



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 66 за 2016 г.



ISSN 2071-2898 (Print)  
ISSN 2071-2901 (Online)

Галанин М. П., Прошунин Н.Н.,  
Родин А. С., Сорокин Д.Л.

Решение трехмерного  
нестационарного уравнения  
теплопроводности методом  
конечных элементов с  
учетом фазовых переходов

**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Решение трехмерного нестационарного уравнения теплопроводности методом конечных элементов с учетом фазовых переходов / М.П.Галанин [и др.] // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2016. № 66. 27 с. doi:[10.20948/prepr-2016-66](https://doi.org/10.20948/prepr-2016-66)  
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2016-66>

Ордена Ленина  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ  
им. М.В. Келдыша  
Российской академии наук

М.П. Галанин, Н.Н. Прошунин,  
А.С. Родин, Д.Л. Сорокин

**Решение трехмерного нестационарного  
уравнения теплопроводности методом  
конечных элементов с учетом фазовых  
переходов**

Москва — 2016

**Галанин М.П., Прошунин Н.Н., Родин А.С., Сорокин Д.Л.**

Решение трехмерного нестационарного уравнения теплопроводности методом конечных элементов с учетом фазовых переходов

Рассмотрено трехмерное нестационарное уравнение теплопроводности, учитывающее наличие конвективных слагаемых и фазовых переходов. Описан конечно-элементный подход к решению задачи, рассмотрены две схемы дискретизации по времени: явная и неявная. Для учета фазовых переходов использована модель со сглаженными теплофизическими характеристиками. При учете конвективного слагаемого применен алгоритм монотонизации решения. Проведены тестовые расчеты.

**Ключевые слова:** уравнение теплопроводности, метод конечных элементов, фазовые переходы, метод сглаженных теплофизических характеристик, конвективный теплоперенос, монотонизация решения.

**Mikhail Pavlovich Galanin, Nikolay Nikolaevich Proshunin, Aleksandr Sergeevich Rodin, Dmitriy Leonidovich Sorokin**

Finite element method for transient heat equation in 3D with consideration of phase transitions

The three-dimensional heat equation is considered, which takes into account the presence of convective terms and phase transitions. Finite element method for the problem as well as two time discretization schemes are described. The phase transition problem is solved using the enthalpy smoothing method. The algorithm for the monotonization of the convection-diffusion equation solution is examined. Several test results are presented.

**Key words:** heat equation, finite element method, phase transitions, smoothing methods, convective heat transfer, monotonization of solution.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проекты №№ 15-01-03073, 16-31-00302).

# 1. Введение

В настоящее время основные достижения в исследованиях проблем теплопередачи связаны с использованием мощных вычислительных средств (компьютера и численных методов), в то время как традиционные аналитические методы носят вспомогательный характер. За последние полвека широкую известность приобрел метод конечных элементов. В настоящее время методом конечных элементов пользуются при решении самых разнообразных задач математической физики, в том числе и для задач теплопроводности. Недостатком данного метода является сложность получения априорных оценок ошибок. Проверку надежности численной реализации метода можно осуществлять опробированием программы на точных решениях. Этому вопросу, по большей части, и посвящена данная работа.

В первом разделе дается описание метода конечных элементов для классического уравнения теплопроводности, приведены результаты расчетов и выполнено их сравнение с точными решениями.

Второй раздел посвящен задаче теплопроводности с фазовыми превращениями. Рассмотрена энтальпийная формулировка задачи Стефана, описана модель со сглаженными теплофизическими характеристиками, приведены и проанализированы результаты расчетов.

Третий раздел касается учета конвективного переноса тепла. Приведена процедура монотонизации решения уравнения теплопроводности с конвективным слагаемым. Произведено сравнение численного решения с аналитическим.

## 2. Классическое уравнение теплопроводности

### 2.1. Постановка задачи и численный метод

Рассмотрим нестационарное уравнение теплопроводности с внутренними источниками тепловыделения [1, 2]:

$$c_v \frac{\partial T(\vec{x}, t)}{\partial t} = \nabla \cdot (\kappa \nabla T(\vec{x}, t)) + q_v(\vec{x}, t), \quad \vec{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^3, \quad t > 0, \quad (1)$$

где  $\vec{x} = (x, y, z)^T$  — радиус-вектор точки,  $t$  — время,  $T$  — температура,  $c_v$  — объемная теплоемкость материала ( $c_v = c\rho$ , где  $c$  — массовая теплоемкость, а  $\rho$  — плотность материала),  $\kappa$  — коэффициент теплопроводности,  $q_v$  — объемная плотность внутренних источников,  $\nabla$  — дифференциальный оператор Гамильтона, а  $\Omega$  — некоторая замкнутая область в трехмерном пространстве.

Пусть на части  $S_q$  границы  $S$  области  $\Omega$  заданы граничные условия второго рода, а на остальной части  $S_T = S \setminus S_q$  — первого рода:

$$-\kappa \frac{\partial T}{\partial \vec{n}} \Big|_{S_q} = q(\vec{x}, t), \quad (2)$$

$$T|_{S_T} = T_1(\vec{x}, t), \quad (3)$$

где  $\vec{n}$  — нормаль к поверхности  $S_q$ ,  $q(\vec{x}, t)$  — заданный тепловой поток, а  $T_1(\vec{x}, t)$  — заданная температура.

Для единственности решения также должно быть задано начальное распределение температуры в теле:

$$T|_{t=0} = T_0(\vec{x}).$$

Для использования метода Бубнова-Галеркина необходимо записать задачу в слабой постановке. Корректная слабая постановка задачи имеет вид [3]: найти функцию  $T$ , такую, что

$$\int_{\Omega} \left( c_v \frac{\partial T}{\partial t} w + \kappa \nabla T \cdot \nabla w - q_v w \right) dV + \int_{S_q} q w dS = 0, \quad (4)$$

$$T|_{S_T} = T_1(\vec{x}, t),$$

$$T|_{t=0} = T_0(\vec{x}),$$

для произвольной достаточно гладкой функции  $w$ , равной нулю на части  $S_T$  границы области, причем первые два равенства должны выполняться для любого момента времени  $t > 0$ .

В методе Бубнова-Галеркина приближенное решение задачи разыскивается в виде разложения по системе базисных функций  $\{\varphi_j\}_{j=1}^N$ :

$$T_h(\vec{x}, t) = \sum_{j=1}^N T_j(t) \varphi_j(\vec{x}). \quad (5)$$

Пусть для простоты  $S_q = S$ ,  $S_T = \emptyset$ , а  $q = 0$ , что физически означает, что рассматриваемое тело теплоизолировано со всех сторон. В качестве пробных функций  $w$  для (4) в методе Бубнова-Галеркина выступают базисные функции  $\varphi_i$ . После подстановки  $w = \varphi_i$  и приближенного решения (5) в слабую постановку задачи (4) получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений [4]:

$$\sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial T_j}{\partial t} \int_{\Omega} c_v \varphi_i \varphi_j dV + T_j \int_{\Omega} \kappa \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j dV \right) - \int_{\Omega} q_v \varphi_i dV = 0, \quad i = 1 \dots N, \quad (6)$$

или в матричном виде

$$[C] \frac{\partial}{\partial t} \{T\} + [K] \{T\} = \{F\}, \quad \text{где}$$

$$C_{ij} = \int_{\Omega} c_v \varphi_i \varphi_j dV,$$

$$K_{ij} = \int_{\Omega} \kappa \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j dV,$$

$$F_i = \int_{\Omega} q_v \varphi_i dV.$$

Несмотря на то что речь идет об уравнении теплопроводности, а не о задачах теории упругости, по традиции будем называть  $[K]$  матрицей жесткости, а  $[C]$  — матрицей демпфирования.

Один из способов перехода к методу конечных элементов — это использование финитных базисных функций в методе Бубнова-Галеркина [4–6]. На первом этапе область  $\Omega$  разбивается на конечные элементы  $\Omega_e$ , после чего в каждом элементе выбираются локальные базисные функции  $N_j$ , называемые также функциями формы. Это позволяет вычислить локальные матрицы жесткости и демпфирования, а также вектор правой части:

$$C_{ij}^{(e)} = \int_{\Omega_e} c_v N_i N_j dV, \quad (7)$$

$$K_{ij}^{(e)} = \int_{\Omega_e} \kappa \nabla N_i \cdot \nabla N_j dV, \quad (8)$$

$$F_i^{(e)} = \int_{\Omega_e} q_v N_i dV, \quad (9)$$

где индекс  $e$  указывает на номер конечного элемента.

Глобальные матрицы  $[C]$  и  $[K]$ , а также вектор  $\{F\}$ , благодаря свойству аддитивности определенного интеграла, можно найти, просуммировав вклады от отдельных конечных элементов. После вычисления локальных матриц жесткости и демпфирования, а также вектора правой части производится сборка глобальных матриц  $[C]$  и  $[K]$  и вектора  $\{F\}$ . Алгоритм сборки состоит в следующем: каждая компонента глобальной матрицы (вектора) вычисляется как сумма компонент локальных матриц (векторов), при этом необходимо использовать соответствие между локальной нумерацией узлов одного элемента и глобальной нумерацией узлов в области.

В данной работе использовались два типа элементов: тетраэдральный элемент первого порядка, а также элемент первого порядка в виде призмы с четырехугольным основанием.

Для дискретизации системы (6) по времени использовались две схемы: явная и неявная.

Явная схема имеет вид:

$$[C] \frac{\{\hat{T}\} - \{T\}}{\tau} + [K]\{T\} = \{F\},$$

где  $\{T\}$  и  $\{\hat{T}\}$  — значения температур в узлах сетки на нижнем и верхнем временных слоях соответственно, а  $\tau$  — шаг по времени.

