



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 76 за 2016 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Батхин А.Б.

Глобальные
параметризации одной
вещественной
алгебраической поверхности

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Батхин А.Б. Глобальные параметризации одной вещественной алгебраической поверхности // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2016. № 76. 24 с. doi:[10.20948/prepr-2016-76](https://doi.org/10.20948/prepr-2016-76)
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2016-76>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.КЕЛДЫША
Российской академии наук**

А. Б. Батхин

**Глобальные параметризации
одной вещественной
алгебраической поверхности**

Москва — 2016

УДК 514.765+517.938

Александр Борисович Батхин

Глобальные параметризации одной вещественной алгебраической поверхности. Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, 2016.

Рассматривается вещественное алгебраическое многообразие Ω в \mathbb{R}^3 , играющее важную роль в изучении нормализованного потока Риччи на обобщённых пространствах Уоллаха. Описывается методика получения глобального параметрического представления этого многообразия с использованием методов теории исключений и методов компьютерной алгебры. Используется параметризация дискриминантного множества вещественного кубического многочлена. Получено три различных параметризации многообразия Ω , каждая из которых справедлива вне некоторых критических значений параметров.

Ключевые слова: алгебраическое многообразие, теория исключения, дискриминантное множество, особая точка.

Alexander Borisovich Batkhin

Global parametrizations of the certain real algebraic surface

A certain real algebraic variety Ω in \mathbb{R}^3 is considered. This variety plays an important role in the investigation of the normalized Ricci flow on generalized Wallach spaces. A method for constructing of the global parametric representation of this variety that makes use of elimination theory and computer algebra methods is proposed. A parametrization of the discriminant set of a real cubic polynomial is used. Three different parametrizations of the variety Ω are obtained, each valid beyond some critical values of parameters.

Key words: algebraic variety, elimination theory, discriminant set, singular point.

Работа поддержана программой IV.1.1 ОМН РАН.

© А. Б. Батхин, 2016

© Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша, 2016

1. Введение

В серии работ [1—5] исследовалось трёхпараметрическое семейство специальных однородных пространств с точки зрения нормализованного потока Риччи. Поток Риччи в этом случае задаёт эволюцию инвариантных (однородных) римановых метрик на рассматриваемых однородных пространствах Уоллаха. Уравнение нормализованного потока Риччи сводится к системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений с тремя параметрами a_1, a_2, a_3 (см. одну из выше процитированных работ), а особым точкам этой системы соответствуют инвариантные метрики Эйнштейна.

Здесь изучается множество Ω значений параметров a_1, a_2, a_3 , при которых упомянутая выше система имеет хотя бы одну вырожденную особую точку. Показано, что многообразие Ω описывается уравнением

$$Q^*(a_1, a_2, a_3) \equiv Q(s_1, s_2, s_3) = 0, \quad (1)$$

где многочлен $Q^*(a_1, a_2, a_3)$ является симметрическим многочленом.

Многочлен $Q(s_1, s_2, s_3)$ задаётся выражением

$$\begin{aligned} Q(s_1, s_2, s_3) = & (2s_1 + 4s_3 - 1) (64s_1^5 - 64s_1^4 + 8s_1^3 + 240s_1^2s_3 - 1536s_1s_3^2 - 4096s_3^3 \\ & + 12s_1^2 - 240s_1s_3 + 768s_3^2 - 6s_1 + 60s_3 + 1) \\ & - 8s_1s_2(2s_1 + 4s_3 - 1)(2s_1 - 32s_3 - 1)(10s_1 + 32s_3 - 5) \\ & - 16s_1^2s_2^2 (52s_1^2 + 640s_1s_3 + 1024s_3^2 - 52s_1 - 320s_3 + 13) \\ & + 64(2s_1 - 1)s_2^3(2s_1 - 32s_3 - 1) + 2048s_1(2s_1 - 1)s_2^4, \end{aligned} \quad (2)$$

где s_1, s_2, s_3 — элементарные симметрические многочлены, равные соответственно

$$s_1 = a_1 + a_2 + a_3, \quad s_2 = a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3, \quad s_3 = a_1a_2a_3. \quad (3)$$

В указанных выше работах многообразие Ω было исследовано вблизи особой точки P_1 (см. таблицу 1 ниже). В работах [6; 7] найдены все особые точки многообразия Ω (они имеют порядки 1, 2, 3) и показана его структура в целом. Приведено качественное описание всех компонентов многообразия Ω и их взаимного расположения. Основной акцент при исследовании был сделан на применении методов компьютерной алгебры.

Данная работа предлагает метод получения глобальной параметризации многообразия Ω как в переменных $s = (s_1, s_2, s_3)$, так и в переменных $a = (a_1, a_2, a_3)$. Здесь и далее полужирным шрифтом обозначаем вектор из \mathbb{R}^3 .

Определение 1. Аналитическое описание многообразия Ω в переменных s_i назовём *s-представлением*, и в переменных a_i — *a-представлением* и обозначим Ω^* .

Вблизи каждой из особых точек многообразия Ω или Ω^* можно выполнить детальный локальный анализ и дать рациональную аппроксимацию всех компонентов многообразия методами, описанными в [8]. Однако глобальное параметрическое представление многообразия может быть существенно полезным во многих других случаях:

- при изучении пересечения пары многообразий удобно иметь параметрическое представление одного из них;
- для получения локального разложения многообразия в той или иной его точке;
- для визуализации многообразий или их проекций;
- при вычислении криволинейных или поверхностных интегралов;
- для выполнения различных геометрических преобразований (поворотов, сдвигов, масштабирования).

Если удастся предъявить рациональную параметризацию многообразия Ω , то для выполнения необходимых вычислений возможно задействовать метод базисов Грёбнера.

Препринт состоит из введения, пяти разделов, заключения и трёх списков: литературы, рисунков и условных обозначений. В разделе 2 дано описание дискриминантного множества $\mathcal{D}(\chi)$ вспомогательного кубического многочлена $\chi(y)$ (4) и его рациональной параметризации. Подробнее о дискриминантных множествах вещественных многочленов см. в работах [9; 10] автора. В разделе 3 рассматриваются многообразия $\mathcal{Z}_i, i = 1, 2, 3$, по которым пересекаются многообразия Ω и дискриминантное множество $\mathcal{D}(\chi)$. Эти многообразия используются для построения глобальных параметризаций многообразия Ω в разделе 4. В разделе 5 рассматриваются параметризации многообразия Ω для тех критических значений параметров, при которых параметризации раздела 4 не работают. Наконец, в разделе 6 рассматривается переход от s-представления к a-представлению параметризации многообразия Ω^* .

2. Дискриминантное множества кубического многочлена

Переход от s-представления к a-представлению многообразия Ω задаётся преобразованием (3), каждый компонент которого представляется в виде $s_i = \sigma_i(\mathbf{a})$, где σ_i — элементарные симметрические многочлены [11, гл. 3, п. 11]:

$$\sigma_i(\mathbf{a}) = \sum_{k_1 < \dots < k_i} a_{k_1} \times \dots \times a_{k_i}.$$

В силу теоремы Виета переменные \mathbf{a} можно рассматривать как корни вспомогательного кубического многочлена $\chi(y)$ с коэффициентами s :

$$\chi(y) \stackrel{\text{def}}{=} y^3 - s_1 y^2 + s_2 y - s_3. \quad (4)$$

Очевидно, что выражение (2) задаёт s -представление многообразия Ω в той части Π_1 пространства коэффициентов $\Pi \equiv \mathbb{R}^3$ многочлена (4), где последний имеет три вещественных корня. Как известно [12], всё пространство коэффициентов Π вещественного многочлена $f_n(x)$ степени n делится дискриминантным множеством $\mathcal{D}(f_n)$ на $1 + [n/2]$ областей с различным числом вещественных корней. Для кубического многочлена таких областей 2. В области Π_1 многочлен (4) имеет три вещественных корня, в области Π_2 — один вещественный и два комплексно-сопряжённых. Границей областей Π_1 и Π_2 служит дискриминантная поверхность

$$\mathcal{D}(\chi) = \{s : D(\chi) = 0\}, \quad (5)$$

где $D(\chi)$ — дискриминант многочлена $\chi(y)$.

