



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Бахвалов П.А.

О задании волнового пакета
в круглом цилиндрическом
канале начальными
данными в задачах
линейной акустики

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Бахвалов П.А. О задании волнового пакета в круглом цилиндрическом канале начальными данными в задачах линейной акустики // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2016. № 79. 23 с. doi:[10.20948/prepr-2016-79](https://doi.org/10.20948/prepr-2016-79)
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2016-79>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.КЕЛДЫША
Российской академии наук**

П. А. Бахвалов

**О задании волнового пакета
в круглом цилиндрическом канале
начальными данными
в задачах линейной акустики**

Москва — 2016

Бахвалов П. А.

О задании волнового пакета в круглом цилиндрическом канале начальными данными в задачах линейной акустики

В работе предлагается способ задания волнового пакета в круглом цилиндрическом канале для ненулевой азимутальной или радиальной моды в виде начальных данных. Параметры волнового пакета выбираются для удобства его использования в численном моделировании. Приводятся явные формулы для начальных полей физических величин и для частотного спектра пульсации давления возникающего сигнала.

Ключевые слова: канал с потоком, звуковое поле, начальные условия, спектр

Pavel Alexeevich Bakhvalov

Specification of a wave packet using initial data in a round cylindric channel for linear acoustic problems

We discuss how to prescribe a wave packet in a round cylindric channel as an initial data. We consider non-zero azimuthal or radial wave numbers. Parameters of the wave packet are chosen for convenience in numerical simulation. Explicit expressions for initial data and pressure spectrum are presented.

Key words: channel with flow, sound field, initial conditions, spectrum

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 16-31-60072 мол-а-дк.

Введение

Настоящая работа посвящена заданию акустического возмущения в круглом канале с однородным потоком в виде начальных условий. Предлагаемая постановка может быть применена, в частности, при численном решении задач линейного рассеяния на телах внутри канала, исследовании резонаторов [1] (в том числе моделируемых импедансным граничным условием [2]), а также рассеянии на кромках конечного канала [3]. Во всех случаях необходимо, чтобы вдали от препятствий поток в канале отсутствовал или был однородным.

Задачи линейной акустики, в том числе на неоднородном фоновом поле, численно можно решать в спектральном представлении по времени [4] [5]. Если требуется рассчитать характеристики системы на одной частоте, то спектральное представление сигнала снижает размерность задачи на единицу и, как следствие, существенно облегчает расчёт. Для расчёта же амплитудно-частотной характеристики в широком диапазоне частот требуется проводить серию расчётов. В [2] упоминается, что трудоёмкость решения системы уравнений, возникающей при решении задач в спектральном представлении, нелинейно зависит от размерности задачи, что существенно снижает преимущество работы в спектральном представлении. Дополнительным стимулом для перехода к временному представлению является возможность проведения расчёта в рамках существующих газодинамических пакетов (с заменой функции потока её линейризованным аналогом или без неё). Запись же уравнений в спектральном представлении меняет их тип, приводит к необходимости применять иные численные методы, в том числе иные искусственные граничные условия на границах расчётной области, и, как следствие, использовать принципиально иной программный код. Ввиду быстрого роста высокопроизводительных вычислительных систем дополнительные расходы на расчёт во временном представлении могут оказаться менее существенными, чем трудозатраты на реализацию более эффективного численного метода или даже на освоение готового программного продукта.

При расчёте во временном представлении также возможно задание одной гармоники [2] [6], однако нет никаких препятствий для того, чтобы задать широкополосный спектр и при обработке сигнала Фурье-анализом получить значения спектральной плотности для каждой частоты. Таким образом, за один расчёт можно получить амплитудно-частотную характеристику рассматриваемой динамической системы.

Задание входящего сигнала возможно двумя способами: неоднородными граничными условиями или начальными данными. Использование неоднородных граничных условий выглядит наиболее простым решением, однако оно обладает рядом недостатков. Волна, отражённая от препятствия (обтекаемого тела, резонатора или кромки конечного канала), будет распространяться назад по

каналу и вернётся к искусственной границе расчётной области, на которой задано граничное условие. При корректной постановке граничных условий отражённая поршневая мода благополучно покинет расчётную область через искусственную границу. Однако при использовании локальных граничных условий отражённые волны, соответствующие ненулевому азимутальному или ненулевому радиальному волновому числу, частично отразятся от входной границы и снова пойдут к препятствию. Чтобы в предельном переходе при измельчении сетки получить решение без волны, отражённой от искусственной границы расчётной области, можно использовать нелокальные граничные условия, однако это чрезвычайно затруднительно и почти не используется. В результате характеристика системы будет загрязнена влиянием паразитной волны, отражённой от границы. Удаление же границы на большое расстояние не решает эту проблему, поскольку приводит не только к увеличению длительности счёта, но и к дополнительным искажениям из-за численной диссипации, увеличившейся за счёт удлинения пути волны.

Чтобы избежать этой трудности, входящий сигнал можно задавать в начальных данных. Начальные данные должны задаваться внутри канала в той его части, где поток является однородным. Поэтому начальное возмущение должно быть финитным или быстро затухающим при отдалении от центра возмущения. Такой подход позволяет, во-первых, существенно удалить искусственные границы расчётной области на любое расстояние без увеличения длительности расчёта и, во-вторых, создать вблизи искусственных границ расчётной области буферную зону с грубой сеткой или с введением в уравнение дополнительного члена, отвечающего за диссипацию волн (так называемая технология поглощающего слоя).

Рассмотрим круглый цилиндрический канал, ось которого совпадает с осью z , с однородным потоком. Для задания поршневой моды в виде начальных данных можно выбрать любой непрерывный локализованный пространственный профиль $f(z)$ и определить пульсации физических величин следующим образом: $p' = \bar{\rho}f(z)$, $u'_z = f(z)/\bar{c}$, $\rho' = \bar{\rho}f(z)/\bar{c}^2$. Такая волна будет распространяться вправо по оси z . Тогда частотный спектр входящего в канал возмущения будет равен $F[p'](\omega) = \bar{\rho}F[f](\omega/(\bar{u}_z + \bar{c}))$, где $F[f](k)$ – преобразование Фурье функции $f(z)$. Для получения, например, коэффициента прохождения сигнала нужно разделить посчитанный спектр на выходе из канала на спектр входящего сигнала. Такая методика была применена в [7], где в качестве функции $f(z)$ был выбран гауссиан.

В настоящей работе методика задания входящего сигнала в виде ненулевых начальных данных обобщается на случай волн в круглом цилиндрическом канале с ненулевыми азимутальным или радиальным числами. В отличие от случая поршневой моды, из-за нелинейного дисперсионного соотношения формы

сигнала по давлению, продольной, радиальной и азимутальной компонент скорости получаются разными. В работе предлагается пространственный спектр сигнала, удобный для задания волнового пакета в канале при наличии однородного дозвукового потока, приводятся явные формулы для задания начальных данных и аналитически рассчитывается временной спектр входящего сигнала. Рассчитанный спектр подтверждается в вычислительном эксперименте, проведённом в переменных t, r, z , при ненулевом азимутальном числе волны.

