



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • [Электронная библиотека](#)

[Препринты ИПМ](#) • [Препринт № 99 за 2016 г.](#)



ISSN 2071-2898 (Print)  
ISSN 2071-2901 (Online)

[Бобылев А.В.](#), [Быченков В.Ю.](#),  
[Потапенко И.Ф.](#)

Численное исследование  
стохастического ускорения  
электронов плазменными  
ВКР волнами

**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Бобылев А.В., Быченков В.Ю., Потапенко И.Ф. Численное исследование стохастического ускорения электронов плазменными ВКР волнами // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2016. № 99. 24 с.  
doi:[10.20948/prepr-2016-99](https://doi.org/10.20948/prepr-2016-99)  
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2016-99>

Ордена Ленина  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ  
имени М.В. Келдыша  
Российской академии наук

А.В. Бобылев, В.Ю. Быченков, И.Ф. Потапенко

Численное исследование  
стохастического ускорения электронов  
плазменными ВКР волнами

Москва  
2016

**А.В. Бобылев, В.Ю. Быченков, И.Ф. Потапенко**

*Численное исследование стохастического ускорения электронов плазменными ВКР волнами*

Численно исследуется нагрев и ускорение электронов плазменным кильватерным полем, создаваемым лазерным импульсом, на основе кинетического пространственно-неоднородного уравнения Фоккера–Планка. Релятивистски сильный лазерный импульс распространяется с заданными плотностью и квазистационарным спектром плазменных полей в плазме. Стохастический нагрев учитывается с помощью квазилинейной диффузии в пространстве импульсов. Вычисляется и исследуется структура функции распределения электронов под действием вынужденного комбинационного рассеяния (ВКР) вперед. В процессе распространения импульса вблизи за фронтом наблюдается формирование вытянутых хвостов распределения. Численное решение асимптотически совпадает с полученным аналитическим решением.

**Ключевые слова:** релятивистский лазерный импульс, вынужденное комбинационное рассеяние, кинетическое уравнение Фоккера-Планка, стохастическая диффузия, хвосты электронной функции распределения, аналитическое асимптотическое решение

**A.V. Bobylev, V. Yu. Bychenkov and I. F. Potapenko**

*Stochastic electron acceleration by plasmic waves stimulated by induced Raman scattering*

Electron heating and acceleration by wakefield caused by the laser pulse is studied with help of the space nonuniform Fokker–Planck equation. Relativistic intense laser pulse propagates in a plasma with prescribed values of density and quasi stationary plasma wave spectrum. Stochastic electron heating is described with help of quasi linear diffusion in the momentum space. The structure of the electron distribution function under induced Raman forward scattering is investigated. Previous to front, the extending distribution function tails is building-up in the course of impulse propagation. Numerical solution has the coincident asymptotic form with the obtained analytical solution.

**Key words:** relativistic laser pulse, induced Raman scattering, kinetic Fokker - Planck equation, stochastic diffusion, electron distribution function tails, analytic asymptotic solution

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант 16-01-00256

## Оглавление

Введение .....	3
Постановка задачи .....	4
Кинетическое уравнение для электронов: перенос и диффузия .....	6
Дискретная модель и численный алгоритм .....	9
Численные результаты .....	12
Аналитическое решение. Сравнение численного решения с асимптотикой .	16
Заключение .....	23
Библиографический список .....	23

## Введение

Лазерные методы ускорения заряженных частиц являются основным направлением исследований по взаимодействию коротких лазерных импульсов релятивистской интенсивности с плазмой. При этом, наибольший прогресс достигнут в ускорении электронов при распространении мощных световых импульсов в разреженной плазме. В этом случае получены максимальные энергии электронов, ускоряемых плазменным кильватерным полем, создаваемым фемтосекундным лазерным импульсом [1, 2]. Именно короткий лазерный импульс с продольным размером, сравнимым с длиной волны плазменных колебаний, эффективен для получения коротких моноэнергетических (квазимоноэнергетических) электронных пучков.

Вместе с тем, представляет интерес и получение распределенных по энергии электронных пучков высоких энергий, например, для моделирования астрофизических потоков электронов [3] или для радиационных испытаний космической электроники в лаборатории [4]. Такие пучки, например, можно получить при возбуждении плазменных волн более длинными лазерными импульсами в результате развития вынужденного комбинационного рассеяния (ВКР) [5] - [8]. В отличие от генерации квазимоноэнергетических сгустков ультракоротким лазерным импульсом, полный заряд релятивистских электронов с широким спектром, которые генерируются более длинным лазерным импульсом (когда длительность импульса превосходит длину плазменной волны), оказывается существенно выше, делая последнюю схему взаимодействия привлекательной для упомянутых выше приложений. Отметим, что для объяснения лазерной генерации электронов с широкими энергетическими спектрами привлекалось представление о стохастическом характере нагрева электронов при взаимодействии лазерных импульсов как с газовыми, так и твердотельными мишенями [9] - [14].

Стохастический нагрев и ускорение электронов турбулентными плазменными полями, возникающими на нелинейной стадии ВКР, эффективные для ВКР в направлении вперед (ВКРВ) и для достаточно длинных лазерных импульсов, типичны на уровне времен порядка  $1ps$ . Возникновение высокоэнергетичных электронов объясняется рассеянием частиц на интенсивных ВКРВ плазменных волнах. Это диффузионное рассеяние электронов в пространстве импульсов может быть описано уравнением Фоккера–Планка в квазилинейном приближении с помощью диффузионного оператора, в котором коэффициент диффузии пропорционален плотности энергии нерегулярных (турбулентных) плазменных полей [13]. Такая диффузия приводит к нагреву электронов и формированию высокоэнергетических хвостов распределения релятивистски горячих электронов.

