскольку направления осей  $x_3^{(i)}$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) известны наиболее точно, целесообразно именно их положить



в основу построения новой системы координат. В связи с этим возникает следующая

*Задача.* Даны некопланарные орты  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$  и  $\mathbf{a}_4$ . Требуется построить ортонормированный базис  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ , каждый орт которого является линейной комбинацией ортов  $\mathbf{a}_k$ . Иными словами, надо найти  $4 \times 3$  матрицу  $X = \|x_{ij}\|$ , такую, что

$$\mathbf{e}_i = \sum_{k=1}^4 \mathbf{a}_k x_{ki}, \quad \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3).$$

Здесь  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера.

*Решение.* Составим  $3 \times 4$  матрицу  $A = \|\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4\|$ . Вычислим сингулярное разложение матрицы  $A^T = USV^T$ . Здесь  $V$  – ортогональная матрица порядка 3,  $S = \text{diag}(s_1, s_2, s_3)$ ,  $s_1 \geq s_2 \geq s_3 > 0$ ,  $U$  –  $4 \times 3$  матрица с ортонормированными столбцами:  $U^T U = E_3 = \text{diag}(1, 1, 1)$ . Надо взять  $X = US^{-1}D$ ,  $D = \text{diag}(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ . Выбор знаков в последней формуле произволен.

*Проверка.* Из ортов искомого базиса составим матрицу 3-го порядка  $B = \|\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\|$ . По условию задачи она имеет вид  $B = AX$  и должна быть ортогональной – удовлетворять условию  $B^T B = E_3$ . Для указанного  $X$  имеем

$$B^T B = DS^{-1}U^T A^T AUS^{-1}D = DS^{-1}U^T USV^T VSU^T US^{-1}D = DS^{-1}S^2 S^{-1}D = E_3.$$

Здесь использованы соотношения  $V^T V = E_3$ ,  $U^T U = E_3$ . В нашем случае знаки в формуле для  $D$  следует выбирать из условия  $\det B = 1$ . Найденное решение не единственное, но, по-видимому, довольно удачное.

Ортогональность матрицы  $B$  можно установить и другим способом:

$$B = AX = VSU^T US^{-1}D = VD.$$

Матрица  $VD$  ортогональна как произведение ортогональных матриц. Формула  $B = VD$  дает эффективный способ вычисления матрицы  $B$  с помощью стандартной процедуры SVD [2]. Поскольку  $AA^T = VSU^T USV^T = VS^2 V^T$ , матрицу  $B$  можно найти и с помощью стандартной процедуры JACOBI [2]. Процедуры SVD и JACOBI, переписанные на turbo pascal (на этом языке написан весь программный код, использованный в данной работе), применялись соответственно к матрицам  $A^T$  и  $AA^T$ .

*Мотивировка.* Условие ортогональности матрицы  $B$  можно представить следующим образом  $E_3 = B^T B = X^T A^T A X$ . Симметричная матрица  $A^T A$  порядка 4 – матрица Грама ортов  $\mathbf{a}_k$ . Ортогональным преобразованием приведем ее к диагональному виду:  $W^T A^T A W = \Lambda$ . Здесь  $W$  – ортогональная матрица порядка 4,  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, 0)$  и если  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$ , то  $\lambda_i = s_i^2$ . У матрицы  $A^T A$  три собственных числа положительны, а четвертое – нуль в силу ранга 3 мат-

рицы  $A$ . Условие ортогональности матрицы  $B$  запишем в виде  $E_3 = B^T B = X^T W \Lambda W^T X$ . Сделаем замену переменных  $X = WY$ , где  $Y = \| y_{ij} \|$  – матрица размером  $4 \times 3$ . Получим соотношение  $Y^T \Lambda Y = E_3$ , которое в скалярной форме записать в виде системы

$$\sum_{k=1}^3 \lambda_k y_{ki} y_{kj} = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3).$$

Здесь 6 уравнений (3 уравнения выписаны дважды) относительно 12 неизвестных. Возможное решение (знаки уточняются из условия  $\det B = 1$ )

$$Y = \begin{vmatrix} \pm \lambda_1^{-1/2} & 0 & 0 \\ 0 & \pm \lambda_2^{-1/2} & 0 \\ 0 & 0 & \pm \lambda_3^{-1/2} \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Матрицу  $W$  при указанном упорядочивании собственных чисел  $\lambda_i$  можно выбрать так, что ее первые три столбца совпадут с матрицей  $U$  (при  $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$  первые три столбца  $W$  могут отличаться от соответствующих столбцов  $U$  только знаком). В этом случае новое решение совпадает с предыдущим.

Предлагаемое решение справедливо при любом числе векторов  $\mathbf{a}_k$  больше двух. Случай двух векторов рассмотрим особо. Пусть  $A = \| \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \|$ . Тогда

$$A^T A = \begin{vmatrix} 1 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Собственные числа этой матрицы  $\lambda_1 = 1 + \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2$ ,  $\lambda_2 = 1 - \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2$ . Матрица

$$W = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Отсюда

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2}{\sqrt{2(1 + \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2)}}, \quad \mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1}{\sqrt{2(1 - \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2)}}.$$

Третий орт возьмем в виде

$$\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2}{|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2|}.$$

*Пример.* Рассмотрим 4 датчика на отрезке времени исследованном в п. 2. Покомпонентные графики последовательностей кватернионов  $\mathbf{Q}_n^{(i)}$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) приведены на рис. 7. Для каждого кватерниона  $\mathbf{Q}_n^{(i)}$  построили матрицу  $B_i(t_n)$ , задающую переход от системы  $x_1^{(i)} x_2^{(i)} x_3^{(i)}$  к системе  $X_1 X_2 X_3$ . По третьим столбцам этих матриц способом, описанным выше, построили матрицу  $B(t_n)$ .

Эту матрицу пересчитали в кватернион  $\mathbf{P}_n$ . Он является кватернионом перехода от равноточной системы координат к базовой системе на момент  $t_n$ . Графики его компонент приведены на рис. 8а.

Интересно сравнить равноточную систему координат, построенную без коррекции углов между оптическими осями датчиков, с равноточной системой, построенной после такой коррекции. Орты  $\mathbf{a}_k$  ( $k = 1, 2, 3, 4$ ) были подвергнуты преобразованию, описанному в п. 2, с использованием периодической аппроксимации отклонений  $\Delta\varphi_{ij}$ . Аппроксимирующие выражения (6) были построены при  $f = 0.00017734$  Гц и  $M = 150$  (рис. 5). Кватернион, задающий в момент  $t_n$  переход от скорректированной равноточной системы координат к базовой системе, обозначим  $\hat{\mathbf{P}}_n$ . Кватернионы  $\hat{\mathbf{P}}_n^{-1} \circ \mathbf{P}_n$  нормированы и близки к 1 по норме (имеют малую мнимую часть). Такие кватернионы удобно выражать через модифицированные параметры Родрига  $\mathbf{z} = (z_1, z_2, z_3)^T$  с помощью кватернионной функции  $\mathbf{R} \equiv (R_0, R_1, R_2, R_3) = \mathbf{F}(\mathbf{z})$ :

$$R_0 = \frac{1 - z_1^2 - z_2^2 - z_3^2}{1 + z_1^2 + z_2^2 + z_3^2}, \quad R_m = \frac{2z_m}{1 + z_1^2 + z_2^2 + z_3^2} \quad (m = 1, 2, 3).$$

Обратная функция  $\mathbf{z} = \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{R})$  определена на нормированных кватернионах и задается формулами

$$z_1 = \frac{R_1}{1 + R_0}, \quad z_2 = \frac{R_2}{1 + R_0}, \quad z_3 = \frac{R_3}{1 + R_0}.$$

Если  $|\mathbf{z}| \ll 1$ , то  $\mathbf{F}(\mathbf{z}) \approx 1$  и вектор  $4\mathbf{z}$  является вектором бесконечно малого поворота, эквивалентного повороту с кватернионом  $\mathbf{F}(\mathbf{z})$ . В частности, вектор  $\boldsymbol{\theta}_n = 4\mathbf{F}^{-1}(\hat{\mathbf{P}}_n^{-1} \circ \mathbf{P}_n)$  задает поворот скорректированной равноточной системы в нескорректированную. Графики зависимости от времени компонент этого вектора приведены на рис. 8б.

*Оценка точности определения матрицы  $B$ .* В силу формулы  $B = VD$  и специального вида матрицы  $D$ , поставленная задача сводится к оценке точности определения матрицы  $V$ . Будем считать, что сингулярные числа матрицы  $A^T$  различны, и воспользуемся методом возмущений для расчета собственных чисел и векторов симметричных матриц [3]. Рассмотрим возмущения задачи диагонализации матрицы  $AA^T$ , т.е. представления этой матрицы в виде  $AA^T = V\Lambda V^T$ , где  $\Lambda = S^2 = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ . Возмущенные значения матриц  $A$  и  $\Lambda$  обозначим  $A' = A + \delta A$  и  $\Lambda' = \Lambda + \delta\Lambda$ , возмущенное значение матрицы  $V$  представим в виде  $V' = V(E_3 + \Phi)$ , где

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 & -\varphi_3 & \varphi_2 \\ \varphi_3 & 0 & -\varphi_1 \\ -\varphi_2 & \varphi_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Phi^T = -\Phi.$$

Такой вид  $V'$  предполагает, что возмущение  $\delta A$  мало и формулах для  $\delta \Lambda$  и разности  $V' - V$  достаточно учесть только члены первого порядка малости по этому возмущению. Для определения матриц  $\Phi$  и  $\delta \Lambda$  получаем систему

$$\Phi \Lambda - \Lambda \Phi + \delta \Lambda = Z, \quad Z = V^T [A(\delta A)^T + (\delta A)A^T]V = \|z_{ij}\|_{i,j=1}^3, \quad z_{ij} = z_{ji}.$$

Ее решение

$$\delta \Lambda = \text{diag}(z_{11}, z_{22}, z_{33}), \quad \varphi_1 = \frac{z_{23}}{\lambda_2 - \lambda_3}, \quad \varphi_2 = \frac{z_{31}}{\lambda_3 - \lambda_1}, \quad \varphi_3 = \frac{z_{12}}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

Вернемся к системе четырех звездных датчиков. Введенные выше матрицы  $B_k$  представим в виде  $B_k = \|\mathbf{b}_1^{(k)}, \mathbf{b}_2^{(k)}, \mathbf{b}_3^{(k)}\|$ . В новых обозначениях  $\mathbf{a}_k = \mathbf{b}_3^{(k)}$ ,  $A = \|\mathbf{b}_3^{(1)}, \mathbf{b}_3^{(2)}, \mathbf{b}_3^{(3)}, \mathbf{b}_3^{(4)}\|$ . Малое возмущение вектора  $\mathbf{b}_3^{(k)}$  можно представить в виде

$$\delta \mathbf{b}_3^{(k)} = \xi_k \mathbf{b}_1^{(k)} + \eta_k \mathbf{b}_2^{(k)} \equiv \boldsymbol{\theta}_k \times \mathbf{b}_3^{(k)}, \quad \boldsymbol{\theta}_k = -\eta_k \mathbf{b}_1^{(k)} + \xi_k \mathbf{b}_2^{(k)}.$$

Здесь  $\xi_k, \eta_k$  – параметры. Отсюда

$$\begin{aligned} \delta A &= \|\delta \mathbf{b}_3^{(1)}, \delta \mathbf{b}_3^{(2)}, \delta \mathbf{b}_3^{(3)}, \delta \mathbf{b}_3^{(4)}\| = \\ &= \|\xi_1 \mathbf{b}_1^{(1)} + \eta_1 \mathbf{b}_2^{(1)}, \xi_2 \mathbf{b}_1^{(2)} + \eta_2 \mathbf{b}_2^{(2)}, \xi_3 \mathbf{b}_1^{(3)} + \eta_3 \mathbf{b}_2^{(3)}, \xi_4 \mathbf{b}_1^{(4)} + \eta_4 \mathbf{b}_2^{(4)}\| = \\ &= \|\mathbf{b}_1^{(1)}, \mathbf{b}_1^{(2)}, \mathbf{b}_1^{(3)}, \mathbf{b}_1^{(4)}\| \begin{vmatrix} \xi_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \xi_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \xi_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \xi_4 \end{vmatrix} + \|\mathbf{b}_2^{(1)}, \mathbf{b}_2^{(2)}, \mathbf{b}_2^{(3)}, \mathbf{b}_2^{(4)}\| \begin{vmatrix} \eta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \eta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \eta_4 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Обозначим

$$\Xi = \text{diag}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4), \quad \mathbf{H} = \text{diag}(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4),$$

$$V = \|v_1, v_2, v_3\|, \quad M_i = \|\mathbf{b}_i^{(1)}, \mathbf{b}_i^{(2)}, \mathbf{b}_i^{(3)}, \mathbf{b}_i^{(4)}\|,$$

$$w_{ij} = M_i^T v_j = [w_{ij}^{(1)}, w_{ij}^{(2)}, w_{ij}^{(3)}, w_{ij}^{(4)}]^T \quad (i, j = 1, 2, 3).$$

Тогда

$$A = M_3, \quad \delta A = M_1 \Xi + M_2 \mathbf{H},$$

$$A(\delta A)^T + (\delta A)A^T = M_3 \Xi M_1^T + M_1 \Xi M_3^T + M_3 \mathbf{H} M_2^T + M_2 \mathbf{H} M_3^T,$$

$$z_{ij} = w_{3i}^T \Xi w_{1j} + w_{1i}^T \Xi w_{3j} + w_{3i}^T \mathbf{H} w_{2j} + w_{2i}^T \mathbf{H} w_{3j} = \sum_{k=1}^4 [\xi_k P_{ij}^{(k)} + \eta_k Q_{ij}^{(k)}],$$

$$P_{ij}^{(k)} = w_{3i}^{(k)} w_{1j}^{(k)} + w_{1i}^{(k)} w_{3j}^{(k)}, \quad Q_{ij}^{(k)} = w_{3i}^{(k)} w_{2j}^{(k)} + w_{2i}^{(k)} w_{3j}^{(k)}$$

Пусть теперь  $\xi_k, \eta_k$  ( $k=1, 2, 3, 4$ ) – независимые случайные величины с нулевыми средними значениями и одинаковыми стандартными отклонениями  $\sigma$ . В этом случае

$$\begin{aligned} Mz_{ij} &= 0, \quad Mz_{ij}^2 = \sigma^2 \sum_{k=1}^4 \{ [P_{ij}^{(k)}]^2 + [Q_{ij}^{(k)}]^2 \}, \\ Mz_{ij} z_{mn} &= \sigma^2 \sum_{k=1}^4 [P_{ij}^{(k)} P_{mn}^{(k)} + Q_{ij}^{(k)} Q_{mn}^{(k)}], \\ M\phi_1^2 &= \frac{Mz_{23}^2}{(\lambda_2 - \lambda_3)^2}, \quad M\phi_1 \phi_2 = \frac{Mz_{23} z_{31}}{(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_3 - \lambda_1)} \quad \text{и т. д.} \end{aligned}$$

Графики зависимости отношений  $\sqrt{M\phi_i^2} / \sigma$  ( $i=1, 2, 3$ ) от времени на сетке  $\{t_n\}$  в рассмотренном выше примере приведены на рис. 8в. Они позволяют судить о точности введенной равноточной системы координат. Здесь можно принять  $\sigma = 1.5 \div 2''$ .

**4. Аппроксимация равноточной системы координат на временном отрезке.** Пусть равноточная система координат найдена для моментов  $t_n$  ( $n=1, 2, \dots, N$ ),  $t_n < t_{n+1}$ , образующих достаточно густую сетку на некотором отрезке времени. Кватернион перехода от равноточной системы к базовой системе координат на момент  $t_n$  обозначим  $\mathbf{P}_n$ . Аппроксимацию движения равноточной системы построим в виде кватернионной функции  $\mathbf{P}(t)$ ,  $t_1 \leq t \leq t_N$ , для которой  $\mathbf{P}(t_n) \approx \mathbf{P}_n$ . Универсальный способ задания этой функции в случае плавного движения спутника основан на использовании дискретных рядов Фурье. Функцию  $\mathbf{P}(t)$  представим в виде  $\mathbf{P}(t) = \mathbf{S}(t) \circ \mathbf{F}[\mathbf{s}(t)]$ , где  $\mathbf{F}(\cdot)$  – кватернионная функция векторного аргумента, введенная в п. 3.