При использовании данной схемы необходимо диагонализировать матрицу  $[C]$ . Если в первом слагаемом в (6) считать, что

$$\sum_{j=1}^N T_j \varphi_j \approx T_i,$$

то локальные матрицы жесткости будут иметь только диагональные ненулевые элементы, равные [6]

$$C_{ii}^{diag(e)} = \int_{\Omega_e} c_v N_i dV.$$

В итоге, значение на следующем временном слое будет вычисляться по следующей формуле:

$$\hat{T}_i = T_i + \frac{\tau}{C_{ii}^{diag}} \left( F_i - \sum_{j=1}^N K_{ij} T_j \right).$$

Шаг  $\tau$  в явной схеме необходимо выбирать из соображений устойчивости. Неявная схема имеет вид:

$$[C] \frac{\{\hat{T}\} - \{T\}}{\tau} + [K]\{\hat{T}\} = \{F\}.$$

В данной схеме также имеет смысл использовать диагонализированную матрицу демпфирования, так как иначе схема не будет обладать свойством безусловной монотонности [4].

Для получения значений узловых температур на следующем временном слое необходимо решить систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ):

$$[A]\{\hat{T}\} = \{b\}, \text{ где}$$

$$[A] = \frac{1}{\tau}[C^{diag}] + [K], \quad \{b\} = \{F\} + \frac{1}{\tau}[C^{diag}]\{T\}.$$

Для решения СЛАУ использовался стабилизированный метод бисопряженных градиентов (BiCGStab) из пакета линейной алгебры Eigen.

В случае, если на части границы области задано граничное условие первого рода (3), в соответствующих узлах значения температуры находятся из этого условия:

$$\hat{T}_i = T_1(\vec{x}_i, t).$$

В неявной схеме для этого достаточно изменить  $i$ -ю строчку в СЛАУ следующим образом:

$$A_{ij} = \delta_{ij}, \quad b_i = T_1(\vec{x}_i, t).$$

## 2.2. Результаты тестовых расчетов

Рассмотрим следующую задачу в кубе:

$$\begin{cases} T_t = \nabla^2 T, & 0 < x, y, z < 1, t > 0 \\ T|_{t=0} = \cos(\pi x) \cos(\pi y) \cos(\pi z), \\ \frac{\partial T}{\partial \vec{n}}|_{\partial \Omega} = 0. \end{cases}$$

Для задачи с таким начальным условием можно подобрать аналитическое решение:

$$T(x, y, z, t) = \exp(-3\pi^2 t) \cos(\pi x) \cos(\pi y) \cos(\pi z).$$

Полученные численные решения сравнены с точным в сеточных нормах  $C$  и  $L_2$ . Расчет производился до момента  $t_{end} = 0,005$ . Относительные ошибки на различных сетках для явной и неявной схем приведены в таблице 1. В таблице также указаны шаги по времени  $\tau$  и по пространству  $h$  (наибольшая из всех высот тетраэдров для тетраэдральной сетки), количество элементов  $N_e$ , количество узлов  $N_n$ , а также отношение норм ошибок на разных сетках.

При дроблении шага  $h$  в 2 раза, а  $\tau$  — в 4 отношение ошибок близко к 4, что позволяет говорить о порядке сходимости метода  $O(\tau + h^2)$ . На рисунках 1 и 2 изображены численные решения задачи в момент времени  $t_{end}$ , полученные с помощью неявной схемы, на различных сетках.



Таблица 1. Ошибки численного решения задачи в кубе

		$h, \tau, N_e, N_n$	Ошибка в С	Отн. в С	Ошибка в $L_2$	Отн. в $L_2$
Явная схема	Тетраэдры	$h = 0,1; \tau = 10^{-4}$ $N_e = 6655; N_n = 1504$	$1,966 \cdot 10^{-2}$	3,145	$2,619 \cdot 10^{-2}$	3,919
		$h = 0,05; \tau = 2,5 \cdot 10^{-5}$ $N_e = 50278; N_n = 10019$	$6,253 \cdot 10^{-3}$		$6,682 \cdot 10^{-3}$	
		$h = 0,025; \tau = 6,25 \cdot 10^{-6}$ $N_e = 427047; N_n = 80328$	$1,614 \cdot 10^{-3}$	3,873	$1,607 \cdot 10^{-3}$	4,158
	Призмы	$h = 0,1; \tau = 10^{-4}$ $N_e = 1000; N_n = 1331$	$4,999 \cdot 10^{-3}$	3,963	$2,172 \cdot 10^{-2}$	3,968
		$h = 0,05; \tau = 2,5 \cdot 10^{-5}$ $N_e = 8000; N_n = 9261$	$1,261 \cdot 10^{-3}$		$5,473 \cdot 10^{-3}$	
		$h = 0,025; \tau = 6,25 \cdot 10^{-6}$ $N_e = 64000; N_n = 68921$	$3,161 \cdot 10^{-4}$	3,991	$1,371 \cdot 10^{-3}$	3,992
Неявная схема	Тетраэдры	$h = 0,1; \tau = 10^{-3}$ $N_e = 6655; N_n = 1504$	$1,736 \cdot 10^{-2}$	2,9	$2,482 \cdot 10^{-2}$	3,882
		$h = 0,05; \tau = 2,5 \cdot 10^{-4}$ $N_e = 50278; N_n = 10019$	$5,985 \cdot 10^{-3}$		$6,394 \cdot 10^{-3}$	
		$h = 0,025; \tau = 6,25 \cdot 10^{-5}$ $N_e = 427047; N_n = 80328$	$1,574 \cdot 10^{-3}$	3,802	$1,539 \cdot 10^{-3}$	4,155
	Призмы	$h = 0,1; \tau = 10^{-3}$ $N_e = 1000; N_n = 1331$	$7,087 \cdot 10^{-3}$	3,978	$2,003 \cdot 10^{-2}$	3,878
		$h = 0,05; \tau = 2,5 \cdot 10^{-4}$ $N_e = 8000; N_n = 9261$	$1,782 \cdot 10^{-3}$		$5,165 \cdot 10^{-3}$	
		$h = 0,025; \tau = 6,25 \cdot 10^{-5}$ $N_e = 64000; N_n = 68921$	$4,46 \cdot 10^{-4}$	3,994	$1,301 \cdot 10^{-3}$	3,969