Уравнения Эйлера в цилиндрической системе координат

Уравнения Эйлера для идеального газа в декартовой системе координат имеют вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla_i(\rho u_i) &= 0; \\ \frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \nabla_j(\rho u_i u_j + \delta_{ij} p) &= 0; \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho u_i u_i}{2} + \frac{p}{\gamma - 1} \right) + \nabla_j \left(\left(\frac{\rho u_i u_i}{2} + \frac{\gamma p}{\gamma - 1} \right) u_j \right) &= 0.\end{aligned}$$

Перепишем их в цилиндрической системе координат. К цилиндрической системе преобразуем как координаты, так и компоненты скоростей.

Всюду будем пользоваться компонентами скоростей, имеющими ту же размерность, что и в декартовой системе координат:

$$\begin{aligned}u_r &= \frac{x}{r} u_x + \frac{y}{r} u_y, \\ u_\varphi &= -\frac{y}{r} u_x + \frac{x}{r} u_y.\end{aligned}$$

Дивергенция в цилиндрической системе координат записывается в виде

$$\nabla_j v_j = \frac{1}{r} \frac{\partial(r v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_z}{\partial z}.$$

Выразим из уравнения для декартовых компонент импульса выражение для его радиальной и угловой компонент.

$$\begin{aligned}-\frac{\partial(r \rho u_r)}{\partial t} &= -x \frac{\partial}{\partial t}(\rho u_x) - y \frac{\partial}{\partial t}(\rho u_y) = \\ &= x(\nabla_j(\rho u_x u_j) + \nabla_x p) + y(\nabla_j(\rho u_y u_j) + \nabla_y p) = \\ &= (x \nabla_x p + y \nabla_y p) + (\nabla_j(x \rho u_x u_j) - \rho u_x^2) + (\nabla_j(y \rho u_y u_j) - \rho u_y^2) = \\ &= r \frac{\partial p}{\partial r} + \nabla_j(r \rho u_r u_j) - \rho(u_r^2 + u_\varphi^2) =\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= r \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \rho u_r^2) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} (r \rho u_r u_\varphi) + \frac{\partial}{\partial z} (r \rho u_r u_z) - \rho u_r^2 - \rho u_\varphi^2 = \\
&= \frac{\partial}{\partial r} (r(\rho u_r^2 + p)) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} (r \rho u_r u_\varphi) + \frac{\partial}{\partial z} (r \rho u_r u_z) - p - \rho u_\varphi^2. \\
&\quad - \frac{\partial(r \rho u_\varphi)}{\partial t} = y \frac{\partial}{\partial t} (\rho u_x) - x \frac{\partial}{\partial t} (\rho u_y) = \\
&= -y (\nabla_j (\rho u_x u_j) + \nabla_x p) + x (\nabla_j (\rho u_y u_j) + \nabla_y p) = \\
&= (-y \nabla_x p + x \nabla_y p) + (\nabla_j ((-y) \rho u_x u_j) + \rho u_x u_y) + (\nabla_j (x \rho u_y u_j) - \rho u_x u_y) = \\
&= \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \nabla_j (r \rho u_\varphi u_j) = \\
&= \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \rho u_\varphi u_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} (r \rho u_\varphi^2) + \frac{\partial}{\partial z} (r \rho u_\varphi u_z) = \\
&= \frac{\partial}{\partial r} (r \rho u_r u_\varphi) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} (r(\rho u_\varphi^2 + p)) + \frac{\partial}{\partial z} (r \rho u_\varphi u_z) + \rho u_r u_\varphi.
\end{aligned}$$

Таким образом, в цилиндрических координатах уравнения Эйлера записываются в следующем виде:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t} (r \rho) + \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} (r u_\varphi) + \frac{\partial}{\partial z} (r u_z) = 0, \\
&\frac{\partial}{\partial t} (r \rho u_r) + \frac{\partial}{\partial r} (r(\rho u_r^2 + p)) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} (r \rho u_r u_\varphi) + \frac{\partial}{\partial z} (r \rho u_r u_z) - p - \rho u_\varphi^2 = 0, \\
&\frac{\partial}{\partial t} (r \rho u_\varphi) + \frac{\partial}{\partial r} (r \rho u_r u_\varphi) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} (r(\rho u_\varphi^2 + p)) + \frac{\partial}{\partial z} (r \rho u_\varphi u_z) + \rho u_r u_\varphi = 0, \\
&\frac{\partial}{\partial t} (r \rho u_z) + \frac{\partial}{\partial r} (\rho u_r u_z) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} (r \rho u_\varphi u_z) + \frac{\partial}{\partial z} (r(\rho u_z^2 + p)) = 0, \\
&\frac{\partial}{\partial t} (r E) + \frac{\partial}{\partial r} (r(E + P) u_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} (r(E + P) u_\varphi) + \frac{\partial}{\partial z} (r(E + P) u_z) = 0,
\end{aligned}$$

где полная энергия единицы объёма E определяется как $E = p/(\gamma - 1) + \rho \mathbf{u}^2/2$.

Полагая $\tilde{Q} = (\rho, \rho u_z, \rho u_r, \rho u_\varphi, E)^T$, можно переписать уравнения Эйлера для цилиндрической системы координат в матричном виде:

$$\frac{\partial(r \tilde{Q})}{\partial t} + \tilde{\nabla} \cdot \mathbf{F}(r \tilde{Q}) = H,$$

где $\mathbf{F}(\cdot)$ – обычная эйлеровская функция потоков, $\tilde{\nabla} = (\partial/\partial z, \partial/\partial r, 1/r \partial/\partial \varphi)$, а источниковый член H выражается формулой

$$H = (0, 0, p + \rho u_\varphi^2, -\rho u_r u_\varphi, 0)^T.$$

Линеаризация

Линеаризация полученных уравнений для цилиндрических координат почти не отличается от уравнений, записанных в декартовой системе относительно декартовых скоростей, поскольку функция потоков $\mathbf{F}(Q)$ осталась той же самой.

Линеаризованные уравнения имеют вид

$$\frac{\partial(r\tilde{Q}')}{\partial t} + \tilde{\nabla} \cdot \left(\frac{d\mathbf{F}}{dQ}(\bar{Q}) r\tilde{Q}' \right) = H'(\tilde{Q}', \bar{Q}),$$

где

$$\tilde{Q}' = (\rho', (\rho u_z)', (\rho u_r)', (\rho u_\varphi)', E')^T.$$

Источниковый член линеаризуется следующим образом:

$$H' = (0, 0, p' + (\rho u_\varphi^2)', -(\rho u_r u_\varphi)', 0)^T,$$

где

$$\begin{aligned} p' &= (\gamma - 1) \left(E' - (\rho \mathbf{u})' \cdot \bar{\mathbf{u}} + \rho' \frac{\bar{\mathbf{u}}^2}{2} \right), \\ (\rho u_r u_\varphi)' &= (\rho u_r)' \bar{u}_\varphi + (\rho u_\varphi)' \bar{u}_r - \bar{u}_r \bar{u}_\varphi \rho', \\ (\rho u_\varphi^2)' &= 2(\rho u_\varphi)' \bar{u}_\varphi - \bar{u}_\varphi^2 \rho'. \end{aligned}$$

Уравнения для заданной азимутальной моды

Сделаем два предположения:

- 1) фоновые поля $\bar{\rho}, \bar{p}, \bar{u}_r, \bar{u}_\varphi, \bar{u}_z$ не зависят от угла;
- 2) пульсации $\rho', p', u_r', u_z', u_\varphi'$ зависят от угла как $\exp(il\varphi)$.