Кватернион  $\mathbf{S}(t)$  и вектор  $\mathbf{s}(t)$  находятся последовательно. Сначала – кватернион  $\mathbf{S}(t)$ , он задается выражениями

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(t) &= \frac{\mathbf{Q}(t)}{\|\mathbf{Q}(t)\|}, \quad \mathbf{Q}(t) = (Q_0(t), Q_1(t), Q_2(t), Q_3(t)), \\ Q_i(t) &= q_{i, M_1+1} + q_{i, M_1+2}(t-t_1) + \sum_{m=1}^{M_1} q_{i, m} \sin \frac{\pi m k (t-t_1)}{(t_K - t_1)} \quad (i=0, 1, 2, 3). \end{aligned} \quad (7)$$

Коэффициенты  $q_{i, m}$  вычисляются методом наименьших квадратов из условия наилучшего сглаживания выражением  $Q_i(t)$  соответствующей компоненты кватернионов  $\mathbf{P}_n$ . В случае равномерной временной сетки  $\{t_n\}_{n=1}^N$  можно использовать удобные расчетные формулы [4]. Число  $M_1$  одно и то же во всех выражениях  $Q_i(t)$ .

Функция  $\mathbf{s}(t)$  строится в виде

$$\mathbf{s}(t) = (s_1(t), s_2(t), s_3(t)),$$

$$s_j(t) = b_{j, M_2+1} + b_{j, M_2+2}(t-t_1) + \sum_{m=1}^{M_2} b_{j, m} \sin \frac{\pi m(t-t_1)}{(t_K-t_1)} \quad (j=1, 2, 3), \quad (8)$$

где коэффициенты  $b_{j, m}$  вычисляются методом наименьших квадратов из условия наилучшего сглаживания выражением  $s_j(t)$  соответствующей компоненты векторов  $\mathbf{s}_n = \mathbf{F}^{-1}[\mathbf{S}^{-1}(t_n) \circ \mathbf{P}_n]$ . Числа  $M_2$  в выражениях  $s_j(t)$  одинаковы.

Поясним принятый способ аппроксимации. Рассмотрим соотношения

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \|\mathbf{P}_n - \mathbf{S}(t_n) \circ \mathbf{F}[\mathbf{s}(t_n)]\|^2 &= \sum_{n=1}^N \|\mathbf{S}^{-1}(t_n) \circ \mathbf{P}_n - \mathbf{F}[\mathbf{s}(t_n)]\|^2 \approx \\ &\approx 4 \sum_{n=1}^N |\mathbf{F}^{-1}[\mathbf{S}^{-1}(t_n) \circ \mathbf{P}_n] - \mathbf{s}(t_n)|^2 = 4 \sum_{n=1}^N |\mathbf{s}_n - \mathbf{s}(t_n)|^2. \end{aligned}$$

Приближенное равенство в этой цепочке соотношений выполняется тем точнее, чем точнее выполняются условия  $|\mathbf{s}_n| \ll 1$  ( $n=1, 2, \dots, N$ ). Выполнение последних условий обеспечивается подходящим выбором  $M_1$ . Если этот выбор сделан правильно, то малость первого члена выписанной цепочки соотношений обеспечивается за счет малости ее последнего члена. Иными словами, точность аппроксимации кватернионов  $\mathbf{P}_n$  функцией  $\mathbf{P}(t)$  обеспечивается точностью аппроксимации векторов  $\mathbf{s}_n$  функцией  $\mathbf{s}(t)$ . Аппроксимацию этих векторов можно выполнить независимо по каждой компоненте – последняя сумма в цепочке разбивается на три не связанные между собой суммы. Векторы  $4[\mathbf{s}_n - \mathbf{s}(t_n)]$  задают бесконечно малые повороты равноточной системы из сглаженных положений в положения, найденные по измерениям.

Для движения спутника в режиме орбитальной ориентации числа  $M_1$  и  $M_2$  можно выбирать из условий

$$\frac{t_N - t_1}{M_1} = 100 \div 400 \text{с}, \quad \frac{t_N - t_1}{M_2} = 30 \div 60 \text{с}.$$

При таком выборе множитель  $\mathbf{S}(t)$  описывает низкочастотные вариации функции  $\mathbf{P}(t)$  с большой амплитудой, множитель  $\mathbf{F}[\mathbf{s}(t)]$  описывает высокочастотные колебания с малой амплитудой – не более нескольких угловых минут. Пример оценок точности аппроксимации равноточного кватерниона для режима орбитальной ориентации (рис. 8а) приведен на рис. 9. В этом примере выражения  $Q_i(t)$  и  $s_j(t)$  построены соответственно при  $M_1 = 70$  и  $M_2 = 600$ . Рис. 9а содержит графики ломаных, звенья которых соединяют значения одноименных компонент соседних по времени векторов  $\boldsymbol{\theta}_n = 4\mathbf{s}_n$ . Эти графики иллюстрируют ошибки аппроксимации  $\mathbf{P}_n \approx \mathbf{S}(t_n)$  в терминах вектора бесконечно

малого поворота равноточной системы координат. Рис. 9б содержит графики компонент вектора  $\boldsymbol{\theta}(t) = 4\mathbf{s}(t)$ . На рис. 9в приведены графики ломаных, звенья которых соединяют значения одноименных компонент соседних по времени невязок  $\Delta\boldsymbol{\theta}_n = \boldsymbol{\theta}_n - \boldsymbol{\theta}(t_n)$ . Итоговые ошибки аппроксимации:  $\text{RMS}(\Delta\theta_1) = 4.4''$ ,  $\text{RMS}(\Delta\theta_2) = 4.7''$ ,  $\text{RMS}(\Delta\theta_3) = 1.7''$ . Указанные значения относятся к равноточному кватерниону, найденному по нескорректированным ортам оптических осей датчиков. В случае предварительной коррекции углов  $\varphi_{ij}$ , результаты которой представлены на рис. 2,  $\text{RMS}(\Delta\theta_i)$  оказались немного меньше, но округленно выражаются теми же числами.

**5. Построение универсальной системы координат на временном отрезке.** Построенная выше аппроксимация равноточной системы координат, связанной с четырьмя звездными датчиками, наследует недостаток исходной информации: взаимная ориентация датчиков меняется со временем. По этой причине, если при построении такой системы использовать только мгновенные одномоментные показания датчиков, то полученная равноточная система будет испытывать малые (с амплитудой до  $10''$ ) колебания, не связанные с движением КА как твердого тела. Возможный способ избежать этих колебаний – определить систему координат, задавая ее угловую скорость. Такую систему назовем универсальной.

Пусть по одномоментным показаниям датчиков, полученным в моменты времени  $t_n$  ( $n=1, 2, \dots, N$ ),  $t_n < t_{n+1}$ , построены аппроксимации ортов  $\mathbf{a}_i(t)$  их осей  $x_3^{(i)}$  ( $i=1, 2, 3, 4$ ). Построение выполняется аналогично построению функции  $\mathbf{S}(t)$  в п. 4. Компоненты этих ортов заданы в базовой системе координат  $X_1X_2X_3$ . В общем случае каждый из датчиков имеет собственную угловую скорость, но эти скорости близки. Среднюю угловую скорость системы датчиков определим как вектор  $\boldsymbol{\omega}(t)$ , минимизирующий среднеквадратичную ошибку выполнения уравнений Пуассона

$$\dot{\mathbf{a}}_i(t) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}_i(t) \quad (i=1, 2, 3, 4).$$

Иными словами, найдем  $\boldsymbol{\omega}(t)$  из условия минимума выражения

$$\sum_{i=1}^4 w_i |\dot{\mathbf{a}}_i(t) - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}_i(t)|^2.$$

Здесь  $w_i$  – положительные числа (веса), производные  $\dot{\mathbf{a}}_i(t)$  рассчитываются по выражениям, аппроксимирующим орты  $\mathbf{a}_i(t)$ . Вектор  $\boldsymbol{\omega}(t)$  является решением линейной системы

$$\sum_{i=1}^4 w_i [\boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{a}_i) \mathbf{a}_i] = \sum_{i=1}^4 w_i (\mathbf{a}_i \times \dot{\mathbf{a}}_i),$$

его компоненты относятся к базовой системе координат.

Кватернион  $\mathbf{P}(t)$ , задающий ориентацию искомой универсальной системы координат относительно базовой системы, будем искать как решение уравнения

$$2\dot{\mathbf{P}} = \boldsymbol{\omega}(t) \circ \mathbf{P},$$

которое на сетке  $\{t_n\}$  обеспечивает наилучшую среднеквадратичную аппроксимацию равнооточных кватернионов  $\mathbf{P}_n$ .

Общее решение выписанного уравнения имеет вид  $\mathbf{P} = \mathbf{X}(t) \circ \mathbf{C}$ , где  $\mathbf{X}(t)$  – решение начальной задачи  $2\dot{\mathbf{X}} = \boldsymbol{\omega}(t) \circ \mathbf{X}$ ,  $\mathbf{X}(0) = 1$  (на самом деле годится любое решение с  $\mathbf{X}(0) \neq 0$ ),  $\mathbf{C}$  – постоянный кватернион. Кватернион  $\mathbf{C}$  находится из условия минимума выражения

$$\sum_{n=1}^N \|\mathbf{P}_n - \mathbf{X}(t_n) \circ \mathbf{C}\|^2 = \sum_{n=1}^N \|\mathbf{X}^{-1}(t_n) \circ \mathbf{P}_n - \mathbf{C}\|^2.$$

Решение последней задачи выражается формулой

$$\mathbf{C} = \left\| \sum_{n=1}^N \mathbf{X}^{-1}(t_n) \circ \mathbf{P}_n \right\|^{-1} \sum_{n=1}^N \mathbf{X}^{-1}(t_n) \circ \mathbf{P}_n.$$

Разности  $\mathbf{P}_n - \mathbf{X}(t_n) \circ \mathbf{C}$  удобно характеризовать векторами бесконечно малого поворота

$$\boldsymbol{\psi}_n = 4\mathbf{F}^{-1}[\mathbf{C}^{-1} \circ \mathbf{X}^{-1}(t_n) \circ \mathbf{P}_n] \quad (n = 1, 2, \dots, N).$$

Компоненты  $\boldsymbol{\psi}_n$  относятся к построенной универсальной системе.

В примере, рассмотренном в предыдущих пунктах, аппроксимация ортов  $\mathbf{a}_i(t)$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) строилась по их значениям на сетке  $\{t_n\}$ . Для каждой компоненты каждого орта строилось выражение (8) с  $M_2 = 300$ . При вычислении  $\mathbf{a}_i(t)$  и  $\dot{\mathbf{a}}_i(t)$  эти выражения нормировались. Опишем результаты расчетов в случае, когда при вычислении ортов  $\mathbf{a}_i(t)$  и кватернионов  $\mathbf{P}_n$  коррекция углов  $\varphi_{ij}$  (см. п. 2) не проводилась. Графики компонент в базовой системе координат найденной угловой скорости  $\boldsymbol{\omega}(t)$  приведены на рис. 10а. Эта скорость была вычислена на сетке  $\{t_n\}$ .

Уравнение относительно  $\mathbf{X}$  интегрировалось с помощью простой разностной схемы второго порядка [5]

$$\mathbf{X}(t_{n+1}) = \boldsymbol{\kappa}_{n+0.5} \circ \mathbf{X}(t_n), \quad \boldsymbol{\kappa}_{n+0.5} = \left( 1, -\frac{h\boldsymbol{\omega}(t_{n+0.5})}{4} \right)^{-1} \circ \left( 1, \frac{h\boldsymbol{\omega}(t_{n+0.5})}{4} \right),$$

$$t_{n+0.5} = \frac{t_n + t_{n+1}}{2}, \quad h = t_{n+1} - t_n \quad (n = 1, 2, \dots, N-1).$$



Для упрощения кода принималось  $\boldsymbol{\omega}(t_{n+0.5}) = [\boldsymbol{\omega}(t_n) + \boldsymbol{\omega}(t_{n+1})]/2$ . Графики компонент последовательности  $\boldsymbol{\psi}_n$  приведены на рис. 10б. Среднеквадратичные значения этих компонент в рассматриваемом примере составили 6.6", 6.4", 2.1". Результат слабо зависит от вариаций числа  $M$  в окрестности указанного выше значения  $M = 300$ .

В случае, когда орты  $\mathbf{a}_i(t)$  и кватернионы  $\mathbf{P}_n$  вычислялись тем же способом, но после коррекции углов  $\varphi_{ij}$ , результаты которой представлены на рис. 2, среднеквадратичные значения компонент векторов  $\boldsymbol{\psi}_n$  составили 4.5", 6.3", 1.7". Графики компонент векторов  $\boldsymbol{\omega}(t)$  и  $\boldsymbol{\psi}_n$  (ср. рис. 10) при использовании коррекции практически не изменились.

Рис. 11 иллюстрирует различие кватернионных функций  $\mathbf{S}(t) \circ \mathbf{F}[\mathbf{s}(t)]$  и  $\mathbf{P}(t) = \mathbf{X}(t) \circ \mathbf{C}$ . Различие выражено в терминах векторов бесконечно малого поворота  $\boldsymbol{\psi}_n = 4\mathbf{F}^{-1}\{\mathbf{P}^{-1}(t_n) \circ \mathbf{S}(t_n) \circ \mathbf{F}[\mathbf{s}(t_n)]\}$ . Обе функции построены без коррекции углов  $\varphi_{ij}$ . При проведении расчетов для этого рисунка в формулах (7), которые использовались для задания  $\mathbf{S}(t)$ , было принято  $M_1 = 70$ . В формулах (8), используемых для задания  $\mathbf{s}(t)$  и  $\mathbf{a}_i(t)$ , при построении рис. 11а было взято  $M_2 = 300$ ; при построении рис. 11б взято  $M_2 = 600$ . Для варианта на рис. 11а RMS компонент векторов  $\boldsymbol{\psi}_n$  составили 4.2", 0.69", 0.87", а для варианта на рис. 11 – 4.3", 0.69", 0.93". Как видим, RMS первой компоненты существенно больше, чем у остальных компонент. Как будет показано ниже, вокруг оси 1 универсальной системы координат спутник совершает разворот с орбитальной угловой скоростью. Угловые скорости вокруг осей 2 и 3 универсальной системы намного меньше.