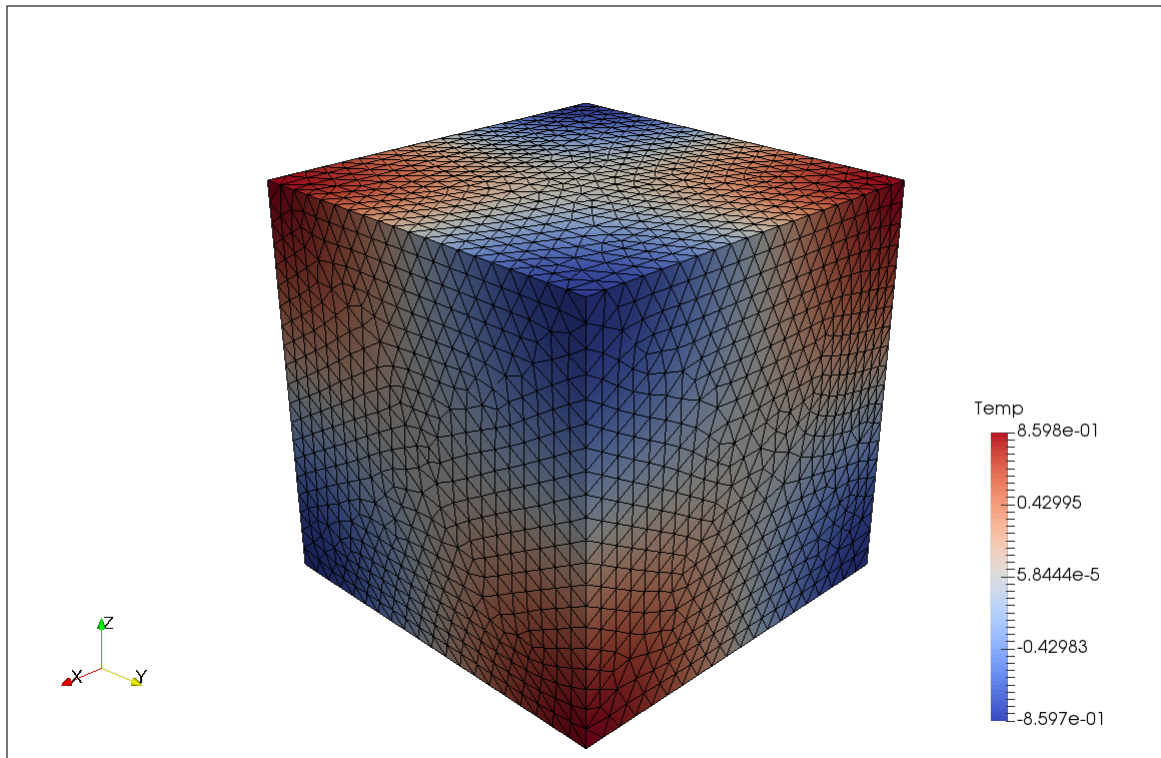


Рис. 1. Решение задачи в кубе на сетке из тетраэдров,  $h = 0,05$

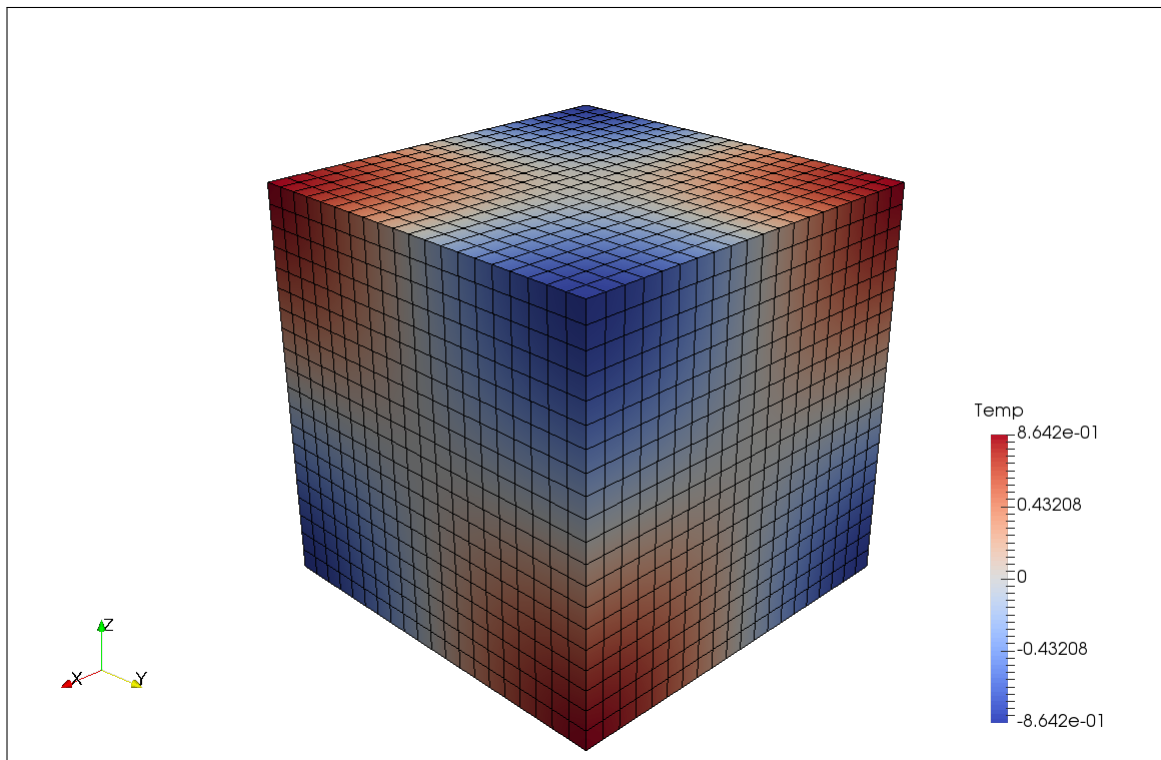


Рис. 2. Решение задачи в кубе на сетке из призм,  $h = 0,05$

### 3. Задача Стефана о фазовом переходе

#### 3.1. Постановка задачи и численный метод

Рассмотрим задачу Стефана о фазовом переходе. Для определенности будем считать, что моделируются фазовые превращения «твердое тело — жидкость», то есть процессы плавления и кристаллизации.

С точки зрения построения вычислительных алгоритмов чрезвычайно важное значение имеет тот факт, что задача Стефана допускает формулировку, при которой условия на границе фазового перехода включаются в само уравнение теплопроводности. Такая формулировка называется энтальпийной [1].

Далее будем использовать индекс «+» для обозначения величин, относящихся к жидкой фазе, а «-» — для относящихся к твердой фазе.

Введем функцию плотности внутренней энергии  $\varepsilon(T)$  следующим образом:

$$\varepsilon(T) = \begin{cases} \int_{T_r}^T c_v^- dT, & T < T_{\text{пл}}, \\ \int_{T_r}^{T_{\text{пл}}} c_v^- dT + L + \int_{T_{\text{пл}}}^T c_v^+ dT, & T > T_{\text{пл}}, \end{cases}$$

где  $T_{\text{пл}}$  — температура плавления, а  $L$  — объемная теплота плавления.

Тогда задачу Стефана можно записать в виде одного уравнения теплопроводности во всей области  $\Omega$ :

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \nabla \cdot (\kappa \nabla T) + q_v, \quad \vec{x} \in \Omega, \quad t > 0, \quad \text{где} \quad (10)$$

$$\kappa = \begin{cases} \kappa^-, & T < T_{\text{пл}}, \\ \kappa^+, & T > T_{\text{пл}}, \end{cases}$$

$$q_v = \begin{cases} q_v^-, & T < T_{\text{пл}}, \\ q_v^+, & T > T_{\text{пл}}. \end{cases}$$

Для численного решения задачи Стефана в работе использовалась модель со сглаженными теплофизическими характеристиками [1, 7–9]. Будем считать, что все характеристики материала постоянны в жидкой и твердой фазах и меняются только при переходе через температуру плавления  $T_{\text{пл}}$ :

$$\begin{aligned} \kappa^- &= \text{const}, & c_v^- &= \text{const}, \\ \kappa^+ &= \text{const}, & c_v^+ &= \text{const}. \end{aligned}$$

Все зависимости теплофизических параметров от  $T$  будем рассматривать в некоторой окрестности температуры плавления  $T_{\text{пл}}$ , то есть на отрезке  $[T_{\text{пл}} - \Delta T_{\text{пл}}^{\text{left}}, T_{\text{пл}} + \Delta T_{\text{пл}}^{\text{right}}]$ .

Так как функция  $\varepsilon(T)$  разрывна, ее производная  $\frac{d\varepsilon}{dT}$  будет иметь дельта-образную особенность при  $T = T_{\text{пл}}$ . Представим зависимость  $\frac{d\varepsilon}{dT}$  в окрестности температуры плавления  $T_{\text{пл}}$  в виде кусочно-линейной функции, которая представляет собой на отрезке  $[T_{\text{пл}} - \Delta T_{\text{пл}}^{\text{left}}, T_{\text{пл}} + \Delta T_{\text{пл}}^{\text{right}}]$  трапецию, площадь под которой равна по величине объемной теплоте плавления  $L$ . Пусть  $a_{\text{пл}}$  — отношение длины верхнего основания трапеции к длине нижнего. Введем несколько вспомогательных величин:

$$\begin{aligned} \Delta T_{\text{пл}} &= \Delta T_{\text{пл}}^{\text{left}} + \Delta T_{\text{пл}}^{\text{right}}, \\ \Delta T_{\text{пл}}^m &= a_{\text{пл}} \Delta T_{\text{пл}}, \\ \text{если } c_v^- < c_v^+ : & \begin{cases} H = \frac{2L - (c_v^+ - c_v^-)(\Delta T_{\text{пл}}^{\text{right}} - \Delta T_{\text{пл}}^m/2)}{\Delta T_{\text{пл}} + \Delta T_{\text{пл}}^m}, \\ y_1 = \frac{H}{\Delta T_{\text{пл}}^{\text{left}} - \Delta T_{\text{пл}}^m/2}, \\ y_2 = c_v^- + H, \\ y_3 = \frac{y_2 - c_v^+}{\Delta T_{\text{пл}}^{\text{right}} - \Delta T_{\text{пл}}^m/2}, \end{cases} \\ \text{если } c_v^- \geq c_v^+ : & \begin{cases} H = \frac{2L - (c_v^- - c_v^+)(\Delta T_{\text{пл}}^{\text{left}} - \Delta T_{\text{пл}}^m/2)}{\Delta T_{\text{пл}} + \Delta T_{\text{пл}}^m}, \\ y_2 = c_v^+ + H, \\ y_1 = \frac{y_2 - c_v^-}{\Delta T_{\text{пл}}^{\text{left}} - \Delta T_{\text{пл}}^m/2}, \\ y_3 = \frac{H}{\Delta T_{\text{пл}}^{\text{right}} - \Delta T_{\text{пл}}^m/2}. \end{cases} \end{aligned}$$

С использованием данных обозначений введем функцию  $\frac{d\tilde{\varepsilon}}{dT}$ :

$$\frac{d\tilde{\varepsilon}}{dT} = \begin{cases} c_v^-, & T \leq T_{\text{пл}} - \Delta T_{\text{пл}}^{\text{left}}, \\ c_v^- + y_1(T - T_{\text{пл}} + \Delta T_{\text{пл}}^{\text{left}}), & T_{\text{пл}} - \Delta T_{\text{пл}}^{\text{left}} < T \leq T_{\text{пл}} - \Delta T_{\text{пл}}^m/2, \\ y_2, & T_{\text{пл}} - \Delta T_{\text{пл}}^m/2 < T \leq T_{\text{пл}} + \Delta T_{\text{пл}}^m/2, \\ y_2 - y_3(T - T_{\text{пл}} - \Delta T_{\text{пл}}^m/2), & T_{\text{пл}} + \Delta T_{\text{пл}}^m/2 < T \leq T_{\text{пл}} + \Delta T_{\text{пл}}^{\text{right}}, \\ c_v^+, & T_{\text{пл}} + \Delta T_{\text{пл}}^{\text{right}} < T. \end{cases} \quad (11)$$

Вид функции (11) при различных коэффициентах  $a_{\text{пл}}$  для  $\Delta T_{\text{пл}}^{\text{left}} = \Delta T_{\text{пл}}^{\text{right}} = 0,5$  и параметров, соответствующих воде и льду, изображен на рисунке 3.