Такое предположение имеет физический смысл: действительно, рассматривая волновое уравнение относительно волнового потенциала W , можно положить $W \sim \exp(il\varphi)$. При этом пульсация давления определяется как $p' = -\bar{\rho} \partial W / \partial t$, плотность выражается через давление как $\rho' = p' / c^2$, а скорости определяются как $\mathbf{u} = \nabla W$. Тогда $\rho', p', u_r, u_z, u_\varphi$ будут зависеть от угла как $\exp(il\varphi)$. Поскольку \tilde{Q}' есть линейная комбинация этих переменных с весами, определяемыми фоновым полем и потому не зависящими от угла, то \tilde{Q}' также будут зависеть от угла как $\exp(il\varphi)$.

Тогда систему линеаризованных уравнений Эйлера в цилиндрической системе координат можно переписать в виде

$$\frac{\partial(r\tilde{Q}')}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{dF_z}{dQ}(\bar{Q}) r\tilde{Q}' \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{dF_r}{dQ}(\bar{Q}) r\tilde{Q}' \right) = \hat{H}(\tilde{Q}', \bar{Q}),$$

где

$$\hat{H}(\tilde{Q}', \bar{Q}) = H'(\tilde{Q}', \bar{Q}) - il \left(\frac{dF_\varphi}{dQ}(\bar{Q}) \tilde{Q}' \right).$$

Полагая дополнительно, что фоновое поле скоростей не имеет угловой компоненты ($\bar{u}_\varphi = 0$), правую часть можно представить в виде

$$\hat{H} = H'(\tilde{Q}', \bar{Q}) - il \left(\frac{dF_\varphi}{dQ}(\bar{Q}) \tilde{Q}' \right) = \begin{pmatrix} -il(\rho u_\varphi)' \\ -il\bar{u}_z(\rho u_\varphi)' \\ p' - il\bar{u}_r(\rho u_\varphi)' \\ -\bar{u}_r(\rho u_\varphi)' - ilp' \\ -il\frac{\bar{E} + \bar{p}}{\bar{\rho}}(\rho u_\varphi)' \end{pmatrix}.$$

Полученное уравнение можно решать относительно переменных t, z, r . Отметим, что при $m \neq 0$ решение становится по существу комплекснозначным, то есть действительная и мнимая компоненты решения взаимодействуют друг с другом. Однако это взаимодействие определяется только источником членом \hat{H} . Последний факт существенно упрощает численный метод, который может быть использован для решения выписанных уравнений.

Азимутальная мода в однородном потоке в круглом цилиндрическом канале

Проверить корректность реализации разностной схемы для решения линеаризованных уравнений, записанных для заданной угловой моды, проще всего на задаче с аналитическим решением. Простейшим решением такого вида является волна, распространяющаяся в канале.

Пусть $r \in (0, R)$; $z \in \mathbb{R}$; $t \in (0, \infty)$. Предположим, что фоновые поля $\bar{\rho}, \bar{p}, \bar{u}_z$ не зависят ни от координат, ни от времени; $\bar{u}_r = 0$ и $\bar{u}_\varphi = 0$.

Решениями линеаризованных уравнений Эйлера на однородном фоновом поле являются акустические, вихревые и энтропийные волны. Мы ограничимся только акустическими волнами. Перейдём в систему координат (t, r, \tilde{z}) , где $\tilde{z} = z - \bar{u}_z t$, связанную с фоновым потоком. В новой системе координат уравнения упрощаются и для акустических волн сводятся к волновому уравнению относительно волнового потенциала W (волновой потенциал есть скалярное поле, градиентом которого является вектор скорости):

$$\frac{1}{\bar{c}^2} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial W}{\partial r} \right) - \frac{\partial^2 W}{\partial \tilde{z}^2} + \frac{l^2}{r^2} W = 0.$$

В этом уравнении учтено, что волновой потенциал зависит от угла как $\exp(il\varphi)$. Пульсации физических переменных выражаются через волновой по-

тенциал как

$$\rho' = -\frac{\bar{\rho}}{\bar{c}^2} \frac{\partial W}{\partial t}, \quad u'_z = \frac{\partial W}{\partial z}, \quad u'_r = \frac{\partial W}{\partial r}, \quad u'_\varphi = \frac{il}{r} W, \quad p' = -\bar{\rho} \frac{\partial W}{\partial t}.$$

Зададим на стенках канала $r = R$ условие непротекания. Для волнового потенциала они запишутся как

$$\left. \frac{\partial W}{\partial r} \right|_{r=R} = 0.$$

Собственным решением дифференциального оператора, определённого выписанными уравнением и граничным условием, является функция

$$W_{lnk}(t, r, \tilde{z}) = -\frac{i}{\omega} e^{-i\omega t} e^{ik\tilde{z}} J_l \left(\nu_n^{(l)} \frac{r}{R} \right),$$

где J_l – функция Бесселя 1-го рода индекса l , а $\nu_l^{(n)}$ – n -ый нуль её производной. Величины ω и k связаны дисперсионным соотношением

$$\left(\frac{\omega}{\bar{c}} \right)^2 = k^2 + \left(\frac{\nu_l^{(n)}}{R} \right)^2.$$

Для каждого профиля $\exp(ik\tilde{z}) J_l(\nu_l^{(n)} r/R)$ в сечении $t = 0$ есть две линейно независимые собственные функции, соответствующие волнам, распространяющимся в противоположные стороны. Направление распространения волны определяется её групповой скоростью $d\omega/dk$. Поэтому, чтобы волна распространялась в положительном направлении, выберем собственные функции с дисперсионным соотношением

$$\frac{\omega}{\bar{c}} = \text{sign}(k) \left(k^2 + \left(\frac{\nu_l^{(n)}}{R} \right)^2 \right)^{1/2}. \quad (1)$$

Отметим, что через ω обозначена круговая частота сигнала, измеряемого в точке, движущейся вместе с потоком.