Рис. 12, 13 иллюстрируют вариации положения собственных систем координат датчиков относительно универсальной системы. Вариации вычислялись так. Кватернион перехода от универсальной системы к системе  $x_1^{(i)} x_2^{(i)} x_3^{(i)}$  в момент времени  $t_n$  равен  $[\mathbf{Q}_n^{(i)}]^{-1} \circ \mathbf{P}(t_n)$ . Среднее по времени положение системы  $x_1^{(i)} x_2^{(i)} x_3^{(i)}$  относительно универсальной системы характеризуется кватернионом [5]

$$\hat{\Lambda}_i = \left\| \sum_{n=1}^N [\mathbf{Q}_n^{(i)}]^{-1} \circ \mathbf{P}(t_n) \right\|^{-1} \sum_{n=1}^N [\mathbf{Q}_n^{(i)}]^{-1} \circ \mathbf{P}(t_n).$$

Для рассматриваемого отрезка данных

$$\begin{aligned} \hat{\Lambda}_1 &= (0.219, 0.815, -0.138, -0.519), & \hat{\Lambda}_3 &= (-0.138, -0.519, -0.219, -0.815), \\ \hat{\Lambda}_2 &= (-0.218, -0.814, -0.140, -0.519), & \hat{\Lambda}_4 &= (0.140, 0.519, -0.218, -0.815). \end{aligned}$$

Отклонение кватернионов  $[\mathbf{Q}_n^{(i)}]^{-1} \circ \mathbf{P}(t_n)$  от  $\hat{\Lambda}_i$  удобно описывать векторами бесконечно малого поворота

$$\boldsymbol{\varphi}_n^{(i)} = 4\mathbf{F}^{-1}\{\hat{\mathbf{A}}_i^{-1} \circ [\mathbf{Q}_n^{(i)}]^{-1} \circ \mathbf{P}(t_n)\} \quad (i=1, 2, 3, 4; n=1, 2, \dots, N).$$

Последовательность  $\boldsymbol{\varphi}_n^{(i)}$  ( $n=1, 2, \dots, N$ ) характеризует вариации собственной системы координат датчика  $i$  относительно универсальной системы. Компоненты векторов  $\boldsymbol{\varphi}_n^{(i)}$  относятся к универсальной системе. Эти векторы сглаживались выражениями (8) при  $M_2=300$ . Сглаживание осуществлялось независимо для каждой векторной компоненты. Полученное сглаживающее выражение обозначим  $\boldsymbol{\varphi}_{\text{ap}}^{(i)}(t)$ . Затем вычислялись отклонения  $\Delta\boldsymbol{\varphi}_n^{(i)} = \boldsymbol{\varphi}_n^{(i)} - \boldsymbol{\varphi}_{\text{ap}}^{(i)}(t_n)$  и среднеквадратичные значения компонент этих отклонений.

В полном объеме графики перечисленных величин приведены только для датчика 1 (рис. 12). На рис. 13 приведены графики выражений  $\boldsymbol{\varphi}_{\text{ap}}^{(i)}(t)$  для остальных датчиков. Графики компонент векторов  $\boldsymbol{\varphi}_n^{(i)}$  и  $\Delta\boldsymbol{\varphi}_n^{(i)}$  для этих датчиков выглядят примерно также как на рис. 12. В подписях к рисункам приведены покомпонентные RMS отклонений  $\Delta\boldsymbol{\varphi}_n^{(i)}$ .

### 6. Оценка точности построения универсальной системы координат.

Движение универсальной системы координат, описываемое кватернионной функцией  $\mathbf{P}(t) = \mathbf{X}(t) \circ \mathbf{C}$ , должно быть близко движению спутника – твердого тела. В рассматриваемом конкретном примере – движению спутника режиме орбитальной ориентации. Этот режим достаточно точно описывается эйлеровым разворотом, а малые отклонения от такого разворота при необходимости можно учесть с помощью конструкции п. 4, используя кватернион  $\mathbf{F}[\mathbf{s}(t)]$  с подходящими выражениями (8) [1, 6, 7].

Предположим, что спутник совершает точный эйлеров разворот. В этом случае функция  $\mathbf{P}(t)$  имеет вид

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{P}_c \circ \mathbf{Q}(t), \quad \mathbf{Q}(t) = (\cos\alpha(t), \mathbf{e}\sin\alpha(t)),$$

где нормированный кватернион  $\mathbf{P}_c$  и орт  $\mathbf{e}$  – постоянные величины, компоненты орта  $\mathbf{e}$  относятся к универсальной системе координат,  $\alpha(t)$  – скалярная функция. От кватерниона  $\mathbf{P}_c$  можно избавиться следующим образом. Введем средний кватернион

$$\mathbf{P}_M = \|\mathbf{P}_*\|^{-1} \mathbf{P}_*, \quad \mathbf{P}_* = \sum_{n=1}^N \mathbf{P}(t_n).$$

В силу предыдущей формулы

$$\mathbf{P}_* = \mathbf{P}_c \circ \sum_{n=1}^N \mathbf{Q}(t_n), \quad \sum_{n=1}^N \mathbf{Q}(t_n) = \|\mathbf{P}_*\| (\cos\alpha_c, \mathbf{e}\sin\alpha_c),$$

где  $\alpha_c$  – некоторое число. Для функции  $\tilde{\mathbf{Q}}(t) = \mathbf{P}_M^{-1} \circ \mathbf{P}(t)$  имеет место формула

$$\tilde{\mathbf{Q}}(t) = (\cos\tilde{\alpha}(t), \mathbf{e}\sin\tilde{\alpha}(t)), \quad \tilde{\alpha}(t) = \alpha - \alpha_c, \quad (9)$$

которая не содержит  $\mathbf{P}_c$ . Графики компонент функции  $\tilde{\mathbf{Q}}(t) = \mathbf{P}_M^{-1} \circ \mathbf{P}(t)$ , рассчитанной для рассматриваемого примера, приведены на рис. 14а. В этом расчете коррекция углов  $\varphi_{ij}$  (см. п. 2) не проводилась.

Реальное движение спутника отличается от эйлерова разворота, и формула (9) выполнена лишь приближенно. Использование этой формулы основывается на методе наименьших квадратов. Согласно (9)  $\text{Im}\tilde{\mathbf{Q}}(t) \sim \mathbf{e}$ . Следовательно, компоненты реального вектора  $\text{Im}\tilde{\mathbf{Q}}(t) = (q_1(t), q_2(t), q_3(t))$  должны достаточно точно удовлетворять двум линейным связям. Чтобы записать эти связи в удобной форме, параметризуем компоненты орта  $\mathbf{e}$  двумя параметрами  $a$  и  $b$ , положив

$$\mathbf{e} = \frac{(1, a, b)}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}}.$$

С использованием этих параметров указанные связи можно представить в виде  $q_2(t) \approx a q_1(t)$ ,  $q_3(t) \approx b q_1(t)$ . Параметры  $a$  и  $b$  найдем, минимизируя по ним выражения

$$\sum_{n=1}^N [q_2(t_n) - a q_1(t_n)]^2 \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^N [q_3(t_n) - b q_1(t_n)]^2.$$

Если найденные значения этих параметров обеспечат достаточно точное выполнение указанных линейных связей, то сделанное выше предположение о близости вращательного движения спутника эйлерову развороту можно считать верным.

Рис. 14б иллюстрирует результаты решения задач наименьших квадратов для определения параметров  $a$  и  $b$  в нашем примере. Здесь приведены графики остатков  $e_2^{(n)} = q_2(t_n) - a q_1(t_n)$  и  $e_3^{(n)} = q_3(t_n) - b q_1(t_n)$ . Найдено  $a = 8.27 \cdot 10^{-4}$ ,  $b = 2.96 \cdot 10^{-4}$ . Как видим, движение КА с высокой точностью представляло собой эйлеров разворот.

С использованием найденных оценок параметров  $a$  и  $b$  можно записать соотношения

$$\sin \tilde{\alpha}(t_n) \approx \frac{q_1(t_n) + a q_2(t_n) + b q_3(t_n)}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}} \equiv s_n, \quad \cos \tilde{\alpha}(t_n) \approx \text{Re}\tilde{\mathbf{Q}}(t_n) \equiv c_n.$$

Графики последовательностей  $s_n$ ,  $c_n$  и график ошибки  $\varepsilon_n = s_n^2 + c_n^2 - 1$  приведены на рис. 14в. По последовательностям  $s_n$  и  $c_n$  можно вычислить значения функции  $\tilde{\alpha}(t)$  в точках  $t_n$ . График этой функции приведен в верхней части рис. 15а. График выглядит как прямая, но такая аппроксимация в рассматриваемой задаче недостаточна. Функцию  $\tilde{\alpha}(t)$  аппроксимируем выражением вида (8) при

$M_2 = 300$ . Это выражение обозначим  $\chi(t)$ . График разности  $\Delta\alpha = \tilde{\alpha}(t) - \chi(t)$  приведен в нижней части рис. 15а.

Функция  $\hat{\mathbf{Q}}(t) = (\cos \chi(t), \mathbf{e} \sin \chi(t))$ , где орт  $\mathbf{e}$  задан найденными  $a$  и  $b$ , служит аппроксимацией функцией  $\tilde{\mathbf{Q}}(t)$ . Исходная функция  $\mathbf{P}(t)$  аппроксимируется выражением  $\mathbf{P}_M \circ \hat{\mathbf{Q}}(t)$ . Ошибки обеих аппроксимаций удобно представить последовательностью векторов бесконечно малого поворота определив ее соотношениями  $\boldsymbol{\theta}_n = 4\mathbf{F}^{-1}[\hat{\mathbf{Q}}^{-1}(t_n) \circ \tilde{\mathbf{Q}}(t_n)] = (\theta_{1,n}, \theta_{2,n}, \theta_{3,n})$ . Компоненты этих векторов относятся к универсальной системе. Последовательности  $\theta_{j,n}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) сглаживалась выражениями вида (8) при  $M_2 = 300$ . Построенные аппроксимирующие выражения обозначим  $\theta_{j,ap}(t)$  ( $j = 1, 2, 3$ ), их графики приведены на рис. 15б. На рис. 15в приведены графики разностей  $\Delta\theta_{n,j} = \theta_{n,j} - \theta_{j,ap}(t_n)$ ,  $\text{RMS}(\Delta\theta_1) = 0.35''$ ,  $\text{RMS}(\Delta\theta_2) = 0.37''$ ,  $\text{RMS}(\Delta\theta_3) = 0.31''$ .

Последовательность одномоментных равноточных кватернионов  $\mathbf{P}_n$ , построенную в п.3, также можно аппроксимировать произведением кватерниона эйлера разворота и кватерниона  $\mathbf{F}[\mathbf{s}(t)] \approx 1$  с подходящими выражениями (8). Рассмотрим случай, когда кватернионы  $\mathbf{P}_n$  вычислены после коррекции углов  $\varphi_{ij}$ , результаты которой представлены на рис. 2. В этом случае расчеты, выполненные по схеме данного пункта с заменой кватернионов  $\mathbf{P}(t_n) = \mathbf{X}(t_n) \circ \mathbf{C}$  на  $\mathbf{P}_n$  с теми же числами  $M_2$  в выражениях вида (8) дают для разностей  $\Delta\theta_{n,j}$  значения  $\text{RMS}(\Delta\theta_{1,2,3}) = 4.5'', 6.3'', 1.6''$ .

**7. Определение положения универсальной системы координат относительно приборной системы координат спутника.** Найти матрицу и кватернион перехода от определенной в п. 5 универсальной системы координат к приборной системе координат спутника можно, используя телеметрические значения угловой скорости. На временном отрезке, рассматриваемом в данной работе, эти значения заданы на сетке с шагом 0.5 с, каждый второй узел которой практически совпадает с одним из узлов сетки  $\{t_n\}_{n=1}^N$  задания кватернионов. Поскольку угловая скорость универсальной системы находилась сглаживанием, телеметрические значения угловой скорости спутника также были сглажены. Как показывает опыт, чтобы при сглаживании избежать краевых эффектов, лучше сглаживать не компоненты угловой скорости, а соответствующие квазиуглы – интегралы от этих компонент. Интегралы вычислялись с помощью формулы трапеций на временной сетке телеметрических значений. Затем они сглаживались выражениями вида (8), и производные этих выражений вычислялись на сетке значений кватерниона. Компоненты вектора угловой скорости, вычисленного таким способом на момент  $t_n$ , обозначим  $\Omega_i^{(n)}$  ( $i = 1, 2, 3$ ;  $n = 1, 2, \dots, N$ ). Графики сглаженных телеметрических значений компонент угловой скорости спутника приведены на рис. 16а. Компоненты относятся к при-

борной системе координат спутника, в сглаживающих выражениях для квази-углов учитывались по 300 гармоник.

На рис. 16б приведены графики компонент угловой скорости универсальной системы координат в ее собственных осях. Способ расчета этих компонент состоял в следующем. Сначала угловая скорость универсальной системы была рассчитана в осях базовой системы на временной сетке значений кватерниона. Расчет выполнен методом п. 5 на основе аппроксимации ортов осей датчиков  $x_3^{(i)}$ , полученной с использованием 300 гармоник в соответствующих выражениях вида (8). Результат представлен на рис. 10а. Затем найденная угловая скорость была пересчитана в универсальную систему (на самом деле она пересчитывалась в отвечающую тому же моменту времени равноточную систему, но при анализе угловых скоростей различием между этими системами можно пренебречь). Относящиеся к моменту времени  $t_n$  компоненты угловой скорости универсальной системы в ее собственных осях обозначим  $\omega_i^{(n)}$  ( $i=1, 2, 3$ ;  $n=1, 2, \dots, N$ ).

Если пренебречь ошибками измерений и разного рода возмущениями, то при каждом  $n$  величины  $\Omega_i^{(n)}$  и  $\omega_i^{(n)}$  являются компонентами одного и того же вектора и поэтому связаны определенными соотношениями. Эти соотношения с учетом постоянных смещений в телеметрических значениях угловой скорости запишем в виде

$$\Omega_i^{(n)} = \Delta_i + \sum_{j=1}^3 c_{ij} \omega_j^{(n)} \quad (i=1, 2, 3; n=1, 2, \dots, N), \quad (10)$$

где  $\Delta_i$  – указанные постоянные смещения,  $c_{ij}$  – элементы матрицы перехода  $C$  от универсальной системы координат к приборной системе. Если на отрезке  $t_1 \leq t \leq t_N$  спутник совершал достаточно сложное вращательное движение, то для отыскания матрицы  $C$  и смещений  $\Delta_i$  удобно воспользоваться методом наименьших квадратов. Применение этого метода означает принятие следующей гипотезы: ошибки в соотношениях (10) некоррелированы, имеют нулевые математические ожидания и одинаковые дисперсии.

Следуя методу наименьших квадратов, ищем минимум выражения

$$Z = \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^3 [\Omega_i^{(n)} - \hat{\Omega}_i^{(n)}]^2, \quad \hat{\Omega}_i^{(n)} = \Delta_i + \sum_{j=1}^3 c_{ij} \omega_j^{(n)}$$

по величинам  $c_{ij}$  и  $\Delta_i$  при условии, что матрица  $C$  ортогональна и  $\det C = 1$ . Эта задача решается с помощью стандартных процедур вычислительной линейной алгебры (ср. [8], где описано решение аналогичной задачи для другого вида измерений). Обозначим ее решение  $C^\circ$ ,  $\Delta^\circ = (\Delta_1^\circ, \Delta_2^\circ, \Delta_3^\circ)^T$ . В линейном приближении окрестность решения параметризуется независимыми параметрами  $\xi_i, \theta_i$  ( $i=1, 2, 3$ ):  $\Delta_i = \Delta_i^\circ + \xi_i$ ,  $C = E_\theta C^\circ$ , где

$$E_{\theta} = \left\| \begin{array}{ccc} 1 & -\theta_3 & \theta_2 \\ \theta_3 & 1 & -\theta_1 \\ -\theta_2 & \theta_1 & 1 \end{array} \right\|.$$

Величины  $\theta_i$  представляют собой компоненты вектора бесконечно малого поворота, характеризующего отличие матрицы  $C$  от ее оценки  $C^\circ$ . Эти компоненты относятся к приборной системе координат. Согласно методу наименьших квадратов параметры  $\xi_i, \theta_i$  образуют случайный вектор  $\eta \in R^6$  с математическим ожиданием равным нулю. Ковариационная матрица  $K_\eta$  этого вектора выражается через матрицу  $P$  системы нормальных уравнений, получающейся линеаризацией исходной задачи по  $\eta$  в точке минимума  $Z$ , и значение  $Z_{\min}$ :

$$K_\eta = \sigma_0^2 P^{-1}, \quad \sigma_0 = \sqrt{\frac{Z_{\min}}{3N-6}}.$$

Здесь  $\sigma_0$  – стандартное отклонение ошибок в соотношениях (10). Стандартные отклонения величин  $\xi_i, \theta_i$  – квадратные корни из соответствующих диагональных элементов матрицы  $K_\eta$  – обозначим  $\sigma_{\Delta i}$  и  $\sigma_{\theta i}$ .