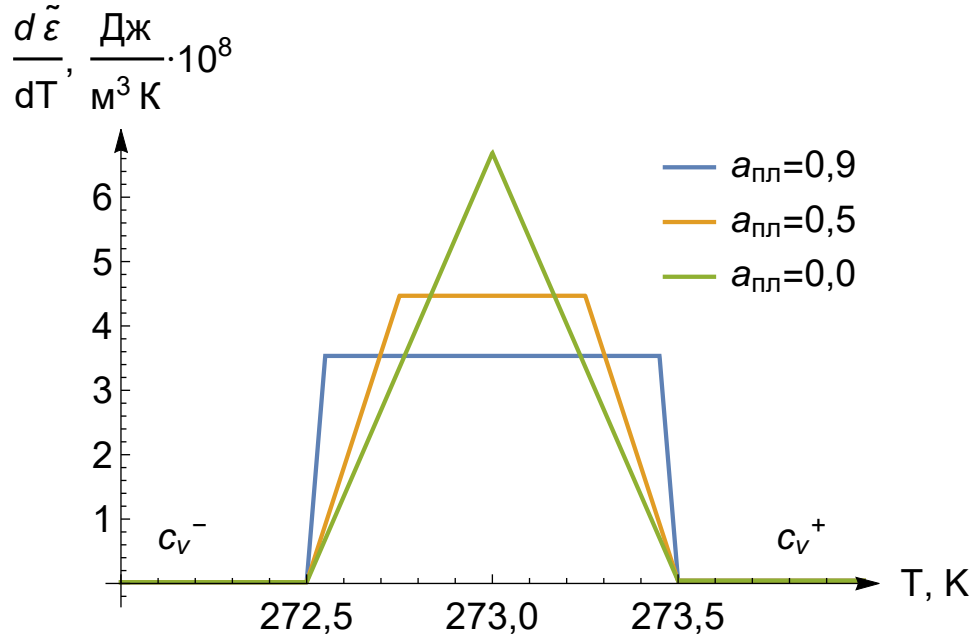


Рис. 3. График функции  $\frac{d\tilde{\varepsilon}}{dT}$

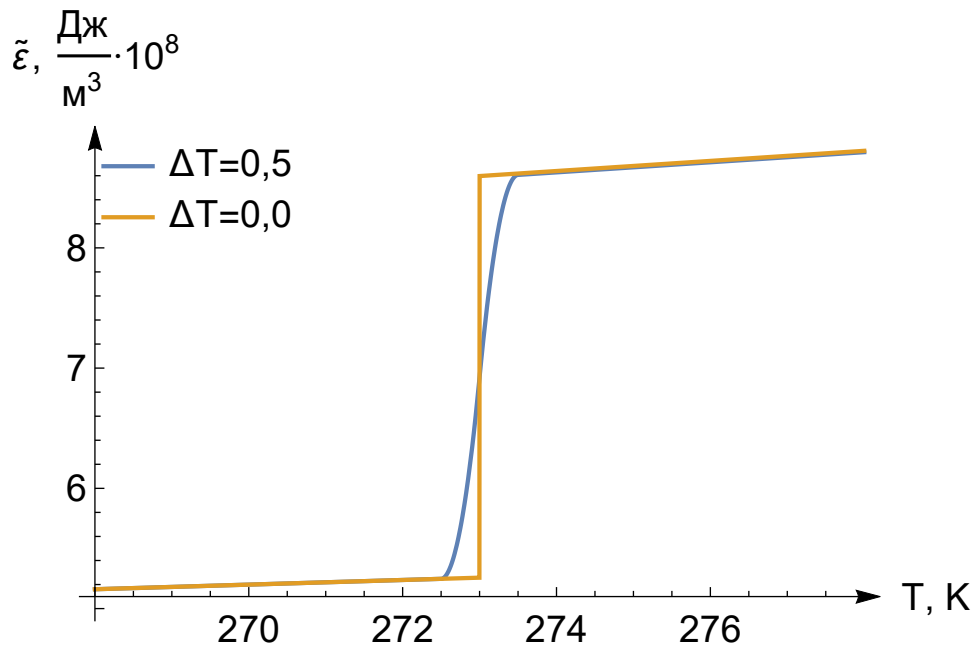
Интегрирование функции (11) дает нам сглаженную функцию плотности внутренней энергии:

$$\tilde{\varepsilon}(T) = \begin{cases} c_v^- T, & T \leq T_{\text{пл}} - \Delta T_{\text{пл}}^{\text{left}}, \\ c_v^- T + y_1 \frac{(T - T_{\text{пл}} + \Delta T_{\text{пл}}^{\text{left}})^2}{2}, & T_{\text{пл}} - \Delta T_{\text{пл}}^{\text{left}} < T \leq T_{\text{пл}} - \Delta T_{\text{пл}}^m/2, \\ y_2 T + \varepsilon_1, & T_{\text{пл}} - \Delta T_{\text{пл}}^m/2 < T \leq T_{\text{пл}} + \Delta T_{\text{пл}}^m/2, \\ y_2 T - y_3 \frac{(T - T_{\text{пл}} - \Delta T_{\text{пл}}^m/2)^2}{2} + \varepsilon_1, & T_{\text{пл}} + \Delta T_{\text{пл}}^m/2 < T \leq T_{\text{пл}} + \Delta T_{\text{пл}}^{\text{right}}, \\ c_v^+ T + \varepsilon_2, & T_{\text{пл}} + \Delta T_{\text{пл}}^{\text{right}} < T, \end{cases} \quad (12)$$

$$\text{где } \varepsilon_1 = (c_v^- - y_2)(T_{\text{пл}} - \Delta T_{\text{пл}}^m/2) + y_1 \frac{(\Delta T_{\text{пл}}^{\text{left}} - \Delta T_{\text{пл}}^m/2)^2}{2},$$

$$\varepsilon_2 = (y_2 - c_v^+)(T_{\text{пл}} + \Delta T_{\text{пл}}^{\text{right}}) - y_3 \frac{(\Delta T_{\text{пл}}^{\text{right}} - \Delta T_{\text{пл}}^m/2)^2}{2} + \varepsilon_1.$$

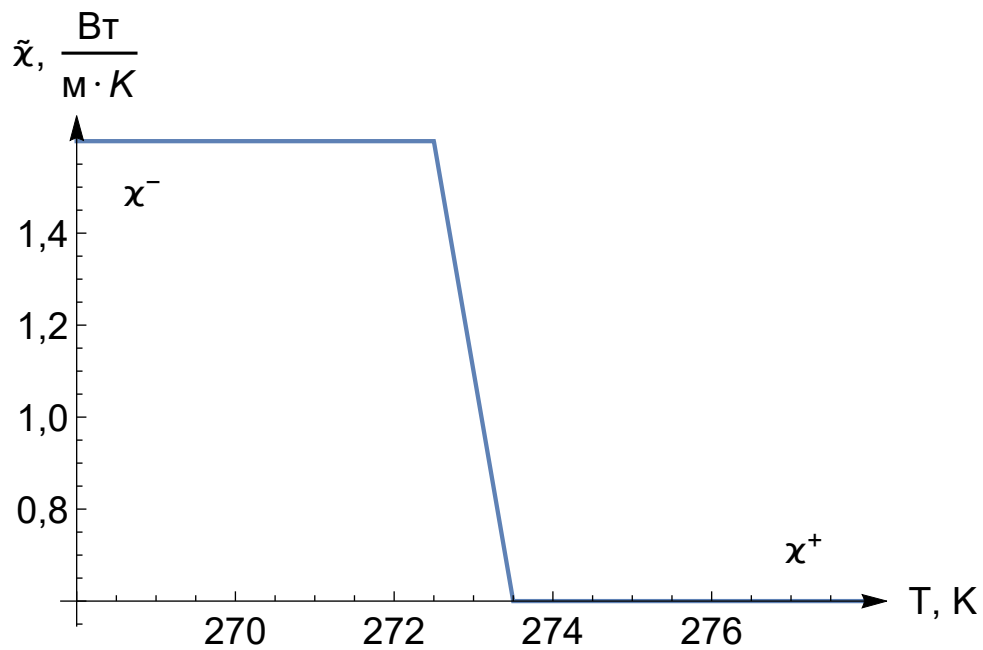
Вид функции плотности внутренней энергии при наличии и отсутствии сглаживания показан на рисунке 4. Параметры  $\Delta T_{\text{пл}}^{\text{left}}$  и  $\Delta T_{\text{пл}}^{\text{right}}$  выбраны одинаковыми и равными  $\Delta T$ ,  $a_{\text{пл}} = 0$ , теплофизические параметры соответствуют воде.

Рис. 4. График функции  $\tilde{\varepsilon}(T)$ 

Скачок  $\varkappa$  при переходе через пороговое значение температуры плавления будем учитывать линейной зависимостью в следующем виде:

$$\tilde{\varkappa}(T) = \varkappa^- - (\varkappa^- - \varkappa^+) \frac{T - T_{\text{пл}} + \Delta T_{\text{пл}}^{\text{left}}}{\Delta T_{\text{пл}}}. \quad (13)$$

Соответствующий график приведен на рисунке 5.

Рис. 5. График функции  $\tilde{\varkappa}(T)$

В итоге, вместо исходного уравнения (10) мы будем решать уравнение со сглаженными характеристиками:

$$\frac{\partial \tilde{\varepsilon}(T)}{\partial t} = \nabla \cdot (\tilde{\varkappa}(T) \nabla T) + q_v, \quad \vec{x} \in \Omega, \quad t > 0, \quad (14)$$

где функции  $\tilde{\varepsilon}(T)$  и  $\tilde{\varkappa}(T)$  определяются по формулам (12) и (13) соответственно.

Из-за нелинейности задачи при решении методом конечных элементов возникает необходимость использовать внутренний итерационный метод [7, 10]. В данной работе для решения получаемой системы нелинейных уравнений использовался метод Ньютона.