Используя соотношения пульсаций физических переменных и волнового потенциала, получаем для них следующие выражения.

$$\rho'_{lnk}(t, r, z) = \frac{\bar{\rho}}{\bar{c}^2} e^{-i\omega t} e^{ik(z-\bar{u}_z t)} J_l \left(\nu_n^{(l)} \frac{r}{R} \right);$$

$$(u'_z)_{lnk}(t, r, z) = \frac{k}{\omega} e^{-i\omega t} e^{ik(z-\bar{u}_z t)} J_l \left(\nu_n^{(l)} \frac{r}{R} \right);$$

$$\begin{aligned}(u'_r)_{lnk}(t, r, z) &= -\frac{i}{\omega} \frac{\nu_n^{(l)}}{R} e^{-i\omega t} e^{ik(z-\bar{u}_z t)} J'_l \left(\nu_n^{(l)} \frac{r}{R} \right); \\ (u'_\varphi)_{lnk}(t, r, z) &= \frac{l}{\omega r} e^{-i\omega t} e^{ik(z-\bar{u}_z t)} J_l \left(\nu_n^{(l)} \frac{r}{R} \right); \\ p'_{lnk}(t, r, z) &= \bar{\rho} e^{-i\omega t} e^{ik(z-\bar{u}_z t)} J_l \left(\nu_n^{(l)} \frac{r}{R} \right).\end{aligned}$$

Локализованный по z набор мод

В случае поршневой моды ($l = n = 0$, то есть плоской волны в канале) можно задать любой профиль волны $f(z)$. Волна, заданная начальными данными $p' = \bar{\rho} f(z)$, $\rho' = f(z) \bar{\rho} / \bar{c}^2$, $u'_z = f(z) / \bar{c}$, $u'_r = u'_\varphi = 0$, в силу линейности дисперсионного соотношения $\omega = \bar{c}k$ будет распространяться по каналу со скоростью \bar{c} (относительно фонового потока) без искажений. Спектральный состав такой волны будет определяться спектром функции $f(z)$, но динамика каждой гармоники будет одинаковой.

Для всех прочих гармоник в канале дело обстоит иначе, так как локализованный по z профиль будет содержать набор гармоник, каждая из которых будет распространяться со своей скоростью. Мы по-прежнему будем рассматривать фиксированные значения азимутального числа l и радиального числа n , понимая под волновым пакетом набор гармоник с разными k (или, что то же самое, с разными ω). Положим образ в k -представлении равным $\mu(k)$, то есть

$$\tilde{Q}'(t, z, r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{Q}'_{lnk}(t, z, r) \mu(k) dk.$$

Тогда получим следующие выражения для физических переменных:

$$\begin{aligned}\rho'(t, z, r) &= \frac{\bar{\rho}}{\bar{c}^2} J_l \left(\nu_n^{(l)} \frac{r}{R} \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikz} e^{-i(\omega(k)+k\bar{u}_z)t} \mu(k) dk; \\ u'_z(t, z, r) &= J_l \left(\nu_n^{(l)} \frac{r}{R} \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikz} e^{-i(\omega(k)+k\bar{u}_z)t} \frac{k}{\omega(k)} \mu(k) dk; \\ u'_r(t, z, r) &= -i \frac{\nu_n^{(l)}}{R} J'_l \left(\nu_n^{(l)} \frac{r}{R} \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikz} e^{-i(\omega(k)+k\bar{u}_z)t} \frac{1}{\omega(k)} \mu(k) dk; \\ u'_\varphi(t, z, r) &= \frac{m}{r} J_l \left(\nu_n^{(l)} \frac{r}{R} \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikz} e^{-i(\omega(k)+k\bar{u}_z)t} \frac{1}{\omega(k)} \mu(k) dk;\end{aligned}$$

$$p'(t, z, r) = \bar{\rho} J_l \left(\nu_n^{(l)} \frac{r}{R} \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikz} e^{-i(\omega(k)+k\bar{u}_z)t} \mu(k) dk. \quad (2)$$

Отметим, что мы произвели интегрирование только по действительным значениям k , тогда как в канале могут существовать моды с мнимыми значениями k , экспоненциально затухающие с расстоянием. Эти моды мы рассматривать не будем.

Полагая в полученных выражениях $t = 0$, получим выражения для начальных данных:

$$\rho'(0, z, r) = \frac{\bar{\rho}}{c^2} J_l \left(\nu_n^{(l)} \frac{r}{R} \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} I_1(z); \quad (3)$$

$$u'_z(0, z, r) = J_l \left(\nu_n^{(l)} \frac{r}{R} \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} I_3(z); \quad (4)$$

$$u'_r(0, z, r) = -i \frac{\nu_n^{(l)}}{R} J'_l \left(\nu_n^{(l)} \frac{r}{R} \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} I_2(z); \quad (5)$$

$$u'_\varphi(0, z, r) = \frac{l}{r} J_l \left(\nu_n^{(l)} \frac{r}{R} \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} I_2(z); \quad (6)$$

$$p'(0, z, r) = \bar{\rho} J_l \left(\nu_n^{(l)} \frac{r}{R} \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} I_1(z). \quad (7)$$

Здесь

$$I_1(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikz} \mu(k) dk; \quad I_2(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikz} \frac{\mu(k)}{\omega(k)} dk; \quad I_3(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikz} \frac{k\mu(k)}{\omega(k)} dk.$$

Чтобы волновой пакет в момент времени $t = 0$ был локализован, нужно, чтобы локализовано было возмущение по каждой из функций: ρ' , u'_z , u'_r , u'_φ , p' . Профиль каждого из этих возмущений по z с точностью до константы, зависящей от r , является Фурье-образом от величин $\mu(k)$, $k\mu(k)/\omega(k)$, $\mu(k)/\omega(k)$, $\mu(k)/\omega(k)$ и $\mu(k)$ соответственно. Убывание Фурье-образа при $z \rightarrow \pm\infty$ определяется гладкостью функции-прообраза: функции с разрывом старшей производной дают степенное затухание, а бесконечно дифференцируемые функции – экспоненциальное или более быстрое. Возмущения, убывающие быстрее любой степени, мы будем считать локализованным. Таким образом, нам нужно, чтобы функции $\mu(k)$, $k\mu(k)/\omega(k)$ и $\mu(k)/\omega(k)$ были бесконечно гладкими.

Оставаясь в рамках волн с положительной групповой скоростью, мы сталкиваемся с тем, что функция $\mu(k)/\omega(k)$ может быть бесконечно гладкой при

$k = 0$ только в том случае, если $\mu(0) = 0$ вместе со своими производными любого порядка. Другими словами, такой волновой пакет будет содержать волны, медленно распространяющиеся по каналу, с очень малой амплитудой. В численном исследовании это должно приводить к большим погрешностям при попытках выделить медленно распространяющиеся моды из общего пакета.