Приведем результаты применения описанного метода к данным, приведенным на рис. 16а и 16б. В данном случае  $N=19004$ ,  $t_N - t_1 = 19003\text{с}$ ,

$$\Delta^\circ = \left\| \begin{array}{c} -1.80 \cdot 10^{-5} \text{с}^{-1} \\ -4.00 \cdot 10^{-5} \text{с}^{-1} \\ -1.88 \cdot 10^{-7} \text{с}^{-1} \end{array} \right\|, \quad C^\circ = \left\| \begin{array}{ccc} 0.034308 & 0.077841 & -0.996375 \\ -0.030676 & 0.996574 & 0.076800 \\ 0.998940 & 0.027930 & 0.036579 \end{array} \right\|,$$

$$\sigma_{\Delta 1} = 9.5 \cdot 10^{-7} \text{с}^{-1}, \quad \sigma_{\Delta 2} = 8.6 \cdot 10^{-7} \text{с}^{-1}, \quad \sigma_{\Delta 3} = 4.2 \cdot 10^{-8} \text{с}^{-1},$$

$$\sigma_{\theta 1} = 0.044^\circ, \quad \sigma_{\theta 2} = 0.051^\circ, \quad \sigma_{\theta 3} = 0.18^\circ, \quad \sigma_0 = 2.87 \cdot 10^{-7} \text{с}^{-1}.$$

Графики разностей  $\Omega_i^{(n)} - \hat{\Omega}_i^{(n)}$  приведены на рис. 16в.

Если приборную систему координат переводить в универсальную тремя последовательными поворотами: 1) на угол  $\alpha$  вокруг оси 2; 2) на угол  $\beta$  вокруг новой оси 3; 3) на угол  $\gamma$  вокруг оси 1, получившейся после первых двух поворотов (эта ось совпадает с осью 1 универсальной системы) – то указанная матрица  $C^\circ$  отвечает углам  $\alpha = -88.033^\circ$ ,  $\beta = -1.758^\circ$ ,  $\gamma = -4.407^\circ$ .

Стандартное отклонение  $\sigma_{\theta 3}$  более чем в три раза превышает стандартные отклонения  $\sigma_{\theta 1}$  и  $\sigma_{\theta 2}$ . Этот факт можно объяснить тем, что спутник совершает практически чистое вращение вокруг оси 3 приборной системы координат. По-видимому, по той же причине смещение  $\sigma_{\Delta 3}$  в 20 раз меньше смещений  $\sigma_{\Delta 1}$  и  $\sigma_{\Delta 2}$ .

**8. Заключение.** Совместная обработка измерений четырех датчиков, выполненных в единые моменты времени, позволила связать с датчиками универсальную систему координат, используя которую можно с высокой точностью описать вращательное движение спутника. С реалистической моделью такого движения универсальная система согласуется со среднеквадратичной ошибкой менее  $0.4''$  по каждой компоненте вектора своего бесконечно малого поворота. Положение универсальной системы относительно приборной системы координат спутника определялось по измерениям угловой скорости. Среднеквадратичные ошибки такого определения по компонентам вектора бесконечно малого поворота универсальной системы составили  $0.044^\circ$ ,  $0.051^\circ$  и  $0.18^\circ$ . Низкочастотные (с частотами менее  $0.05\text{Гц}$ ) вариации положений собственных систем координат датчиков относительно универсальной системы не превышают  $10''$ . Эти вариации имеют периодический характер с основной частотой, равной орбитальной частоте. Среднеквадратичные значения высокочастотных составляющих указанных вариаций не превышают  $18''$ .

Данная работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (проект 14-01-00423)

### Литература

1. Аванесов Г.А., Бессонов Р.В., Куркина А.Н., Никитин А.В., Сазонов В.В. Оценка точности определения ориентации космического аппарата по измерениям нескольких звездных датчиков БОКЗ-М60 // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2014. № 10. 40 с.
2. Уилкинсон Дж., Райнш К. Справочник алгоритмов на языке АЛГОЛ. Линейная алгебра. М.: Машиностроение, 1976.
3. Гельфанд И.М. Лекции по линейной алгебре. М.: Наука, 1966.
4. Ланцош К. Практические методы прикладного анализа. М.: Физматгиз, 1961.
5. Аванесов Г.А., Красиков В.А., Никитин А.В., Сазонов В.В. Оценка точности определения параметров ориентации осей системы координат астроизмерительных приборов БОКЗ-М по экспериментальным данным // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2010. № 74. 37 с.
6. Аванесов Г.А., Красиков В.А., Никитин А.В., Сазонов В.В. Определение вращательного движения космического аппарата в режиме астрокоррекции по измерениям звездного датчика БОКЗ-М // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2010. № 30. 22 с.
7. Бессонов Р.В., Куркина А.Н., Сазонов В.В. Оценка точности определения параметров ориентации осей системы координат астроизмерительного прибора БОКЗ-М60 // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша, 2012. № 22. 39 с.
8. Панкратов В.А., Сазонов В.В. Проверка согласованности данных измерений магнитометров, установленных на борту ИСЗ // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2010. № 43. 16 с.

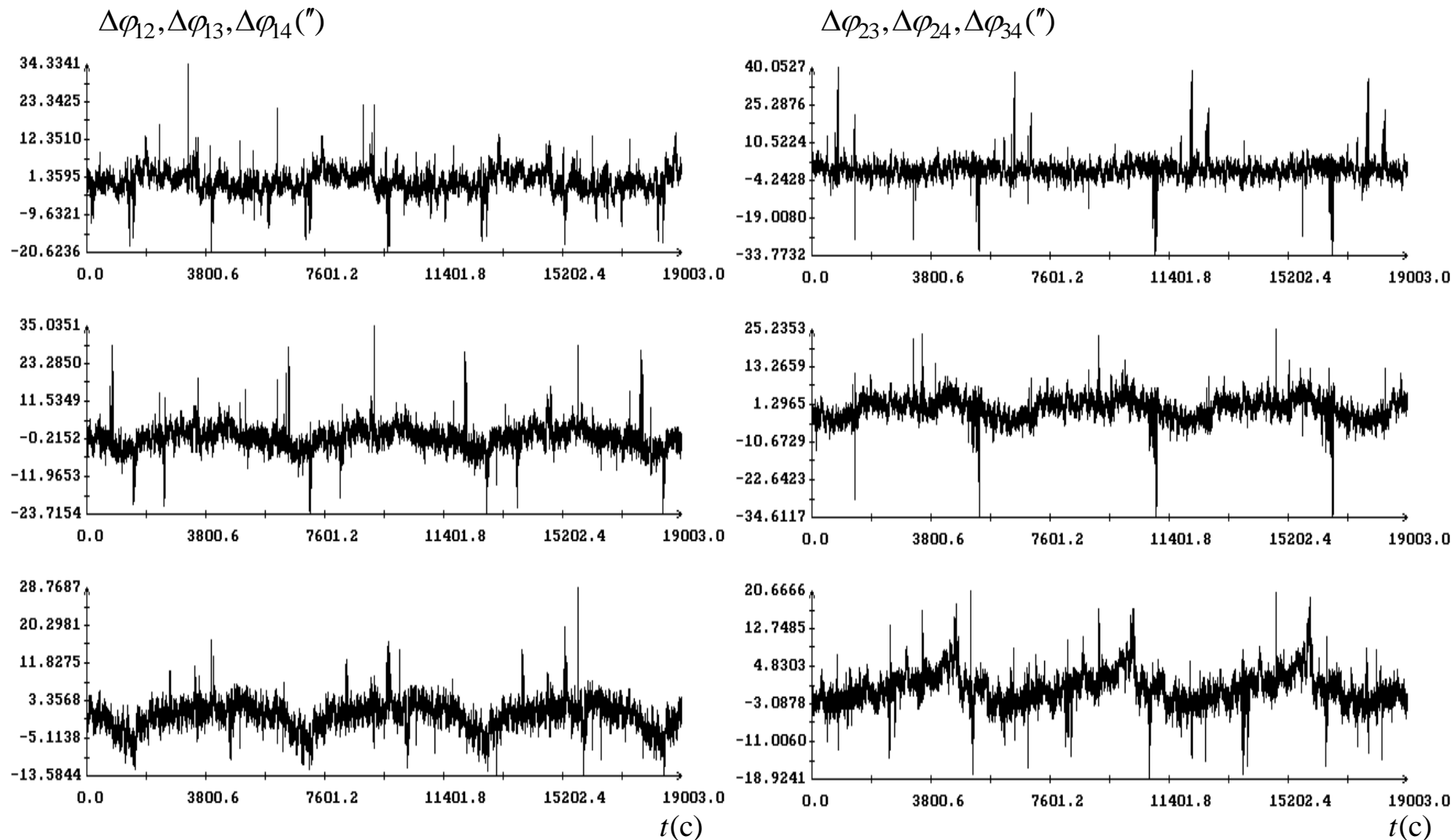


Рис. 1. Вариации углов между оптическими осями датчиков. Момент  $t=0$  отвечает 21:00:01 UTC 2015.01.14. Средние значения и стандартные отклонения углов:  $\langle\varphi_{12}\rangle = -76.55^\circ(3.28'')$ ,  $\langle\varphi_{13}\rangle = -59.97^\circ(3.96'')$ ,  $\langle\varphi_{14}\rangle = 42.94^\circ(3.03'')$ ,  $\langle\varphi_{23}\rangle = 42.94^\circ(4.01'')$ ,  $\langle\varphi_{24}\rangle = -59.96^\circ(3.75'')$ ,  $\langle\varphi_{34}\rangle = -76.54^\circ(3.54'')$ .



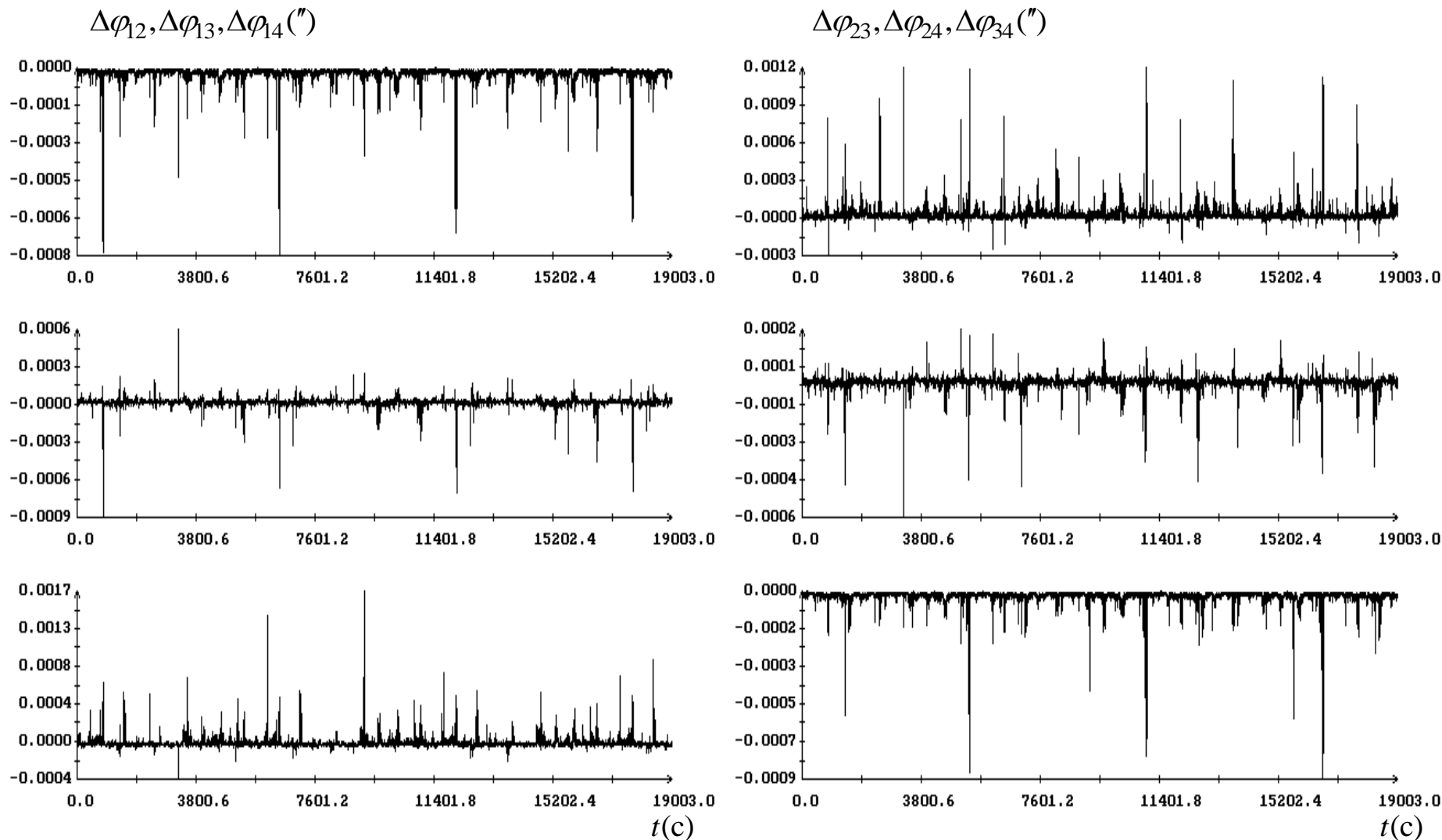


Рис. 2. Вариации углов между оптическими осями датчиков после коррекции. Средние значения и стандартные отклонения углов:  $\langle \varphi_{12} \rangle = -76.55^\circ (4.7 \cdot 10^{-5} \text{arcsec})$ ,  $\langle \varphi_{13} \rangle = -59.97^\circ (4.1 \cdot 10^{-5} \text{arcsec})$ ,  $\langle \varphi_{14} \rangle = 42.94^\circ (5.7 \cdot 10^{-5} \text{arcsec})$ ,  $\langle \varphi_{23} \rangle = 42.94^\circ (6.4 \cdot 10^{-5} \text{arcsec})$ ,  $\langle \varphi_{24} \rangle = -59.96^\circ (2.7 \cdot 10^{-5} \text{arcsec})$ ,  $\langle \varphi_{34} \rangle = -76.54^\circ (4.5 \cdot 10^{-5} \text{arcsec})$ .