### 3.2. Тестовая задача и ее аналитическое решение

Для проверки описанных численных методов использована одномерная задача с известным аналитическим решением [2, 11]. Пусть жидкая среда занимает полупространство  $x > 0$ , и пусть при  $t = 0$  температура всех слоев жидкости одинакова и равна  $T_0 > T_{пл} = 0$ . С момента времени  $t = 0$  на границе  $x = 0$  поддерживается постоянная температура  $T_c < 0$ . В этом случае при  $t > 0$  вблизи граничной поверхности возникает слой твердой фазы, толщина которого со временем увеличивается. Запишем постановку задачи:

$$\begin{aligned} c_v^- \frac{\partial T^-}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \varkappa^- \frac{\partial T^-}{\partial x} \right), \quad t > 0, \quad 0 < x < s(t), \\ c_v^+ \frac{\partial T^+}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \varkappa^+ \frac{\partial T^+}{\partial x} \right), \quad t > 0, \quad s(t) < x < \infty, \\ T^+|_{t=0} &= T_0, \\ T^-|_{x=0} &= T_c, \\ T^+ &\rightarrow T_0 \text{ при } x \rightarrow \infty, \\ T^-|_{x=s(t)-0} &= T^+|_{x=s(t)+0} = 0, \\ \varkappa^- \frac{\partial T^-}{\partial x} \Big|_{x=s(t)-0} - \varkappa^+ \frac{\partial T^+}{\partial x} \Big|_{x=s(t)+0} &= L \frac{ds(t)}{dt}. \end{aligned}$$

Для данной задачи можно найти аналитическое решение. Оно будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} T^- &= A^- + B^- \operatorname{erf} \left( \frac{x}{2a^- \sqrt{t}} \right), \quad t > 0, \quad 0 < x < \alpha \sqrt{t}, \\ T^+ &= A^+ + B^+ \operatorname{erf} \left( \frac{x}{2a^+ \sqrt{t}} \right), \quad t > 0, \quad \alpha \sqrt{t} < x < \infty, \text{ где} \\ \operatorname{erf}(x) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt - \text{функция ошибок,} \end{aligned}$$

$$a^- = \sqrt{\frac{\varkappa^-}{c_v^-}}, \quad a^+ = \sqrt{\frac{\varkappa^+}{c_v^+}},$$

$$A^- = T_c, \quad B^- = -\frac{T_c}{\operatorname{erf}\left(\frac{\alpha}{2a^-}\right)},$$

$$A^+ = \frac{T_0 \operatorname{erf}\left(\frac{\alpha}{2a^+}\right)}{\operatorname{erf}\left(\frac{\alpha}{2a^+}\right) - 1}, \quad B^+ = \frac{T_0}{1 - \operatorname{erf}\left(\frac{\alpha}{2a^+}\right)},$$

а константа  $\alpha$  находится из трансцендентного уравнения:

$$\frac{\varkappa^- T_c \exp(-\alpha^2/(2a^-)^2)}{a^- \operatorname{erf}\left(\frac{\alpha}{2a^-}\right)} + \frac{\varkappa^+ T_0 \exp(-\alpha^2/(2a^+)^2)}{a^+ \left[1 - \operatorname{erf}\left(\frac{\alpha}{2a^+}\right)\right]} = -\frac{\sqrt{\pi}}{2} \alpha L.$$

Мы будем рассматривать задачу (14) в параллелепипеде  $\Omega = [0; 0,1] \times [0; 0,1] \times [0; 1]$ . Зададим на грани  $z = 0$  условие первого рода:

$$T|_{z=0} = T_c,$$

а на остальных гранях  $S_q$  — однородное условие второго рода:

$$\varkappa \frac{\partial T}{\partial \vec{n}} \Big|_{S_q} = 0.$$

Обозначим точное решение как  $T_{sol}$ :

$$T_{sol}(x, y, z, t) = \begin{cases} T^-(z, t), & 0 < z < \alpha\sqrt{t}, \\ T^+(z, t), & \alpha\sqrt{t} < z < 1. \end{cases} \quad (15)$$

В качестве начального условия возьмем точное решение в момент времени  $t = 0,01$ , когда у границы  $z = 0$  уже сформировался некоторый слой твердой фазы:

$$T|_{t=0} = T_{sol}|_{t=0,01}.$$

В этом случае распределение температуры в теле будет одномерным, температура будет изменяться только вдоль оси  $z$ . При малых временах  $t$  это одномерное распределение будет близко к аналитическому решению (15) задачи на полупространстве:

$$T(x, y, z, t) = T_{sol}(z, t + 0,01).$$

### 3.3. Результаты тестовых расчетов

Все расчеты проводились до момента времени  $t_{end} = 0,02$ . Относительные ошибки вычислялись в конечномерных аналогах норм пространств  $C$  и  $L_2$ .



Для всех расчетов выбран треугольный профиль функции  $\frac{d\tilde{\varepsilon}}{dT}$ , а левая и правая длины отрезка сглаживания выбирались равными друг другу, то есть:

$$a_{\text{ПЛ}} = 0, \quad \Delta T_{\text{ПЛ}}^{\text{left}} = \Delta T_{\text{ПЛ}}^{\text{right}} = \Delta T.$$

Для первой серии расчетов выбран следующий набор параметров:

$$\varkappa^- = \varkappa^+ = 1, \quad c_v^- = c_v^+ = 1, \\ L = 2, \quad \Delta T = 0,2.$$

В первом эксперименте исследовалась зависимость ошибки от шагов сетки. В таблице 2 приведены результаты расчетов для различных шагов сетки, для двух типов элементов при использовании явной и неявной схем.

Таблица 2. Зависимость ошибки численного решения от шагов сетки

		$h, \tau, N_e, N_n$	Ошибка в C	Ошибка в $L_2$
Явная схема	Тетраэдры	$h = 0,04; \tau = 1,6 \cdot 10^{-4}$ $N_e = 801; N_n = 302$	$4,452 \cdot 10^{-2}$	$5,842 \cdot 10^{-3}$
		$h = 0,02; \tau = 4 \cdot 10^{-5}$ $N_e = 5488; N_n = 1609$	$2,443 \cdot 10^{-2}$	$3,769 \cdot 10^{-3}$
		$h = 0,01; \tau = 1 \cdot 10^{-5}$ $N_e = 37916; N_n = 8896$	$1,598 \cdot 10^{-2}$	$4,06 \cdot 10^{-3}$
		$h = 0,005; \tau = 2,5 \cdot 10^{-6}$ $N_e = 302100; N_n = 60842$	$1,579 \cdot 10^{-2}$	$4,268 \cdot 10^{-3}$
	Призмы	$h = 0,04; \tau = 1,6 \cdot 10^{-4}$ $N_e = 2500; N_n = 3146$	$5,278 \cdot 10^{-2}$	$8,033 \cdot 10^{-3}$
		$h = 0,02; \tau = 4 \cdot 10^{-5}$ $N_e = 5000; N_n = 6171$	$2,067 \cdot 10^{-2}$	$3,636 \cdot 10^{-3}$
		$h = 0,01; \tau = 1 \cdot 10^{-5}$ $N_e = 10000; N_n = 12221$	$1,527 \cdot 10^{-2}$	$4,065 \cdot 10^{-3}$
		$h = 0,005; \tau = 2,5 \cdot 10^{-6}$ $N_e = 20000; N_n = 24321$	$1,577 \cdot 10^{-2}$	$4,303 \cdot 10^{-3}$
Неявная схема	Тетраэдры	$h = 0,04; \tau = 4 \cdot 10^{-3}$ $N_e = 801; N_n = 302$	$5,053 \cdot 10^{-2}$	$8,37 \cdot 10^{-3}$
		$h = 0,02; \tau = 1 \cdot 10^{-3}$ $N_e = 5488; N_n = 1609$	$2,035 \cdot 10^{-2}$	$4,234 \cdot 10^{-3}$
		$h = 0,01; \tau = 2,5 \cdot 10^{-4}$ $N_e = 37916; N_n = 8896$	$1,603 \cdot 10^{-2}$	$4,218 \cdot 10^{-3}$
		$h = 0,005; \tau = 6,25 \cdot 10^{-5}$ $N_e = 302100; N_n = 60842$	$1,589 \cdot 10^{-2}$	$4,307 \cdot 10^{-3}$
	Призмы	$h = 0,04; \tau = 4 \cdot 10^{-3}$ $N_e = 2500; N_n = 3146$	$6,621 \cdot 10^{-2}$	$1,175 \cdot 10^{-2}$
		$h = 0,02; \tau = 1 \cdot 10^{-3}$ $N_e = 5000; N_n = 6171$	$1,56 \cdot 10^{-2}$	$4,087 \cdot 10^{-3}$
		$h = 0,01; \tau = 2,5 \cdot 10^{-4}$ $N_e = 10000; N_n = 12221$	$1,565 \cdot 10^{-2}$	$4,228 \cdot 10^{-3}$
		$h = 0,005; \tau = 6,25 \cdot 10^{-5}$ $N_e = 20000; N_n = 24321$	$1,587 \cdot 10^{-2}$	$4,343 \cdot 10^{-3}$

Из таблицы 2 видно, что при фиксированных параметрах сглаживания ( $\Delta T$ ) дробление сетки приводит к уменьшению ошибки лишь до определенного уровня. При дальнейшем измельчении сетки ошибка перестает убывать, а в некоторых случаях может даже незначительно увеличиться.

Во втором эксперименте исследовалась зависимость ошибки от полуширины интервала сглаживания  $\Delta T$ . Выбран фиксированный шаг сетки  $h = 0,01$  и соответствующие шаги по времени для явной и неявной схем (см. таблицу 2). Результаты расчетов для четырех разных значений  $\Delta T$  приведены в таблице 3.