Эта проблема устраняется, если допустить в волновом пакете моды, распространяющиеся как в положительном, так и в отрицательном направлении оси z . Положим для определённости $\forall k \omega(k) > 0$:

$$\omega(k) = \bar{c} \left(k^2 + \left(\frac{\nu_l^{(n)}}{R} \right)^2 \right)^{1/2}. \quad (8)$$

Дисперсионное соотношение

Здесь и далее будем полагать поток направленным по оси z и дозвуковым: $0 < \bar{u}_z < \bar{c}$. Введём обозначения

$$M = \frac{\bar{u}_z}{\bar{c}}, \quad a = \frac{\nu_l^{(n)}}{R}.$$

Соотношение (1) связывает величины k и ω и является дисперсионным соотношением в отсутствие потока или, что то же самое, в системе координат, связанной с потоком. Однако в системе координат, связанной с каналом, дисперсионное соотношение должно связывать величины k и $\tilde{\omega}$. Оно имеет вид

$$\tilde{\omega} = \omega(k) + k\bar{u}_z,$$

где функция $\omega(k)$ определена формулой (8). Решим это уравнение относительно k , определив таким образом функции $k_{\pm}(\omega)$.

Подставляя функцию $\omega(k)$, имеем

$$\sqrt{k^2 + a^2} + kM = \frac{\tilde{\omega}}{\bar{c}}. \quad (9)$$

Возводя в квадрат,

$$k^2 + a^2 = \left(\frac{\tilde{\omega}}{\bar{c}} - kM \right)^2.$$

$$(1 - M^2)k^2 + 2\frac{\tilde{\omega}}{\bar{c}}Mk + \left(a^2 - \frac{\tilde{\omega}^2}{\bar{c}^2} \right) = 0.$$

Четверть дискриминанта этого квадратного уравнения равна

$$\frac{D}{4} = \left(\frac{\tilde{\omega}}{\bar{c}}M \right)^2 - (1 - M^2) \left(a^2 - \frac{\tilde{\omega}^2}{\bar{c}^2} \right) = \frac{\tilde{\omega}^2}{\bar{c}^2} - (1 - M^2)a^2. \quad (10)$$

При $\tilde{\omega} < a\bar{c}(1 - M^2)^{1/2}$ квадратное уравнение не имеет корней и решения нет. Волны на этих частотах по каналу не распространяются. Если же $\tilde{\omega} > a\bar{c}(1 - M^2)^{1/2}$, уравнение имеет два корня:

$$k_{\pm}(\tilde{\omega}) = \frac{1}{1 - M^2} \left(-\frac{\tilde{\omega}}{\bar{c}} M \pm \sqrt{\frac{\tilde{\omega}^2}{\bar{c}^2} - (1 - M^2)a^2} \right).$$

В случае $a\bar{c}\sqrt{1 - M^2} < \tilde{\omega} < a\bar{c}$ справедливо $k_+ > k_- > 0$, то есть фазовые скорости обеих волн положительные. Однако групповая скорость при всех частотах, на которых пространственный период действительнзначный, имеет для двух волн разные знаки, то есть моды с любым пространственным периодом могут распространяться как по, так и против дозвукового потока.

Действительно, групповая скорость волн выражается формулой

$$\begin{aligned} v_{\pm}^{gr}(\tilde{\omega}) &= \left(\frac{dk_{\pm}}{d\tilde{\omega}} \right)^{-1} = \bar{c}(1 - M^2) \left(-M \pm \frac{\tilde{\omega}}{\bar{c}\sqrt{D/4}} \right)^{-1} = \\ &= (\bar{c}^2 - \bar{u}_z^2) \left(-\bar{u}_z \pm \frac{\tilde{\omega}}{\sqrt{D/4}} \right)^{-1}, \end{aligned} \quad (11)$$

где $D/4$ определено формулой (10).

Пусть дискриминант положительный: $D > 0$. Поскольку мы для определённости выбрали $\bar{u}_z > 0$, то, очевидно, всегда выполняется $v_-^{gr}(\tilde{\omega}) < 0$. Покажем, что $v_+^{gr}(\tilde{\omega}) > 0$. Условие $v_+^{gr}(\tilde{\omega}) > 0$ равносильно

$$\tilde{\omega} > \sqrt{D/4} \bar{u}_z.$$

Возводя в квадрат и домножая на \bar{c}^2 , получаем

$$\tilde{\omega}^2 \bar{c}^2 > \bar{u}_z^2 (\tilde{\omega}^2 - (\bar{c}^2 - \bar{u}_z^2)a^2),$$

или, перенося всё в левую часть,

$$(\tilde{\omega}^2 + a^2)\bar{u}_z^2(\bar{c}^2 - \bar{u}_z^2) > 0,$$

что справедливо при любых $\tilde{\omega}$.

Одно вспомогательное утверждение

Пусть $f(x)$ – ограниченная функция, имеющая конечное число нулей, в каждом из которых она имеет конечную ненулевую первую производную и в окрестности каждого из которых она дважды непрерывно дифференцируема. Пусть δ – дельта-функция Дирака, ρ – обобщённая функция, сопоставляющая пробной функции $\varphi(x)$ главное значение интеграла от $\varphi(x)/x$. Тогда в смысле обобщённых функций имеет место предельный переход

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \exp(i\lambda x) \left(\frac{i}{\pi} \rho(f(x)) + \text{sign}(\lambda f'(x)) \delta(f(x)) \right) = 0. \quad (12)$$

Здесь λ действительное.

Докажем это утверждение для случая, когда функция f имеет единственный корень $x = 0$; для общего случая доказательство аналогичное.

Рассмотрим произвольную пробную функцию $\varphi(x)$. Исходя из определения сходимости обобщённых функций, требуется доказать, что $L(\lambda) \rightarrow 0$, где

$$L(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\lambda x) \left(\frac{i}{\pi} \rho(f(x)) + \text{sign}(\lambda f'(x)) \delta(f(x)) \right) \varphi(x) dx.$$

Используя определения функций δ и ρ , получаем

$$L(\lambda) = \frac{i}{\pi} \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(i\lambda x)}{f(x)} \varphi(x) dx + \text{sign}(\lambda f'(0)) \frac{\varphi(0)}{|f'(0)|}.$$

Положим $f(x) = x f'(0)/(1 + xg(x))$ и $\varphi(x) = \varphi(0) + x\psi(x)$. Тогда функции g и ψ конечны в $x = 0$, и

$$\begin{aligned} L(\lambda) &= \frac{i}{\pi} \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(i\lambda x)}{x f'(0)} (1 + xg(x)) (\varphi(0) + x\psi(x)) dx + \text{sign}(\lambda) \frac{\varphi(0)}{f'(0)} = \\ &= \frac{i\varphi(0)}{\pi f'(0)} \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(i\lambda x)}{x} dx + \\ &+ \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(i\lambda x)}{f'(0)} (\psi(x) + g(x)\varphi(0) + xg(x)\psi(x)) dx + \text{sign}(\lambda) \frac{\varphi(0)}{f'(0)}. \end{aligned}$$

Действительная часть главного значения интеграла в первом слагаемом равна 0; мнимая часть интеграла определена и равна $\int \sin(\lambda x)/x dx = \pi \text{sign}(\lambda)$. Второе слагаемое при $\lambda \rightarrow \infty$ стремится к 0 по теореме Римана об осцилляции. Это доказывает искомое утверждение.

