



ISSN 2071-2898 (Print)  
ISSN 2071-2901 (Online)

**Борисов В.Е., Луцкий А.Е.**

Моделирование перехода  
между регулярным и  
маховским отражением  
ударных волн с помощью  
неявной схемы на основе  
методов LU-SGS и BiCGStab

**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Борисов В.Е., Луцкий А.Е. Моделирование перехода между регулярным и маховским отражением ударных волн с помощью неявной схемы на основе методов LU-SGS и BiCGStab // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2016. № 68. 36 с. doi:[10.20948/prepr-2016-68](https://doi.org/10.20948/prepr-2016-68)  
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2016-68>

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК  
ОРДЕНА ЛЕНИНА  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ  
имени М. В. КЕЛДЫША

В.Е. Борисов, А.Е. Луцкий

**Моделирование перехода между регулярным  
и маховским отражением ударных волн  
с помощью неявной схемы на основе  
методов LU-SGS и BiCGStab**

Москва, 2016

*В.Е. Борисов, А.Е. Луцкий*, Моделирование перехода между регулярным и маховским отражением ударных волн с помощью неявной схемы на основе методов LU-SGS и BiCGStab

**Аннотация.** В работе представлена параллельная реализация неявной схемы на основе методов LU-SGS и BiCGStab для решения трехмерных нестационарных уравнений URANS с моделью турбулентности Спаларта-Аллараса. С помощью разработанной методики проведено численное моделирование нестационарной задачи о переходе между регулярным и маховским отражением ударных волн, инициируемом импульсным подводом энергии в поток. Результаты исследований сравниваются с опубликованными в литературе данными, а также с результатами расчетов по явной схеме. Проведено исследование масштабируемости предложенной численной методики.<sup>1</sup>

**Ключевые слова:** LU-SGS, BiCGStab, URANS, вложение энергии в поток, SA модель турбулентности.

*V.E. Borisov, A.E. Lusky*, Simulation of transition between regular and Mach shock waves reflections by an implicit scheme based on the LU-SGS and BiCGStab methods

**Abstract.** In this paper a parallel solver for 3D unsteady Reynolds-averaged Navier–Stokes equations with Spalart–Allmaras turbulence model is presented. The method is based on fully implicit finite volume scheme, which is solved by BiCGStab with LU-SGS as precondition. Using the developed method the transition between regular and Mach shock waves reflections initiated by energy input is simulated. Numerical results are compared with published data and with results of computations by the explicit scheme. The scalability of the proposed parallel numerical method is studied.

**Key words:** LU-SGS, BiCGStab, URANS, energy input, SA turbulence model

---

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-31-00399 мол\_а) и программы фундаментальных исследований президиума РАН «Фундаментальные основы технологий двойного назначения в интересах национальной безопасности»

# 1 Введение

Усложнение математических моделей современной аэродинамики и непрерывное развитие вычислительной техники ставят вопрос о разработке соответствующих методов математического моделирования. Разрабатываемые при этом численные алгоритмы, с одной стороны, должны с достаточной точностью воспроизводить характерную для аэродинамики сложную картину течений (в частности, наличие узких зон больших градиентов, особенности типа пограничных слоев, ударных волн и т.д.), а с другой – обладать необходимым запасом устойчивости, экономичности и масштабируемости, позволяя получать решение за приемлемое время. Поэтому, несмотря на большое количество разработанных к настоящему моменту алгоритмов, в силу постоянного увеличения сложности стоящих перед инженерами задач, разработка новых эффективных численных методов продолжает оставаться актуальной.

При проведении расчетов задач аэродинамики широко применяются как явные, так и неявные разностные схемы. Явные схемы, как правило, более просты в реализации, однако в силу условия устойчивости накладывают ограничение на шаг интегрирования по времени. В случае течений с большими числами Рейнольдса (из-за большой разницы временных масштабов, на которых проявляют себя процессы конвективного и диффузионного переноса) расчет задачи сводится к решению жестких систем дифференциальных уравнений, для которых допустимый временной шаг явной схемы существенно ограничен. Поэтому, даже несмотря на тот факт, что явные схемы обладают высокой степенью параллелизма, при жестких ограничениях на шаг по времени их использование может оказаться неэффективным (в особенности при расчете стационарных задач). Однако если физический временной шаг, необходимый для описания нестационарного течения в силу соображений точности [1], мал, использование явных схем оправдано.

Неявные схемы не имеют формальных ограничений на шаг интегрирования по времени, связанных с условием устойчивости. Однако при их использовании возникает необходимость решения систем нелинейных уравнений, матрица Якоби которых обладает большой размерностью и сложной структурой. В силу этих факторов применение неявных схем требует дополнительных вычислительных ресурсов – как памяти, так и процессорного времени. Кроме того, немаловажным фактором является степень параллелизма, которую допускает конкретная реализация неявной схемы. При использовании неявных схем область зависимости решения является глобальной, т.е. значение решения в данной ячейке зависит от значений решения во всех остальных ячейках расчетной сетки. Из-за этого эффективная параллельная реализация любой неявной схемы достаточно сложна.

За последние десятилетия было разработано большое количество неявных

схем, основанных на методах полной и приближенной факторизации и методах расщепления по физическим процессам и пространственным направлениям (позволяющим свести решение многомерной задачи к последовательности одномерных аналогов), в той или иной степени обеспечивающих компромисс между высокой скоростью сходимости, требованиями к памяти и эффективностью параллельной реализации [2–10].

Настоящая работа является развитием предложенного авторами в работе [11] подхода к построению эффективной параллельной реализации неявной схемы на основе метода LU-SGS. Алгоритм предназначен для решения 3D уравнений URANS с моделью турбулентности Спаларта-Аллмараса с модификацией Эдвардса [12, 13] для сжимаемых течений. Аппроксимация уравнений по пространству проводилась с помощью схемы типа WENO 3-го порядка точности [14], хорошо зарекомендовавшей себя как для структурированных, так и неструктурированных сеток [15, 16]. Схема, описанная в оригинальной работе [11], применялась для нахождения методом установления стационарного решения задачи о трансзвуковом обтекании крыла ONERA M6. Проведенные численные расчеты продемонстрировали хорошее совпадение с экспериментом, высокую эффективность и масштабируемость разработанного алгоритма: ускорение расчета до 60 раз и эффективность распараллеливания более 80% при использовании 72 вычислительных ядер. Кроме того, время выполнения одной итерации параллельного неявного метода было сравнимо со временем выполнения одной итерации аналогичной параллельной программы явной схемы при схожих затратах памяти и одном и том же количестве вычислительных узлов.

В настоящей работе проводится модификация разработанного метода в целях его применения для расчета нестационарных решений. В оригинальном алгоритме решение возникающей на каждой итерации метода Ньютона системы линейных уравнений осуществлялось приближенно методом LU-SGS, кроме того, т.к. ставился вопрос о нахождении стационарного решения, на каждом временном шаге использовалась только одна ньютоновская итерация. Для расчета сильно нестационарных течений точность расчета должна быть существенно выше, что достигается увеличением как количества ньютоновских итераций, так и повышением точности нахождения решения на каждой из них. Для повышения точности решения возникающих линейных систем (СЛАУ) в работе применяется стабилизированный метод бисопряженных градиентов BiCGStab в связке с методом LU-SGS, который теперь используется в качестве предобуславливателя [17]. Метод BiCGStab является итерационным методом решения СЛАУ и относится к классу методов Крыловских подпространств, обладает достаточно простой структурой и в настоящее время его применение для многих приложений является стандартным.

Разработанный метод применяется для моделирования перехода между

регулярным (RR) и маховским (MR) отражением ударных волн, инициированного импульсным подводом энергии в область между двумя симметричными клиньями (либо, для простоты, пластинами). Постановка задачи взята из цикла работ [18–22]. Данная задача интересна тем, что при определенных условиях в сверхзвуковом потоке газа возможно существование двух различных стационарных ударно-волновых конфигураций и связанное с этим явление гистерезиса. Одной из целей указанных работ было исследование возможности управления течением путем локального выделения энергии перед ударной волной. Интерес к данной тематике во многом связан с интенсификацией исследований по разработке гиперзвуковых летательных аппаратов (ГЛА), в частности, для нахождения способов управления течением в двигательной установке в целях устранения возможности выхода на нерасчетные режимы движения [23–28]. С помощью разработанной параллельной реализации неявной схемы авторами проведены аналогичные исследования, результаты которых сравниваются с данными из работы [21], а также с результатами расчетов по явной схеме. Продемонстрированы эффективность и хорошая масштабируемость предложенной методики.

## 2 Математическая модель

### 2.1 Основные уравнения

Для описания течений совершенного вязкого сжимаемого газа используется система нестационарных осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье-Стокса (URANS), в декартовой системе координат ( $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$ ) имеющая следующий вид:

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}_j}{\partial x_j} = \frac{\partial \mathbf{g}_j}{\partial x_j} + \mathbf{w}, \quad (1)$$

где суммирование ведется по  $j = 1, 2, 3$ ,  $\mathbf{q}$  – вектор консервативных переменных,  $\mathbf{f}_j$  и  $\mathbf{g}_j$  – векторы невязких и вязких потоков соответственно,  $\mathbf{w}$  – вектор внешних источников (в настоящей работе используется только источник в уравнении баланса энергии):

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u_1 \\ \rho u_2 \\ \rho u_3 \\ \rho E^* \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_j = \begin{pmatrix} \rho u_j \\ \rho u_j u_1 + \delta_{1,j} p \\ \rho u_j u_2 + \delta_{2,j} p \\ \rho u_j u_3 + \delta_{3,j} p \\ u_j (\rho E^* + p) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{1j} \\ \tau_{2j} \\ \tau_{3j} \\ \tau_{ij} u_i + h_j \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ w \end{pmatrix}.$$

Здесь  $\rho$  – плотность,  $u_j$  – компоненты вектора скорости  $\mathbf{u}$ ,  $\tau_{ij}$  – компоненты тензора вязких напряжений,  $\delta_{i,j}$  – тензор Кронекера,  $E^*$  – полная энергия турбулентного течения:

$$E^* = E + k,$$

где  $E$  – полная энергия осредненного течения,  $k$  – кинетическая энергия турбулентных пульсаций. Термодинамическое давление  $p$  вычисляется по уравнению состояния совершенного газа:

$$p = (\gamma - 1)\rho \left( E - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 u_j^2 \right).$$

Здесь  $\gamma$  – показатель адиабаты, для воздуха  $\gamma = 1.4$ . Компоненты тензора вязких напряжений и вектора теплового потока имеют вид

$$\tau_{ij} = \mu_{\text{eff}} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu_{\text{eff}} \frac{\partial u_l}{\partial x_l} \delta_{i,j} - \frac{2}{3} \rho k \delta_{i,j},$$

$$h_j = \lambda_{\text{eff}} \frac{\partial T}{\partial x_j}.$$

В приведенных выше уравнениях  $T$  является температурой газа и определяется из формулы

$$T = \frac{p}{\rho R},$$

где  $R$  – газовая постоянная, для воздуха  $R = 287$  Дж/(кг·К).

«Эффективное» значение коэффициентов вязкости и теплопроводности определяется как

$$\begin{aligned} \mu_{\text{eff}} &= \mu + \mu_t, \\ \lambda_{\text{eff}} &= C_p \left( \frac{\mu}{\text{Pr}} + \frac{\mu_t}{\text{Pr}_t} \right). \end{aligned}$$

Здесь  $C_p$  – коэффициент удельной теплоемкости газа при постоянном давлении.  $\text{Pr}$  и  $\text{Pr}_t$  – ламинарное и турбулентное числа Прандтля, для воздуха принимается  $\text{Pr} = 0.7$ ,  $\text{Pr}_t = 0.9$ . Молекулярная вязкость определяется следующей степенной зависимостью:

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \left( \frac{T}{T_0} \right)^s,$$

где  $s = 0.76$ ,  $\mu_0$  – молекулярная вязкость при опорной температуре  $T_0$ .

Величина  $\mu_t$  обозначает добавочную турбулентную вязкость, которая определяется моделью турбулентности.

## 2.2 Модель турбулентности Спаларта-Аллмараса

В работе используется вариант однопараметрической модели турбулентности Спаларта-Аллмараса (SA) для сжимаемых течений [12] с модификацией Эдвардса [13]. В рамках этой модели осредненная величина кинетической энергии турбулентных пульсаций не может быть найдена напрямую, в силу чего полагается  $k = 0$ .