Таблица 3. Зависимость ошибки численного решения от  $\Delta T$

		$\Delta T$	Ошибка в $C$	Ошибка в $L_2$
Явная схема	Тетраэдры	0,4	$3,351 \cdot 10^{-2}$	$9,678 \cdot 10^{-3}$
		0,2	$1,598 \cdot 10^{-2}$	$4,06 \cdot 10^{-3}$
		0,1	$1,796 \cdot 10^{-2}$	$1,654 \cdot 10^{-3}$
		0,05	$3,305 \cdot 10^{-2}$	$1,774 \cdot 10^{-3}$
	Призмы	0,4	$3,311 \cdot 10^{-2}$	$9,679 \cdot 10^{-3}$
		0,2	$1,527 \cdot 10^{-2}$	$4,065 \cdot 10^{-3}$
		0,1	$1,647 \cdot 10^{-2}$	$1,672 \cdot 10^{-3}$
		0,05	$2,103 \cdot 10^{-2}$	$1,737 \cdot 10^{-3}$
Неявная схема	Тетраэдры	0,4	$3,394 \cdot 10^{-2}$	$9,801 \cdot 10^{-3}$
		0,2	$1,603 \cdot 10^{-2}$	$4,218 \cdot 10^{-3}$
		0,1	$1,456 \cdot 10^{-2}$	$1,743 \cdot 10^{-3}$
		0,05	$2,915 \cdot 10^{-2}$	$1,517 \cdot 10^{-3}$
	Призмы	0,4	$3,356 \cdot 10^{-2}$	$9,803 \cdot 10^{-3}$
		0,2	$1,565 \cdot 10^{-2}$	$4,228 \cdot 10^{-3}$
		0,1	$1,381 \cdot 10^{-2}$	$1,729 \cdot 10^{-3}$
		0,05	$1,929 \cdot 10^{-2}$	$1,701 \cdot 10^{-3}$

Таким образом, из таблицы видно, что сначала уменьшение  $\Delta T$  ведет к снижению ошибки, но при дальнейшем уменьшении этого параметра ошибка возрастает. Слишком малое значение  $\Delta T$  может даже привести к расходимости внутреннего итерационного процесса. Для фиксированного шага  $h$  существует некоторый оптимальный параметр  $\Delta T$ , для которого ошибка получается минимальной.

Вид численного решения вблизи фронта кристаллизации, полученного при двух различных значениях параметра  $\Delta T$  с использованием неявного метода на призматических элементах, изображен на рисунке 6. Для сравнения на рисунке также представлен график точного решения.

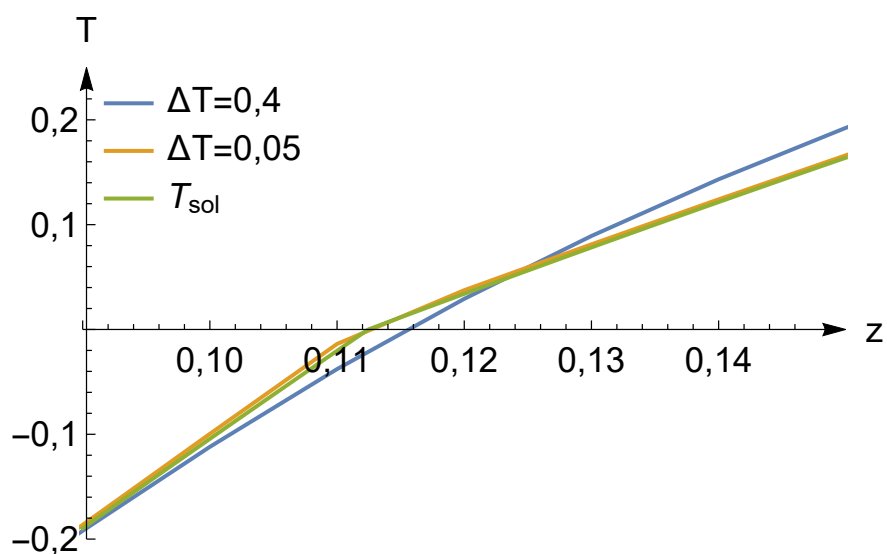


Рис. 6. Графики численных и аналитического решений

В третьем эксперименте исследовалась зависимость ошибки от величины объемной теплоты плавления  $L$  при фиксированной полуширине интервала сглаживания  $\Delta T = 0,1$  и параметрах сетки (таких же, как во втором эксперименте). Результаты расчетов для четырех разных значений  $L$  приведены в таблице 4.

Из таблицы видно, что при уменьшении  $L$  ошибки численного решения убывают.

Графики численных решений при различных значениях  $L$  отображены на рисунке 7.

Таблица 4. Зависимость ошибки численного решения от  $L$ 

		$L$	Ошибка в $C$	Ошибка в $L_2$
Явная схема	Тетраэдры	8	$6,232 \cdot 10^{-2}$	$4,723 \cdot 10^{-3}$
		4	$3,093 \cdot 10^{-2}$	$2,943 \cdot 10^{-3}$
		2	$1,796 \cdot 10^{-2}$	$1,654 \cdot 10^{-3}$
		1	$7,084 \cdot 10^{-3}$	$8,328 \cdot 10^{-4}$
	Призмы	8	$5,077 \cdot 10^{-2}$	$4,935 \cdot 10^{-3}$
		4	$3,383 \cdot 10^{-2}$	$3,118 \cdot 10^{-3}$
		2	$1,647 \cdot 10^{-2}$	$1,672 \cdot 10^{-3}$
		1	$6,729 \cdot 10^{-3}$	$8,087 \cdot 10^{-4}$
Неявная схема	Тетраэдры	8	$5,563 \cdot 10^{-2}$	$4,688 \cdot 10^{-3}$
		4	$2,798 \cdot 10^{-2}$	$2,958 \cdot 10^{-3}$
		2	$1,456 \cdot 10^{-2}$	$1,743 \cdot 10^{-3}$
		1	$6,228 \cdot 10^{-3}$	$1,112 \cdot 10^{-3}$
	Призмы	8	$4,506 \cdot 10^{-2}$	$4,831 \cdot 10^{-3}$
		4	$2,984 \cdot 10^{-2}$	$3,019 \cdot 10^{-3}$
		2	$1,381 \cdot 10^{-2}$	$1,729 \cdot 10^{-3}$
		1	$4,929 \cdot 10^{-3}$	$1,04 \cdot 10^{-3}$

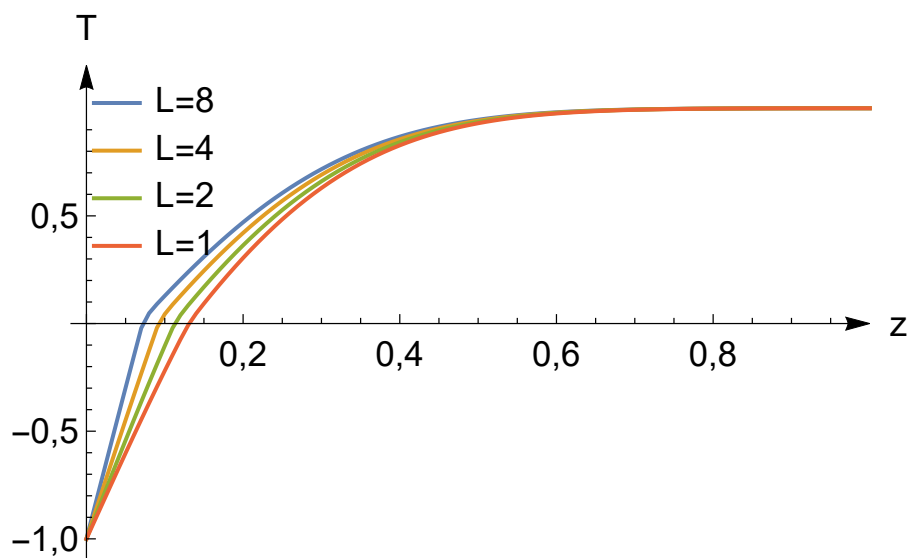


Рис. 7. Графики численных решений

## 4. Уравнение теплопроводности с конвекцией

### 4.1. Постановка задачи и численный метод

Уравнение теплопроводности с учетом конвективного теплопереноса имеет вид [1]:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla) \varepsilon = \nabla \cdot (\kappa \nabla T) + q_v, \quad \vec{x} \in \Omega, \quad t > 0,$$

где  $\vec{v}$  — скорость движения среды.

В данной главе мы не будем учитывать фазовые переходы, поэтому считаем, что

$$\varepsilon = c_v T, \quad c_v = \text{const}.$$

Рассмотрим случай, когда скорость направлена по оси  $y$ , а ее проекция на эту ось равна  $v$ .

Тогда можно переписать исходное уравнение в виде:

$$c_v \left( \frac{\partial T}{\partial t} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \nabla \cdot (\kappa \nabla T) + q_v, \quad \vec{x} \in \Omega, \quad t > 0.$$

При решении задачи с конвективным слагаемым необходимо использовать ту или иную процедуру монотонизации для обеспечения монотонности получаемого решения. Выполним монотонизацию путем добавления в решаемое уравнение диффузионного слагаемого [1]:

$$c_v \left( \frac{\partial T}{\partial t} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \nabla \cdot (\kappa \nabla T) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \alpha \frac{\partial T}{\partial y} \right) + q_v,$$

где  $\alpha$  — коэффициент искусственной диффузии.

После применения метода Бубнова-Галеркина получим конечно-элементную аппроксимацию задачи:

$$[C^{diag}] \frac{\partial}{\partial t} \{T\} + ([H] + [K] + [K^\alpha]) \{T\} = \{F\}.$$

Матрицы  $[C^{diag}]$ ,  $[K]$  и вектор  $\{F\}$  вычисляются точно так же, как и для классического уравнения теплопроводности.