Спектр сигнала

Измеряемой характеристикой сигнала является спектральная плотность пульсации давления в смысле преобразования Фурье по времени в заданной точке пространства. Многие параметры, такие как коэффициент прохождения сигнала или импеданс, определяются через отношение спектральной плотности, измеренной в некоторой точке, к спектральной плотности входящего сигнала. Поэтому для заданного выше сигнала нужно вычислить спектральную плотность.

Рассмотрим пульсацию давления, заданную формулой (2):

$$p'(t, z, r) = \bar{\rho} J_l \left(\nu_n^{(l)} \frac{r}{R} \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ikz) \exp(-i(\omega(k) + k\bar{u}_z)t) \mu(k) dk.$$

Будем предполагать, что выражение $\mu(k_{\pm}(\tilde{\omega}))/v_{\pm}^{gr}(\tilde{\omega})$ ограничено.

Спектральная плотность этого сигнала, посчитанная по значениям при $t > 0$, в заданной точке (z, r) на частоте $\tilde{\omega}$ определяется формулой

$$F[p'](\tilde{\omega}, z, r) = \frac{\bar{\rho}}{\sqrt{2\pi}} \int_{t=0}^{\infty} p'(t, z, r) \exp(i\tilde{\omega}t) dt.$$

Отметим, что $\tilde{\omega}$ – это частота сигнала в точке, покоящейся относительно канала. Символом ω по-прежнему будем обозначать частоту сигнала в точке, движущейся с потоком.

Подставляя выражение для пульсации давления, получаем

$$F[p'](\tilde{\omega}, z, r) = J_l \left(\nu_n^{(l)} \frac{r}{R} \right) \frac{\bar{\rho}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikz} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t=0}^{\infty} \exp(i(\tilde{\omega} - (\omega(k) + k\bar{u}_z))t) dt \mu(k) dk.$$

Внутренний интеграл является преобразованием Фурье от функции Хевисайда и равен

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t=0}^{\infty} e^{i\Omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t=-\infty}^{\infty} \text{Heaviside}(\Omega) e^{i\Omega t} dt = \sqrt{2\pi} \left(\frac{1}{2} \delta(\Omega) - \frac{i}{2\pi} \rho(\Omega) \right),$$

где $\Omega(\tilde{\omega}, k) = \tilde{\omega} - (\omega(k) + k\bar{u}_z)$. Таким образом,

$$F[p'](\tilde{\omega}, z, r) = \bar{\rho} J_l \left(\nu_n^{(l)} \frac{r}{R} \right) \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikz} \left(\frac{1}{2} \delta(\Omega(\tilde{\omega}, k)) - \frac{i}{2\pi} \rho(\Omega(\tilde{\omega}, k)) \right) \mu(k) dk.$$

Зафиксируем $\tilde{\omega}$ и рассмотрим Ω только как функцию k . Используя доказанный выше предельный переход (12), при достаточно больших z выполняется

$$F[p'](\tilde{\omega}, z, r) \approx \bar{\rho} J_l \left(\nu_n^{(l)} \frac{r}{R} \right) \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikz} \delta(\tilde{\omega} - (\omega(k) + k\bar{u}_z)) \cdot \\ \cdot \text{Heaviside} \left(z \frac{d(\omega(k) + k\bar{u}_z)}{dk} \right) \mu(k) dk.$$

Условие большой величины z соответствует тому, что положение наблюдателя находится вне области локализации начального возмущения.

Воспользуемся формулой

$$\delta(\Omega(k))g(k) = \sum_i \frac{g(k_i)}{|\Omega'(k_i)|}.$$

Здесь суммирование ведётся по всем корням k_i функции Ω . В нашем случае Ω' есть групповая скорость распространения волн. Таким образом, приходим к окончательному выражению для спектра:

$$F[p'](\tilde{\omega}, z, r) \approx \bar{\rho} J_l \left(\nu_n^{(l)} \frac{r}{R} \right) \sum_{\pm} \text{Heaviside}(z v_{\pm}^{gr}(\tilde{\omega})) e^{ik_{\pm}(\tilde{\omega})z} \mu(k_{\pm}(\tilde{\omega})) |v_{\pm}^{gr}(\tilde{\omega})|^{-1}. \quad (13)$$

Таким образом, перебираются только те корни уравнения, которые удовлетворяют условию $z v_{\pm}^{gr}(\tilde{\omega}) > 0$. Другими словами, суммирование ведётся только по тем волнам, групповые скорости которых имеют тот же знак, что и положение наблюдателя z . Если при данной частоте корни $k_{\pm}(\tilde{\omega})$ мнимые, то значение спектральной плотности равно 0.

Из этой формулы видно, что при нулевом дискриминанте квадратного уравнения спектр обращается в бесконечность, если в соответствующей точке значение спектральной плотности $\mu(k^*)$ в k -представлении не равно 0. Эта точка соответствует волне, не распространяющейся вдоль направления z в системе координат, связанной с каналом. k^* определяется формулой

$$k^* = -\frac{aM}{\sqrt{1-M^2}} = -\frac{\nu_l^{(n)}}{R} \frac{M}{\sqrt{1-M^2}}.$$

Изучим поведение групповой скорости при $k \sim k^*$. Дифференцируя (9), получаем

$$v^{gr}(\tilde{\omega}(k^*)) = \bar{c} \left(M + \frac{k}{\sqrt{k^2 + a^2}} \right) = \frac{\bar{c}}{a} (1-M)(1-M^2)^{1/2} (k - k^*) + O(k - k^*)^2.$$

Поэтому, чтобы спектр был ограниченной величиной, требуется, чтобы выполнялось условие $\mu(k^*) = 0$, а $d\mu/dk(k^*)$ было ограничено.

При отсутствии потока и $z > 0$ имеем

$$k_+(\tilde{\omega}) = \left(\frac{\tilde{\omega}^2}{\bar{c}^2} - a^2 \right)^{1/2},$$

$$F[p'](\tilde{\omega}, z, r) = \frac{\bar{\rho}}{\bar{c}^2} J_l(ar) \exp(ik_+(\tilde{\omega})z) \mu(k_+(\tilde{\omega})) \frac{\tilde{\omega}}{k_+(\tilde{\omega})}.$$

Выбор спектральной плотности

Теперь, когда для произвольной функции $\mu(k)$ выписаны начальные данные (3–7) и спектральная плотность (13), сформулируем требования на функцию $\mu(k)$.

1. Начальные значения для всех физических переменных должны быть достаточно хорошо локализованы, а именно, экспоненциально убывать с расстоянием от центра возмущения. Поэтому $\mu(k)$ должна быть бесконечно гладкой.

2. Начальные значения должны быть непрерывными. Для этого достаточно, чтобы при $k \rightarrow \infty$ функция $\mu(k)$ убывала не медленнее, чем как $|k|^{-3/2}$. Для повышения гладкости начальных данных нужно увеличивать степень при $1/|k|$.

3. Спектральная плотность (13) должна быть ограниченной. Для этого должно быть выполнено $\mu(k^*) = 0$.