Турбулентная вязкость задается соотношением

$$\mu_t = \rho \tilde{\nu} f_{v1}, \quad f_{v1} = \frac{\chi^3}{\chi^3 + C_{v1}^3}, \quad \chi \equiv \rho \frac{\tilde{\nu}}{\mu}, \quad (2)$$

где  $\tilde{\nu}$  – модельная величина, которая определяется из основного уравнения модели

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho \tilde{\nu}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \tilde{\nu} \mathbf{u}) = \rho (P_{\tilde{\nu}} - D_{\tilde{\nu}} + T_{\tilde{\nu}}) + \frac{1}{\sigma_{\tilde{\nu}}} \nabla \cdot [(\mu + \rho \tilde{\nu}) \nabla \tilde{\nu}] \\ + \frac{C_{b2}}{\sigma_{\tilde{\nu}}} \rho (\nabla \tilde{\nu})^2 - \frac{1}{\sigma_{\tilde{\nu}} \rho} (\mu + \rho \tilde{\nu}) \nabla \rho \cdot \nabla \tilde{\nu}. \end{aligned} \quad (3)$$

Величины  $P_{\tilde{\nu}}$  и  $D_{\tilde{\nu}}$ , отвечающие соответственно за производство и диссипацию турбулентности, и  $T_{\tilde{\nu}}$  – за определение ламинарно-турбулентного перехода в пограничном слое, записываются в виде

$$\begin{aligned} P_{\tilde{\nu}} = C_{b1} (1 - f_{t2}) \tilde{S} \tilde{\nu}, \quad D_{\tilde{\nu}} = \left( C_{w1} f_w - \frac{C_{b1}}{k^2} f_{t2} \right) \left[ \frac{\tilde{\nu}}{d} \right]^2, \quad T_{\tilde{\nu}} = f_{t1} (\Delta U)^2, \\ f_w = g \left[ \frac{1 + C_{w3}^6}{g^6 + C_{w3}^6} \right]^{1/6}, \quad g = r + C_{w2} (r^6 - r). \end{aligned}$$

Здесь  $\Delta U$  – модуль разности между скоростями в потоке и ближайшей точке ламинарно-турбулентного перехода,  $d$  – расстояние от твердой стенки.

Модификация Эдвардса модели Спаларта-Аллмараса [13] предназначена для улучшения поведения решения в пограничном слое. Соответствующие величины  $\tilde{S}$  и  $r$  записываются в виде:

$$\begin{aligned} \tilde{S} = \sqrt{S} \left[ \frac{1}{\chi} + f_{v1} \right], \quad S = \sum_{i,j=1}^3 \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{2}{3} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right)^2, \\ r = \tanh \left( \frac{\tilde{\nu}}{\tilde{S} k_r^2 d^2} \right) / \tanh(1.0). \end{aligned}$$

Остальные величины являются константами модели SA и представлены в таб. 1.



$\sigma_{\tilde{\nu}}$	$k_r$	$C_{b1}$	$C_{b2}$	$C_{v1}$	$C_{w1}$	$C_{w2}$	$C_{w3}$
$\frac{2}{3}$	0.41	0.1335	0.622	7.1	$C_{w1} = \frac{C_{b1}}{k^2} + \frac{1+C_{b2}}{\sigma}$	0.3	2.0

Таблица 1. Константы модели SA

При моделировании полностью турбулентного пограничного слоя учет  $f_{t1}$  и  $f_{t2}$  не вносит существенных изменений в решение, поэтому обычно ими пренебрегают [12].

### 3 Методы решения

Алгоритм численного решения уравнений (1) и (3) основан на идее расщепления по физическим процессам: сначала решается система уравнений (1) с использованием значения турбулентной вязкости с предыдущего шага, затем решается уравнение (3). Такой подход не требует введения дополнительных рабочих массивов, что позволяет эффективно использовать уже имеющиеся данные о течении при решении уравнения турбулентной вязкости. Кроме того, преимуществом такого подхода является простота адаптации алгоритма к другой модели турбулентности.

Используемые для нахождения решения методы подробно описаны в соответствующих секциях. Общий алгоритм решения представлен в разделе 3.5.

#### 3.1 Дискретизация уравнений

Уравнения (1) и (3) дискретизируются по пространственным переменным методом конечных объемов. Этот метод имеет ряд преимуществ перед альтернативным методом конечных разностей, так как применим к любой геометрии, оперирует любыми сетками и позволяет избежать проблем с метрическими сингулярностями обобщенных координат. Предполагая, что расчетная область покрыта сеткой, состоящей из неперекрывающихся многогранных ячеек, метод конечных объемов реализуется интегрированием уравнений (1) и (3) по каждой счетной ячейке с последующим преобразованием объемных интегралов от потоков в интегралы по граням ячейки.

В результате полудискретный вариант системы уравнений Навье-Стокса (1) имеет вид:

$$V_i \frac{\partial \mathbf{q}_i}{\partial t} = - \sum_{\sigma} (\mathbf{f}_{\sigma} - \mathbf{g}_{\sigma}) s_{\sigma} \quad (4)$$

$$\mathbf{f}_{\sigma} = (\mathbf{f}_k, \vec{n}_{\sigma}), \quad \mathbf{g}_{\sigma} = (\mathbf{g}_k, \vec{n}_{\sigma}),$$

где  $i = 1 \dots N$ ,  $N$  – число счетных ячеек,  $V_i$  – объем ячейки,  $s_\sigma$  – площадь боковой грани ячейки,  $\vec{n}_\sigma$  – единичный вектор внешней нормали к грани ячейки. Нижний индекс  $\sigma$  указывает на грань, суммирование ведется во всем граням, составляющим боковую поверхность рассматриваемой счетной ячейки  $i$ .

Далее на каждой грани  $\sigma$  вводится ортонормированный базис  $(\vec{n}, \vec{k}, \vec{l})$ , где  $\vec{k} = (k_1, k_2, k_3)$  и  $\vec{l} = (l_1, l_2, l_3)$  – касательные векторы. Матрица преобразования  $T_\sigma$  к локальному базису при этом определяется координатами базисных ортов:

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_1 & n_2 & n_3 & 0 \\ 0 & k_1 & k_2 & k_3 & 0 \\ 0 & l_1 & l_2 & l_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Невязкий поток на грани ячейки представляется через локально-одномерный поток  $\mathbf{F}_\sigma$  в нормальном для грани направлении:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_\sigma &= T_\sigma^{-1} \mathbf{F}_\sigma, \\ \mathbf{F}_\sigma &= \mathbf{f}_1(\mathbf{Q}_\sigma), \\ \mathbf{Q}_\sigma &= T_\sigma \mathbf{q}_\sigma. \end{aligned} \tag{5}$$

В уравнении (5) поток  $\mathbf{f}_1$  имеет такое же определение, как в уравнении (1), но аргументом его являются контрвариантные компоненты вектора  $\mathbf{q}$  в локальном базисе  $(\vec{n}, \vec{k}, \vec{l})$  боковой грани ячейки.

В настоящей работе для аппроксимации невязкого потока  $\mathbf{F}_\sigma$  на грани счетной ячейки используется обобщенная схема Годунова [29] с интерполяционной схемой WENO 3-го порядка точности аппроксимации по пространству, детальное описание которой можно найти в [14, 16].

Аппроксимация вязкого потока  $\mathbf{g}_\sigma$  на грани счетной ячейки в правой части уравнения (4) вычисляется интерполяцией сеточных значений и их производных:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_\sigma &= \mathbf{g}(\mathbf{q}_\sigma, \nabla \mathbf{q}_\sigma), \\ \mathbf{q}_\sigma &= \frac{V_i \mathbf{q}_{\sigma(i)} + V_{\sigma(i)} \mathbf{q}_i}{V_i + V_{\sigma(i)}}, \quad \nabla \mathbf{q}_\sigma = \frac{V_i \nabla \mathbf{q}_{\sigma(i)} + V_{\sigma(i)} \nabla \mathbf{q}_i}{V_i + V_{\sigma(i)}}. \end{aligned}$$

Здесь, как и везде в настоящей работе, индекс  $\sigma(i)$  указывает на ячейку, которая является соседней к текущей ячейке  $i$  по грани  $\sigma$ .

В конечном итоге после неявной дискретизации по времени система урав-

нений (1) записывается в виде:

$$V_i \frac{\mathbf{q}^{n+1} - \mathbf{q}^n}{\Delta t} = \mathbf{R}_i^{n+1}, \quad (6)$$

$$\mathbf{R}_i = - \sum_{\sigma} (T_{\sigma}^{-1} \mathbf{F}_{\sigma} - \mathbf{g}_{\sigma}) s_{\sigma}.$$

Аналогично дискретизируется уравнение Спаларта-Аллмараса (3). Перепишем его в следующем виде (без учета величин  $f_{t1}$  и  $f_{t2}$ ):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho \tilde{\nu}}{\partial t} = & - \nabla \cdot (\rho \tilde{\nu} \mathbf{u}) + \frac{1}{\sigma_{\tilde{\nu}}} \nabla \cdot [(\mu + \rho \tilde{\nu}(1 + C_{b2})) \nabla \tilde{\nu}] - \frac{C_{b2}}{\sigma_{\tilde{\nu}}} \tilde{\nu} \nabla \cdot [\rho \nabla \tilde{\nu}] + A_1 \tilde{\nu} \\ & + A_2 \tilde{\nu}^2 - \frac{1}{\sigma_{\tilde{\nu}} \rho} (\mu + \rho \tilde{\nu}) \nabla \rho \cdot \nabla \tilde{\nu}, \quad A_1 = \rho C_{b1} \tilde{S}, \quad A_2 = -\rho C_{w1} f_w / d^2. \end{aligned}$$

Для произвольного  $x$  положим  $x^{\pm} = 0.5(x \pm |x|)$ . Тогда полная дискретизация уравнения Спаларта-Аллмараса с учетом аппроксимации конвективного потока методом сноса против потока ("upwind") запишется в виде

$$\begin{aligned} \rho_i V_i \frac{\tilde{\nu}^{n+1} - \tilde{\nu}^n}{\Delta t} = & \tilde{R}_i^{n+1}, \\ \tilde{R}_i = & - \sum_{\sigma} \left( u_{n,i}^+ \tilde{\nu}_i + u_{n,\sigma(i)}^- \tilde{\nu}_{\sigma(i)} \right) s_{\sigma} \rho_{\sigma} + s_{\sigma} \Gamma_{dis,\sigma,i} (\partial_n \tilde{\nu})_{\sigma} \\ & + V_i (A_1 \tilde{\nu}_i + A_2 \tilde{\nu}_i^2) - \frac{V_i}{\sigma_{\tilde{\nu}} \rho_i} (\mu_i + \rho_i \tilde{\nu}_i) \nabla \rho_i \cdot \nabla \tilde{\nu}_i, \\ \Gamma_{dis,\sigma,i} = & \frac{1}{\sigma_{\tilde{\nu}}} [\mu_{\sigma} + (1 + C_{b2}) \rho_{\sigma} \tilde{\nu}_{\sigma} - C_{b2} \rho_{\sigma} \tilde{\nu}_i]. \end{aligned} \quad (7)$$

При расчетах на сетках, близких к ортогональным,  $(\partial_n \tilde{\nu})_{\sigma}$  может быть заменено на  $(\tilde{\nu}_{\sigma(i)} - \tilde{\nu}_i) / h_{\sigma}$ , где  $h_{\sigma}$  – расстояние между центрами ячеек.

Уравнения (6) и (7) должны быть дополнены соответствующими граничными и начальными условиями, конкретный вид которых зависит от задачи. Для постановки граничных условий в настоящей работе применена схема с использованием двух (согласно шаблону схемы WENO3) рядов фиктивных ячеек за каждой границей расчетной области. При этом допускаются следующие типы границ:

- граница типа «вход»: задаются все 5 значений вектора примитивных переменных: 3 компоненты вектора скорости  $\mathbf{u}$ , давление  $p$  и плотность  $\rho$ ; модельная переменная  $\tilde{\nu} = C\mu/\rho$ , где для полностью турбулентного пограничного слоя полагается  $C = 1 \div 5$ ;
- граница типа «выход»: значения всех переменных экстраполируются в фиктивные ячейки изнутри расчетной области;

- граница типа «твердая стенка» и условия симметрии: для твердой стенки со скольжением потока и условия симметрии в фиктивных ячейках значения давления  $p$ , плотности  $\rho$  и касательной компоненты скорости задаются симметричным отображением значений во внутренних точках относительно границы, а значение нормальной компоненты скорости и модельной переменной  $\tilde{v}$  – антисимметричным отображением, т.е. знак меняется на обратный. В случае твердой стенки без скольжения потока (т.е. условия прилипания) в отличие от предыдущего варианта все компоненты вектора скорости  $\mathbf{u}$  в фиктивных ячейках задаются антисимметричным отображением.