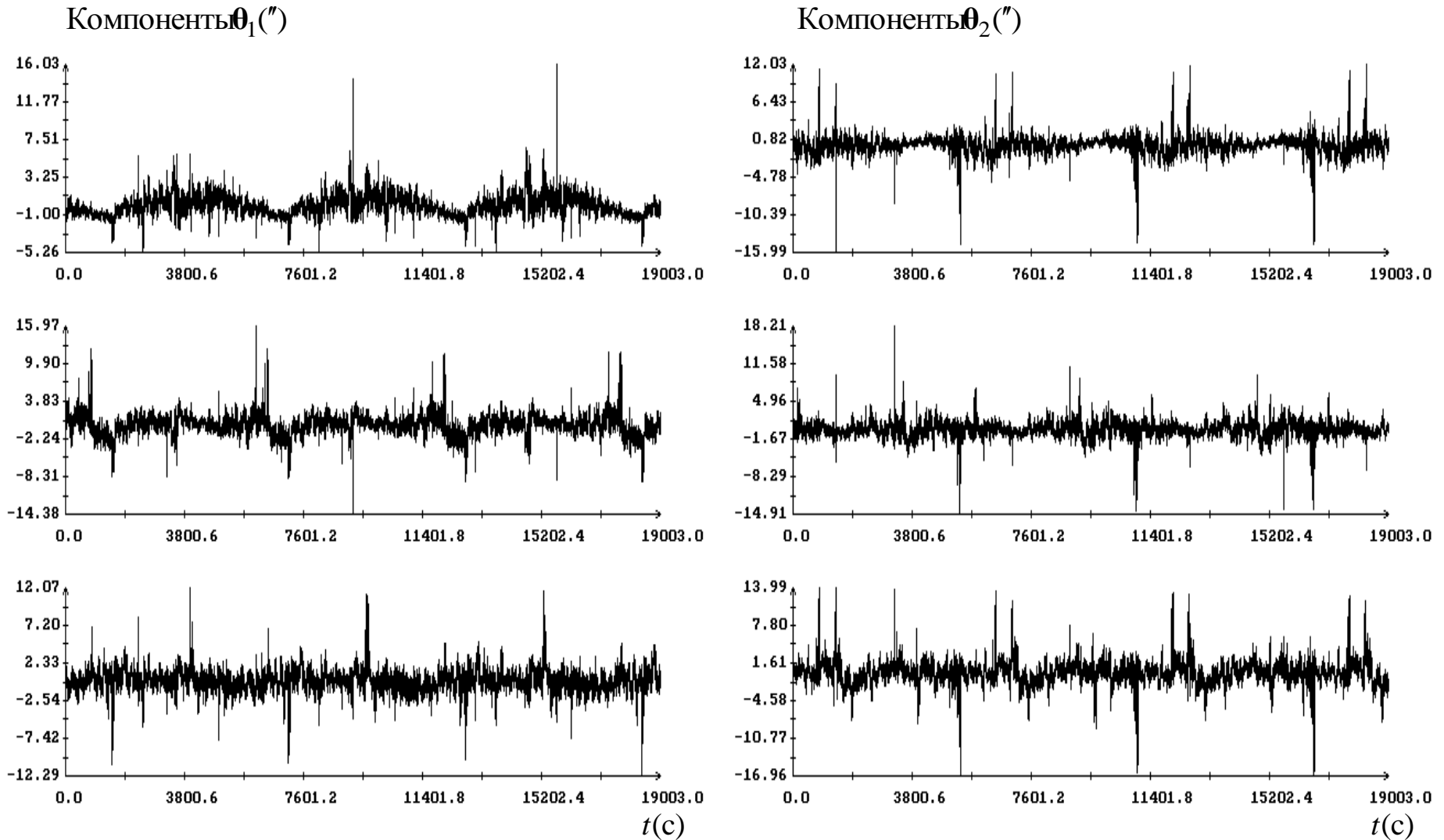


Рис. 3. Корректирующие векторы бесконечно малого поворота  $\theta_1$  и  $\theta_2$ . Средние значения и стандартные отклонения компонент ("):  $\langle \theta_1 \rangle = (0.39, -0.87, 0.39)$ ,  $\text{RMS}\theta_1 = (1.13, 1.74, 1.42)$ ,  $\langle \theta_2 \rangle = (-0.30, 0.68, -0.25)$ ,  $\text{RMS}\theta_2 = (1.46, 1.36, 2.03)$ .

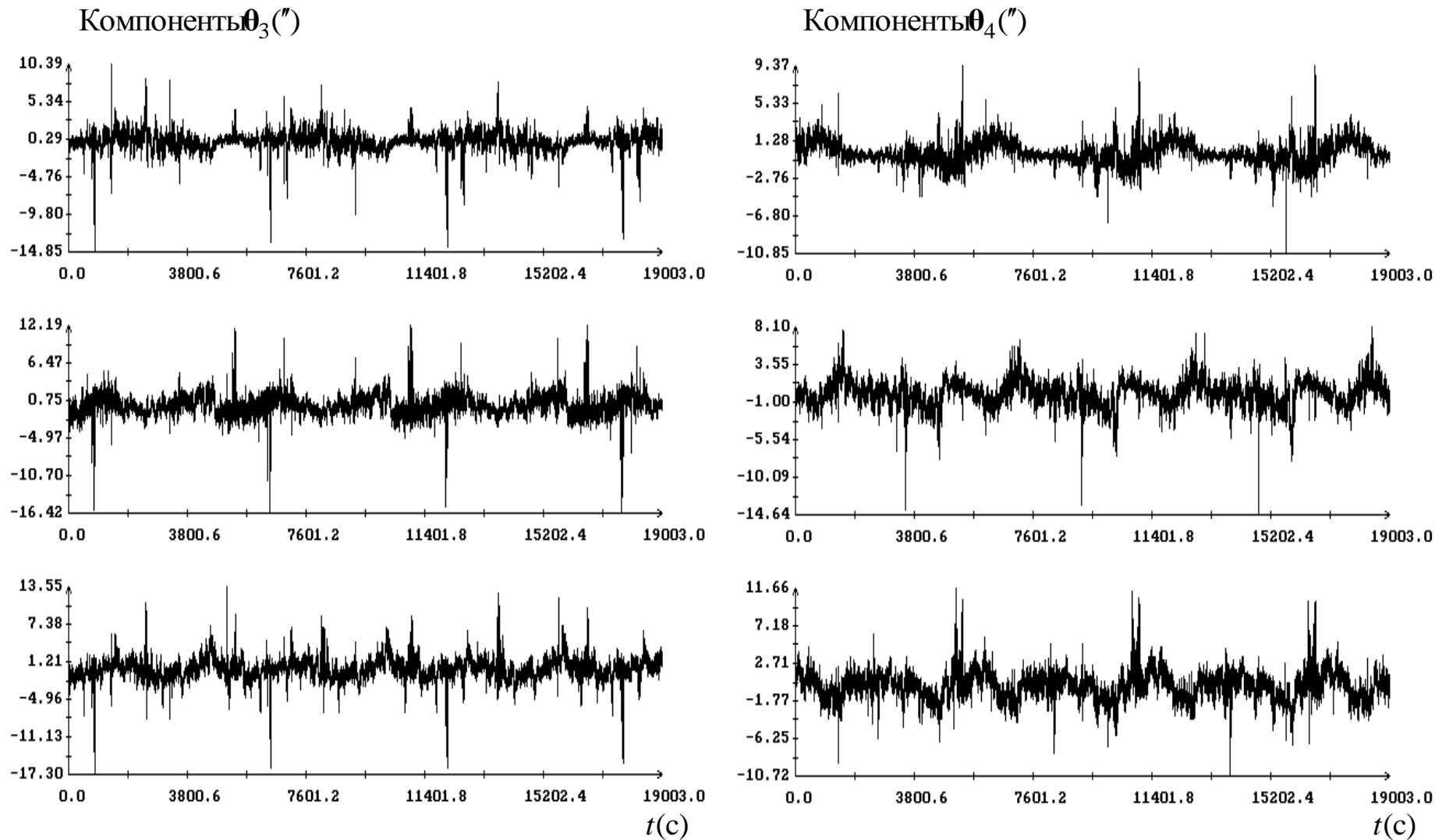
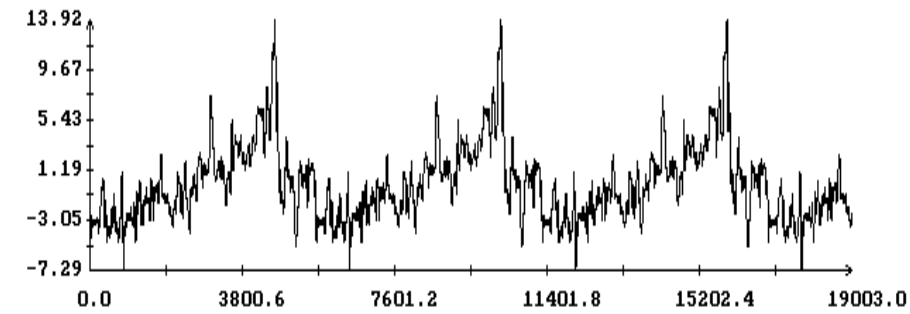
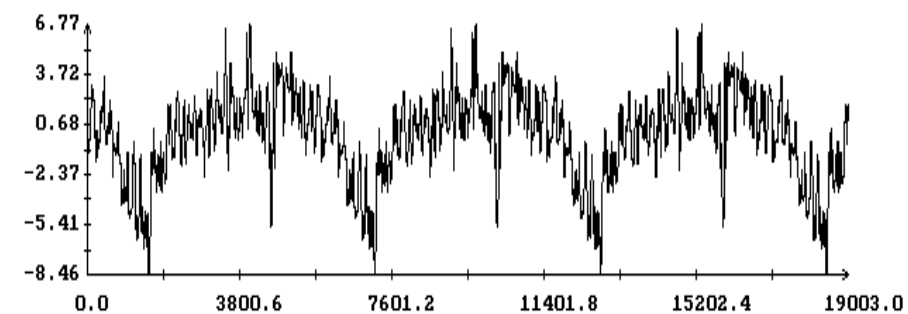
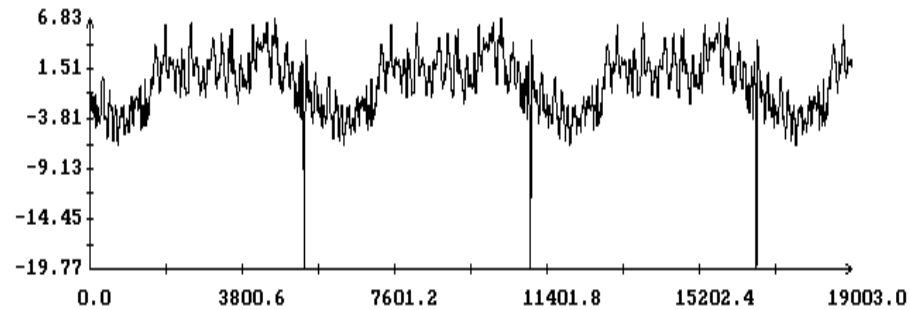
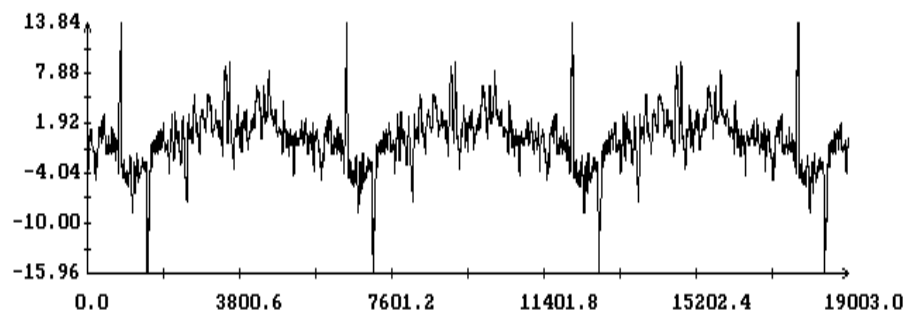
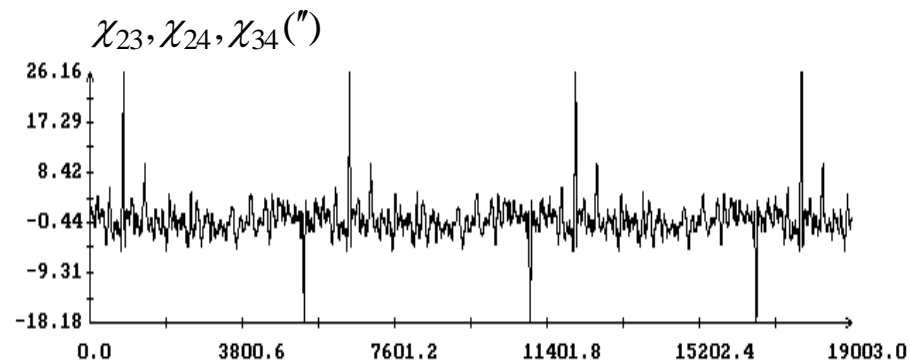
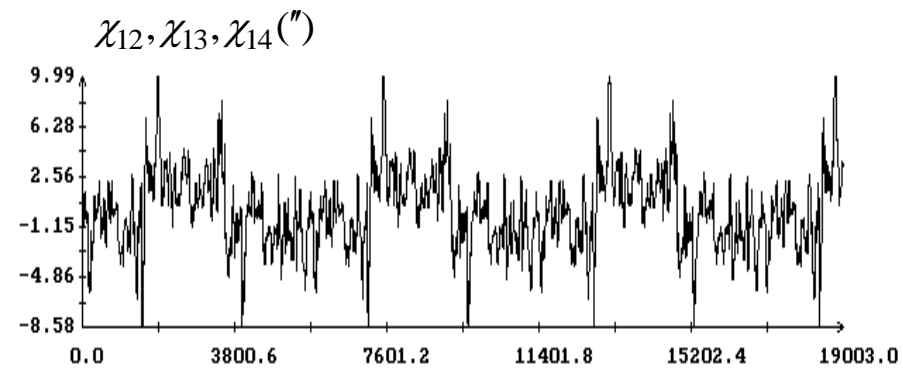


Рис. 4. Корректирующие векторы бесконечно малого поворота  $\theta_3$  и  $\theta_4$ . Средние значения и стандартные отклонения компонент ("):  $\langle \theta_3 \rangle = (-0.30, 0.85, 0.23)$ ,  $\text{RMS}\theta_3 = (1.42, 1.70, 1.98)$ ,  $\langle \theta_4 \rangle = (0.21, -0.66, -0.37)$ ,  $\text{RMS}\theta_4 = (1.21, 1.36, 1.62)$ .



$t(c)$

$t(c)$

Рис. 5. Периодическая аппроксимация углов между оптическими осями датчиков до коррекции. Стандартные отклонения:  $\sigma_{12} = 1.66''$ ,  $\sigma_{13} = 2.19''$ ,  $\sigma_{14} = 1.44''$ ,  $\sigma_{23} = 2.74''$ ,  $\sigma_{24} = 2.12''$ ,  $\sigma_{34} = 1.55''$ .

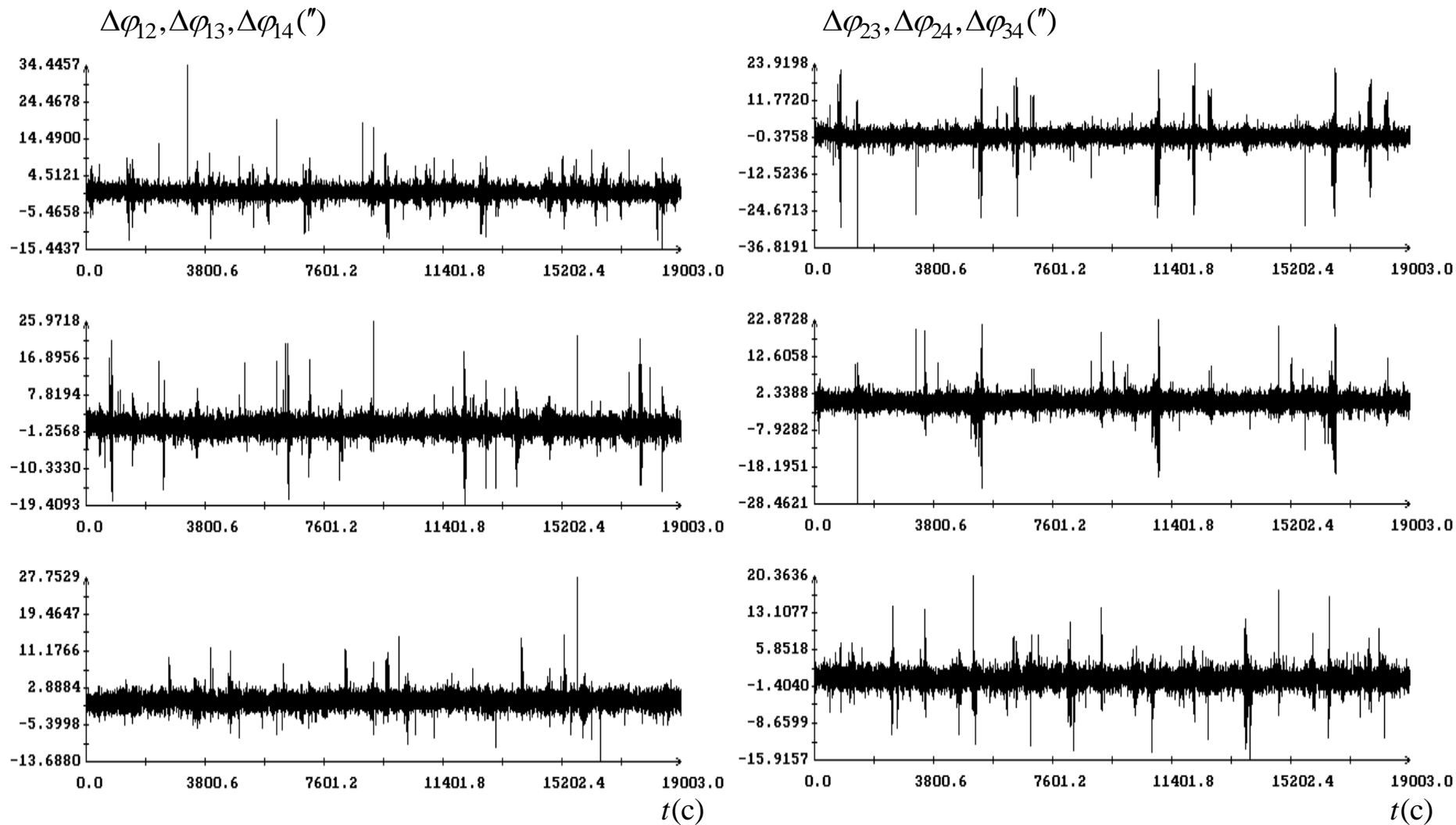


Рис. 6. Вариации углов между оптическими осями датчиков после коррекции с использованием функций  $\chi_{ij}$  ( $i < j$ ).