Утверждение 1 (см. [9; 11]). *Для того чтобы у многочлена $\chi(y)$ все корни были вещественными, необходимо и достаточно, чтобы его коэффициенты s удовлетворяли неравенству $D(\chi) \geq 0$. Здесь*

$$D(\chi) = -4s_1^3s_3 + s_1^2s_2^2 + 18s_1s_2s_3 - 4s_2^3 - 27s_3^2 \quad (6)$$

есть дискриминант многочлена (4).

В [9; 10] показано, что дискриминантное множество $\mathcal{D}(f_n)$ произвольного вещественного многочлена $f_n(x)$ допускает в пространстве его коэффициентов Π полиномиальную параметризацию. Для многочлена (4) она имеет вид

$$\mathcal{D}(\chi) : \{s_1 = 2t_1 + t_2, s_2 = t_1^2 + 2t_1t_2, s_3 = t_1^2t_2\}. \quad (7)$$

На дискриминантной поверхности $\mathcal{D}(\chi)$ многочлен χ имеет пару вещественных корней: корень t_1 кратности 2 и простой корень t_2 . Это — линейчатая развёртывающаяся поверхность с огибающей множества прямых в виде однопараметрического семейства $\mathcal{D}^{(1)}(\chi)$ с параметризацией

$$\mathcal{D}^{(1)}(\chi) : \{s_1 = 3t_1, s_2 = 3t_1^2, s_3 = t_1^3\}. \quad (8)$$

Кривая (8) является однопараметрическим семейством особых точек первого порядка (см. определение 2 раздела 3) дискриминантной поверхности (5).

Покажем, что поверхность $\mathcal{D}(\chi)$ бирационально эквивалентна плоскости \mathbb{R}^2 . Для этого, используя параметризацию (7), составим идеал и вычислим его базис Грёбнера относительно переменных s , рассматривая параметры t_1, t_2 как коэффициенты. Полученный базис содержит четыре многочлена от s , в которые параметры t_1, t_2 входят линейным образом, что позволяет выразить их как рациональные функции от s . Приведём здесь одно из таких выражений:

$$t_1 = \frac{s_1s_2 - 9s_3}{2(s_1^2 - 3s_2)}, \quad t_2 = \frac{s_1^3 - 4s_1s_2 + 9s_3}{s_1^2 - 3s_2}.$$

Кривая особых точек $\mathcal{D}^{(1)}(\chi)$ в координатах (t_1, t_2) задаёт биссектрису первого и третьего квадрантов, ибо при $t_2 = t_1$ параметризация (7) переходит в параметризацию (8). На этой кривой многочлен $\chi(y)$ имеет единственный вещественный корень t_1 кратности 3.

При каждом фиксированном значении параметра t_2 выражение (7) определяет параболу, которая имеет касание второго порядка с кривой особых точек (8) при $t_1 = t_2$. Таким образом, на плоскости (t_1, t_2) прямые $t_1 = \text{const}$ соответствуют касательным прямым к кривой (8), а прямые $t_2 = \text{const}$ соответствуют касательным параболам, заметающим всю дискриминантную поверхность $\mathcal{D}(\chi)$. Множество вершин этих парабол реализуется при $t_1 = -t_2/(1 + t_2^2)$ и задаётся кривой с параметризацией

$$\psi : \left\{ s_1 = -\frac{t_2^3 - t_2}{1 + t_2^2}, s_2 = -\frac{t_2^2(1 + 2t_2^2)}{(1 + t_2^2)^2}, s_3 = \frac{t_2^3}{(1 + t_2^2)^2} \right\},$$

а вектор нормали плоскости параболы (7) при фиксированном t_2 — величиной $(t_2^2, -t_2, 1)$.

Тем самым, дискриминантная поверхность $\mathcal{D}(\chi)$ образована двумя семействами образующих: семейством касательных прямых $t_1 = \text{const}$ и семейством парабол $t_2 = \text{const}$, касающихся кривой особых точек.

Дискриминантная поверхность $\mathcal{D}(\chi)$ вместе с кривой $\mathcal{D}^{(1)}(\chi)$ показана на рисунках 2.

Поскольку дискриминант (6) многочлена (4) через корни последнего выражается формулой

$$D(\chi) = \prod_{1 \leq i < j \leq 3} (a_i - a_j)^2,$$

то \mathbf{a} -представление дискриминантной поверхности $\mathcal{D}(\chi)$ представляет собой объединение трёх взаимно симметричных плоскостей

$$\mathcal{M}_1 : a_1 = a_2, \quad \mathcal{M}_2 : a_2 = a_3, \quad \mathcal{M}_3 : a_3 = a_1,$$

названных в [6; 7] *исключительными*. Плоскости \mathcal{M}_i , $i = 1, 2, 3$, пересекаются попарно по оси симметрии $a_1 = a_2 = a_3$, которая является \mathbf{a} -представлением кривой особых точек $\mathcal{D}^{(1)}(\chi)$.

3. Точки многообразия Ω

на дискриминантной поверхности $\mathcal{D}(\chi)$

Определение 2. Пусть $\varphi(\mathbf{s})$ — некоторый многочлен. Точка $\mathbf{s} = \mathbf{s}^0$ множества $\varphi(\mathbf{s}) = 0$ называется *особой точкой k -го порядка*, если в этой точке обращаются в нуль все частные производные многочлена $\varphi(\mathbf{s})$ по s_1, \dots, s_3 до k -го порядка

включительно и не обращается в нуль хотя бы одна частная производная порядка $k + 1$.

Особые точки многообразия Ω^* в \mathbf{a} -представлении являются нулями идеала, образованного многочленом (1) и всеми частными производными $\partial Q^*/\partial \mathbf{a}$. Поскольку

$$\frac{\partial Q^*}{\partial \mathbf{a}} = \left(\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \mathbf{a}} \right)^T \frac{\partial Q}{\partial \mathbf{s}},$$

то нужно определить особые точки многообразия Ω в \mathbf{s} -представлении и особые точки якобиана преобразования (3). Непосредственные вычисления показывают (см.[6; 7]), $D(\chi) = J^2$, где $J = \det \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \mathbf{a}} = (a_1 - a_2)(a_2 - a_3)(a_1 - a_3)$, а выражение дискриминанта $D(\chi)$ дано в формуле (6). Поэтому рассмотрим вначале общие точки многообразия Ω и дискриминантной поверхности $\mathcal{D}(\chi)$ в \mathbf{s} -представлении.

Замечание 1. Параметризация дискриминантной поверхности выбрана таким образом, что параметры t_1, t_2 суть корни многочлена $\chi(y)$. Следовательно, на поверхности $\mathcal{D}(\chi)$ параметры t_1, t_2 задают \mathbf{a} -представление пересечения множеств $\Omega^* \cap \mathcal{D}(\chi)$.

Воспользуемся параметризацией (8) и после подстановки её в формулу (2) получим, что на кривой особых точек $\mathcal{D}^{(1)}(\chi)$ многочлен $Q(\mathbf{s})$ факторизуется

$$Q(\mathbf{s})|_{\mathcal{D}^{(1)}(\chi)} = -(2t_1 + 1)^4(4t_1 - 1)^8.$$

Нулям $t_1 = 1/4$ и $t_1 = -1/2$ соответствуют особые точки $P_1^{(3)} = (1/4, 1/4, 1/4)$ и $P_2^{(3)} = (-1/2, -1/2, -1/2)$ третьего порядка многообразия Ω^* в \mathbf{a} -представлении (см. таблицу 1 и таблицы 1, 2 в [6; 7]).