### 3.2 Метод Ньютона

Система дискретных уравнений (6) решается методом установления по псевдо-временной переменной с использованием ньютоновских итераций [30]. Для системы уравнений (6) применение метода Ньютона приводит к следующей системе линейных уравнений для определения итерационного приращения  $\delta^s \mathbf{q} = \mathbf{q}^{n+1,s+1} - \mathbf{q}^{n+1,s}$ :

$$V_i \frac{1}{\Delta t} \delta^s \mathbf{q}_i - \delta^s \mathbf{R}_i = \mathbf{R}_i^{n+1,s} - V_i \frac{\Delta^s \mathbf{q}_i}{\Delta t}, \quad \delta^s \mathbf{R}_i = \sum_{\sigma} s_{\sigma} (T_{\sigma}^{-1} \delta^s \mathbf{F}_{\sigma} - \delta^s \mathbf{g}_{\sigma}), \quad (8)$$

где  $\Delta^s \mathbf{q} = \mathbf{q}^{n+1,s} - \mathbf{q}^n$  – итерационное приращение по времени.

После введения псевдо-временной переменной  $\tau$  система примет вид

$$V_i \left( \frac{1}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta \tau} \right) \delta^s \mathbf{q}_i = \mathbf{R}_i^{n+1,s} - V_i \frac{\Delta^s \mathbf{q}_i}{\Delta t} - \sum_{\sigma} s_{\sigma} (T_{\sigma}^{-1} \delta^s \mathbf{F}_{\sigma} - \delta^s \mathbf{g}_{\sigma}), \quad (9)$$

где верхние индексы  $n$  и  $s$  указывают на временной слой и номер внутренней ньютоновской итерации, соответственно,  $\Delta \tau$  – шаг дискретизации по псевдо-времени,  $\Delta t$  – шаг по физическому времени.

При линеаризации итерационной вариации  $\delta^s \mathbf{g}_{\sigma}$  вязкого потока из-за громоздкости получаемых уравнений обычно используется приближенный подход, в котором матрица линеаризации заменяется диагональной матрицей с мажорирующим спектральным радиусом  $\rho_{dis}$  на диагонали:

$$\delta^s \mathbf{g}_{\sigma} = \rho_{dis} \frac{\delta^s \mathbf{q}_{\sigma(i)} - \delta^s \mathbf{q}_i}{h_{\sigma}}, \quad \rho_{dis} = \max \left\{ \frac{\mu}{\rho}, \frac{\gamma}{\rho} \left( \frac{\mu}{Pr} + \frac{\mu_t}{Pr_t} \right) \right\}.$$

Многочисленные вычислительные эксперименты показывают, что эффект от этого приближения в действительности несильно сказывается на скорости сходимости [31].

При линеаризации невязкой составляющей численного потока используется упрощенная формула, предложенная В.В. Русановым [32]:

$$\mathbf{F}_\sigma = 0.5 [\mathbf{F}_i + \mathbf{F}_{\sigma(i)} - \rho_{inv,\sigma} (\mathbf{Q}_{\sigma(i)} - \mathbf{Q}_i)],$$

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_\sigma (\mathbf{Q}_i), \quad \mathbf{F}_{\sigma(i)} = \mathbf{F}_\sigma (\mathbf{Q}_{\sigma(i)}),$$

где  $\rho_{inv,\sigma}$  – спектральный радиус якобиана  $A_\sigma = \partial \mathbf{F}_\sigma / \partial \mathbf{Q}$

$$\rho_{inv,\sigma} = \max \{ |u_n - c|_\sigma, |u_n + c|_\sigma \},$$

$c$  – локальная скорость звука. Кроме того, при линеаризации потока полагается, что поток вычисляется по схеме первого порядка, т.е. на самих сеточных, а не экстраполированных на грань значениях.

При этих допущениях линеаризация невязкой составляющей потока проводится следующим образом:

$$T_\sigma^{-1} \delta^s \mathbf{F}_\sigma = 0.5 [T_\sigma^{-1} A_\sigma(\mathbf{Q}_i) T_\sigma + \rho_{inv,\sigma}] \delta^s \mathbf{q}_i + 0.5 [T_\sigma^{-1} \delta^s \mathbf{F}_{\sigma(i)} - \rho_{inv,\sigma} \delta^s \mathbf{q}_{\sigma(i)}].$$

Здесь использовалась операция «обратной линеаризации»:  $A \delta^s \mathbf{Q} = \delta^s \mathbf{F}$ , предложенная в [33].

В работе [34] показано, что в общем случае неструктурированных сеток произвольной многогранной формы

$$\sum_\sigma s_\sigma T_\sigma^{-1} A_\sigma(\mathbf{Q}_i) T_\sigma = 0,$$

благодаря чему из алгоритма полностью исключается вычисление якобианов в явном виде.

В результате получается линейная система уравнений для определения итерационных вариаций  $\delta^s \mathbf{q}$ :

$$\left[ V_i \left( \frac{1}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta \tau} \right) + \sum_\sigma s_\sigma \left( \frac{1}{2} \rho_{inv,\sigma} + \frac{\rho_{dis}}{h_\sigma} \right) \right] \delta^s \mathbf{q}_i + \sum_\sigma s_\sigma \left[ \frac{1}{2} T_\sigma^{-1} \delta^s \mathbf{F}_{\sigma(i)} - \left( \frac{1}{2} \rho_{inv,\sigma} + \frac{\rho_{dis}}{h_\sigma} \right) \delta^s \mathbf{q}_{\sigma(i)} \right] = \mathbf{R}_i^{n+1,s} - V_i \frac{\Delta^s \mathbf{q}_i}{\Delta t}, \quad (10)$$

где  $\delta^s \mathbf{F}_{\sigma(i)} = \mathbf{F}_\sigma (\mathbf{Q}_{\sigma(i)} + \delta^s \mathbf{Q}_{\sigma(i)}) - \mathbf{F}_\sigma (\mathbf{Q}_{\sigma(i)})$ .

Аналогичным образом проводится линеаризация уравнения (7). При этом принимаются следующие допущения:

- все параметры потока, кроме  $\tilde{\nu}$ , считаются фиксированными (за счет использования схемы расщепления по физическим процессам),
- вместо величин  $A_1$  и  $A_2$  в целях устойчивости берутся их расщепления  $A_1^-$  и  $A_2^-$ ,
- величины  $\Gamma_{dis,\sigma,i}$ ,  $A_1^-$ ,  $A_2^-$  считаются не зависящими от  $\tilde{\nu}^{n+1,s+1}$ .

Тогда линейная система для определения  $\delta^s \tilde{\nu}$  запишется в виде:

$$\begin{aligned} \left[ \rho_i V_i \left( \frac{1}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta \tau} \right) + \sum_{\sigma} s_{\sigma} \left( \rho_{\sigma} u_{n,i}^+ + \frac{\Gamma_{dis,\sigma,i}}{h_{\sigma}} \right) - V_i (A_1^- + 2A_2^- \tilde{\nu}_i) + \right. \\ \left. \frac{V_i}{\sigma_{\tilde{\nu}}} \nabla \rho_i \cdot \nabla \tilde{\nu}_i \right] \delta^s \tilde{\nu}_i + \sum_{\sigma} s_{\sigma} \left[ \rho_{\sigma} u_{n,\sigma(i)}^- - \frac{\Gamma_{dis,\sigma,i}}{h_{\sigma}} \right] \delta^s \tilde{\nu}_{\sigma(i)} \\ = \tilde{R}_i^{n+1,s} - V_i \frac{\Delta^s \tilde{\nu}_i}{\Delta t}. \quad (11) \end{aligned}$$

Таким образом, имеются две СЛАУ (10) и (11) вида  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  размерности  $5N$  и  $N$ , соответственно. В реальных задачах  $N$  достигает значений порядка миллионов или даже десятков миллионов, что, учитывая специфику уравнений, приводит к большим разреженным плохообусловленным матрицам общего вида (несимметричным и не положительно определенным). В силу этого использование для их решения прямых методов на основе полного LU разложения неприемлемо.

### 3.3 Метод LU-SGS

Определим диагональную матрицу  $D$ , ниже-треугольную матрицу  $L$ , выше-треугольную матрицу  $U$  и вектор правой части  $\mathbf{G}$  следующим образом:

$$\begin{aligned} D_i &= V_i \left( \frac{1}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta \tau} \right) + \sum_{\sigma} s_{\sigma} \left( \frac{1}{2} \rho_{inv,\sigma} + \frac{\rho_{dis}}{h_{\sigma}} \right), \\ L(\delta^s \mathbf{q}_{\sigma(i)}) &= \sum_{\sigma:\sigma(i)<i} s_{\sigma} \left[ \frac{1}{2} T_{\sigma}^{-1} \delta^s \mathbf{F}_{\sigma(i)} - \left( \frac{1}{2} \rho_{inv,\sigma} + \frac{\rho_{dis}}{h_{\sigma}} \right) \delta^s \mathbf{q}_{\sigma(i)} \right], \\ U(\delta^s \mathbf{q}_{\sigma(i)}) &= \sum_{\sigma:\sigma(i)>i} s_{\sigma} \left[ \frac{1}{2} T_{\sigma}^{-1} \delta^s \mathbf{F}_{\sigma(i)} - \left( \frac{1}{2} \rho_{inv,\sigma} + \frac{\rho_{dis}}{h_{\sigma}} \right) \delta^s \mathbf{q}_{\sigma(i)} \right], \\ \mathbf{G}_i^s &= \mathbf{R}_i^{n+1,s} - V_i \frac{\Delta^s \mathbf{q}_i}{\Delta t}. \end{aligned} \quad (12)$$

Тогда система уравнений (10) примет вид:

$$(L + D + U) \delta^s \mathbf{q} = \mathbf{G}^s. \quad (13)$$

Она может быть переписана эквивалентным образом как

$$(D + L) D^{-1} (D + U) \delta^s \mathbf{q} = \mathbf{G}^s - LD^{-1}U\delta^s \mathbf{q}. \quad (14)$$

Факторизация методом LU-SGS заключается в пренебрежении последним слагаемым в правой части уравнения (14), в результате чего факторизованная система разбивается на две подсистемы, решение которых реализуется двумя расчетными циклами по ячейкам сетки: первый – в прямом направлении (от первой ячейки к последней), а второй – в обратном:

$$\begin{aligned} \delta^{s,*} \mathbf{q}_i &= D_i^{-1} [\mathbf{G}_i - L(\delta^{s,*} \mathbf{q}_{\sigma(i)})], \quad i = 1 \dots N \\ \delta^s \mathbf{q}_i &= \delta^{s,*} \mathbf{q}_i - D_i^{-1} U(\delta^s \mathbf{q}_{\sigma(i)}), \quad i = N \dots 1. \end{aligned} \quad (15)$$

Получающаяся при этом итерационная невязка служит для обновления итерационного вектора,  $\mathbf{q}^{n+1,s+1} = \mathbf{q}^{n+1,s} + \delta^s \mathbf{q}$ , после чего процедура (15) повторяется.