Матрица  $[H]$  необходима для учета конвективного слагаемого, ее компоненты вычисляются на элементе по следующей формуле:

$$H_{ij}^{(e)} = \int_{\Omega_e} v c_v N_i \frac{\partial N_j}{\partial y} dV.$$

Матрица  $[K^\alpha]$  появляется из-за добавления искусственной диффузии, ее компоненты вычисляются на элементе следующим образом:

$$K_{ij}^{\alpha(e)} = \int_{\Omega_e} \alpha \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} dV.$$

Коэффициент  $\alpha$  нужно выбрать на каждом элементе таким образом, чтобы обеспечить монотонность решения. Пусть на элементе с номером  $m$   $\alpha$  постоянна и имеет вид:

$$\alpha = \nu c_\nu d_m.$$

В этом случае для обеспечения справедливости принципа максимума на элементе с номером  $m$  должны быть выполнены следующие неравенства:

$$\int_{\Omega_m} \left[ N_i + d_m \frac{\partial N_i}{\partial y} \right] \frac{\partial N_i}{\partial y} dV > 0, \quad (16)$$

$$\int_{\Omega_m} \left[ N_i + d_m \frac{\partial N_i}{\partial y} \right] \frac{\partial N_j}{\partial y} dV < 0, \quad i \neq j. \quad (17)$$

Для нахождения значения параметра  $d_m$  на каждом элементе необходимо решить задачу линейного программирования (16)-(17), то есть найти минимальные неотрицательные значения параметра, удовлетворяющие данным неравенствам, а затем из полученной совокупности выбрать максимальное значение и использовать его в расчетах. Для заданной фиксированной сетки это можно сделать один раз для всех моментов времени и сохранить нужный массив на весь расчет.

Для расчетов вновь использовалось две схемы: явная и неявная. Явная схема имеет вид:

$$[C^{diag}] \frac{\{\hat{T}\} - \{T\}}{\tau} + ([H] + [K] + [K^\alpha])\{T\} = \{F\}.$$

Вычисление температуры на следующем временном слое производится по формуле:

$$\hat{T}_i = T_i + \frac{\tau}{C_{ii}^{diag}} \left( F_i - \sum_{j=1}^N (H_{ij} + K_{ij} + K_{ij}^\alpha) T_j \right).$$

В неявной схеме, имеющей вид

$$[C^{diag}] \frac{\{\hat{T}\} - \{T\}}{\tau} + ([H] + [K] + [K^\alpha])\{\hat{T}\} = \{F\},$$

на каждом шаге по времени решается система линейных алгебраических уравнений:

$$[A]\{\hat{T}\} = \{b\}, \quad \text{где}$$

$$[A] = \frac{1}{\tau}[C^{diag}] + [H] + [K] + [K^\alpha], \quad \{b\} = \{F\} + \frac{1}{\tau}[C^{diag}]\{T\}.$$

## 4.2. Результаты тестовых расчетов

Рассмотрим следующую задачу:

$$\left\{ \begin{array}{l} T_t + vT_y = \nabla^2 T, \quad 0 < x, y, z < 1, \quad t > 0 \\ T|_{t=0} = \sin(y) \cos(\pi x) \cos(\pi z), \\ \frac{\partial T}{\partial \vec{n}}|_{x=0} = \frac{\partial T}{\partial \vec{n}}|_{x=1} = \frac{\partial T}{\partial \vec{n}}|_{z=0} = \frac{\partial T}{\partial \vec{n}}|_{z=1} = 0, \\ T|_{y=0} = -\exp(-(2\pi^2 + 1)t) \sin(vt) \cos(\pi x) \cos(\pi z), \\ T|_{y=1} = \exp(-(2\pi^2 + 1)t) \sin(1 - vt) \cos(\pi x) \cos(\pi z). \end{array} \right.$$

Решением данной задачи является следующая функция:

$$T(x, y, z, t) = \exp(-(2\pi^2 + 1)t) \sin(y - vt) \cos(\pi x) \cos(\pi z).$$

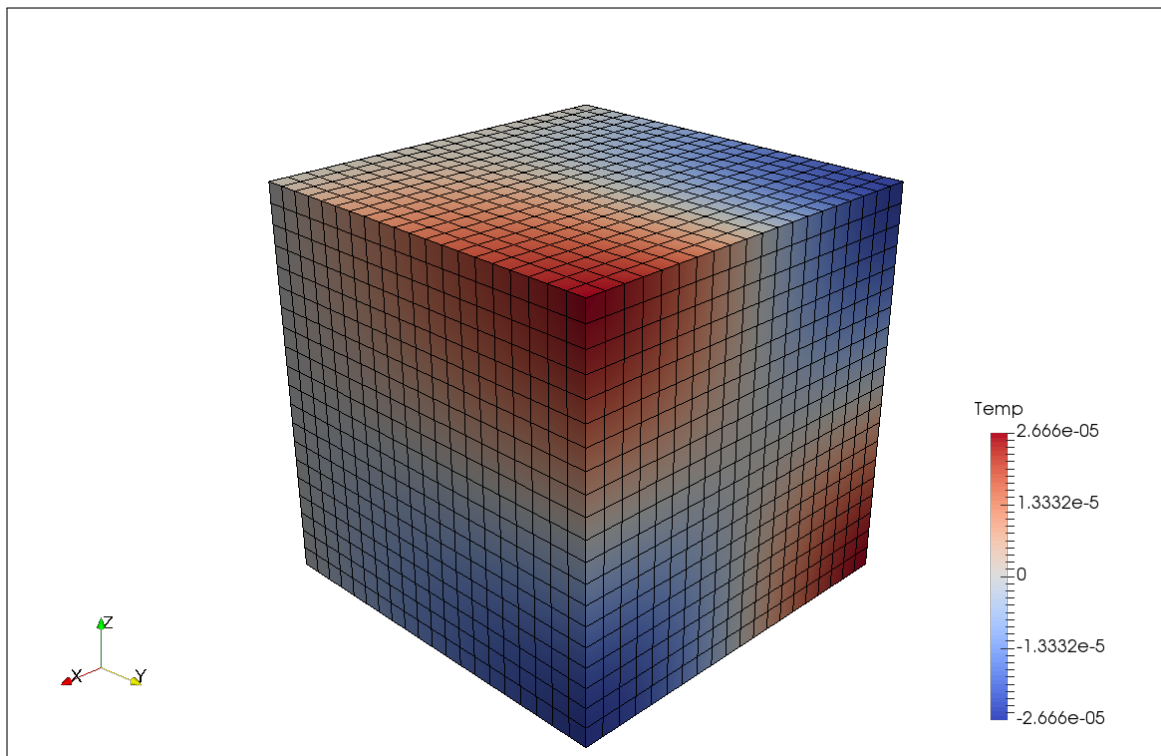
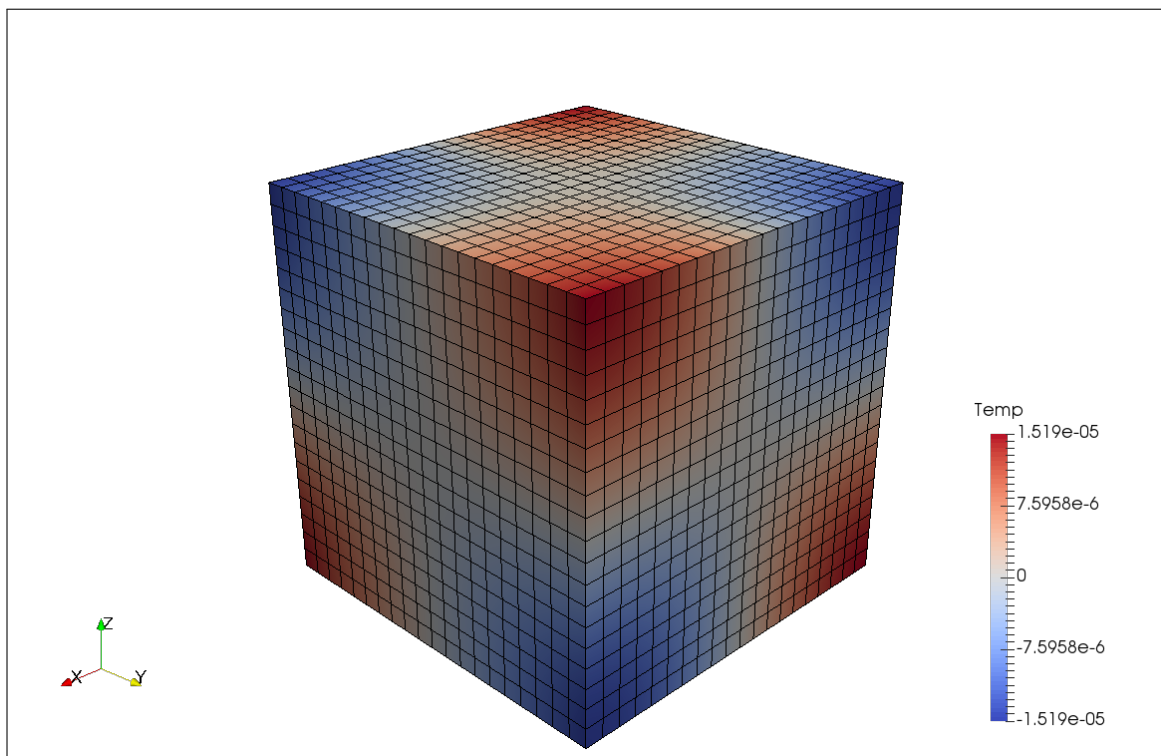
В таблице 5 приведены ошибки численного решения задачи при  $v = 1$ . Расчет производился до момента  $t_{end} = 0,005$ . При дроблении шагов по времени и по пространству ошибка убывает примерно в 2 раза, что говорит о порядке точности метода  $O(\tau + h)$ .