Подставляя параметризацию (7) в многочлен $Q(\mathbf{s})$, получим, что последний раскладывается на множители:

$$Q|_{\mathcal{D}(\chi)} = -(1 + 2t_2) (8t_1t_2 + 8t_2^2 - 4t_1 - 4t_2 + 1) \times \\ \times (16t_1^3 + 16t_1^2t_2 - 4t_1 - 2t_2 + 1)^3. \quad (9)$$

Таким образом, многообразие Ω пересекается (касается) дискриминантной поверхности $\mathcal{D}(\chi)$ вдоль трёх одномерных многообразий, каждое из которых в координатах (t_1, t_2) определяется нулями соответствующего множителя формулы (9). Обозначим эти многообразия $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ и \mathcal{L}_3 соответственно. Каждое из этих многообразий представляет собой рациональную кривую в пространстве

Таблица 1. Особые точки многообразия Ω

Точка	t-представление	s-представление	a-представление
$P_1^{(3)}$	$\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$	$\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{16}, \frac{1}{64}\right)$	$\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$
$P_2^{(3)}$	$\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$	$\left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{4}, -\frac{1}{8}\right)$	$\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$
$P_{3,4,5}^{(3)}$	$\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}\right)$	$\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$
			$\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$
			$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$
$P_{1,2,3}^{(2)}$	$\left(0, \frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$	$\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$
			$\left(0, \frac{1}{2}, 0\right)$
			$\left(0, 0, \frac{1}{2}\right)$
$P_{1,2,3}^{(1)}$	$\left(\frac{5}{8}, -\frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{3}{4}, -\frac{15}{64}, -\frac{25}{128}\right)$	$\left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{8}, \frac{5}{8}\right)$
			$\left(\frac{5}{8}, -\frac{1}{2}, \frac{5}{8}\right)$
			$\left(\frac{5}{8}, \frac{5}{8}, -\frac{1}{2}\right)$

П коэффициентов многочлена (4). Их параметризации имеют следующий вид:

$$\mathcal{L}_1 : \left\{ s_1 = 2t_1 - \frac{1}{2}, s_2 = t_1^2 - t_1, s_3 = -\frac{1}{2}t_1^2 \right\}, \quad (10)$$

$$\mathcal{L}_2 : \left\{ s_1 = -\frac{u^2 + u + 1}{2u}, s_2 = \frac{1 - 4u^2(u + 1)^2}{4u}, s_3 = \frac{(2u^2 + 2u + 1)^2(u + 1)}{32u^2} \right\}, \quad (11)$$

$$\mathcal{L}_3 : \left\{ s_1 = \frac{16u^3 - 1}{2(8u^2 - 1)}, s_2 = \frac{u(8u^3 - 3u + 1)}{8u^2 - 1}, s_3 = -\frac{u(16u^3 - 4u + 1)}{2(8u^2 - 1)} \right\}. \quad (12)$$

Многообразия $\mathcal{L}_i, i = 1, 2, 3$, на плоскости (t_1, t_2) попарно пересекаются в четырёх точках. Эти точки являются особыми точками первого порядка многообразия Ω в его s-представлении. Будем пользоваться теми же обозначениями

$P_i^{(k)}$, которые были введены в [6; 7], где нижний индекс i — это номер точки, а верхний индекс (k) — порядок особой точки в \mathbf{a} -представлении.

- Многообразия \mathcal{Z}_1 и \mathcal{Z}_2 пересекаются в точке с координатами $(5/8, -1/2)$, которая в таблице 1 обозначена $P_{1,2,3}^{(1)}$.
- Многообразия \mathcal{Z}_1 и \mathcal{Z}_3 пересекаются в точке с координатами $(-1/2, -1/2)$, соответствующей точке $P_2^{(3)}$ на кривой (8), и касаются в точке с координатами $(1/2, -1/2)$, соответствующей точкам $P_{3,4,5}^{(3)}$.
- Многообразия \mathcal{Z}_2 и \mathcal{Z}_3 касаются в точке с координатами $(1/4, 1/4)$, соответствующей точке $P_1^{(3)}$ на кривой (8).

Координаты особых точек в \mathbf{t} -, \mathbf{s} - и \mathbf{a} -представлениях приведены в таблице 1. Отметим, что точки $P_i^{(3)}$, $i = 1, \dots, 5$ и $P_i^{(1)}$, $i = 1, 2, 3$, являются особыми точками первого порядка, а точки $P_i^{(2)}$, $i = 1, 2, 3$, — особыми точками второго порядка в \mathbf{s} -представлении. Особых точек порядка три и выше в \mathbf{s} -представлении нет.

Многообразия \mathcal{Z}_i , $i = 1, 2, 3$, с соответствующими точками пересечения и касания показаны на рис. 1.

Вид дискриминантной поверхности $\mathcal{D}(\chi)$ с кривой $\mathcal{D}^{(1)}(\chi)$, многообразиями \mathcal{Z}_i , $i = 1, 2, 3$ и особыми точками $P_i^{(k)}$ на ней приведены на рисунках 2 в разных ракурсах.

Замечание 2. Поскольку в силу замечания 1 переменные t_1, t_2 суть корни многочлена $\chi(y)$, то рисунок 1 фактически представляет собой сечение многообразия Ω^* одной из исключительных плоскостей \mathcal{M}_i , $i = 1, 2, 3$. Аналогичный рисунок приведён в работах [6; 7], где он дан не в переменных \mathbf{a} , а в переменных $\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3)$, в которых биссектриса первого и третьего квадрантов плоскости (t_1, t_2) совпадает с осью $A_1 = A_2 = 0$.

Непосредственной проверкой можно убедиться, что вдоль многообразий \mathcal{Z}_1 и \mathcal{Z}_2 дискриминантная поверхность $\mathcal{D}(\chi)$ трансверсально пересекается с многообразием Ω , в то время как вдоль многообразия \mathcal{Z}_3 указанные выше поверхности пересекаются с касанием второго порядка. Поскольку нас интересует не всё многообразие Ω , а только те его части, которые располагаются в области Π_1 , в которой $D(\chi) \geq 0$, то параметризацию Ω надо строить, начиная от многообразий \mathcal{Z}_i . Таким образом, ставится задача вычисления параметрического представления многообразия с краем.

Для построения глобальной параметризации многообразия Ω предлагается следующий подход:

1) выберем одно из многообразий \mathcal{Z}_i и выполним такую замену переменных, чтобы новые координаты $\mathbf{S} = (S_1, S_2, S_3)$ задавали отклонение от этого многообразия; пусть $\tilde{Q}_i(\mathbf{S}) = 0$ — уравнение многообразия Ω в новых переменных \mathbf{S} ;