Аналогичным образом происходит решение уравнения (11):

$$\begin{aligned} \tilde{D}_i &= \rho_i V_i \left( \frac{1}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta \tau} \right) + \sum_{\sigma} s_{\sigma} \left( \rho_{\sigma} u_{n,i}^+ + \frac{\Gamma_{dis,\sigma,i}}{h_{\sigma}} \right) \\ &\quad - V_i (A_1^- + 2A_2^- \tilde{\nu}_i) + \frac{V_i}{\sigma_{\tilde{\nu}}} \nabla \rho_i \cdot \nabla \tilde{\nu}_i, \\ \tilde{L}(\delta^s \tilde{\nu}_{\sigma(i)}) &= \sum_{\sigma: \sigma(i) < i} s_{\sigma} \left[ \rho_{\sigma} u_{n,\sigma(i)}^- - \frac{\Gamma_{dis,\sigma,i}}{h_{\sigma}} \right] \delta^s \tilde{\nu}_{\sigma(i)}, \\ \tilde{U}(\delta^s \tilde{\nu}_{\sigma(i)}) &= \sum_{\sigma: \sigma(i) > i} s_{\sigma} \left[ \rho_{\sigma} u_{n,\sigma(i)}^- - \frac{\Gamma_{dis,\sigma,i}}{h_{\sigma}} \right] \delta^s \tilde{\nu}_{\sigma(i)}, \\ \tilde{G}_i &= \tilde{R}_i^{n+1,s} - V_i \frac{\Delta^s \tilde{\nu}_i}{\Delta t}, \end{aligned} \quad (16)$$

и циклы по ячейкам примут вид

$$\begin{aligned} \delta^{s,*} \tilde{\nu}_i &= \tilde{D}_i^{-1} \left[ \tilde{G}_i - \tilde{L}(\delta^{s,*} \tilde{\nu}_{\sigma(i)}) \right], \quad i = 1 \dots N \\ \delta^s \tilde{\nu}_i &= \delta^{s,*} \tilde{\nu}_i - \tilde{D}_i^{-1} \tilde{U}(\delta^s \tilde{\nu}_{\sigma(i)}), \quad i = N \dots 1. \end{aligned} \quad (17)$$

Метод LU-SGS относится к классу безматричных методов решения СЛАУ, т.е. решение линейной системы методом LU-SGS не требует отдельного хранения коэффициентов матрицы системы целиком, позволяя строить компоненты решения локально по мере прохода циклов по ячейкам сетки через произведения матриц-векторов [35]. Это позволяет существенно сократить объемы

используемой памяти и исключить операции с большой матрицей системы, что часто облегчает параллельную реализацию методов данного класса.

Следует отметить, что решение СЛАУ методом LU-SGS производится с точностью, обусловленной порядком величины  $LD^{-1}U$ . Однако в силу допущений, принятых для линеаризации потоков при аппроксимации матрицы Якоби системы, очень точное решение СЛАУ и не требуется, в особенности, при расчете стационарных течений [36]. В случае когда точности метода LU-SGS недостаточно для обеспечения сходимости метода Ньютона, решение СЛАУ должно осуществляться более точно, например, одним из итерационных методов крыловских подпространств, для которых метод LU-SGS может использоваться в качестве предобуславливателя.

### 3.4 Метод BiCGStab

Метод BiCGStab [17] относится к классу итерационных методов крыловских подпространств для решения СЛАУ вида  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ . BiCGStab является «стабилизированным» вариантом метода бисопряженных градиентов BiCG, он обеспечивает устойчивость вычислений и более гладкую по сравнению с BiCG сходимость к решению за счет устранения матрично-векторных операций с транспонированной матрицей системы. Применение метода BiCGStab требует реализации следующих операций:

- вычисление скалярного произведения векторов:  $a = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$ ;
- вычисление матрично-векторного умножения:  $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$ ;
- применение операции предобуславливания:  $\mathbf{y} = M^{-1}\mathbf{x} \approx A^{-1}\mathbf{x}$ , где  $M^{-1}$  – подходящий линейный оператор, матрица которого довольно часто не задается явно.

Во многом качество работы итерационного метода зависит от качества используемого предобуславливателя, поскольку процедура предобуславливания является наиболее ресурсоемким элементом алгоритма. Кроме того, т.к. процедура распараллеливания скалярного произведения и матрично-векторного умножения может быть проведена стандартным образом без особого труда, эффективность параллельной реализации общего алгоритма зависит от степени параллелизма, которую допускает используемый метод предобуславливания. Следует отметить, что решение СЛАУ методом BiCGStab с LU-SGS в качестве предобуславливателя допускает реализацию без хранения полной матрицы коэффициентов системы. За счет этого общий алгоритм «Метод Ньютона + BiCGStab + LU-SGS» так же, как и алгоритм «Метод Ньютона + LU-SGS», является «безматричным» и относится к классу безматричных методов Ньютона-Крылова (Jacobian-free Newton-Krylov methods [37]).



В настоящей работе используется модифицированная версия алгоритма `BiCGStab`, выполненная аналогично работе [38]. Она включает в себя дополнительный «ранний» контроль сходимости, а также различные проверки, направленные на анализ возможности стагнации алгоритма и улучшающие устойчивость программной реализации.

Используемый алгоритм метода `BiCGStab` с предобуславливанием приведен на схеме 1. Здесь для наглядности представлен общий вариант алгоритма. В расчетах начальное приближение  $\mathbf{x}_0$  полагалось равным нулю, поскольку искомым вектор  $\mathbf{x}$  есть не что иное, как итерационная вариация метода Ньютона. В качестве критерия останова используется условие убывания нормы начальной невязки в `rtol` раз, при этом для исключения ситуации выхода за машинную точность вводится величина `atol`. Таким образом, критерий останова имеет вид:

$$\|\mathbf{r}_k\|_2 < \text{rtol} \cdot \|\mathbf{r}_0\|_2 + \text{atol}.$$

Операция вида  $\mathbf{a} = M^{-1}\mathbf{b}$  обозначает процедуру предобуславливания, в частности, при использовании метода `LU-SGS` под  $\mathbf{a} = M^{-1}\mathbf{b}$  подразумевается нахождение решения системы  $(D + L)D^{-1}(D + U)\mathbf{a} = \mathbf{b}$  согласно разделу 3.3.

### 3.5 Общий алгоритм решения

В общем виде алгоритм решения полной задачи представлен на схеме 2. Под  $t_0$  и  $t_{\max}$  подразумевается начальное и конечное время расчета соответственно. Величина  $\Delta t_n$  обозначает текущий шаг интегрирования по времени.

В качестве критерия останова метода Ньютона используется условие убывания нормы итерационного приращения в `rtol` раз:

$$\|\delta^s \mathbf{q}\|_2 < \text{rtol} \cdot \|\delta^1 \mathbf{q}\|_2.$$

При этом для задач аэродинамики в методе Ньютона обычно полагается  $\text{rtol} \sim 10^{-4} \div 10^{-2}$ . Следует заметить, что в методе Ньютона для системы `URANS` и уравнения `SA`, а также в методе `BiCGStab` используются разные значения величины `rtol`.

Как уже отмечалось выше, согласно схеме расщепления при интегрировании `URANS` уравнений для вычисления газодинамических потоков используется значение турбулентной вязкости  $\mu_t^{n-1}$  с предыдущего временного слоя, после чего интегрирование уравнения модели турбулентности `SA` проводится с использованием обновленного поля основных переменных  $\mathbf{q}^n$ . Новое значение турбулентной вязкости  $\mu_t^n$  вычисляется в конце текущего временного слоя согласно формуле (2) по величинам  $\mathbf{q}^n$  и  $\tilde{\nu}^n$ .

---

**Алгоритм 1** Алгоритм предобусловленного метода BiCGStab для решения системы линейных алгебраических уравнений  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ .

---

1. Инициализация: выбрать начальное приближение  $\mathbf{x}_0$ .
  2. Вычислить  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{b} - A\mathbf{x}_0$ .
  3. Выбрать произвольный  $\mathbf{r}_0^*$ , такой, что  $(\mathbf{r}_0^*, \mathbf{r}_0) \neq 0$ , например  $\mathbf{r}_0^* = \mathbf{r}_0$ .
  4. Задать  $\rho_0 = \alpha = \omega_0 = 1$ ,  $\mathbf{v}_0 = \mathbf{p}_0 = 0$ .
  5. Для  $k = 1, 2, 3, \dots$ 
    - (a) Вычислить  $\rho_k = (\mathbf{r}_0^*, \mathbf{r}_{k-1})$ .
    - (b) Вычислить  $\beta = (\rho_k / \rho_{k-1})(\alpha / \omega_{k-1})$ .
    - (c) Вычислить  $\mathbf{p}_k = \mathbf{r}_{k-1} + \beta(\mathbf{p}_{k-1} - \omega_{k-1}\mathbf{v}_{k-1})$ .
    - (d) Вычислить  $\mathbf{y} = M^{-1}\mathbf{p}_k$ .
    - (e) Вычислить  $\mathbf{v}_k = A\mathbf{y}$ .
    - (f) Вычислить  $\alpha = \rho_k / (\mathbf{r}_0^*, \mathbf{v}_k)$ .
    - (g) Вычислить  $\mathbf{s} = \mathbf{r}_{k-1} - \alpha\mathbf{v}_k$ .
    - (h) Проверка сходимости: если  $\|\mathbf{s}\|_2 < \text{atol}$ , вычислить  $\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_{k-1} + \alpha\mathbf{y}$  и выйти из итераций.
    - (i) Вычислить  $\mathbf{z} = M^{-1}\mathbf{s}$ .
    - (j) Вычислить  $\mathbf{t} = A\mathbf{z}$ .
    - (k) Вычислить  $\omega_k = (M^{-1}\mathbf{t}, M^{-1}\mathbf{s}) / (M^{-1}\mathbf{t}, M^{-1}\mathbf{t})$ .
    - (l) Вычислить  $\mathbf{r}_k = \mathbf{s} - \omega_k\mathbf{t}$ .
    - (m) Вычислить  $\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_{k-1} + \alpha\mathbf{y} + \omega_k\mathbf{z}$ .
    - (n) Проверка сходимости: если  $\|\mathbf{r}_k\|_2 < \text{rtol} \cdot \|\mathbf{r}_0\|_2 + \text{atol}$ , выйти из итераций.
-

---

## Алгоритм 2 Общий алгоритм решения

---

1. Инициализация: задать начальные условия при  $n = 0$ ,  $t = t_0$ :  $\mathbf{q}^0$ ,  $\tilde{\nu}^0$ .
  2. Расчет шагов по времени.  
Для  $n = 1, 2, 3 \dots$ 
    - (a) Вычислить  $\Delta t_n$ ,  $t_n = t_{n-1} + \Delta t_n$ .
    - (b) Решить неявно дискретизированные URANS уравнения методом Ньютона (с использованием  $\mu_t^{n-1}$ ):
      - Инициализация: задать  $\mathbf{q}^{n,0} = \mathbf{q}^{n-1}$ ,  $\delta^0 \mathbf{q} = 0$ .
      - Для  $s = 1, 2, 3 \dots$ 
        - Решить СЛАУ методами LU-SGS или BiCGStab + LU-SGS: вычислить  $\delta^s \mathbf{q}$ .
        - Вычислить  $\mathbf{q}^{n,s} = \mathbf{q}^{n,s-1} + \delta^s \mathbf{q}$ .
        - Проверка сходимости: если  $\|\delta^s \mathbf{q}\|_2 < \text{rtol} \cdot \|\delta^1 \mathbf{q}\|_2$ , выйти из итераций.
      - Задать  $\mathbf{q}^n = \mathbf{q}^{n,s}$ .
    - (c) Решить неявно дискретизированное уравнение модели SA методом Ньютона (с использованием  $\mathbf{q}^n$ ):
      - Инициализация: задать  $\tilde{\nu}^{n,0} = \tilde{\nu}^{n-1}$ ,  $\delta^0 \tilde{\nu} = 0$ .
      - Для  $s = 1, 2, 3 \dots$ 
        - Решить СЛАУ методом LU-SGS: вычислить  $\delta^s \tilde{\nu}$ .
        - Вычислить  $\tilde{\nu}^{n,s} = \tilde{\nu}^{n,s-1} + \delta^s \tilde{\nu}$ .
        - Проверка сходимости: если  $\|\delta^s \tilde{\nu}\|_2 < \text{rtol} \cdot \|\delta^1 \tilde{\nu}\|_2$ , выйти из итераций.
      - Задать  $\tilde{\nu}^n = \tilde{\nu}^{n,s}$ .
      - Вычислить  $\mu_t^n = f(\mathbf{q}^n, \tilde{\nu}^n)$ .
    - (d) Если  $t_n \geq t_{max}$ , закончить вычисления.
-

## 4 Особенности программной реализации

Рассмотренные в предыдущем разделе алгоритмы неявной схемы, а также явная схема для решения уравнений (1) и (3) были реализованы в виде программного комплекса на языках программирования C/C++ с использованием интерфейса параллельного программирования MPI, являющегося наиболее распространённым стандартом интерфейса обмена данными в параллельном программировании и имеющего реализации для большого числа компьютерных платформ.

Декомпозиция расчетной области проводилась с помощью процедур свободно распространяемой библиотеки CHACO [39]. Область разбивалась на равные подобласти по числу используемых вычислительных ядер, соответственно делился и объем памяти между ними. В целях балансировки нагрузки на вычислительные ядра и минимизации обменов между ними использовался обратный алгоритм Катхилла-Макки (RCM) [40], минимизирующий ширину ленты разреженной симметричной матрицы. С помощью него происходила перенумерация узлов расчетной области. Аналогично процедуре постановки граничных условий, за каждой границей подобласти вводились два ряда фиктивных ячеек, в которые пересылались данные из соседней подобласти, расчет для которой проводился на другом вычислительном ядре. Несмотря на свою простоту, такая декомпозиция области обеспечивает высокую эффективность расчетов.