Средние значения и стандартные отклонения углов:  $\langle \varphi_{12} \rangle = -76.56^\circ(1.66'')$ ,  $\langle \varphi_{13} \rangle = -59.97^\circ(2.19'')$ ,  
 $\langle \varphi_{14} \rangle = 42.94^\circ(1.44'')$ ,  $\langle \varphi_{23} \rangle = 42.94^\circ(2.74'')$ ,  $\langle \varphi_{24} \rangle = -59.96^\circ(2.12'')$ ,  $\langle \varphi_{34} \rangle = -76.54^\circ(1.55'')$ .

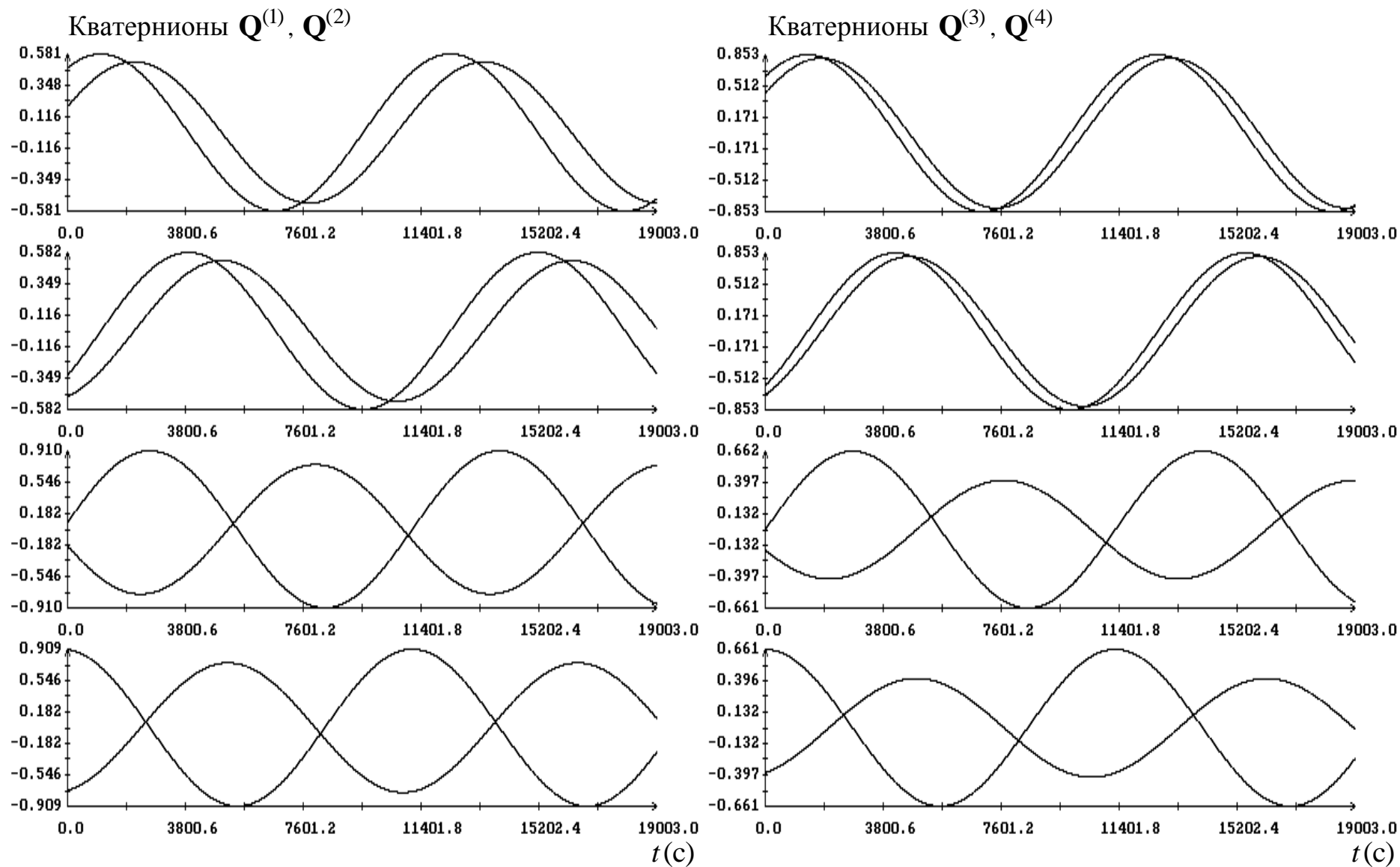


Рис. 7. Исходные кватернионы  $Q_n^{(i)}$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ).

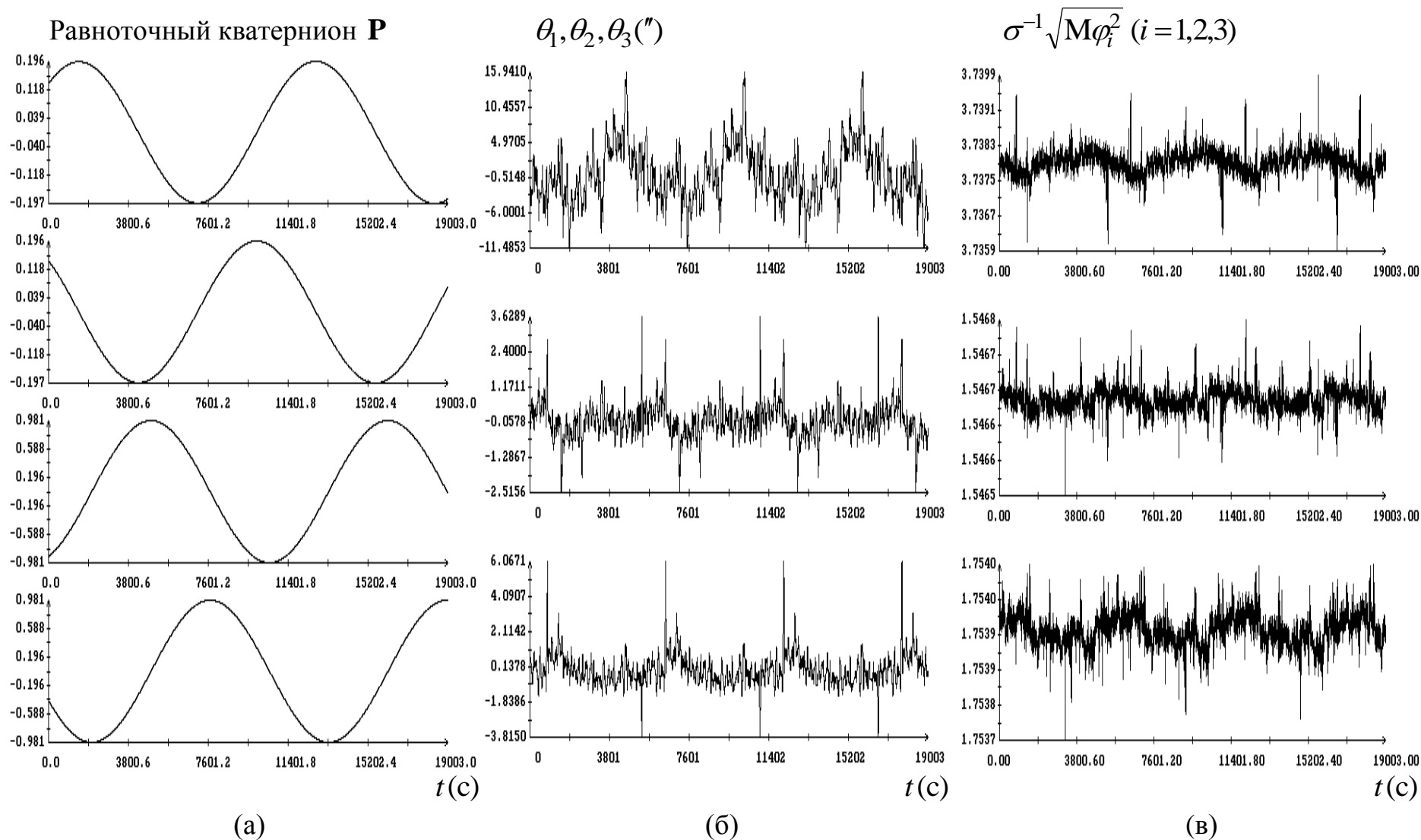


Рис. 8. (а) – равноточный кватернион  $\mathbf{P}_n$ ; (б) – вектор  $\boldsymbol{\theta}_n = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$  поворота скорректированной равноточной системы в нескорректированную,  $\text{RMS}(\theta_1) = 4.4''$ ,  $\text{RMS}(\theta_2) = 0.6''$ ,  $\text{RMS}(\theta_3) = 0.9''$ ; (в) – относительные ошибки построения равноточного кватерниона.

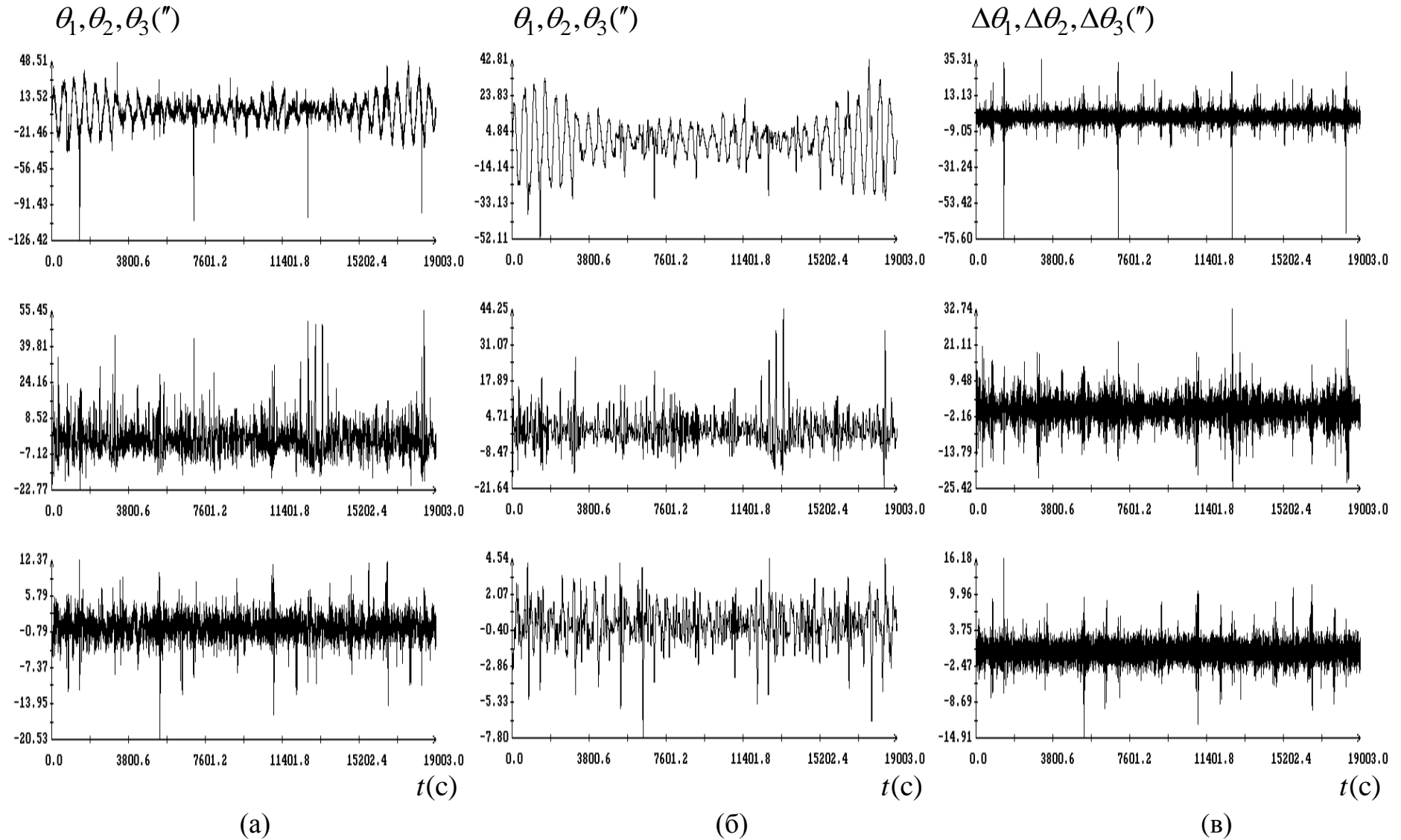


Рис. 9. (а) – ошибки аппроксимации  $\theta_n = 4\mathbf{F}^{-1}[\mathbf{S}^{-1}(t_n) \circ \mathbf{P}_n] = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ ; (б) – функция  $\theta = 4\mathbf{s}(t)$ ; (в) – ошибки аппроксимации  $\Delta\theta_n = 4[\theta_n - \mathbf{s}(t_n)] = (\Delta\theta_1, \Delta\theta_2, \Delta\theta_3)$ ,  $\text{RMS}(\Delta\theta_1) = 4.4''$ ,  $\text{RMS}(\Delta\theta_2) = 4.7''$ ,  $\text{RMS}(\Delta\theta_3) = 1.7''$ .