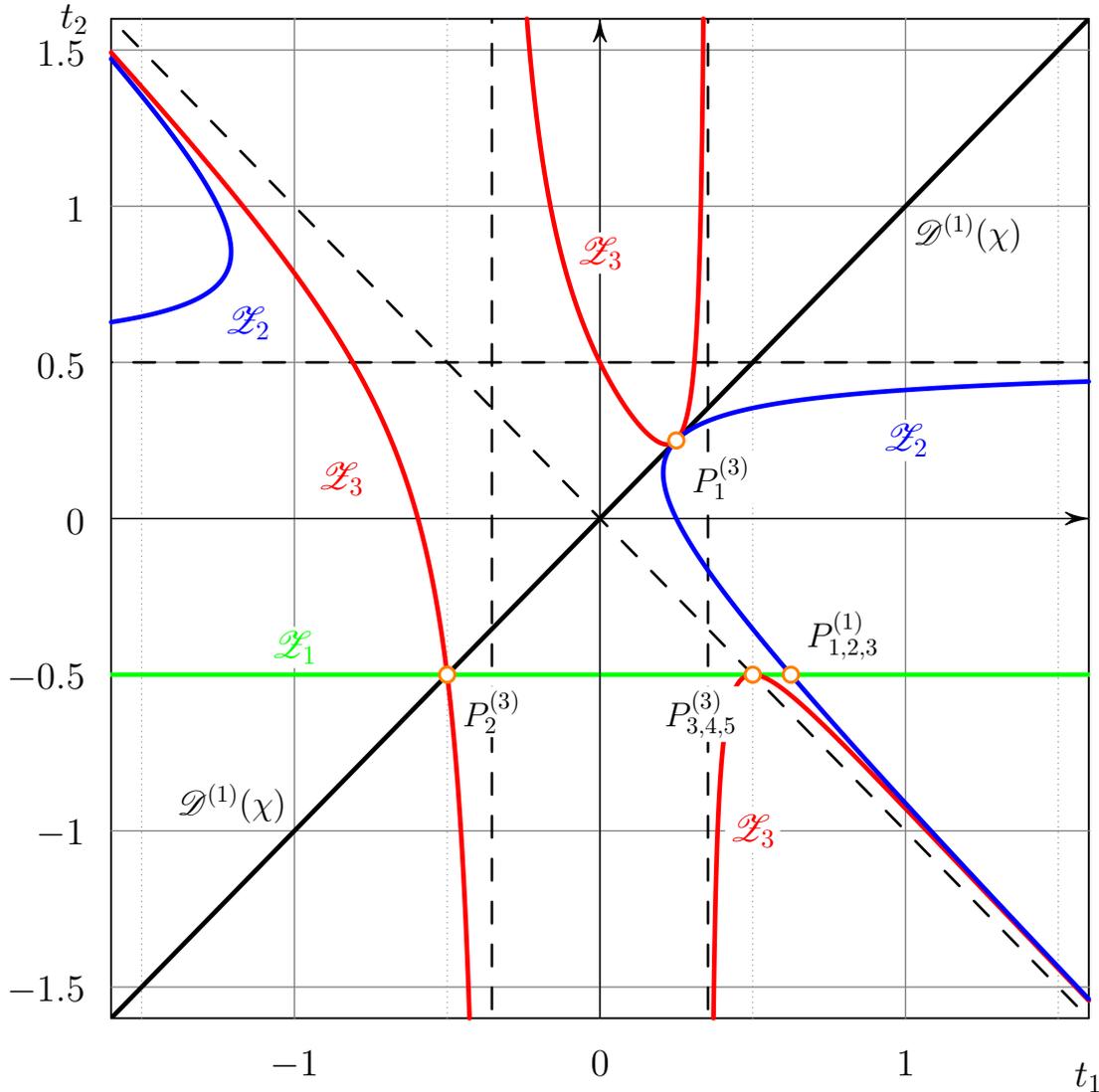


Рис. 1. Многообразия \mathcal{L}_1 , \mathcal{L}_2 , \mathcal{L}_3 , кривая особых точек $\mathcal{D}^{(1)}(\chi)$ и особые точки $P_i^{(k)}$ на плоскости (t_1, t_2) . Асимптоты многообразий \mathcal{L}_2 и \mathcal{L}_3 показаны штриховой линией.

2) определим набор \mathbb{S} таких значений параметра $S_1 = \text{const}$, для которых кривая $\mathcal{F} : \{\tilde{Q}_i(S_1, S_2, S_3) = 0\}$ является приводимой, т. е. многочлен \tilde{Q}_i факторизуется на отдельные множители; такие значения параметра $S_1 \in \mathbb{S}$ назовём *критическими*, и для каждого из них нужно построить свою параметризацию;

3) при каждом фиксированном значении параметра $S_1 = \text{const}$ многообразие \mathcal{L}_i уравнение $\tilde{Q}_i(S_1, S_2, S_3) = 0$ задаёт некоторую неприводимую алгебраическую кривую \mathcal{F}_i , которая допускает параметризацию

$$\mathcal{F}_i : \{S_2 = \varphi(S_1, t), \quad S_3 = \psi(S_1, t)\}; \quad (13)$$

4) выполним такую замену параметра $t \rightarrow T$, чтобы при $T = 0$ вектор $(S_1, \varphi(S_1, 0), \psi(S_1, 0))$ параметризовал многообразие \mathcal{L}_i .

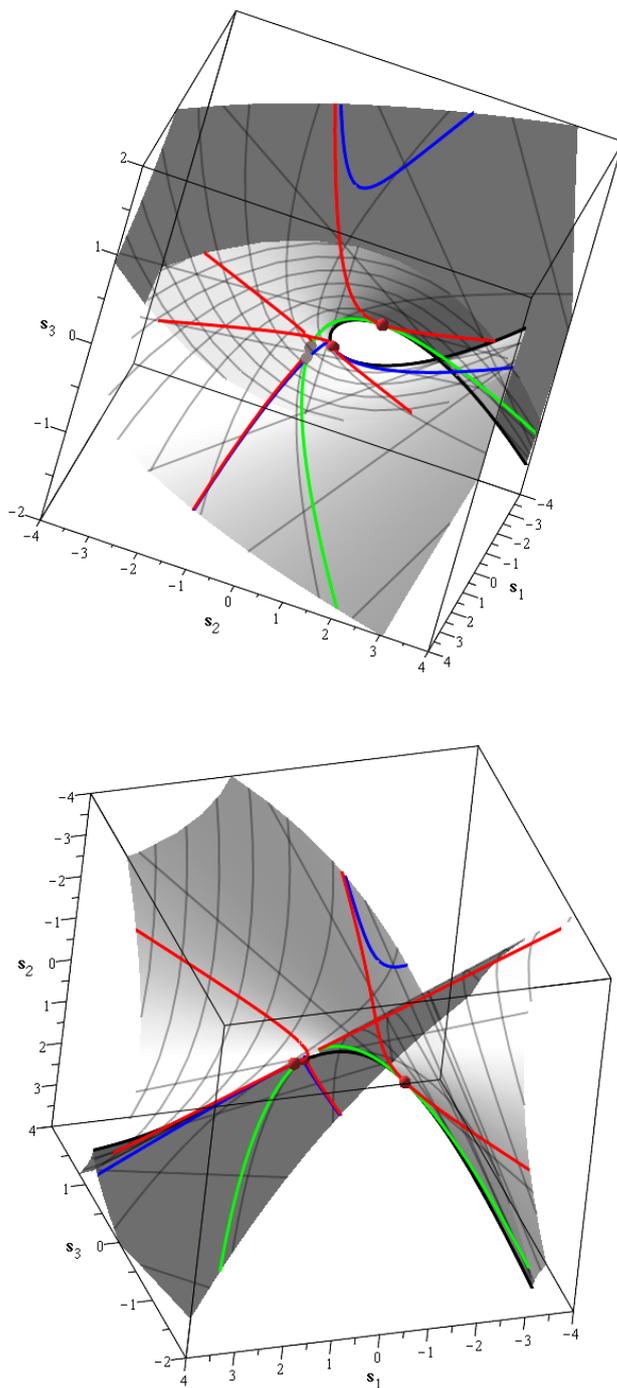


Рис. 2. Дискриминантная поверхность $\mathcal{D}(\chi)$ с расположенными на ней кривой $\mathcal{D}^{(1)}(\chi)$, многообразиями $\mathcal{L}_i, i = 1, 2, 3$ и особыми точками $P_i^{(k)}$. Для их различения объекты приведены в разных ракурсах с сохранением цветов рисунка 1.

5) полученную параметризацию (13), в которой параметр t заменён параметром T , подставим в формулу (6) и для каждого значения параметра S_1 найдём интервал изменения параметра T , на котором выполняется неравенство $D(\chi)(S_1, T) \geq 0$ утверждения 1.

Таким образом, полученная параметризация для всех значений параметра S_1 , кроме некоторого конечного множества, задаёт параметрическое представление той части многообразия Ω в s -представлении, на котором многочлен (4) имеет вещественные корни. Эта параметризация, дополненная параметризацией для критических значений, может быть использована для получения локального разложения Ω и его визуализации.

4. Параметризация многообразия Ω вдоль многообразий $\mathcal{Z}_i, i = 1, 2, 3$

В этом разделе построим глобальные параметризации многообразия Ω , следуя описанному выше подходу. Можно вычислять соответствующие параметризации Ω для каждого из многообразий \mathcal{Z}_i независимо, но такой подход связан с большим объёмом вычислений и выглядит более трудоёмким. Поэтому вначале построим параметризацию Ω с помощью многообразия \mathcal{Z}_1 , которое имеет более простую параметризацию в s -представлении, а затем, используя его, получим параметризации, основанные на двух других многообразиях $\mathcal{Z}_2, \mathcal{Z}_3$.

4.1. Параметризация многообразия Ω с помощью многообразия \mathcal{Z}_1 . Многообразию \mathcal{Z}_1 имеет полиномиальную параметризацию (10) и реализуется при всех значениях переменной s_1 . Выполним следующую замену переменных

$$s_2 = \frac{1}{4}S_2 + \frac{(2s_1 + 1)(2s_1 - 3)}{16}, \quad s_3 = \frac{1}{4}S_3 - \frac{(2s_1 + 1)^2}{32}, \quad (14)$$