В работах [41, 42] была представлена параллельная реализация метода LU-SGS, полностью эквивалентная действию последовательного алгоритма (пригодная для использования как на структурированных, так и на неструктурированных сетках). Эквивалентность алгоритмов обеспечивалась за счет специального разбиения расчетной области на подмножества и двухэтапного расчета по типу составляющих их ячеек, которые разбивались на «внутренние» и «внешние». Аналогичный подход использовался в работе [43], в которой рассматривался вопрос о построении параллельной реализации метода LU-SGS, пригодной для использования на вычислительных архитектурах гибридного типа. Все расчетные подобласти разбивались на два типа, «black» и «white», после чего проводился специальный порядок обхода ячеек внутри блоков каждого типа и асинхронный обмен данными между ними. Предложенные реализации отличаются сложной структурой организации вычислений и обменов данными. Однако, как показывает практика, при отказе от полной эквивалентности действий последовательного и параллельного алгоритма появляется ряд существенных преимуществ [10]. В частности, это минимизация и простота организации обменов данными между расчетными узлами: обмены осуществляются синхронно и по одной и той же схеме.

Реализованный в настоящей работе параллельный метод LU-SGS является

модификацией последовательного алгоритма, в которой вклад граней, соединяющих внутренние и обменные ячейки, в множители  $L$  и  $U$  в выражении (12) и  $\tilde{L}$  и  $\tilde{U}$  в выражении (16) не учитывается. Благодаря этому упрощению метод LU-SGS может быть применен отдельно для каждой подобласти, без введения специальных вариантов обхода ячеек и организации дополнительных взаимодействий между обменными ячейками для разных узлов. Естественное при использовании такого упрощения ухудшение сходимости, как показывает практика, в большинстве случаев эффективно компенсируется хорошей масштабируемостью. В случае когда фактической точности реализованного варианта алгоритма LU-SGS не хватает, он используется в качестве предобуславливателя для итерационного метода BiCGStab. В этом случае решение СЛАУ проводится для исходной матрицы Якоби, элементы которой в последовательном и параллельном вариантах алгоритма строятся одинаковым образом с учетом всех взаимодействий (результат умножения матрицы Якоби системы на произвольный вектор в параллельной и последовательной версии алгоритма совпадают). Этот факт позволяет утверждать, что при заданной точности решения СЛАУ результаты работы последовательного и параллельного алгоритма на основе методов BiCGStab и LU-SGS совпадают.

Таким образом, предложенная параллельная реализация неявной схемы довольно проста, являясь по существу надстройкой над параллельной реализацией явной схемы, с локализацией неявности схемы внутри подобластей. Благодаря этому не требуется вводить специальное упорядочивание ячеек и существенно изменять порядок или топологию обменов данными между узлами по сравнению с параллельной явной схемой.

Расчеты проводились в ИПМ им. М.В. Келдыша РАН на гибридном вычислительном кластере К-100 с компиляторами Intel C/C++ [44]. Кластер состоит из 64 узлов, на каждом из которых стоит по два 6-ядерных процессора Intel Xeon X5670 с частотой 2.93 ГГц, 96Gb оперативной памяти DDR3 и 3 графических ускорителя nVidia Fermi C2050 (по 448 вычислительных ядер и 2.5Gb памяти DDR5 на каждом). Узлы соединены между собой с помощью адаптеров QDR InfiniBand. Таким образом, на каждом узле для вычислений доступны 12 ядер CPU и 3 графических ускорителя [45].

## 5 Результаты расчетов

В данном разделе представлены результаты применения разработанного программного комплекса для моделирования задачи о переходе между регулярным (RR) и маховским (MR) отражением ударных волн, инициированном импульсным подводом энергии в область между двумя симметричными клиньями. Процесс перехода является существенно нестационарным, что накладывает дополнительные требования на точность используемых методов

решения. Целью настоящего исследования была демонстрация работоспособности разработанной методики для данного класса задач.

Постановка задачи взята из цикла работ [18–22], в которых проводились как натурные, так и численные эксперименты. Указанные работы были посвящены исследованию отражения ударной волны от плоскости симметрии при взаимодействии скачков уплотнения, генерируемых двумя помещенными в сверхзвуковой поток симметричными клиньями. Известно, что для данной задачи в зависимости от угла падающего скачка  $\alpha$  возможно существование двух различных стационарных ударно-волновых конфигураций (рис. 1) в некотором диапазоне углов  $\alpha_N < \alpha < \alpha_d$  (т.н. «область двойного решения», рис. 2) и связанное с этим явление гистерезиса. В указанных работах исследовался диапазон данных углов, влияние возмущений набегающего потока, а также возможность управления течением (для инициирования перехода  $RR \Leftrightarrow MR$ ) путем локального выделения энергии перед ударной волной.

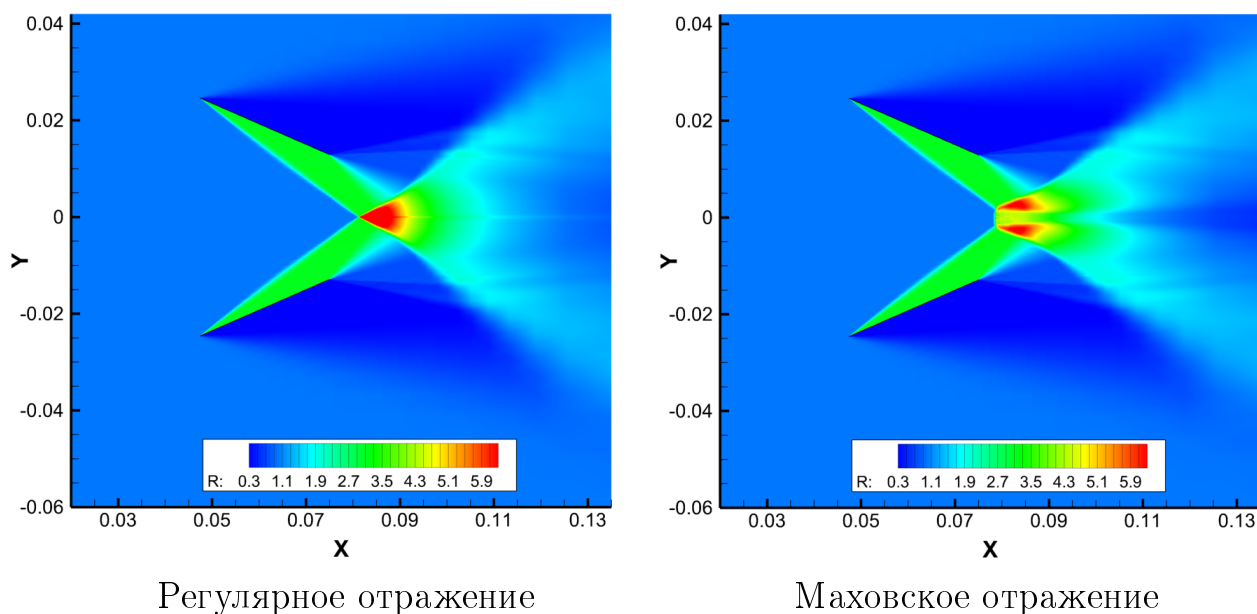


Рис. 1. Стационарные ударно-волновые конфигурации

Исследуемая в настоящей работе задача ставится следующим образом. Рассматривается трехмерное сверхзвуковое обтекание двух симметрично расположенных клиньев (в численных расчетах для простоты замененных на пластины аналогично работе [21]). Конфигурация модели схематично представлена на рис. 3, параметры набегающего потока и геометрии модели отображены в таб. 2 и 3 соответственно. Здесь  $M_\infty$  и  $Re_\infty$  – числа Маха и Рейнольдса в набегающем потоке,  $p_0$  и  $T_0$  – давление и температура торможения,  $L_x, L_y, L_z$  – геометрические размеры расчетной области,  $\omega$  – хорда клина,  $g/\omega$  – расстояние от задней кромки до плоскости симметрии,  $b/\omega$  – размах

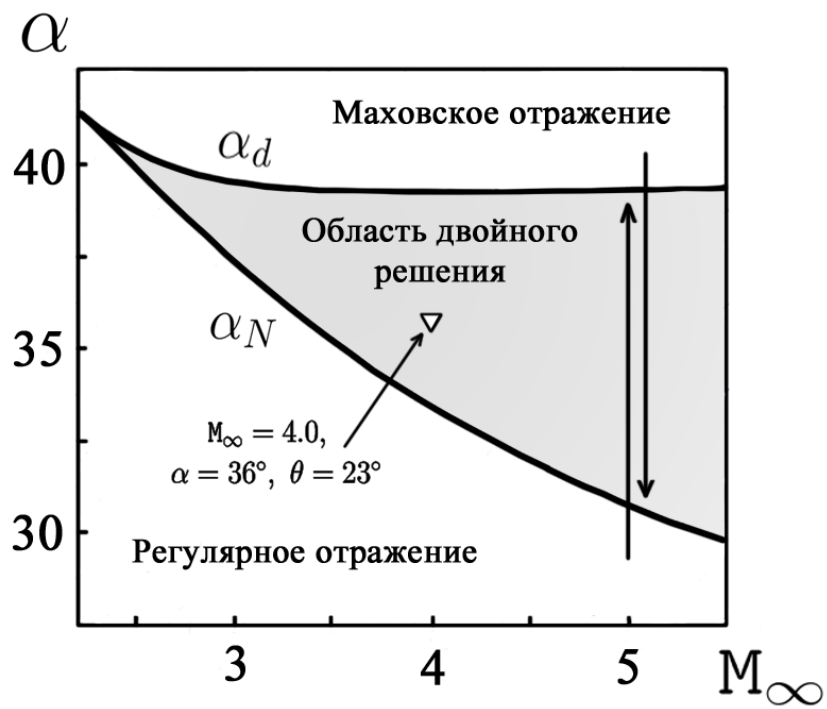


Рис. 2. Область двойного решения

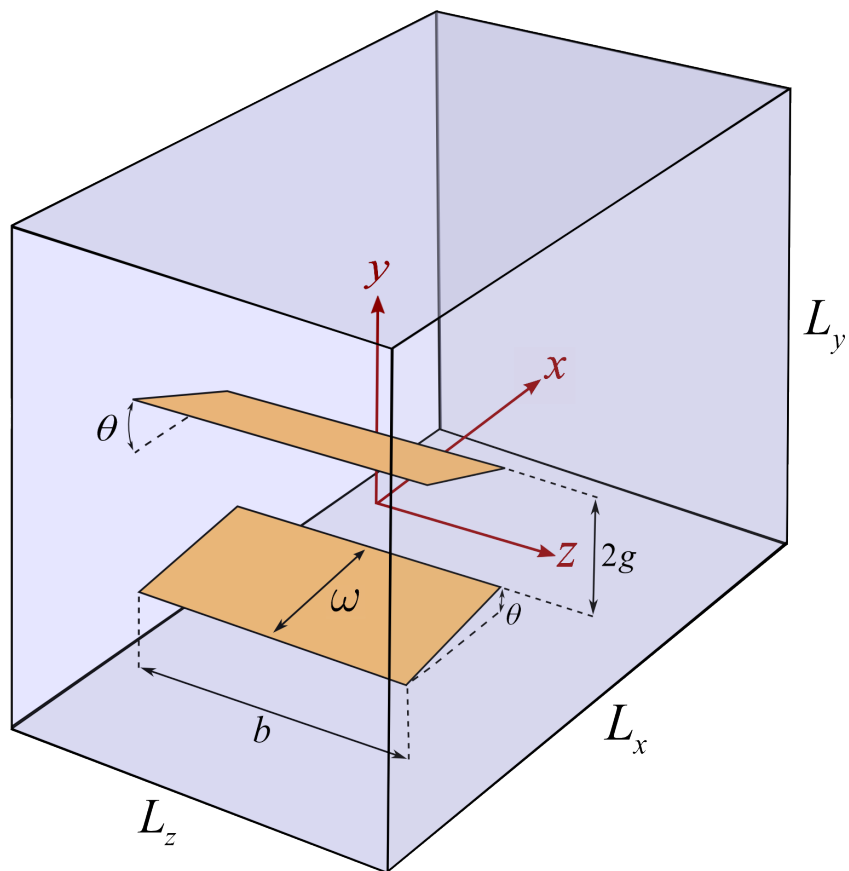


Рис. 3. Схематичный вид расчетной области

клина,  $\alpha$  – угол падающего скачка,  $\theta$  – угол клина.