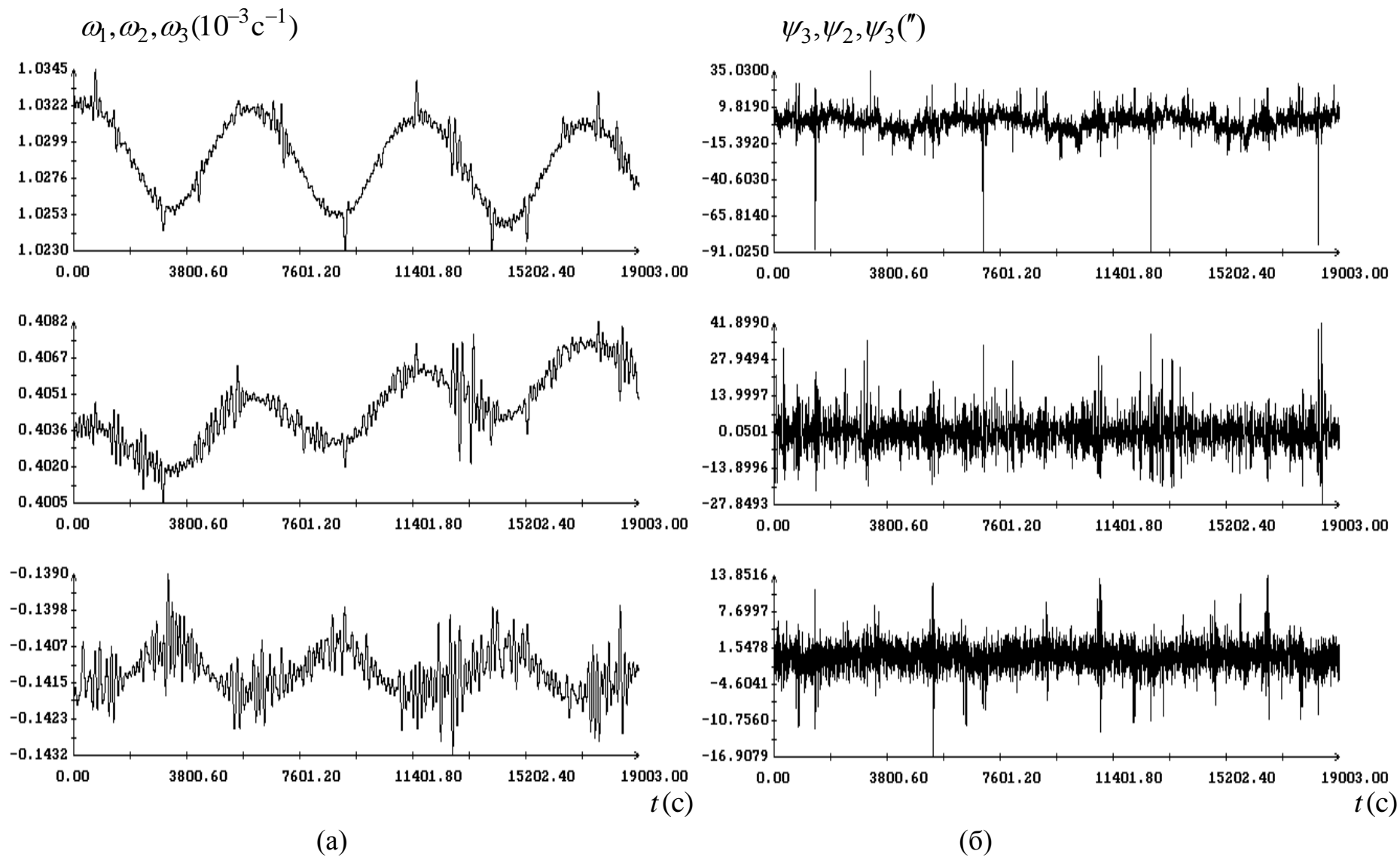
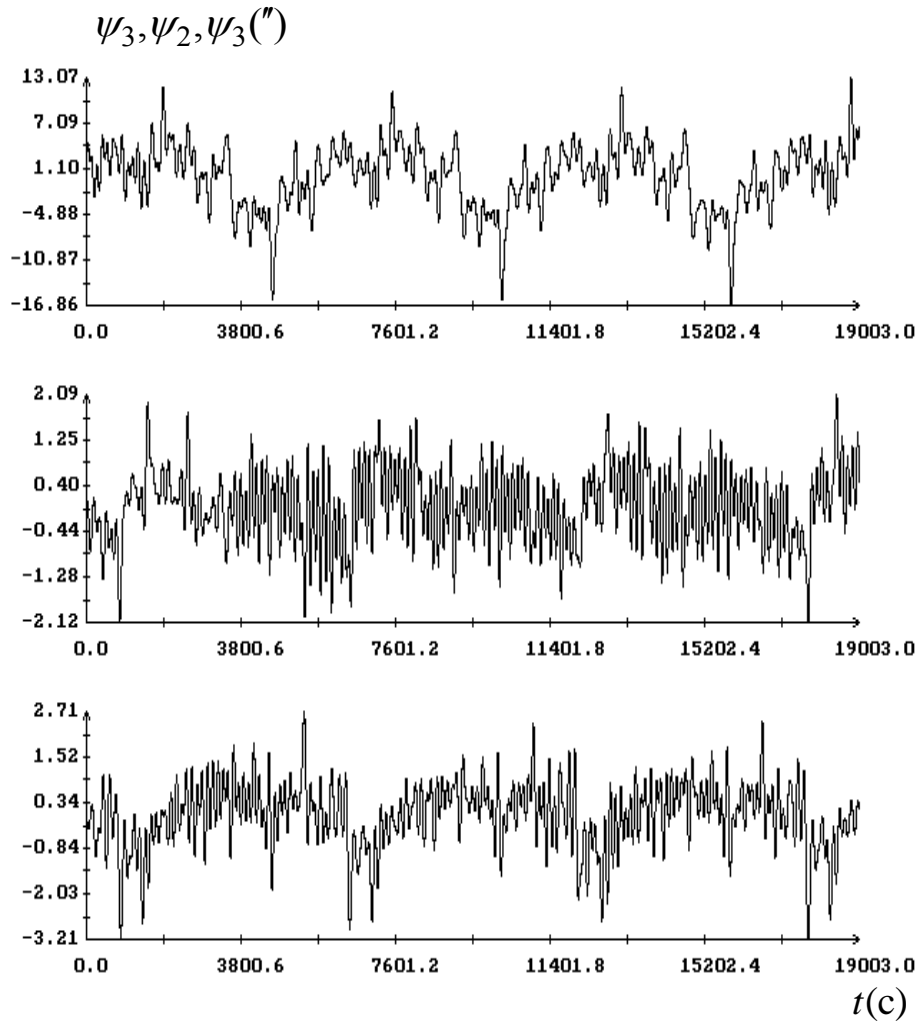
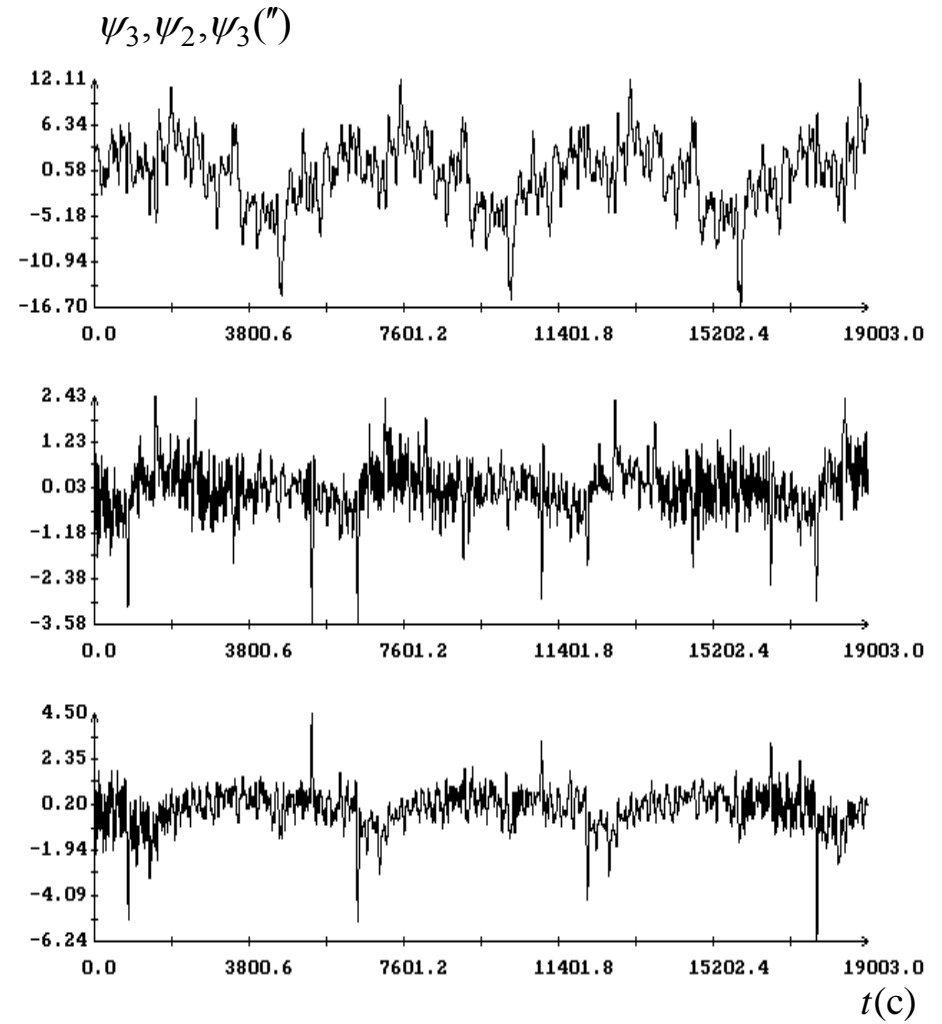


Рис. 10. (а) – компоненты угловой скорости  $\boldsymbol{\omega}(t)$  в базовой системе координат; (б) – компоненты векторов бесконечно малого поворота  $\boldsymbol{\psi}_n = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ ,  $\text{RMS}(\psi_1) = 6.6''$ ,  $\text{RMS}(\psi_2) = 6.4''$ ,  $\text{RMS}(\psi_3) = 2.1''$ .



(a)



(б)

Рис. 11. Компоненты вектора бесконечно малого поворота  $\boldsymbol{\psi}_n = 4\mathbf{F}^{-1}\{\mathbf{P}^{-1}(t_n) \circ \mathbf{S}(t_n) \circ \mathbf{F}[\mathbf{s}(t_n)]\} = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ ;  
 (a) –  $M_1 = 70$ ,  $M_2 = 300$ ,  $\text{RMS}(\psi_1) = 4.3''$ ,  $\text{RMS}(\psi_2) = 0.69''$ ,  $\text{RMS}(\psi_3) = 0.87''$ ; (б) –  $M_1 = 70$ ,  $M_2 = 600$ ,  
 $\text{RMS}(\psi_1) = 4.2''$ ,  $\text{RMS}(\psi_2) = 0.69''$ ,  $\text{RMS}(\psi_3) = 0.93''$ .

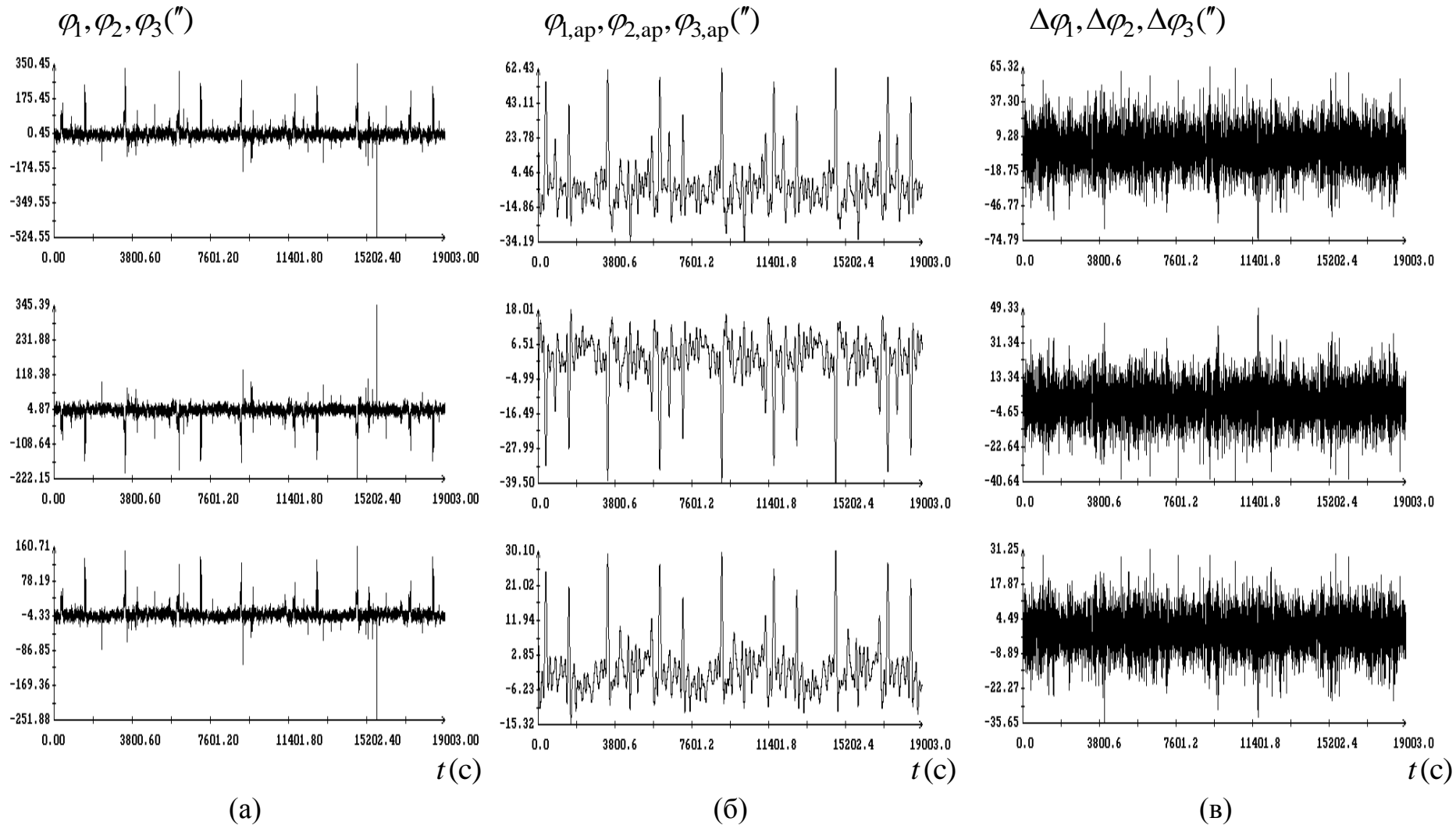


Рис. 12. Вариации системы  $x_1^{(1)} x_2^{(1)} x_3^{(1)}$  относительно универсальной системы; (а) – вектор  $\boldsymbol{\varphi}_n^{(1)} = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ ; (б) – аппроксимация вариаций выражениями (8)  $\boldsymbol{\varphi}_{ap}^{(1)} = (\varphi_{1,ap}, \varphi_{2,ap}, \varphi_{3,ap})$ ; (в) – ошибки аппроксимации  $\Delta\boldsymbol{\varphi}_n^{(1)} = \boldsymbol{\varphi}_n^{(1)} - \boldsymbol{\varphi}_{ap}^{(1)} = (\Delta\varphi_1, \Delta\varphi_2, \Delta\varphi_3)$ ,  $RMS(\Delta\varphi_1) = 13.3''$ ,  $RMS(\Delta\varphi_2) = 8.4''$ ,  $RMS(\Delta\varphi_3) = 6.3''$ .