выразив из формулы (10) для s_1 параметр t_1 и подставив его в два других выражения. Эта замена вводит новые переменные S , где $S_1 \equiv s_1$, а S_2 и S_3 задают отклонения от многообразия \mathcal{Z}_1 . Тогда в новых переменных (S_2, S_3) многочлен Q имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_1 = & 8s_1(2s_1 - 1)S_2^4 - 8(2s_1 - 1)S_2^3S_3 - 64s_1S_2S_3^2(s_1S_2 - 2S_3) - 64S_3^4 \\ & + 2(2s_1 - 1)s_1(16s_1^2 - 14s_1 - 9)S_2^3 + (64s_1^4 - 144s_1^3 + 168s_1^2 + 12s_1 - 18)S_2^2S_3 \\ & - 16s_1(8s_1^3 + 4s_1^2 - 18s_1 + 15)S_2S_3^2 + 16(2s_1 + 3)(4s_1^2 - 6s_1 + 3)S_3^3 \\ & + \frac{s_1}{2}(160s_1^5 - 336s_1^4 + 24s_1^3 + 264s_1^2 - 84s_1 - 27)S_2^2 \\ & + (216s_1^4 + 96s_1^3 - 272s_1^5 - 300s_1^2 + 117s_1 + 128s_1^6 + 27/2)S_2S_3 \\ & - (64s_1^6 + 64s_1^5 - 320s_1^4 + 240s_1^3 + 48s_1^2 - 180s_1 + 81)S_3^2 \\ & + \frac{s_1}{8}(2s_1 + 3)(4s_1 - 3)(2s_1 - 3)(2s_1 - 1)^4S_2 \\ & + \frac{1}{8}(2s_1 + 3)(4s_1 - 3)(4s_1^2 - 4s_1 + 3)(2s_1 - 1)^4S_3. \end{aligned} \quad (15)$$

В таком представлении очевидно, что существенная перестройка многообразия Ω происходит при значениях $s_1 \in \{-3/2, 1/2, 3/4\}$, для которых на многообразии имеются особые точки из таблицы 1. Непосредственная проверка показывает, что многочлен (15) факторизуется при значении $s_1 = 0$. Следовательно, множество \mathbb{S}_1 критических значений параметра s_1 , для которых следует строить специальные параметризации, есть

$$\mathbb{S}_1 = \left\{ -\frac{3}{2}, 0, \frac{1}{2}, \frac{3}{4} \right\}. \quad (16)$$

Дискриминант $D(\chi)$ в переменных (s_1, S_2, S_3) запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} \tilde{D}(\chi) = & -\frac{1}{16}S_2^3 + \frac{1}{64}(-8s_1^2 + 12s_1 + 9)S_2^2 + \frac{9}{8}s_1S_2S_3 - \frac{27}{16}S_3^2 \\ & - \frac{1}{256}(2s_1 + 1)(2s_1 + 3)^3S_2 + \frac{1}{64}(2s_1 + 3)^3S_3. \end{aligned} \quad (17)$$

Нетрудно видеть, что для критических значений s_1 из множества \mathbb{S}_1 он также существенно меняется.

При каждом фиксированном $s_1 \notin \mathbb{S}_1$ кривая $\mathcal{F}_1 : \left\{ \tilde{Q}_1(s_1, S_2, S_3) = 0 \right\}$ неприводима и имеет род 0, следовательно, она допускает рациональную параметризацию. Эта параметризация может быть вычислена с помощью метода, описанного в [13] и реализованного в пакете `algcurves` системы компьютерной алгебры `Maple` начиная с версии 6. Полученное в результате непосредственных вычислений выражение очень громоздкое, но может быть существенно упрощено и приведено к следующему виду:

$$\begin{aligned} S_2 = & -T(8s_1^3T^3 + 4s_1^2(4s_1^2 + 3)T^2 + 4s_1^2(8s_1^2 - 2s_1 + 3)T \\ & + (2s_1 + 3)(2s_1 - 1)(4s_1^2 - 4s_1 + 3)) / \Delta_1, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} S_3 = & -T(4s_1^3T^3 - 4s_1^2(2s_1 - 5)T^2 - 2s_1(8s_1^2 - 18s_1 + 3)T \\ & - (2s_1 + 3)(2s_1 - 1)(2s_1 - 3)) / \Delta_1, \end{aligned} \quad (19)$$

где знаменатель

$$\Delta_1 = 4(4s_1^2T^2 + 2s_1T(2s_1 + 3) + 2s_1 + 3)(T + 1). \quad (20)$$

Очевидно, что при $T = 0$ получим $S_2 = S_3 = 0$, т. е. это и есть искомая параметризация, удовлетворяющая условию п. 5) на стр. 11.

Подставляя выражения (18) и (19) в замену (14), получим параметризацию многообразия Ω в s -представлении. Вблизи многообразия \mathcal{Z}_1 локальное разложение множества Ω имеет вид

$$\begin{aligned} s_2 &= \frac{1}{16}(2s_1 + 1)(2s_1 - 3) - \frac{1}{16}(2s_1 - 1)(4s_1^2 - 4s_1 + 3)T \\ &\quad + \frac{32s_1^5 - 16s_1^4 - 24s_1^3 + 20s_1^2 + 6s_1 - 9}{16(2s_1 + 3)}T^2 + o(T^2), \\ s_3 &= -\frac{1}{32}(2s_1 + 1)^2 + \frac{1}{16}s_1(2s_1 - 1)(2s_1 - 3)T \\ &\quad - \frac{s_1(16s_1^4 - 16s_1^3 - 4s_1^2 - 6s_1 + 9)}{16(2s_1 + 3)}T^2 + o(T^2). \end{aligned}$$

Параметризация (18), (19) не работает для указанных выше критических значений параметра s_1 из множества \mathbb{S}_1 , поскольку при этих значениях многочлен (15) уже не является неприводимым и раскладывается на отдельные множители, для каждого из которых следует строить свою параметризацию. Параметризации многообразия Ω для критических значений параметра s_1 из множества \mathbb{S}_1 даны в разделе 5.

Заметим, что эти критические значения параметра s_1 легко определить, если вычислить результаты числителя и знаменателя относительно параметра T в формулах (18) и (20), затем — числителя и знаменателя относительно параметра T в формулах (19) и (20) и найти их наибольший общий делитель. Различные корни этого делителя и дадут множество критических значений параметра s_1 .

Поскольку нас интересует только та часть многообразия Ω , на которой $D(\chi) \geq 0$, то при использовании указанной выше параметризации для каждого фиксированного значения параметра s_1 следует выбирать такое значение параметра T , чтобы выполнялось неравенство утверждения 1.

Подставим параметризацию (14) с учётом формул (18) и (19) в выражение дискриминанта (6):

$$\begin{aligned} D(\chi) &= T(T^2 + (2s_1 + 3)T + 2s_1 + 3)(8s_1^3T^3 + 4s_1^2(14s_1 - 3)T^2 \\ &\quad + 2s_1(28s_1^2 + 12s_1 - 9)T + (2s_1 - 1)(2s_1 + 3)^2)^3 / (16\Delta_1^3). \end{aligned} \quad (21)$$

Каждый из множителей, входящих в правую часть формулы (21), задаёт рациональную кривую. Обозначим кривые, которые задаются нулями множителя из числителя формулы (21), символом \mathcal{P}_i , $i = 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_1 &: \{T = 0\}, \\ \mathcal{P}_2 &: \{T^2 + (2s_1 + 3)T + 2s_1 + 3 = 0\}, \\ \mathcal{P}_3 &: \{8s_1^3T^3 + 4s_1^2(14s_1 - 3)T^2 + 2s_1(28s_1^2 + 12s_1 - 9)T + (2s_1 - 1)(2s_1 + 3)^2\}, \end{aligned} \quad (22)$$

а нулями множителя из знаменателя (20) — символом \mathcal{Q}_j , $j = 1, 2$:

$$\mathcal{Q}_1 : \{4s_1^2 T^2 + 2s_1 T(2s_1 + 3) + 2s_1 + 3\},$$

$$\mathcal{Q}_2 : \{T + 1 = 0\}.$$

Эти кривые делят пространство параметров параметризации (s_1, T) на области \mathcal{O}_j , в каждой из которых дискриминант знакопостоянен. Кривые \mathcal{P}_i , соответствующие многообразиям \mathcal{L}_i , $i = 1, 2, 3$, и кривые \mathcal{Q}_k , $k = 1, 2$, на которых знаменатель Δ_1 обращается в нуль, показаны в координатах (s_1, T) на рисунке 3. Эти кривые являются границами областей \mathcal{O}_j знакопостоянства дискриминанта $D(\chi)$.