4. Чем более гладким является спектр сигнала, тем быстрее сам сигнал убывает на бесконечности. Это напрямую сказывается на требуемой длительности расчёта. Можно показать, что если $\mu(k) = O((k - k^*)^n)$, то сигнал убывает во времени со скоростью $O(t^{-n})$. Однако если задать n большим, то волны, близкие к критической частоте, будут иметь очень малую амплитуду, а потому численное определение спектральной плотности на этих частотах будет иметь большую относительную погрешность. Мы положим $n = 2$. При этом спектральная плотность (13) получается непрерывной.

5. Интегралы (3–7) должны вычисляться аналитически. Для этого будем искать функцию μ в виде $\mu(k) = AP(k)\omega(k)^{-m/2}$, где $P(k)$ – полином, а m – целое число.

Требованиям 1–5 удовлетворяет, в частности, функция

$$\mu(k) = (k - k^*)^2 \left(\frac{\omega(k)}{\bar{c}} \right)^{-5} = (k - k^*)^2 (k^2 + a^2)^{-5/2}. \quad (14)$$

Вычисление начальных данных

Для вычисления интегралов нам понадобятся следующие соотношения для преобразований Фурье [8]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikz} (k^2 + a^2)^{-3/2} dk = \frac{2|z|}{a} \mathbf{K}_1(a|z|);$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikz} (k^2 + a^2)^{-2} dk = \frac{\pi}{2a^3} e^{-a|z|} (a|z| + 1);$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikz} k (k^2 + a^2)^{-2} dk = i \frac{\pi}{2a} z e^{-a|z|};$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikz} (k^2 + a^2)^{-5/2} dk = \frac{2z^2}{3a^2} \mathbf{K}_2(a|z|);$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikz} (k^2 + a^2)^{-3} dk = \frac{\pi}{8a^5} e^{-a|z|} (a^2 z^2 + 3a|z| + 3);$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikz} k (k^2 + a^2)^{-3} dk = i \frac{\pi}{8a^3} z e^{-a|z|} (a|z| + 1);$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikz} k (k^2 + a^2)^{-5/2} dk = i \frac{2}{3a} z |z| \mathbf{K}_1(a|z|).$$

Здесь $\mathbf{K}_n(\cdot)$ – модифицированная функция Бесселя 2-го рода индекса n .

Используя эти соотношения, найдём вид функций $I_1(z)$, $I_2(z)$ и $I_3(z)$.

$$\begin{aligned} I_1(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikz} \mu(k) dk = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikz} k^2 (k^2 + a^2)^{-5/2} dk - 2k^* \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikz} k (k^2 + a^2)^{-5/2} dk + \\ &\quad + (k^*)^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikz} (k^2 + a^2)^{-5/2} dk. \end{aligned}$$

$$I_1(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikz} (k^2 + a^2)^{-3/2} dk - 2k^* \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikz} k (k^2 + a^2)^{-5/2} dk + \\ + ((k^*)^2 - a^2) \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikz} (k^2 + a^2)^{-5/2} dk.$$

$$I_1(z) = ((k^*)^2 - a^2) \frac{2z^2}{3a^2} \mathbf{K}_2(a|z|) + \frac{2|z|}{a} \mathbf{K}_1(a|z|) - 2k^* i \frac{2}{3a} z|z| \mathbf{K}_1(a|z|). \quad (15)$$

$$I_2(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikz} \frac{\mu(k)}{\omega(k)} dk = \frac{1}{\bar{c}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikz} k^2 (k^2 + a^2)^{-3} dk - 2 \frac{k^*}{\bar{c}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikz} k (k^2 + a^2)^{-3} dk + \\ + \frac{(k^*)^2}{\bar{c}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikz} (k^2 + a^2)^{-3} dk.$$

$$I_2(z) = \frac{1}{\bar{c}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikz} (k^2 + a^2)^{-2} dk - 2 \frac{k^*}{\bar{c}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikz} k (k^2 + a^2)^{-3} dk + \\ + \frac{(k^*)^2 - a^2}{\bar{c}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikz} (k^2 + a^2)^{-3} dk.$$

$$I_2(z) = \frac{\pi}{2a^3 \bar{c}} e^{-a|z|} (a|z| + 1) + \frac{\pi((k^*)^2 - a^2)}{8a^5 \bar{c}} e^{-a|z|} (a^2 z^2 + 3a|z| + 3) - \\ - 2i \frac{\pi k^*}{8a^3 \bar{c}} z e^{-a|z|} (a|z| + 1). \quad (16)$$

$$I_3(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikz} \frac{k\mu(k)}{\omega(k)} dk = \frac{1}{\bar{c}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikz} k (k - k^*)^2 (k^2 + a^2)^{-3} dk.$$

$$I_3(z) = \frac{1}{\bar{c}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikz} k (k^2 + a^2)^{-2} dk - 2 \frac{k^*}{\bar{c}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikz} (k^2 + a^2)^{-2} dk + \\ + \frac{(k^*)^2 - a^2}{\bar{c}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikz} k (k^2 + a^2)^{-3} dk + \frac{2k^* a^2}{\bar{c}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikz} (k^2 + a^2)^{-3} dk.$$

$$I_3(z) = \frac{1}{\bar{c}} i \frac{\pi}{2a} z e^{-a|z|} - 2 \frac{k^*}{\bar{c}} \frac{\pi}{2a^3} e^{-a|z|} (a|z| + 1) + \frac{(k^*)^2 - a^2}{\bar{c}} i \frac{\pi}{8a^3} z e^{-a|z|} (a|z| + 1) + \frac{2k^* a^2}{\bar{c}} \frac{\pi}{8a^5} e^{-a|z|} (a^2 z^2 + 3a|z| + 3). \quad (17)$$

В итоге, начальные данные задаются формулами (3–7), (15–17).

Отметим, что аналитическое выражение для формы волнового пакета в начальный момент времени мы получили ценой отказа от свободного параметра, который должен определять ширину локализации волнового пакета. При выбранной функции $\mu(k)$ размер области локализации волнового пакета привязан к радиусу канала и зависит от азимутального и радиального волновых чисел.

Например, при числе Маха $M = 0.2$, азимутальном числе $n = 3$ и радиальном числе $l = 0$ пульсации по каждой переменной на расстоянии примерно $2.2R$ составляют по каждой переменной не более 1% от максимальной для этой переменной. Увеличение чисел n и l уменьшает ширину области локализации.

Верификация

Для верификации полученного результата был проведён расчёт распространения акустической волны в круглом цилиндрическом канале без препятствий. Азимутальное число было положено равным $l = 3$, радиальное – $n = 0$. Ширина канала была выбрана равной 10 см. Сигнал измерялся на расстоянии 50 см вперёд по потоку от центра локализации начальных данных. Скорость звука принята равной 343 м/с. Число Маха фонового потока было задано равным 0.2.