$M_\infty$	$Re_\infty$	$p_0$	$T_0$
4.0	$1.278 \times 10^7 \text{ м}^{-1}$	1.0 МПа	293.0 К

Таблица 2. Параметры набегающего потока

$L_x$	$L_y$	$L_z$	$\omega$	$g/\omega$	$b/\omega$	$\alpha$	$\theta$
135.0 мм	120.0 мм	158.4 мм	30.0 мм	0.43	3.37	36°	23°

Таблица 3. Параметры геометрии модели

Для расчетов использовалась гексагональная блочно-структурированная сетка из 9062400 ячеек, имеющая сгущения в областях фокального объема и отражающихся скачков. Минимальное разрешение сетки по поперечной координате составило  $\Delta y_{\min}/\omega = 1.3 \times 10^{-3}$ , которое, как указано в работе [21], является достаточным для адекватного разрешения сеткой возникающего при маховской конфигурации мостообразного скачка.

Расчет задачи о переходе  $RR \Rightarrow MR$  проводился в несколько этапов:

1. Моделирование стационарного регулярного отражения (расчет проводился с начальных данных о равномерном сверхзвуковом потоке газа).
2. Локальное выделение энергии в фокальный объем, расположенный на пересечении плоскостей симметрии перед точкой регулярного отражения.
3. Продолжение расчета до установления стационарной маховской конфигурации.

Параметры источника энергии соответствовали лазерному импульсу с энергией  $J_l = 0.1$  Дж, действующему на область объемом  $V_l = 3 \text{ мм}^3$  в течение  $\Delta t_l = 10$  нс. Центр фокального объема располагался на пересечении плоскостей симметрии модели, параллельных координатным плоскостям  $xy$  и  $xz$  на расстоянии  $0.94\omega$  перед задней кромкой пластин. В работе [21] лазерный импульс моделировался следующим образом: после получения стационарного регулярного отражения в соответствующей области корректировалось поле температуры при всех остальных фиксированных параметрах (т.е. происходил изохорический нагрев газа), после чего расчет продолжался с указанными измененными начальными данными. В настоящей работе применяется



другой подход, основанный на использовании источника в уравнении (1). После получения регулярной конфигурации проводился расчет одного временного шага с  $\Delta t = 10$  нс и включенным источником, энергия которого равнялась  $J = 0.1$  Дж и была равномерна распределена по объему  $V = 3$  мм<sup>3</sup> (в качестве области вложения выбирался сеточный куб со стороной 1.44225 мм). Далее источник энергии отключался и проводился расчет до установления маховской конфигурации.

Моделирование стационарного регулярного отражения (этап 1) проводилось с помощью неявной схемы методом установления (аналогично методике из работы [11]). Расчет проводился на  $N_{\text{proc}} = 96$  вычислительных ядрах при числе Куранта  $q_{\text{CFL}} = 100.0$ , на каждом временном шаге использовалась одна ньютоновская итерация  $s_{\text{max}} = 1$ , для решения СЛАУ применялся метод LU-SGS. В качестве критерия останова использовалось соотношение  $\|\Delta\rho/\Delta t\|_{L2(\Omega_h)} < 10^{-6}$ , для его выполнения потребовалось  $\sim 27000$  итераций.

На втором этапе проводился расчет одного временного шага с  $\Delta t = 10$  нс, что соответствовало числу Куранта  $q_{\text{CFL}} \approx 0.57$ , при  $N_{\text{proc}} = 96$ . Здесь и далее для расчетов использовались следующие параметры неявной схемы: максимальное количество ньютоновских итераций  $\text{maxiter} = 5$ , относительная точность  $\text{rtol} = 10^{-3}$ , решение СЛАУ методом BiCGStab + LU-SGS с максимальным количеством итераций  $\text{maxiter} = 10$ , относительной точностью  $\text{rtol} = 10^{-4}$ , абсолютной точностью  $\text{atol} = 10^{-6}$ .

Третий этап расчетов проводился с помощью неявной схемы с указанными выше параметрами. Результаты сравнивались с аналогичными расчетами по явной схеме и данными из работы [21]. Число используемых вычислительных ядер в обоих случаях составило  $N_{\text{proc}} = 96$ , числа Куранта равнялись  $q_{\text{CFL}}^{\text{imp}} = 12.0$  и  $q_{\text{CFL}}^{\text{exp}} = 0.6$  соответственно. В указанные моменты времени после лазерного теплового импульса сравнивались численные шпирены [46, 47] (построенные с использованием экспоненциального преобразования полей градиента плотности) и высота мостообразного скачка  $h$  (нормированная на длину хорды клина  $\omega$ ) в центральном сечении модели (координатная плоскость  $xy$ ). Соответствующие результаты представлены на рис. 4–6 и 7. Здесь за  $t_0$  обозначено время начала третьего этапа расчета, «a», «b» и «c» обозначают результаты из работы [21], расчет по явной и неявной схемам, соответственно.

Полученные данные позволяют утверждать как о качественном, так и количественном совпадении результатов во всех трех рассмотренных случаях. В частности, на рис. 7 получено довольно точное соответствие высоты мостообразного скачка в указанные моменты времени, при этом результаты работы явной и неявной схем практически идентичны. Отличия между ними объясняются аппроксимационной ошибкой (включающей численную диффузию и погрешности дискретизации при линеаризации якобиана), увеличивающейся по мере роста используемого временного шага интегрирования. За счет это-

го, как видно на рис. 4–6, при использовании неявной схемы наблюдается «размазывание» фронтов ударных волн и мелких деталей течения. Однако данный эффект не повлиял критичным образом на общее качество расчета. Незначительные (с точки зрения конечного результата) отличия в результатах наших расчетов (для обеих схем) и результатах из работы [21] связаны, во-первых, с используемой для расчетов сеткой и, во-вторых, с используемой для расчетов моделью уравнений. В указанной работе вычисления проводились в четверти области с граничными условиями симметрии и в рамках уравнений Эйлера. В настоящей работе, как было описано в соответствующих разделах, вычисления проводились для URANS уравнений совместно с моделью турбулентности и в полной расчетной области (см. рис. 3).

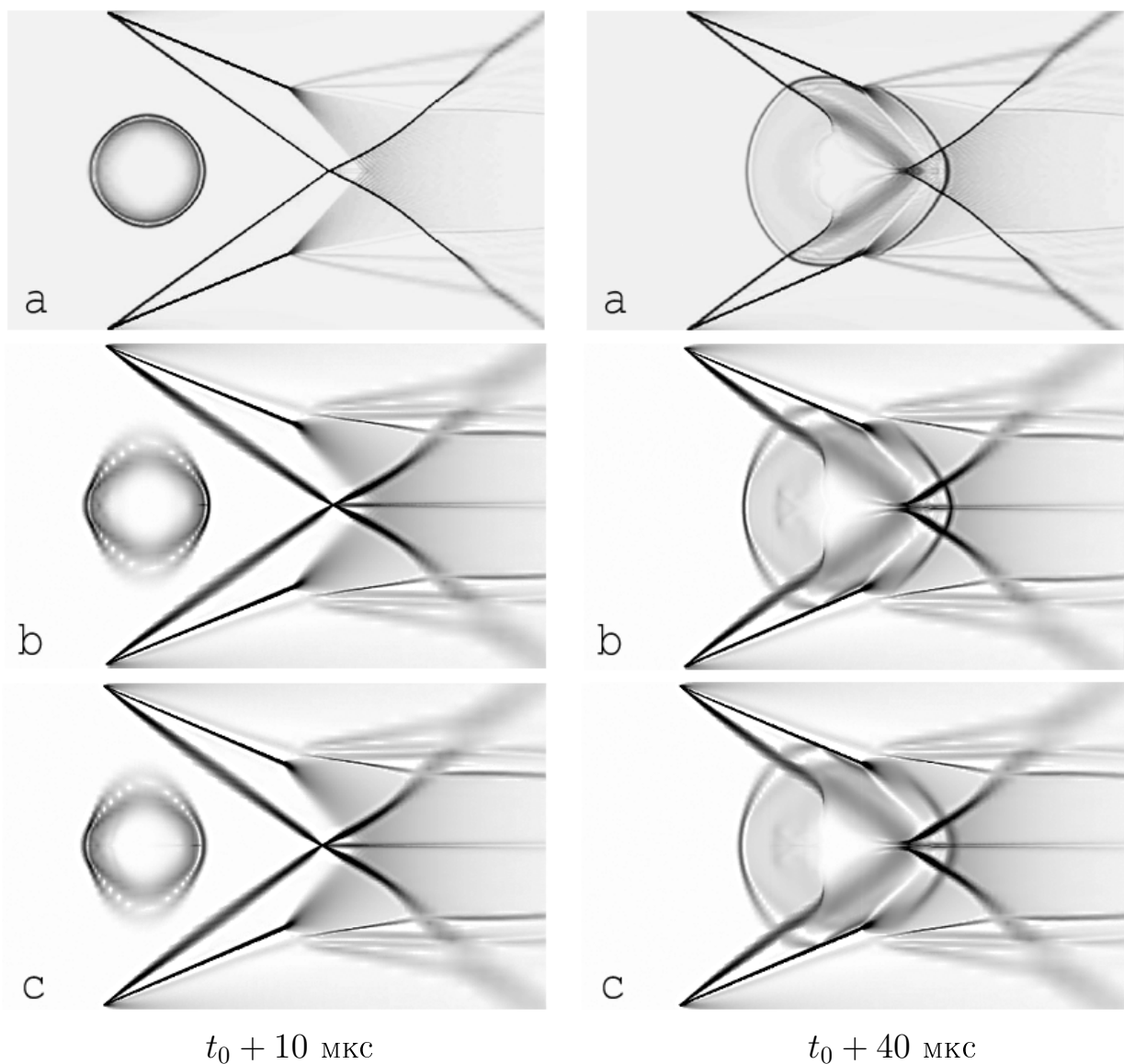


Рис. 4. Численные шлирены в моменты времени  $t_0 + 10$  мкс и  $t_0 + 40$  мкс

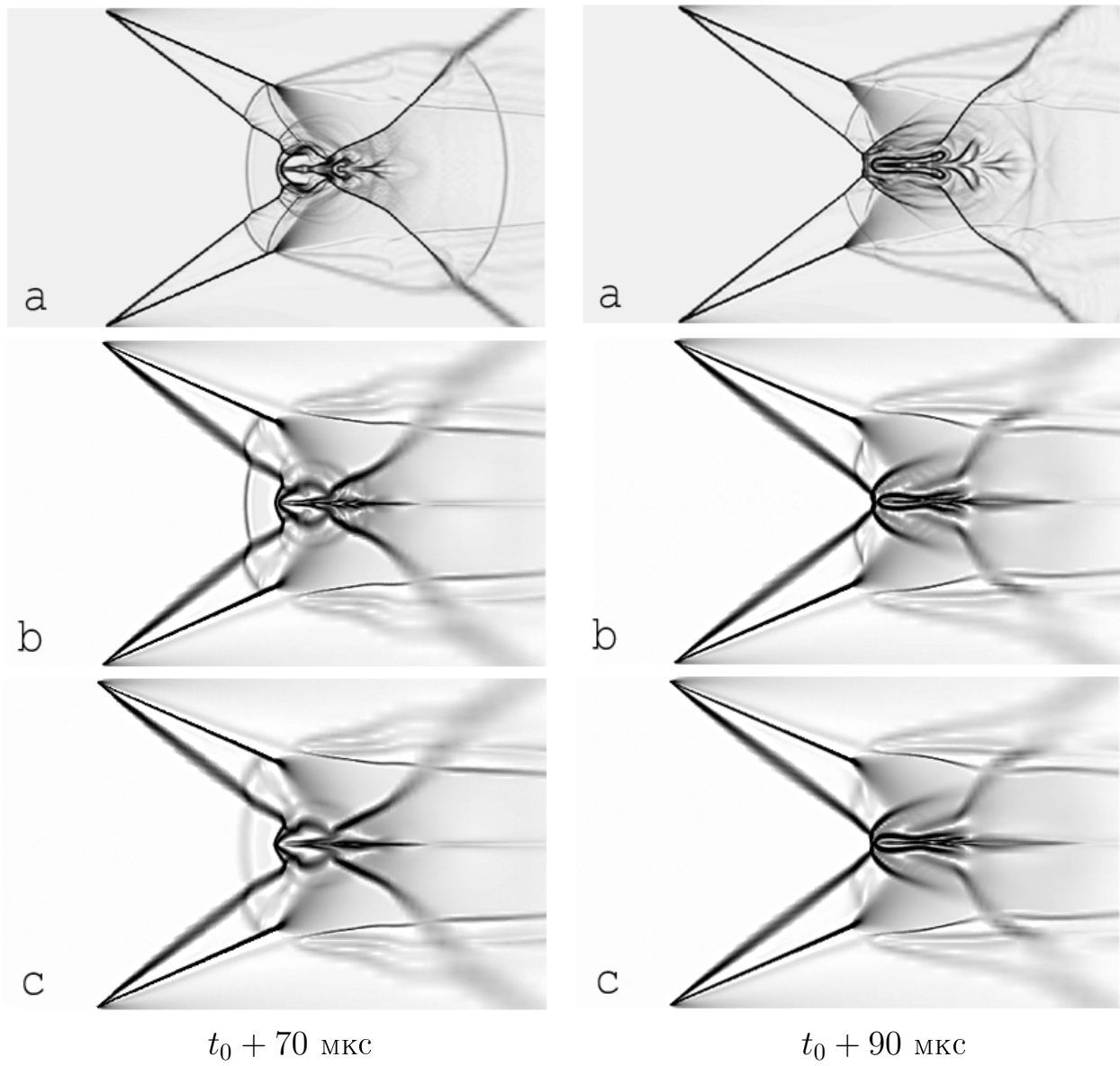


Рис. 5. Численные шпирены в моменты времени  $t_0 + 70 \text{ мкс}$  и  $t_0 + 90 \text{ мкс}$