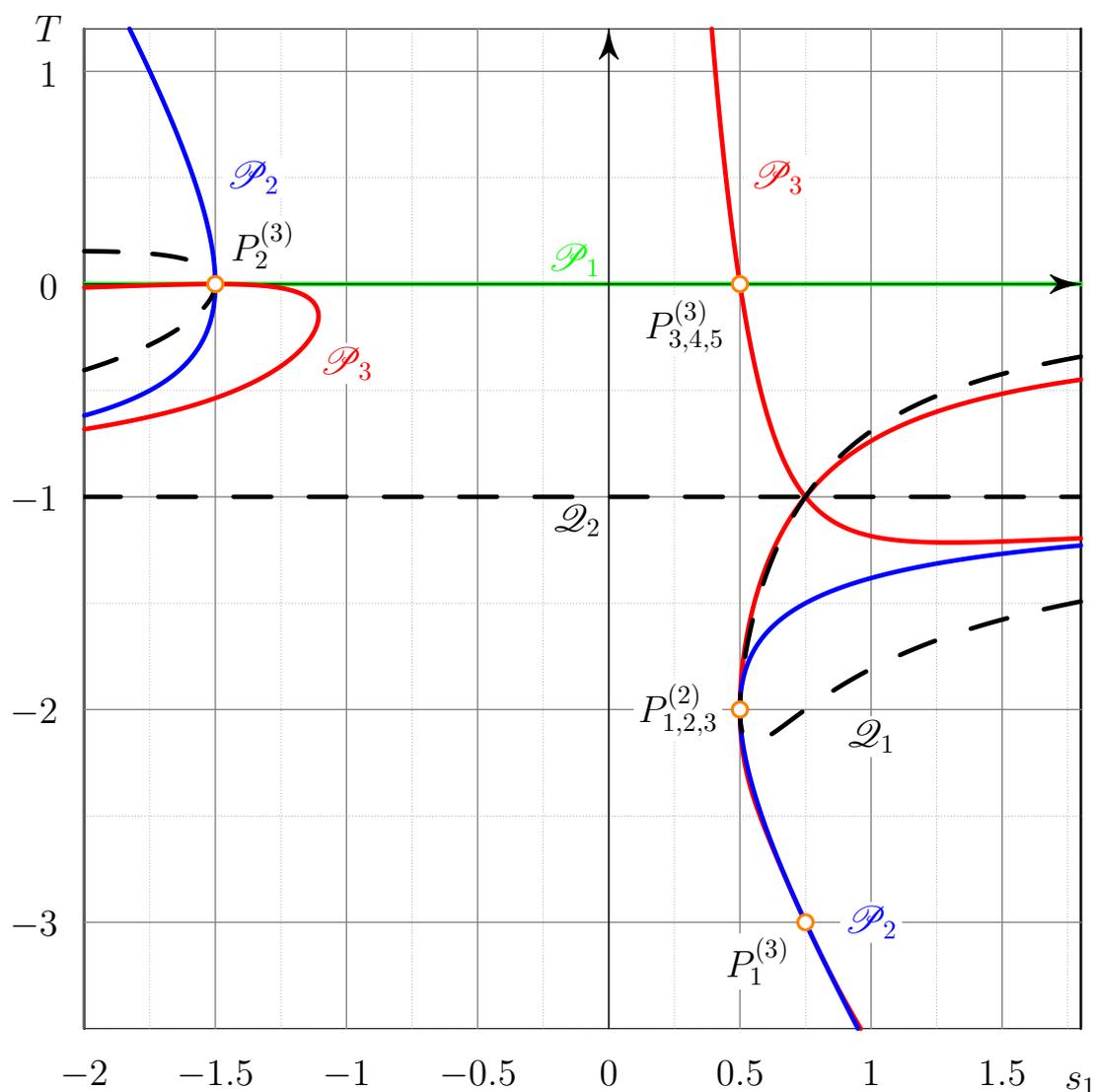


Рис. 3. Кривые \mathcal{P}_1 , \mathcal{P}_2 , \mathcal{P}_3 , \mathcal{Q}_1 , \mathcal{Q}_2 , разделяющие плоскость параметров (s_1, T) на области \mathcal{O}_j знакопостоянства дискриминанта. Кружками показаны особые точки $P_i^{(k)}$.

4.2. Параметризация многообразия Ω с помощью многообразия \mathcal{L}_2 . Как было отмечено выше, можно выполнить вычисление параметрического представления многообразия Ω , следуя методике раздела 3, отталкиваясь от многообразия \mathcal{L}_2 и его параметризации. Поступим несколько иначе. Во-первых, покажем, что кривая \mathcal{P}_2 формулы (22) задаёт многообразие \mathcal{L}_2 . Во-вторых, с помощью формулы (22) введём такие новые параметры (u, v) , чтобы при $v = 0$ получалась параметризация многообразия \mathcal{L}_2 .

Выразим из (22) параметр s_1 и подставим его в формулу (14) с учётом параметризации (18), (19). Получим параметризацию

$$s_1 = -\frac{T^2 + 3T + 3}{2(T + 1)}, s_2 = \frac{(T^2 - 3)(T^2 + 4T + 5)}{16(T + 1)^2}, s_3 = \frac{(T + 2)(T^2 + 4T + 5)^2}{32(T + 1)^3} \quad (23)$$

некоторой кривой. Покажем, что эта кривая и есть многообразие \mathcal{L}_2 . Действительно, на этой кривой многочлен χ имеет корни

$$t_1 = -\frac{T^2 + 4T + 5}{T + 1}, \quad t_2 = \frac{T + 2}{2(T + 1)}, \quad (24)$$

причём корень t_1 двукратный, а корень t_2 — простой. Подставляя выражение для этих корней во второй множитель формулы (9), ноль которого задаёт многообразие \mathcal{L}_2 , непосредственной проверкой убеждаемся, что формулы (24) параметризуют это многообразие. Более того, замена

$$T = \frac{1 - u}{u} \quad (25)$$

переводит параметризацию (23) в параметризацию (11).

Для получения новой параметризации сделаем замену (25) в формуле (22) для кривой \mathcal{P}_2 и введём новую переменную v , задающую отклонение от этой кривой. Тогда параметризация переменных (S_2, S_3) , задающих отклонение от многообразия \mathcal{L}_2 в его s -представлении, получается из формул (18), (19) с помощью подстановки

$$s_1 = -\frac{u^2 + u + 1}{u}, \quad T = \frac{1 - u}{u} - \frac{v}{u(u^2 + u + 1)}.$$

В итоге получаем следующую параметризацию

$$\begin{aligned} S_2 &= -v \left[v^3 - (2u + 1)(2u^3 + 3)v^2 - (4u^7 + 12u^6 + 7u^5 - 12u^4 - 12u^3 - u^2 - 4u - 3)v \right. \\ &\quad \left. + (u^2 - 1)(2u + 1)(2u^4 + 4u^3 + 2u + 1) \right] / \Delta_2, \\ S_3 &= -v \left[v^3 + (2u + 3)(2u - 1)(u + 1)(u^2 + u + 1)v^2 \right. \\ &\quad \left. + (u + 1)(u^2 + u + 1)(4u^5 + 8u^4 - 3u^3 - 13u^2 - 2u + 3)v \right. \\ &\quad \left. - (u - 1)(2u + 1)(u^2 + u + 1)(2u^2 + 2u - 1)(u + 1)^2 \right] / (2\Delta_2), \end{aligned}$$

где

$$\Delta_2 = u^2 (v - (u^2 + u + 1)) (v + (u^2 - 1)) (v + (u - 1)(u + 1)^2).$$

Эта параметризация вместе с подстановкой

$$\left\{ s_1 = -\frac{u^2 + u + 1}{2u}, s_2 = S_2 - \frac{4u^2(u + 1)^2 - 1}{16u^2}, s_3 = \frac{S_3}{2} + \frac{(2u^2 + 2u + 1)^2(u + 1)}{32u^2} \right\}$$

задают параметрическое представление многообразия Ω .

Непосредственные вычисления показывают, что множество критических значений параметра u , при которых описанная выше параметризация не работает, есть множество $\{-2, -1, -1/2, 0, 1\}$. Этим значениям параметра u соответствуют значения $\{3/4, 1/2, -3/2, \infty\}$ параметра s_1 . Таким образом, множество критических значений \mathbb{S}_1 включает критические значения для параметризации относительно многообразия \mathcal{L}_2 .