Расчёт проводился при помощи программного кода Noisette [9] в переменных t, r, z . Используемая схема обладает 5-м порядком аппроксимации производных по направлению z и 2-м порядком аппроксимации производных по радиусу (в реализованном численном методе точность понижается за счёт граничных условий и работы в цилиндрической системе координат). Для расчёта использовалась прямоугольная расчётная сетка, имеющая 40 шагов по радиусу. По оси z расчётная область была выбрана в виде $|z| < 3$ м, причём при $|z| > 2.25$ м сеточные элементы являются квадратами, а при $|z| > 2.25$ м использовался поглощающий слой с анизотропной сеткой.

Отклонение спектра от аналитического значения представлено на рис. 1. Видно, что во всём диапазоне разрешённых частот отклонение не превосходит 1 дБ, а при ω , большей критической на 4%, отклонение не превосходит 0.1 дБ.

Заключение

В работе предложен способ задания акустического возмущения в круглом цилиндрическом канале на ненулевой азимутальной моде в виде начальных данных. Начальные данные задаются формулами (3–7), (15–17); временной

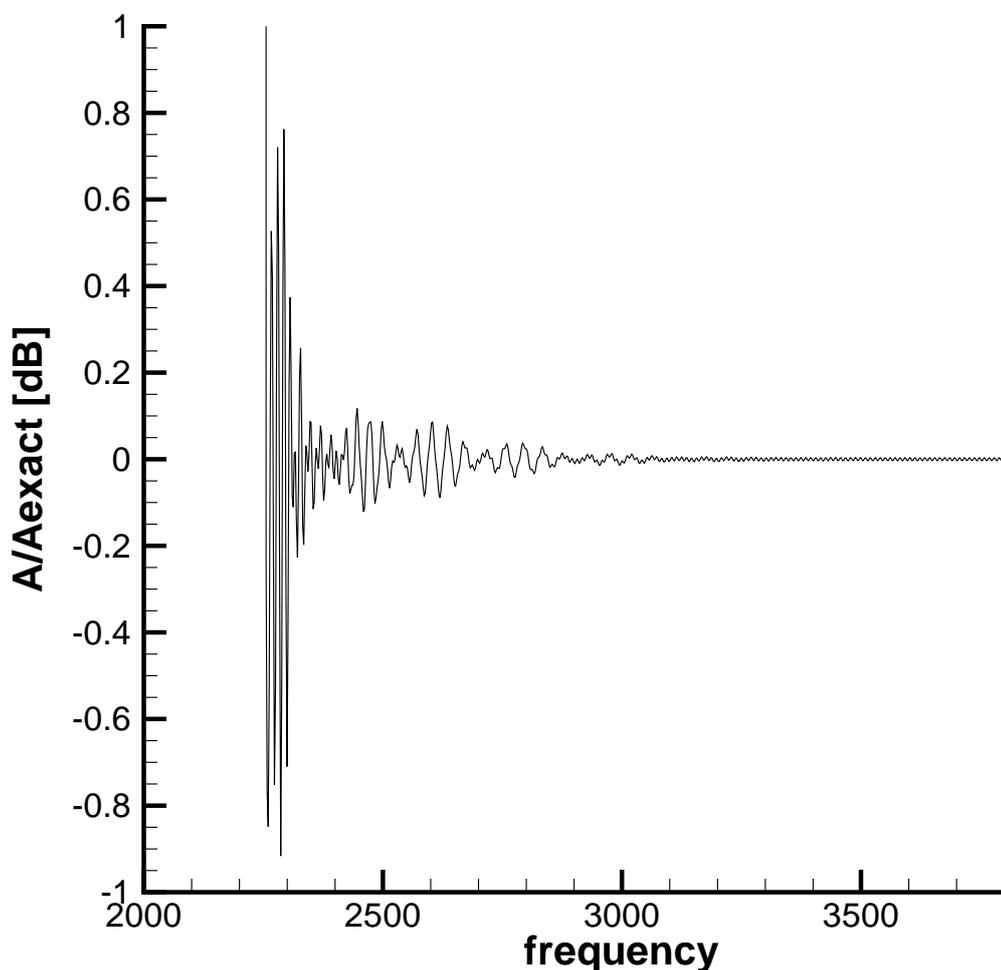


Рис. 1. Отклонение спектральной плотности от точного значения

спектр пульсации давления в контрольной точке, находящейся вдали от области локализации начальных данных, может быть вычислен цепочкой формул (10, 11, 13, 14).

При решении задач дифракции величиной, которую требуется измерить, является отношение спектральной плотности к спектральной плотности исходного сигнала. По сравнению с заданием одиночной гармоники, достоинством предлагаемого метода является возможность получения амплитудно-частотной характеристики во всём интересующем диапазоне частот за один расчёт. Требуемая длительность расчёта примерно равна $T \sim \hat{T} + 2\pi/\Delta\omega$, где \hat{T} – время достижения акустической волной точки, в которой измеряется сигнал, а $\Delta\omega$ – требуемое разрешение по частоте.

Список литературы

1. Дубень А. П., Козубская Т. К., Миронов М. А. Численное исследование резонаторов в волноводе // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. 2012. Т. 1. С. 146–156.
2. Осипов А. А., Реент К. С. Математическое моделирование распространения звука в проточном канале с импедансными стенками // Акустический журнал. 2012. Т. 48. С. 509–524.
3. Кремлева О. А., Шкундин С. З. Метод расчёта акустического поля внутри цилиндрического канала с потоком // Акустический журнал. 1998. Т. 44. С. 84–88.
4. Parett A. V., Eversman W. Wave envelope and finite element approximations for turbofan noise radiation in flight // AIAA Journal. 1986. Vol. 24. P. 753–760.
5. Nallasamy M., Sutliff D. L., Heidelberg L. J. Propagation of Spinning Acoustic Modes in Turbofan Exhaust Ducts // Journal of propulsion and power. 2000. Vol. 16. P. 736–743.
6. Доронина О. А., Жданова Н. С. Численное моделирование рассеяния акустических волн изолированными вихревыми структурами // Математическое моделирование. 2013. Т. 25. С. 85–94.
7. Исследование акустического течения в горле резонатора / Дубень А. П., Козубская Т. К., Королёв А. И. [и др.] // Акустический журнал. 2012. Т. 58. С. 80–92.
8. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. 4 изд. Москва: Государственное издательство физико-математической литературы, 1963.
9. Параллельный программный комплекс NOISEtte для крупномасштабных расчетов задач аэродинамики и аэроакустики / Абалакин И. В., Бахвалов П. А., Горобец А. В. [и др.] // Вычислительные методы и программирование. 2012. Т. 13. С. 110–125.

Оглавление

Введение	3
Уравнения Эйлера в цилиндрической системе координат	5
Линеаризация	7
Уравнения для заданной азимутальной моды	7
Азимутальная мода в однородном потоке в круглом цилиндрическом канале	8
Локализованный по z набор мод	10
Дисперсионное соотношение	12
Одно вспомогательное утверждение	14
Спектр сигнала	15
Выбор спектральной плотности	17
Вычисление начальных данных	18
Верификация	20
Заключение	20
Список литературы	22