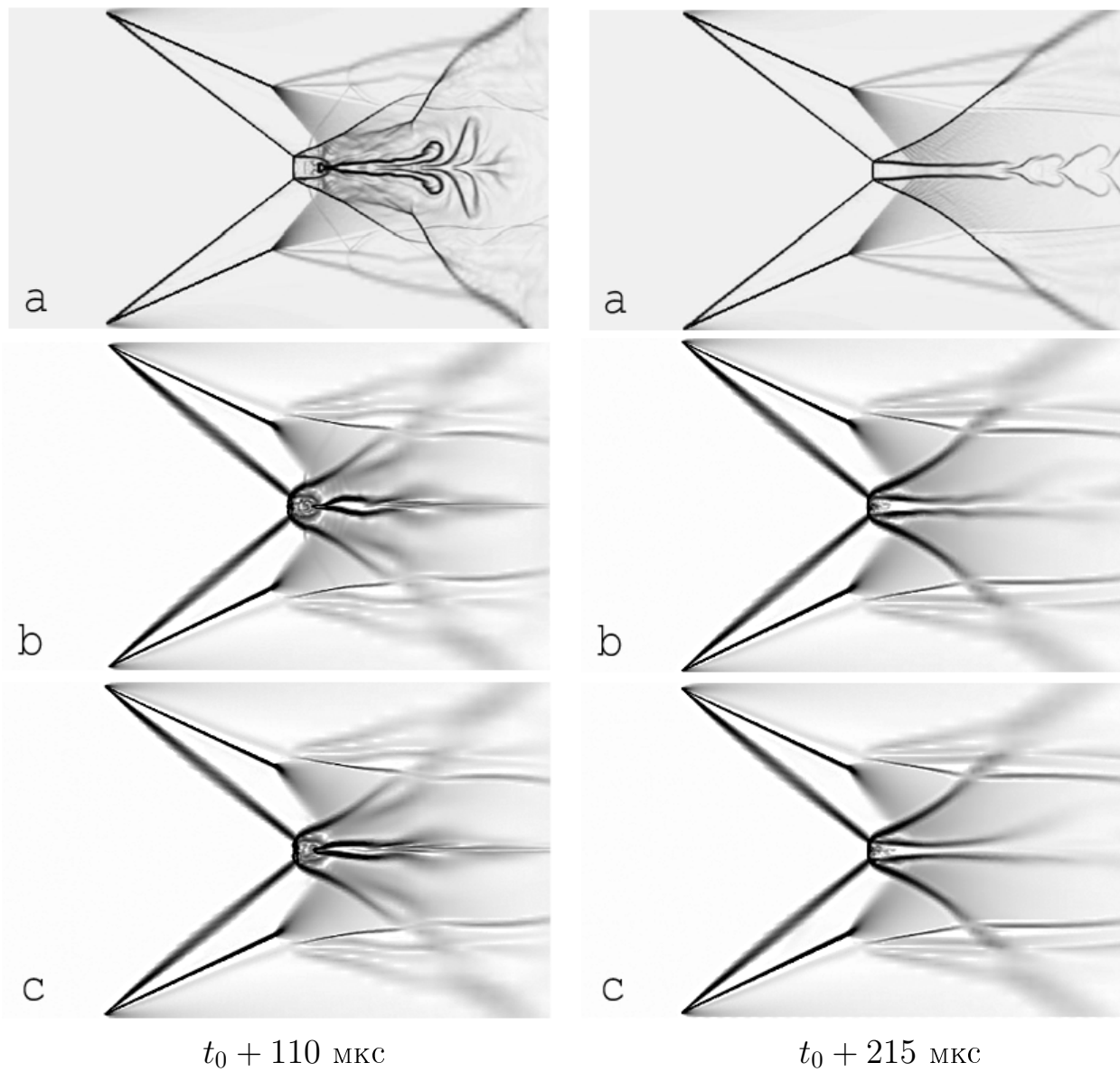


Рис. 6. Численные шпирены в моменты времени  $t_0 + 110 \text{ мкс}$  и  $t_0 + 215 \text{ мкс}$

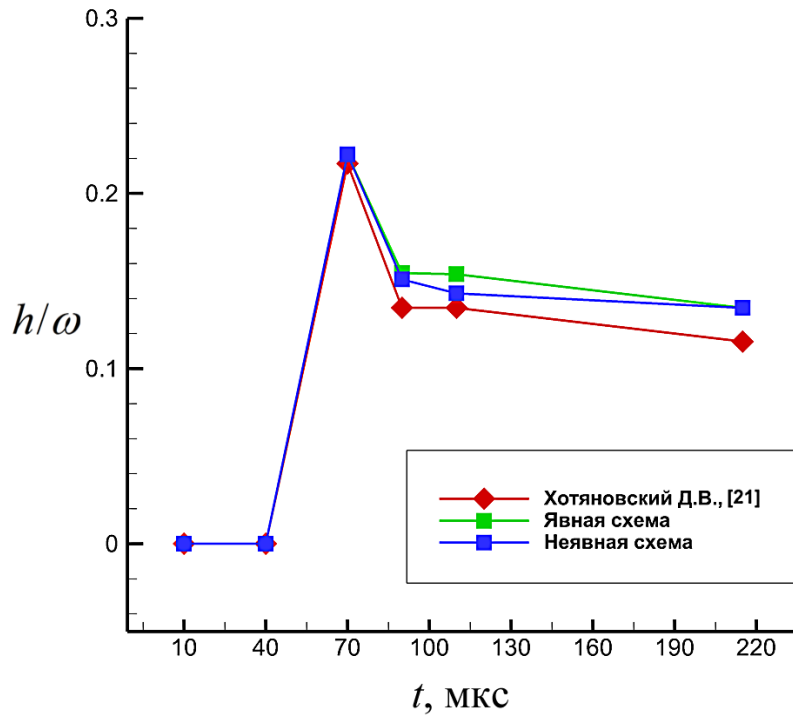


Рис. 7. Нормированная высота мостообразного скачка

Отдельно следует остановиться на параметрах неявной схемы, с которыми проводился представленный выше расчет. Число Куранта, как уже было указано выше, составило  $q_{\text{CFL}}^{\text{imp}} = 12.0$ , что в 20 раз больше аналогичного значения, которое обеспечивало устойчивый расчет по явной схеме. При этом среднее число ньютоновских итераций на один временной шаг равнялось  $\sim 4$ , число линейных итераций метода BiCGStab на одну ньютоновскую составило от 2 до 5. Физическое время выполнения одного шага неявной схемы составило  $\sim 5.35$  с, время выполнения 20 итераций аналогичной явной схемы  $\sim 13.56$  с. Таким образом, использование неявной схемы позволило получить общее ускорение расчета порядка 2.5 раз.

Помимо представленных результатов также был проведен ряд параметрических расчетов, которые показали, что при использовании для решения СЛАУ только метода LU-SGS число итераций метода Ньютона возрастает в несколько раз, при этом очень часто при достижении порядка десяти итераций наблюдается стагнирование нелинейной невязки. По этой причине для данной задачи применение метода BiCGStab является целесообразным.

Использование для неявной схемы чисел Куранта, больших указанного в несколько раз, приводило к существенному ухудшению качества решения, вплоть до исчезновения перехода  $\text{RR} \Rightarrow \text{MR}$ . Однако данный факт имеет логичное объяснение, связанное с фактической погрешностью аппроксимации решения. В книге Р.П. Федоренко [1] на примере простейшего линейного уравнения теплопроводности было показано, что даже при не очень высоких тре-

бованиях к точности соотношение между пространственным шагом сетки и временным шагом для неявной схемы почти такое же, как и обеспечивающее требование устойчивости для аналогичной явной схемы. Поэтому для обеспечения приемлемой точности нестационарного расчета условие Куранта не может быть нарушено очень сильно.

Масштабируемость и эффективность распараллеливания предложенной методики продемонстрированы на рис. 8 и 9, на которых представлены также аналогичные результаты для явной схемы. Исследования проводились для различного числа вычислительных ядер при всех прочих фиксированных параметрах осреднением времени счета 100 итераций. Как видно из рисунков, предложенная методика обладает хорошей масштабируемостью (ускорение расчета в 68 раз при использовании 96 вычислительных ядер и в 210 раз на 384 ядрах) и эффективностью (71% на 96 ядрах, 55% на 384), при этом масштабируемость явной и неявной схем сопоставима. Всё это позволяет сделать вывод о возможности ее эффективного применения для расчета задач большой размерности.

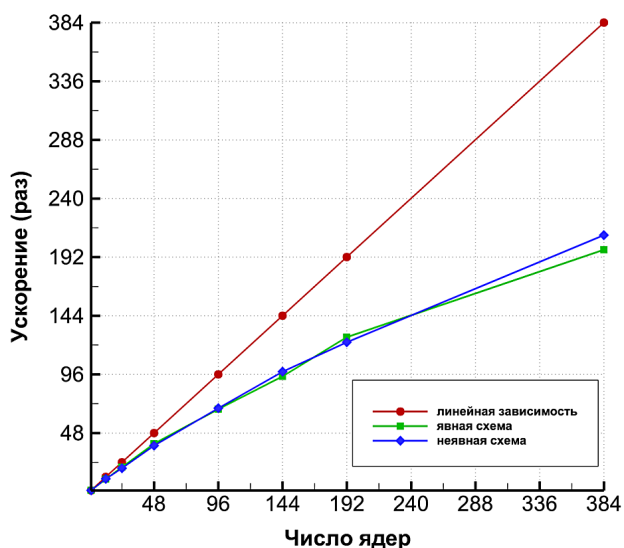


Рис. 8. Зависимость ускорения от числа ядер

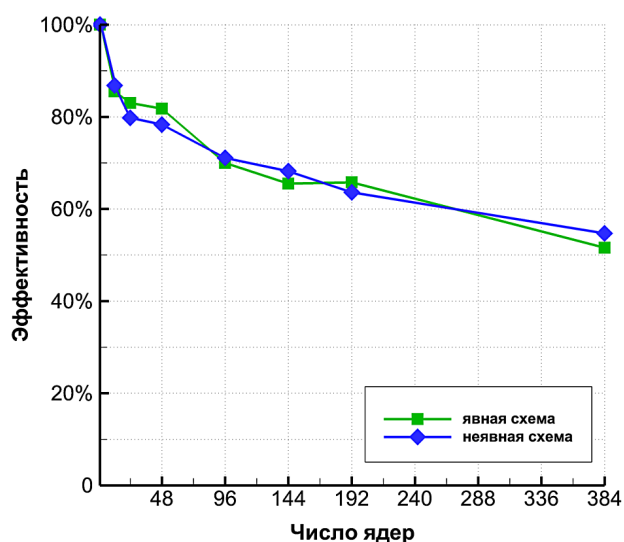


Рис. 9. Зависимость эффективности от числа ядер

## 6 Заключение

В настоящей работе представлена параллельная реализация неявной схемы на основе методов `BiCGStab` и `LU-SGS` с пространственной аппроксимацией 3-го порядка точности для решения 3D уравнений `URANS` с моделью турбулентности Спаларта-Аллмараса с модификацией Эдвардса для сжимаемых течений. Алгоритм является обобщением предложенной авторами в работе [11] методики на случай расчета нестационарных течений.