Вблизи многообразия \mathcal{L}_2 локальное разложение многообразия Ω имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} s_1 &= -\frac{u^2 + u + 1}{2u}, \\ s_2 &= -\frac{4u^2(u + 1)^2 - 1}{16u^2} + \frac{(2u + 1)(2u^4 + 4u^3 + 2u^2 + 1)}{64u^2(u^2 + u + 1)(u - 1)(u + 1)^2}v \\ &\quad - \frac{4u^8 + 20u^7 + 39u^6 + 38u^5 + 26u^4 + 26u^3 + 24u^2 + 11u + 1}{256(u^2 + u + 1)^2(u - 1)^2(u + 1)^4}v^2 + o(v^2), \\ s_3 &= \frac{(2u^2 + 2u + 1)^2(u + 1)}{32u^2} - \frac{(2u + 1)(2u^2 + 2u - 1)}{128u^2(u^2 - 1)}v \\ &\quad + \frac{4u^6 + 16u^5 + 21u^4 + 9u^3 + 2u^2 + 6u + 5}{512(u^2 + u + 1)(u - 1)^2(u + 1)^3}v^2 + o(v^2). \end{aligned}$$

Это разложение можно использовать вблизи особых точек $P_1^{(3)}$ и $P_{1,2,3}^{(1)}$.

4.3. Параметризация многообразия Ω с помощью многообразия \mathcal{L}_3 . Аналогично поступим, используя кривую \mathcal{P}_3 и её параметрическое представление. Опуская громоздкие вычисления, предьявим параметризацию переменных S_2, S_3 , задающих отклонение от многообразия \mathcal{L}_3 :

$$\left\{ s_1 = \frac{16u^3 - 1}{2(8u^2 - 1)}, s_2 = \frac{S_2}{4} - \frac{u(8u^3 - 3u + 1)}{8u^2 - 1}, s_3 = \frac{S_3}{4} - \frac{u^2(16u^3 - 4u + 1)}{2(8u^2 - 1)} \right\}.$$

Переменные S_2, S_3 имеют следующее параметрическое представление:

$$S_2 = -T \left((8u^2 - 4u - 1)^2 T^3 - 256u^2 (4u^2 + u - 2) (8u^2 - 4u - 1) T^2 + 512u (256u^6 - 240u^4 - 56u^3 + 90u^2 - 3u - 2) T + 49152u^2 (2u + 1) (2u - 1) (4u - 1) \right) / \Delta_3,$$

$$S_3 = -T \left((8u^2 - 4u - 1)^2 T^3 - 64u (4u^2 + u - 2) (8u^2 - 2u + 1) (8u^2 - 4u - 1) T^2 + 512u^2 (512u^6 - 480u^4 - 112u^3 + 216u^2 - 42u + 5) T + 98304u^3 (2u + 1) (2u - 1) (4u - 1) \right) / \Delta_3,$$

где знаменатель

$$\Delta_3 = 32 (8u^2 - 1) (T - 8) \left((8u^2 - 4u - 1) T^2 - 64u (u - 1) (2u + 1) T - 512u^2 (2u + 1) \right).$$

Как и в предыдущем случае, критические значения параметра u , при котором указанная выше параметризация не работает, не расширяют множества \mathbb{S}_1 .

5. Параметризация многообразия Ω для критических случаев

Вычислим параметризацию многообразия Ω для четырёх критических значений параметра s_1 из множества \mathbb{S}_1 (16). В каждом из критических случаев многочлен $Q(s)$ приводим и факторизуется следующим образом:

$$Q|_{s_1=-3/2} = 64(3s_2^2 - 4s_2s_3 - 4s_3^2 + 4s_2 + 2s_3 + 2)(8s_2 + 8s_3 - 5)^2, \quad (26)$$

$$Q|_{s_1=0} = (32s_3 + 1)(64s_2^3 - 512s_3^3 + 240s_3^2 - 24s_3 - 1), \quad (27)$$

$$Q|_{s_1=1/2} = -4096s_3^2(s_2 - 2s_3)^2, \quad (28)$$

$$Q|_{s_1=3/4} = \frac{1}{32}(24s_2^2 + 64s_2s_3 - 128s_3^2 + 8s_2 - 8s_3 + 1)(32s_2 - 64s_3 - 5)^2. \quad (29)$$

5.1. Критический случай $s_1 = -\frac{3}{2}$. В этом случае все три параметризации раздела 4 описывают нули первого множителя из формулы (26). Например, подставляя значение $s_1 = -\frac{3}{2}$ в параметризацию (18), (19) с учётом подстановки (14) получим

$$s_1 = -\frac{3}{2}, \quad s_2 = \frac{3(T^2 - 4)}{16(T + 1)}, \quad s_3 = \frac{3T^2 + 20T + 44}{32(T + 1)}.$$

Второй множитель задаёт прямую

$$\mathcal{L}_1 : \left\{ s_1 = -\frac{3}{2}, \quad s_3 = -s_2 + \frac{5}{8} \right\},$$

на которой дискриминант $D(\chi)$ факторизуется следующим образом:

$$D(\chi)|_{\mathcal{L}_1} = -\frac{1}{64}(16s_2 + 15)(4s_2 - 3)^2.$$

С учётом неравенства $D(\chi) \geq 0$ получаем, что $s_2 \in \left(-\infty; -\frac{15}{16}\right] \cup \left\{\frac{3}{4}\right\}$. Значению $s_2 = \frac{3}{4}$ соответствует особая точка $P_2^{(3)}$.

5.2. Критический случай $s_1 = 0$. Первый множитель из (27) задаёт прямую

$$\mathcal{L}_2 : \left\{ s_1 = 0, \quad s_3 = -\frac{1}{32} \right\},$$

на которой $D(\chi)|_{\mathcal{L}_2} = -(16s_2 + 3)(256s_2^2 - 48s_2 + 9)/1024$, и неравенство $D(\chi) \geq 0$ выполняется при $s_2 \leq -\frac{3}{16}$.

Нули второго множителя описывают рациональную кривую, параметризация которой дана в подразделе 4.3 при значении параметра $u = 4^{-2/3}$.

5.3. Критический случай $s_1 = \frac{1}{2}$. Первый множитель из (28) задаёт прямую

$$\mathcal{L}_3 : \left\{ s_1 = \frac{1}{2}, \quad s_3 = 0 \right\},$$

на которой $D(\chi)|_{\mathcal{L}_3} = -s_2^2(16s_2 - 1)/4$, и неравенство $D(\chi) \geq 0$ реализуется при $s_2 \leq \frac{1}{16}$. Второй множитель из (28) задаёт прямую

$$\mathcal{L}_4 : \left\{ s_1 = \frac{1}{2}, \quad s_2 = 2s_3 \right\},$$

на которой $D(\chi)|_{\mathcal{L}_4} = -s_3^2(8s_3 + 1)^2/2$, и неравенство $D(\chi) \geq 0$ реализуется на луче $s_3 \leq 0$. Начальная точка луча есть особая точка $P_{1,2,3}^{(2)}$. Прямая \mathcal{L}_4 является множеством особых точек первого порядка многообразия Ω в s -представлении, которое описано в [6; 7].

5.4. Критический случай $s_1 = \frac{3}{4}$. Все три параметризации раздела 4 описывают нули первого множителя из (29). Например, подставляя значение $s_1 = \frac{3}{4}$ в параметризацию (18), (19) с учётом подстановки (14) получим

$$s_1 = \frac{3}{4}, \quad s_2 = -\frac{3(T^2 + 4T + 5)}{32(T + 2)}, \quad s_3 = -\frac{3T^2 + 17T + 25}{64(T + 2)}.$$

Второй множитель из (29) задаёт прямую

$$\mathcal{L}_5 : \left\{ s_1 = \frac{3}{4}, \quad s_2 = 2s_3 + \frac{5}{32} \right\},$$

на которой $D(\chi)|_{\mathcal{L}_5} = -(16s_3 + 25)(64s_3 - 1)^2/2^{14}$, и неравенство $D(\chi) \geq 0$ реализуется при $s_3 \in \left(-\infty, -\frac{25}{128}\right] \cup \left\{\frac{1}{64}\right\}$. Значению $s_3 = \frac{1}{64}$ соответствует особая точка $P_1^{(3)}$. Прямая \mathcal{L}_5 представляет собой множество особых точек первого порядка многообразия Ω в s -представлении. Оно было вычислено ранее в [6; 7], где дана его рациональная параметризация в a -представлении.

6. Параметризация многообразия Ω^* в a -представлении

Для получения глобальной параметризации многообразия Ω^* в переменных a_i , $i = 1, 2, 3$, достаточно воспользоваться известными формулами корней кубического многочлена для т. н. «неприводимого случая» Кардано, которые называют тригонометрической формулой Виета (см., например, [14, Ch. V, § 5] или [15, § 119]).