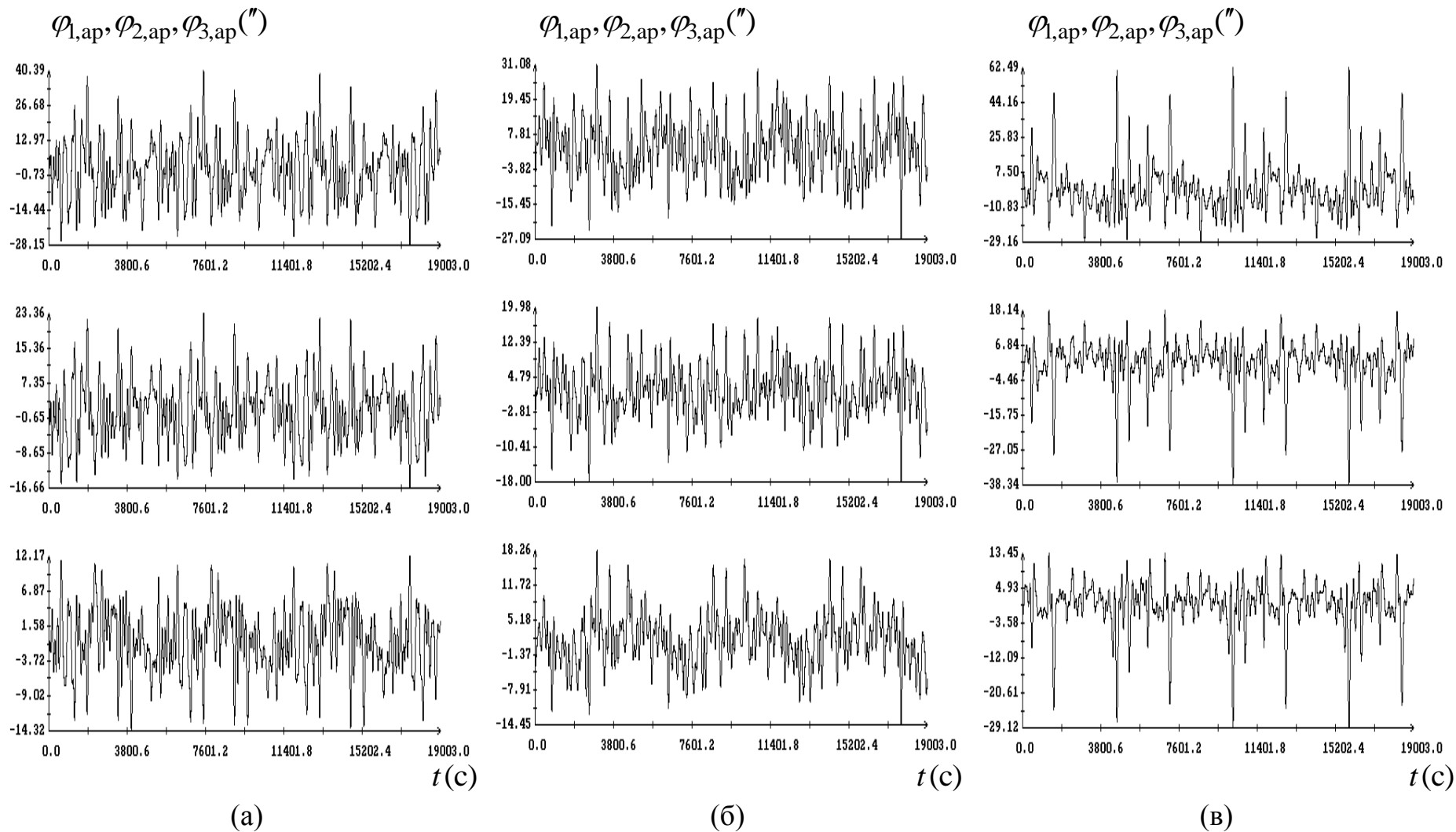


Рис. 13. Компоненты сглаживающих выражений  $\varphi_{ap}^{(i)}$  ( $i = 2, 3, 4$ ); (а) – компоненты выражения  $\varphi_{ap}^{(2)}$ ,  $RMS(\Delta\varphi_{1,2,3}) = 17.9'', 11.2'', 8.3''$ ; (б) – компоненты выражения  $\varphi_{ap}^{(3)}$ ,  $RMS(\Delta\varphi_{1,2,3}) = 17.7'', 11.0'', 8.3''$ ; (в) – компоненты выражения  $\varphi_{ap}^{(4)}$ ,  $RMS(\Delta\varphi_{1,2,3}) = 14.3'', 8.9'', 6.6''$ .

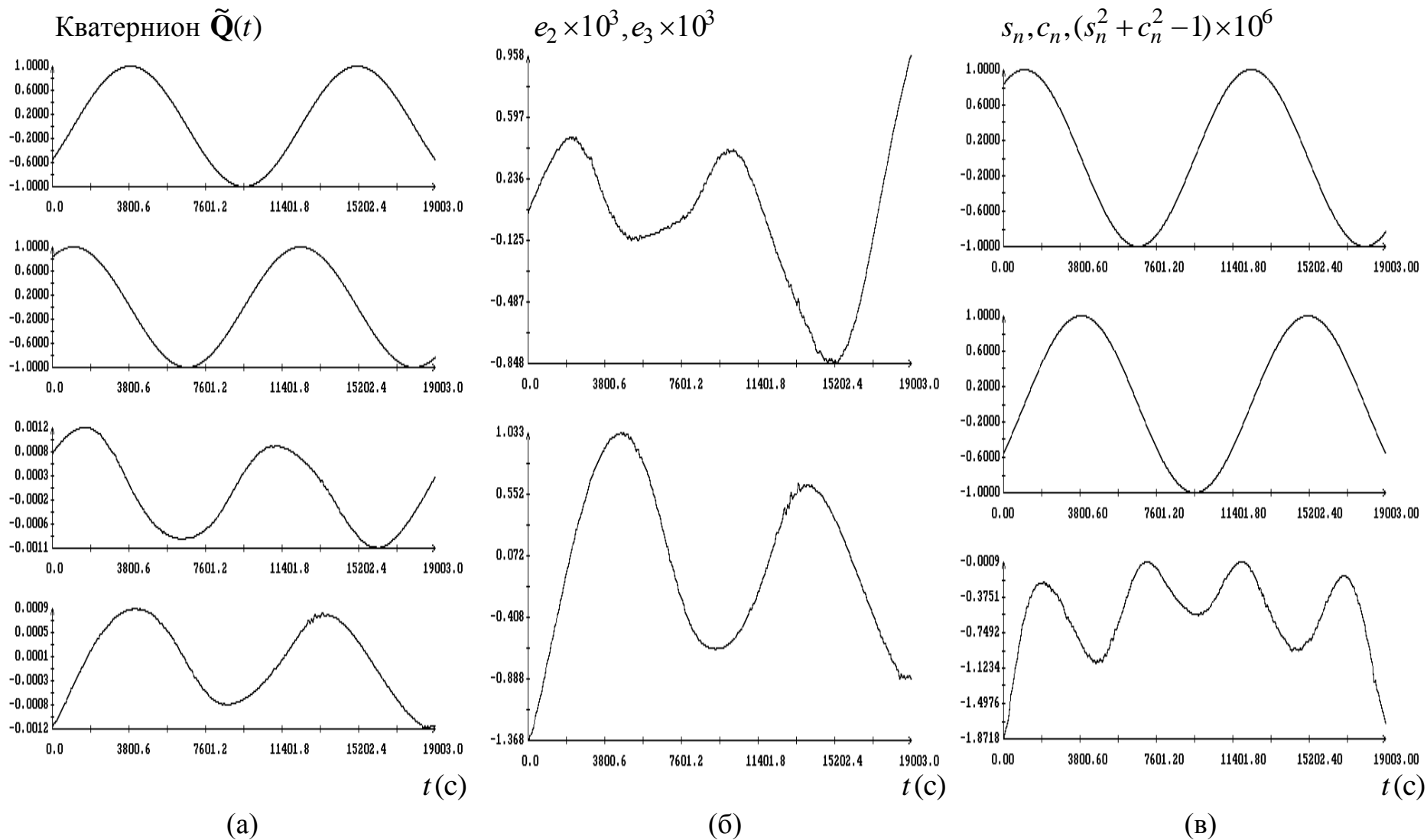


Рис. 14. (а) – компоненты кватерниона  $\tilde{Q}(t)$ ; (б) – невязки регрессионных задач, определяющих орт оси эйлера разворота; (в) – графики, характеризующие угол  $\tilde{\alpha}(t)$  – половину угла эйлера разворота.

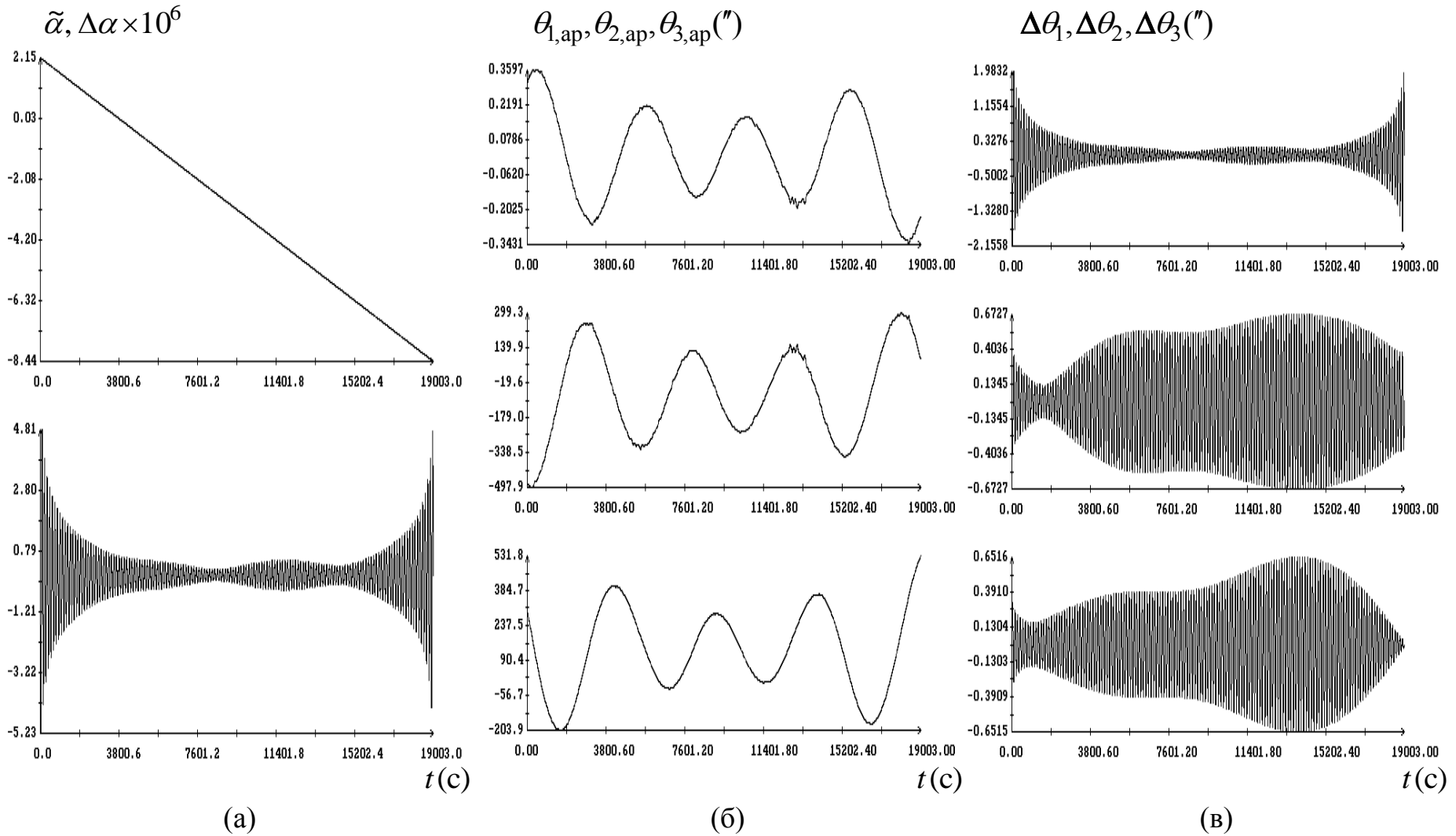


Рис. 15. (а) – половинный угол эйлера разворота универсальной системы координат и ошибка его аппроксимации; (б) – аппроксимации компонент вектора бесконечно малого поворота, характеризующего отклонение действительного движения универсальной системы относительно эйлера разворота; (в) – компоненты вектора ошибок этой аппроксимации,  $RMS(\Delta\theta_1) = 0.35''$ ,  $RMS(\Delta\theta_2) = 0.37''$ ,  $RMS(\Delta\theta_3) = 0.31''$ .

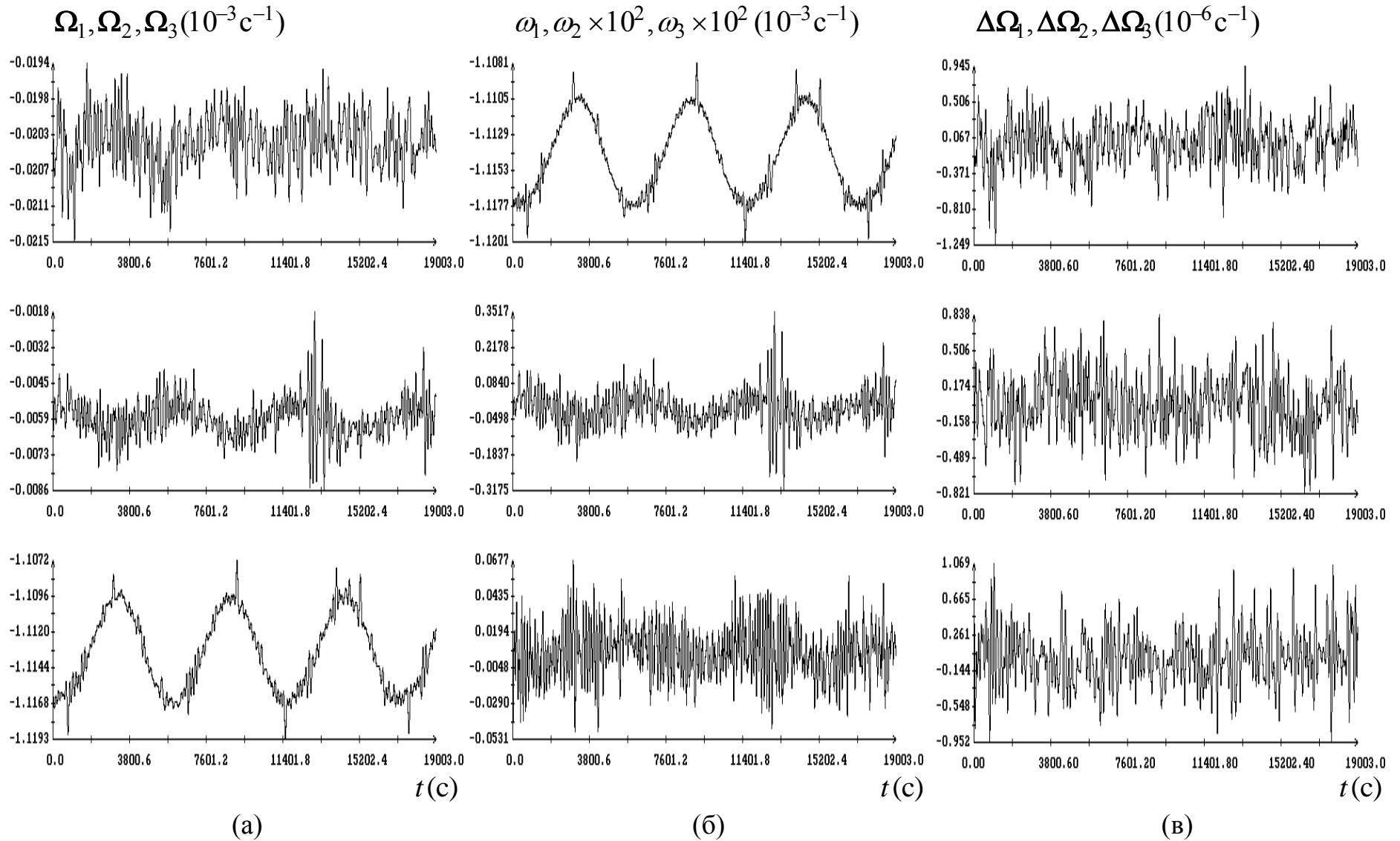


Рис. 16. (а) – сглаженные телеметрические значения угловой скорости, (б) – угловая скорость универсальной системы координат, скорость; (в) – рассогласование угловых скоростей после подгонки, RMS согласования компонент  $\text{RMS}(\Delta\Omega_1) = 2.8 \cdot 10^{-7} \text{ c}^{-1}$ ,  $\text{RMS}(\Delta\Omega_2) = 2.7 \cdot 10^{-7} \text{ c}^{-1}$ ,  $\text{RMS}(\Delta\Omega_3) = 3.1 \cdot 10^{-7} \text{ c}^{-1}$ .