Разработанный метод применялся для моделирования перехода между регулярным и маховским отражением ударных волн, инициированного импульсным подводом энергии в область между двумя симметричными пластинами. Результаты работы неявного метода сравнивались с аналогичными данными, полученными по явной схеме, а также с расчетными данными из работы [21]. Проведенные численные исследования продемонстрировали хорошее совпадение результатов и сопоставимые с явной схемой эффективность распараллеливания и масштабируемость разработанного алгоритма. Так, максимальное ускорение в 210 раз было получено при использовании 384 вычислительных ядер. Эффективность распараллеливания в расчете варианте на 96 ядрах составила 71%, при этом общее время расчета в сравнении с явной схемой было сокращено в 2.5 раза.

Всё это позволяет сделать вывод о возможности применения реализованного неявного метода для эффективного решения нестационарных задач газовой динамики, обладающих большой размерностью.

## Список литературы

- [1] Р.П. Федоренко. Введение в вычислительную физику. 2-е изд, испр. и доп. Долгопрудный: Издательский дом «Интеллект», 2008. 503 с.
- [2] R.M. Beam, R.F. Warming. An implicit factored scheme for the compressible Navier-Stokes equations // AIAA J 1978. V.16. P.393–402.
- [3] В.М. Ковеня, Г.А. Тарнавский, Н.Н. Яненко. Неявная разностная схема для численного решения пространственных уравнений газовой динамики // Журн. вычисл. математики и матем. физики. 1980, т. 20, № 6, с. 1466–1482.
- [4] В.М. Ковеня, Г.А. Тарнавский, С.Г. Черный. Применение метода расщепления в задачах аэродинамики. Новосибирск: Наука, 1990. 247 с.
- [5] Takanori Haga, Keisuke Sawada and Z.J. Wang. An Implicit LU-SGS Scheme for the Spectral Volume Method on Unstructured Tetrahedral Grids. Commun. Comput. Phys. 6(5), 978-996, 2009.
- [6] S. Balay, W.D. Gropp. L.C. McInnes, and B.F. Smith. PETSc 2.0 users manual. Technical Report ANL-95/11- Revision 2.0.24, Argonne National Laboratory, Apr. 1999
- [7] S. Balay, K. Buschelman, W.D. Gropp, D. Kaushik, M.G. Knepley, L.C. McInnes, B.F. Smith, H. Zhang. PETSc Web page, 2001.  
<http://www.mcs.anl.gov/petsc>.
- [8] S. Balay, W.D. Gropp. L.C. McInnes, and B.F. Smith. Efficiency management of parallelism in object oriented numerical software libraries. In E. Arge, A. M. Bruaset. and H. P. Langtangen, editors, Modern Software Tools in Scientific Computing, pages 163-202. Birkhauser Press, 1997.
- [9] P. Rasetarinera, M.Y. Hussaini. An efficient implicit discontinuous Galerkin method. J Comput Phys 2001; 172(2):718-38.
- [10] H. Luo, D. Sharov, J.D. Baum and R. Löhner. Parallel unstructured grid GMRES+LU-SGS method for turbulent flows // American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2003.
- [11] В.Е. Борисов, А.А. Давыдов, И.Ю. Кудряшов, А.Е. Луцкий, И.С. Меньшов. Параллельная реализация неявной схемы на основе метода LU-SGS для моделирования трехмерных турбулентных течений // Математическое моделирование, 2014, Т.26, № 10, С. 64–78.



- [12] S.R. Allmaras, F.T. Johnson and P.R. Spalart, "Modifications and Clarifications for the Implementation of the Spalart-Allmaras Turbulence Model Senenth International Conferecnce on CFD (ICCFD7), Big Island, Hawaii, 9-13 July 2012.
- [13] J.R. Edwards, S. Chandra. Comparison of Eddy Viscosity-Transport Turbulence Models for Three-Dimensional, Shock-Separated Flowfields // AIAA Journal. 1996. Vol. 34, no. 4. P. 756–763.
- [14] I. Cravero, M. Semplice. On the accuracy of WENO and CWENO reconstructions of third order on nonuniform meshes // arXiv:1503.00736v1 [math.NA] 2 Mar 2015
- [15] C. Hu and C. W. Shu. Weighted essentially non-oscillatory schemes on triangular meshes // J. Comput. Phys., 150 (1999), 97–127.
- [16] C. W. Shu. Essentially non-oscillatory and weighted essentially non-oscillatory schemes for hyperbolic conservation laws, in: A. Quarteroni (Ed.), Advanced Numerical Approximation of Nonlinear Hyperbolic Equations, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin/New York, 1998, Vol. 1697, p. 325.
- [17] Y. Saad. Iterative Methods for Sparse Linear Systems. Second Edition. SIAM, 2003.
- [18] А.Н. Кудрявцев. Вычислительная аэродинамика сверхзвуковых течений с сильными ударными волнами: дис. ... д-ра ф.-м. наук. ИТПМ СО РАН, Новосибирск, 2014.
- [19] М.С. Иванов, А.Н. Кудрявцев, С.Б. Никифоров, Д.В. Хотяновский. Переход между регулярным и маховским отражением ударных волн: новые численные и экспериментальные результаты // Аэромеханика и газовая динамика, 2002, № 3, с.3–12.
- [20] M.S. Ivanov, A.N. Kudryavtsev, S.B. Nikiforov, D.V. Khotyanovsky and A.A. Pavlov. Experiments on shock wave reflection transition and hysteresis in low-noise wind tunnel // Physics of Fluids, 15, 1807–1810, 2003.
- [21] D.V. Khotyanovsky, D.D. Knight, A.N. Kudryavtsev, M.S. Ivanov. Numerical study on laser-induced shock wave reflection transition // The 5th Int. Workshop on Shock-Vortex Interaction, Kaohsiung, Taiwan, Oct. 27-31, 2003, (Ed. S.M. Liang), pp. 84–90.

- [22] D.V. Khotyanovsky, A.N. Kudryavtsev, M.S. Ivanov. Effects of a Single-pulse Energy Deposition on Steady Shock Wave Reflection // Shock Waves, Vol.15, № 5, 2006, pp. 353–362.
- [23] В.А. Забайкин. Управление псевдоскачком нестационарным воздействием // Физико-химическая кинетика в газовой динамике, 2011, Т.12. 7 с. <http://chemphys.edu.ru/issues/2011-12/articles/353/>
- [24] Т.А. Бормотова, В.В. Володин, В.В. Голуб, И.Н. Ласкин. Тепловая коррекция входного диффузора гиперзвукового прямоточного воздушно-реактивного двигателя // Теплофизика высоких температур. 2003. Т. 41, № 3. С. 472–477.
- [25] В.П. Замураев, А.П. Калинина. Численно-аналитическое моделирование структуры сверхзвукового течения газа в канале переменного сечения с подводом энергии // Инженерно-физический журнал. 2015. Т.88, № 1. С. 210–219.
- [26] А.Ф. Латыпов. Численное моделирование течения в канале переменной площади сечения при импульсно-периодическом подводе энергии // Прикладная механика и техническая физика. 2009. Т. 50, № 1. С. 3–11.
- [27] П.К. Третьяков. Организация пульсирующего режима горения высокоскоростных ПВРД // Физика горения и взрыва. 2012. Т. 48, № 6. С. 21–27.
- [28] В.Е. Борисов, И.Ю. Кудряшов, А.Е. Луцкий. Численное исследование формирования псевдоскачка в канале // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2016. № 2. 24 с.  
<http://library.keldysh.ru/preprints.asp?id=2016-2>
- [29] С.К. Годунов, А.В. Забродин, М.Я. Иванов, А.Н. Крайко, Г. П. Прокопов. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976, 400 с.
- [30] A. Jameson. Time dependent calculations using multigrid, with applications to unsteady flows past airfoils and wings. // AIAA paper. 1991. 91-1596. 1–15.
- [31] C. Hirsh Numerical computation of internal and external flows. 1. New York: Wiley/Interscience, 1991.
- [32] В.В. Русанов. Расчет нестационарных ударных волн с препятствиями // ЖВМ и МФ. 1961. 1, № 2. 267–279

- [33] I. Men'shov, Y. Nakamura. On implicit Godunov's method with exactly linearized numerical flux // *Computers and Fluids*. 2000. 29. 595–616.
- [34] I. Men'shov, Y. Nakamura. An implicit advection upwind splitting scheme for hypersonic air flows in thermochemical nonequilibrium // *Collection of technical papers of 6th Int. Symp. on CFD, Lake Tahoe, Nevada*. 1995b. 2. 815–821.
- [35] Peter N. Brown and Alan C. Hindmarsh. Matrix-Free Methods for Stiff Systems of ODE's // *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 1986. Vol. 23. № 3. 610–638
- [36] J. Blazek. *Computational Fluid Dynamics: Principles and Applications*. New York: Elsevier, 2001.
- [37] D.A. Knoll, D.E. Keyes, Jacobian-free Newton–Krylov methods: a survey of approaches and applications // *Journal of Computational Physics*, Volume 193, Issue 2, 20 January 2004, Pages 357–397
- [38] B. Krasnopolsky. The reordered bicgstab method for distributed memory computer systems // *Procedia Computer Science*. Vol. 1. United States: United States, 2010. P. 213–218.
- [39] Chaco: Software for Partitioning Graphs.  
<https://cfwebprod.sandia.gov/cfdocs/CompResearch/templates/insert/softwre.cfm?sw=36>
- [40] E. Cuthill, and J. McKee. Reducing the Bandwidth of Sparse Symmetrical Matrices // *Proc. ACM Nat. Conf.*, pp.157–172, New York, 1969.
- [41] И.В. Семенов, И.Ф. Ахмедьянов, П.С. Уткин. Разработка вычислительного комплекса для решения двух и трехмерных задач газодинамики реагирующих течений на многопроцессорных ЭВМ // *Высокопроизводительные параллельные вычисления на кластерных системах: Мат-лы 6 Международ. науч.-практ. семинара. 12–17 декабря 2006 г.* СПб.: Изд-во Санкт-Петербургского гос.университета, 2007. Т. 2. С. 138–145.
- [42] И.В. Семенов, И.Ф. Ахмедьянов. Разработка параллельного алгоритма LU-SGS для решения многомерных задач вычислительной газодинамики // *Материалы Четвертой Сибирской школы-семинара по параллельным и высокопроизводительным вычислениям*. Изд-во Томск: Дельтаплан, 2008. С. 122–129, 2008.

- [43] П.В. Павлухин, И.С. Меньшов. Эффективная реализация метода LU-SGS для задач газовой динамики // Научный вестник МГТУ ГА. 2011. Т. 165. С. 46–55.
- [44] Intel® Compilers.  
<http://software.intel.com/ru-ru/intel-compilers>
- [45] Гибридный вычислительный кластер К-100.  
<http://www.kiam.ru/MVS/resources/k100.html>
- [46] J.J. Quirk. AMRITA – A computational facility (for CFD modeling) // VKI 29<sup>th</sup> CFD Series, 1998, P. 23–27.
- [47] A. Hadiadi, A. Kudryavtsev. Computation and flow visualization in high-speed aerodynamics // Journal of Turbulence, 2005. V. 6, № 16.

# Содержание

<b>1</b>	<b>Введение</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Математическая модель</b>	<b>5</b>
2.1	Основные уравнения . . . . .	5
2.2	Модель турбулентности Спаларта-Аллмараса . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Методы решения</b>	<b>8</b>
3.1	Дискретизация уравнений . . . . .	8
3.2	Метод Ньютона . . . . .	11
3.3	Метод LU-SGS . . . . .	13
3.4	Метод BiCGStab . . . . .	15
3.5	Общий алгоритм решения . . . . .	16
<b>4</b>	<b>Особенности программной реализации</b>	<b>19</b>
<b>5</b>	<b>Результаты расчетов</b>	<b>20</b>
<b>6</b>	<b>Заключение</b>	<b>30</b>
	<b>Литература</b>	<b>31</b>