Приведём вариант этих формул для многочлена $\chi(y)$. Вычисляем две вспомогательные величины

$$W = \frac{1}{9}(s_1^2 - 3s_2), \quad R = -\frac{1}{54}(2s_1^3 - 9s_1s_2 + 27s_3).$$

Поскольку нас интересует случай трёх вещественных корней, то дискриминант $D(\chi) = W^3 - R^2 \geq 0$. Если $D(\chi) > 0$, то вычисляем величину

$$\varphi = \frac{1}{3} \arccos \left(\frac{R}{\sqrt{W^3}} \right).$$

Тогда три различных вещественных корня суть

$$y_1 = -2\sqrt{W} \cos \varphi + \frac{s_1}{3}, \quad y_{2,3} = -2\sqrt{W} \cos \left(\varphi \pm \frac{2}{3}\pi \right) + \frac{s_1}{3}. \quad (30)$$

Если $D(\chi) = 0$, то корни вычисляются по формулам

$$y_1 = -2R^{1/3} + \frac{s_1}{3}, \quad y_{1,2} = R^{1/3} + \frac{s_1}{3}. \quad (31)$$

Итоговая параметризация многообразия Ω^* в \mathbf{a} -представлении восстанавливается по формулам раздела 4 и приведённым выше формулам (30) и (31).

Замечание 3. Отметим, что в работе [16] описан подход к проблеме параметризации поверхностей в \mathbb{R}^3 в радикалах. Возможно, что многообразие Ω^* может быть параметризовано непосредственно в переменных \mathbf{a} , но это требует отдельного исследования.

Заключение

В работе вычисляются три параметризации многообразия Ω^* , которое задаётся симметрическим многочленом $Q^*(\mathbf{a})$ (1). Это многообразие удобно исследовать не в переменных \mathbf{a} , а в переменных \mathbf{s} , в которых многообразие Ω представляется собой многообразие с краем. Предлагается метод построения параметризации многообразия Ω в \mathbf{s} -представлении. С его помощью получены три различных рациональных параметризации, каждая из которых справедлива вне некоторого конечного множества S_1 критических значений параметров. Для этих критических значений также вычислены соответствующие параметризации многообразия Ω .

Благодарности

Автор выражает благодарность профессору А. Д. Брюно за плодотворное обсуждение результатов работы и поддержку.

Список литературы

1. *Abiev N. A., Arvanitoyeorgos A., Nikonorov Y. G., Siasos P.* The dynamics of the Ricci flow on generalized Wallach spaces // *Differential Geometry and its Applications*. 2014. Vol. 35. Pp. 26–43. DOI: 10.1016/j.difgeo.2014.02.002.
2. *Abiev N. A., Arvanitoyeorgos A., Nikonorov Y. G., Siasos P.* The Ricci Flow on Some Generalized Wallach Spaces // *Geometry and its Applications*. Vol. 72 / ed. by V. Rovenski, P. Walczak. Springer, 2014. Pp. 3–37. (Springer Proceedings in Mathematics & Statistics).
3. *Абиев Н. А., Арванитойоргос А., Никоноров Ю. Г., Сиасос П.* Нормализованный поток Риччи на обобщенных пространствах Уоллаха // *Математический форум*. Т. 8, ч. 1. Исследования по математическому анализу. Владикавказ : ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2014. С. 25—42.
4. *Chen Z., Nikonorov Y. G.* Invariant Einstein metrics on generalized Wallach spaces. 2015. arXiv: 1511.02567v1 [math.DG].
5. *Abiev N. A.* On topological structure of some sets related to the normalized Ricci flow on generalized Wallach spaces // *Владикавказский матем. журнал*. 2015. Vol. 17, no. 3. Pp. 5–13.
6. *Батхин А. Б., Брюно А. Д.* Исследование одной вещественной алгебраической поверхности // *Препринты ИПИМ им. М. В. Келдыша*. М., 2014. № 83. ISSN 2071-2898. URL: http://www.keldysh.ru/papers/2014/prep2014_83.pdf.
7. *Батхин А. Б., Брюно А. Д.* Исследование одной вещественной алгебраической поверхности // *Программирование*. 2015. № 2. С. 7—17. ISSN 0132-3474.
8. *Брюно А. Д., Батхин А. Б.* Разрешение алгебраической сингулярности алгоритмами степенной геометрии // *Программирование*. 2012. № 2. С. 12—30.
9. *Батхин А. Б.* Параметризация дискриминантного множества вещественного многочлена // *Препринты ИПИМ им. М. В. Келдыша*. 2015. № 76. ISSN 2071-2898. URL: http://www.keldysh.ru/papers/2015/prep2015_76.pdf.
10. *Батхин А. Б.* Параметризация дискриминантного множества вещественного многочлена // *Программирование*. 2016. Т. 42, № 2. С. 8—21. ISSN 0132-3474.
11. *Прасолов В. В.* Многочлены. М. : МЦНМО, 2014. 336 с.

12. Мейман Н. Н. Некоторые задачи распределения нулей многочленов // Усп. мат. наук. 1949. Т. 4, 6(34). С. 154—188. URL: <http://mi.mathnet.ru/umn8672>.
13. van Hoeij M. Computing parameterizations of rational algebraic curves // ISSAC '94 Proceedings of the international symposium on Symbolic and algebraic computation. ISAAC. N. Y., USA : ACM Press, 1994. Pp. 187–190. DOI: 10.1145/190347.190415.
14. Uspensky J. V. Theory of equations. New York, Toronto, London : McGraw-Hill Book Company, 1948.
15. Сушкевич А. К. Основы высшей алгебры. 4-е. М.-Л. : ОГИЗ ГИТТЛ, 1941. 460 с.
16. Sendra J. R., David S. First steps towards radical parametrization of algebraic surfaces // Computer Aided Geometric Design. 2013. Vol. 30. Pp. 374–388. DOI: 10.1016/j.cagd.2012.12.004.

Список рисунков

1	Многообразия \mathcal{L}_i , $i = 1, 2, 3$, и особые точки $P_i^{(k)}$ на плоскости (t_1, t_2)	10
2	Дискриминантная поверхность $\mathcal{D}(\chi)$ с многообразиями \mathcal{L}_i	11
3	Кривые \mathcal{P}_i , \mathcal{Q}_i и особые точки $P_j^{(k)}$ на плоскости (s_1, T)	15

Список условных обозначений

- $\mathcal{D}(\chi)$ — дискриминантная поверхность многочлена $\chi(y)$, стр. 5
- $\mathcal{D}^{(1)}(\chi)$ — кривая особых точек дискриминантной поверхности многочлена $\chi(y)$, стр. 5
- $D(\chi)$ — дискриминант многочлена $\chi(y)$, стр. 5
- \mathcal{L}_i — прямая, принадлежащая многообразию Ω , при критических значениях параметра s_1 , стр. 19
- \mathcal{M}_i — исключительные плоскости, задающие дискриминантную поверхность многочлена $\chi(y)$ в \mathfrak{a} -представлении, стр. 6
- Ω — исследуемое многообразие в \mathfrak{s} -представлении, стр. 3
- Ω^* — исследуемое многообразие в \mathfrak{a} -представлении, стр. 3
- Π — пространство коэффициентов многочлена $\chi(y)$, стр. 5

$P_i^{(k)}$ — особые точки порядка k многообразия Ω^* , стр. 7

\tilde{Q} — многочлен Q в переменных \mathbf{S} , стр. 9

Q — многочлен, определяющий многообразие Ω , стр. 3

Q^* — многочлен, определяющий многообразие Ω^* , стр. 3

\mathbb{S}_1 — множество критических значений параметра s_1 , стр. 13

\mathbf{S} — координаты, задающие отклонение от многообразия \mathcal{Z}_i , стр. 9

σ_i — элементарные симметрические многочлены степени i , стр. 4

χ — вспомогательный многочлен с коэффициентами s_1, s_2, s_3 , стр. 4

\mathcal{Z}_i — многообразие, по которому пересекаются дискриминантная поверхность $\mathcal{D}(\chi(y))$ и многообразие Ω , стр. 7

Оглавление

1	Введение	3
2	Дискриминантное множество кубики	4
3	Пересечение с дискриминантной поверхностью	6
4	Параметризация вдоль общих многообразий	12
5	Параметризация для критических случаев	18
6	Параметризация в α -представлении	20
	Заключение	21
	Список литературы	22
	Список рисунков	23
	Список условных обозначений	23