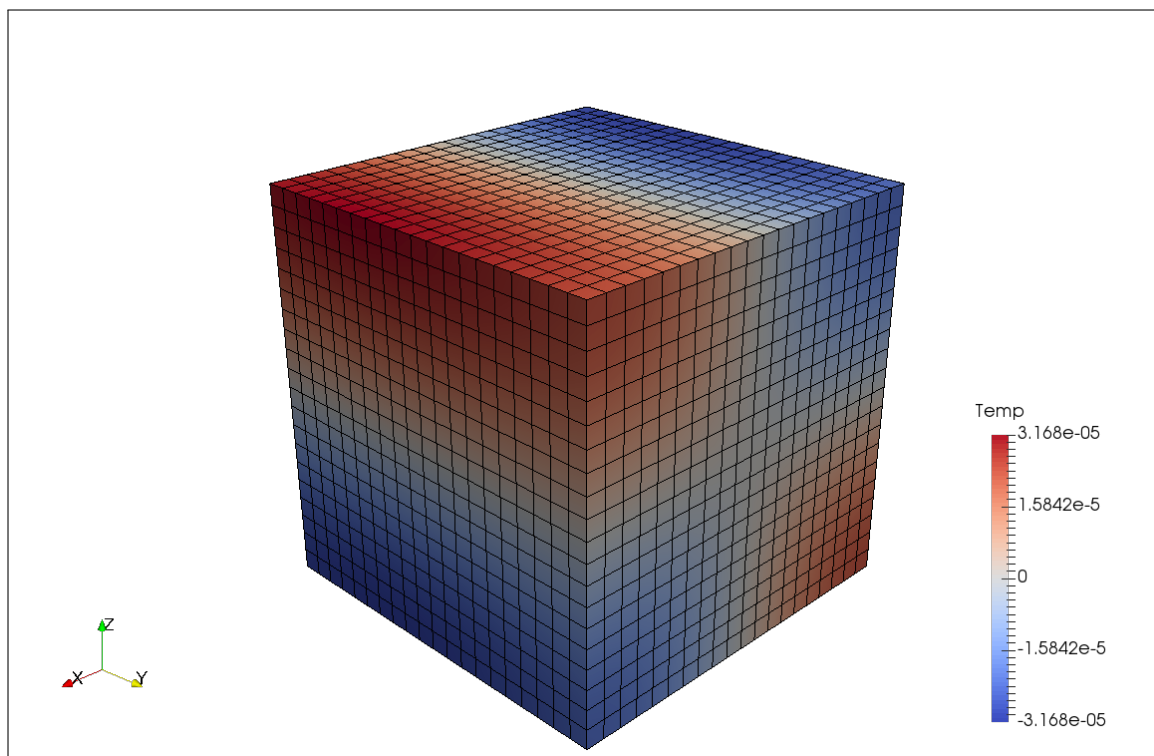
Таблица 5. Ошибки численного решения задачи

		$h, \tau, N_e, N_n$	Ошибка в С	Отн. в С	Ошибка в $L_2$	Отн. в $L_2$
Явная схема	Тетраэдры	$h = 0,1; \tau = 2,5 \cdot 10^{-5}$ $N_e = 6655; N_n = 1504$	$6,118 \cdot 10^{-2}$	1,635	$3,593 \cdot 10^{-2}$	1,813
		$h = 0,05; \tau = 1,25 \cdot 10^{-5}$ $N_e = 50278; N_n = 10019$	$3,742 \cdot 10^{-2}$		$1,982 \cdot 10^{-2}$	
		$h = 0,025; \tau = 6,25 \cdot 10^{-6}$ $N_e = 427047; N_n = 80328$	$2,095 \cdot 10^{-2}$	1,786	$9,778 \cdot 10^{-3}$	2,027
	Призмы	$h = 0,1; \tau = 2,5 \cdot 10^{-5}$ $N_e = 1000; N_n = 1331$	$1,544 \cdot 10^{-2}$	1,956	$9,079 \cdot 10^{-3}$	1,963
		$h = 0,05; \tau = 1,25 \cdot 10^{-5}$ $N_e = 8000; N_n = 9261$	$7,893 \cdot 10^{-3}$		$4,625 \cdot 10^{-3}$	
		$h = 0,025; \tau = 6,25 \cdot 10^{-6}$ $N_e = 64000; N_n = 68921$	$3,976 \cdot 10^{-3}$	1,985	$2,322 \cdot 10^{-3}$	1,992
Неявная схема	Тетраэдры	$h = 0,1; \tau = 10^{-3}$ $N_e = 6655; N_n = 1504$	$5,403 \cdot 10^{-2}$	1,75	$3,178 \cdot 10^{-2}$	1,87
		$h = 0,05; \tau = 5 \cdot 10^{-4}$ $N_e = 50278; N_n = 10019$	$3,087 \cdot 10^{-2}$		$1,699 \cdot 10^{-2}$	
		$h = 0,025; \tau = 2,5 \cdot 10^{-4}$ $N_e = 427047; N_n = 80328$	$1,625 \cdot 10^{-2}$	1,899	$8,204 \cdot 10^{-3}$	2,071
	Призмы	$h = 0,1; \tau = 10^{-3}$ $N_e = 1000; N_n = 1331$	$2,161 \cdot 10^{-2}$	2,01	$1,271 \cdot 10^{-2}$	1,941
		$h = 0,05; \tau = 5 \cdot 10^{-4}$ $N_e = 8000; N_n = 9261$	$1,075 \cdot 10^{-2}$		$6,548 \cdot 10^{-3}$	
		$h = 0,025; \tau = 2,5 \cdot 10^{-4}$ $N_e = 64000; N_n = 68921$	$5,36 \cdot 10^{-3}$	2,006	$3,297 \cdot 10^{-3}$	1,986

Для оценки влияния конвективного слагаемого проведена серия расчетов для различных скоростей переноса  $v$ . Численные решения задачи в момент времени  $t = 0,5$ , полученные с помощью неявной схемы на сетке из призматических элементов, представлены на рисунках 8-10.



Рис. 8. Решение задачи при  $v = 0$ Рис. 9. Решение задачи при  $v = 1$

Рис. 10. Решение задачи при  $v = 10$ 

## 5. Заключение

Разработана программа для решения классического трехмерного нестационарного уравнения теплопроводности с помощью метода конечных элементов, используя два типа конечных элементов, а также две схемы дискретизации по времени. Программа протестирована на ряде тестовых задач, продемонстрирован порядок точности, предсказанный теорией.

Для решения задачи с фазовыми переходами использована модель со сглаженными теплофизическими характеристиками. Произведено сравнение численного решения с аналитическим, исследована зависимость ошибки от ширины интервала сглаживания, а также от величины удельной теплоты фазового перехода.

Для задачи с конвективным слагаемым описана и применена процедура монотонизации решения. Проведена серия расчетов, вычислены ошибки численного решения.

Разработанный программный комплекс можно использовать для различных прикладных исследований.

## Список литературы

- [1] Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Вычислительная теплопередача, М.: Едиториал УРСС, 2003, 784 с.
- [2] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики, М.: Наука, 1972, 736 с.
- [3] Галанин М.П., Савенков Е.Б. Методы численного анализа математических моделей, М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2010, 591 с.
- [4] Lewis R.W., Nithiarasu P., Seetharamu K.N. Fundamentals of the Finite Element Method for Heat and Fluid Flow, Hoboken: Wiley, 2004, 335 pp.
- [5] Зенкевич О.Ц. Метод конечных элементов в технике, М.: Мир, 1975, 541 с.
- [6] Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. The Finite Element Method: The Basis, Oxford: Butterworth-Heinemann, 2000, 708 pp.
- [7] Самарский А.А., Моисеенко Б.Д. Экономичная схема сквозного счета для многомерной задачи Стефана // Журнал вычислительной математики и математической физики, 1965, Т. 5, № 5, с. 816–827
- [8] Численное моделирование динамики температурных полей на плоских мишенях при нестационарном интенсивном лазерном воздействии / М.П.Галанин [и др.] //Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2008. № 61. 33 с.
- [9] Mazhukin V.I., Samarskii A.A. Mathematical Modeling In The Technology Of Laser Treatments Of Materials // Surveys on Mathematics for Industry. 1994. Т. 4. № 2. 85 pp.
- [10] Мажорова О.С., Попов Ю.П., Щерица О.В. Чистонезавный метод решения задачи о фазовом переходе // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2004. № 29. 24 с.
- [11] Мартинсон Л.К., Малов Ю.И. Дифференциальные уравнения математической физики, М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002, 368 с.

## Содержание

<b>1. Введение</b>	<b>3</b>
<b>2. Классическое уравнение теплопроводности</b>	<b>4</b>
2.1. Постановка задачи и численный метод . . . . .	4
2.2. Результаты тестовых расчетов . . . . .	7
<b>3. Задача Стефана о фазовом переходе</b>	<b>10</b>
3.1. Постановка задачи и численный метод . . . . .	10
3.2. Тестовая задача и ее аналитическое решение . . . . .	14
3.3. Результаты тестовых расчетов . . . . .	15
<b>4. Уравнение теплопроводности с конвекцией</b>	<b>20</b>
4.1. Постановка задачи и численный метод . . . . .	20
4.2. Результаты тестовых расчетов . . . . .	22
<b>5. Заключение</b>	<b>25</b>
<b>Список литературы</b>	<b>26</b>