Следуя такой модели, в данной работе на основе численного решения кинетического уравнения с использованием явной конечно-разностной схемы расчета изучается распределение электронов при ВКРВ за фронтом релятивистски сильного лазерного импульса, распространяющегося в плазме с заданными плотностью и квазистационарным спектром плазменных полей.

Материал данной работы излагается далее в следующем порядке. Обсуждаются постановка задачи, кинетическое уравнение для электронов и анализ взаимодействия входящих в это уравнение операторов. Далее приводятся дискретная модель и алгоритм численного решения кинетического уравнения для электронов в 1D2V геометрии. Обсуждаются результаты численного моделирования для различных параметров расчета. Проведенное численное моделирование дополняется аналитической моделью, в которой рассматривается решение уравнения Фоккера–Планка при упрощающих предположениях. В заключение, численные результаты сравниваются с асимптотическими результатами приближенного аналитического подхода. Продемонстрировано их хорошее совпадение.

## Постановка задачи

Стохастический нагрев электронов может быть исследован на основе квазилинейной диффузии [15], [16] с помощью кинетического уравнения Фоккера–Планка. Это уравнение описывает эволюцию электронной функции распределения как рассеяние частиц в пространстве импульсов, нагрев электронов и их ускорение: отрастание высокоэнергетических хвостов функции распределения. Для медленно меняющейся части функции распределения электронов, усредненной по периоду плазменного поля, кинетическое уравнение можно записать в форме квазилинейного оператора. Одномерное по геометрическо-

му пространству и пространству импульсов 1D1V кинетическое уравнение имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_x \frac{\partial f}{\partial x} = \theta(v_g t - x) \frac{\partial}{\partial p_x} \left( D_{xx} \frac{\partial f}{\partial p_x} \right). \quad (1)$$

Плотность электронов  $n_e(x)$  и коэффициент квазилинейной диффузии  $D_{xx}$ , содержащий информацию о характере взаимодействия с волнами, в пространстве электронных импульсов [13] определяются следующим образом:

$$n_e(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, p_x, t) dp_x, \quad D_{xx} \simeq \frac{8\pi^2 e^2}{|v_x|} W \left( k_x = \frac{\omega_{pe}}{|v_x|} \right).$$

В правой части уравнения (1), с помощью функции единичного скачка  $\theta(x)$  (функции Хевисайда), в явном виде введен фронт лазерного импульса  $x_f(t)$ , распространяющегося по плазме с групповой скоростью  $v_g$ :

$$x_f(t) = v_g \cdot t, \quad \theta[x_f(t) - x] = \begin{cases} 1, & x_f(t) \geq x, \\ 0, & x_f(t) < x. \end{cases} \quad (2)$$

За фронтом импульса  $0 \leq x < x_f$  имеет место диффузионное рассеяние (нагрев) электронов. Импульс электрона  $p \equiv p_x$  связан с его скоростью,  $v \equiv v_x$ , релятивистским соотношением,

$$\frac{v}{c} = \frac{p}{(m_e^2 c^2 + p^2)^{1/2}}.$$

Коэффициент диффузии,  $D_{xx}$ , определяется спектральной плотностью энергии плазменных волн  $W(k_x)$  для резонансного волнового числа  $\omega_{pe}/v$ , где  $\omega_{pe}$  – электронная ленгмюровская частота невозмущенной плазмы:

$$\omega_{pe} = (4\pi e^2 n_{e0}/m_e)^{1/2}.$$

Как только релятивистски интенсивный лазерный импульс (с безразмерной амплитудой  $a = eE_L/m_e \omega c \sim 1$ ) входит в плазму, за его фронтом возбуждаются ВКРВ плазменные колебания с волновым вектором  $k_x \approx k_p = \omega_{pe}/c$ . Амплитуда этих колебаний нарастает от фронта и, в плазме с электронной плотностью  $n_{e0}$ , составляющей несколько процентов от критической плотности, насыщается на уровне порядка 10% от амплитуды лазерного поля буквально на нескольких длинах плазменной волны [13]. В режиме насыщения спектр продольного электрического поля оказывается обогащен длинными волнами,  $k_x < k_p$ , и подобен белому шуму с коротковолновой отсечкой при  $k_x \approx k_p$ . Поэтому далее, в соответствии с вышесказанным, для качественного описания спектра ВКРВ плазменных волн мы принимаем

$$W = W_0 \{ \theta(k_p - k_x) + \theta(k_x - k_p) \exp[(k_p - k_x)/\delta k] \} .$$

Здесь,  $W_0 = E_p^2/8\pi k_p$  пропорциональна полной плотности энергии плазменных колебаний

$$E_p^2/8\pi = \int_0^{\infty} W dk_x, \quad \delta k \ll k_p .$$

Тогда для коэффициента квазилинейной диффузии мы получим следующее приближенное выражение

$$D_{xx} = \omega_{pe}(m_e c)^2 a_p^2 \frac{c}{|v|} \exp \left[ \left( 1 - \frac{c}{|v|} \right) \frac{k_p}{\delta k} \right],$$

где  $a_p^2 = (eE_p/m_e \omega_{pe} c)^2$  – безразмерная плотность энергии плазменных волн.

Наша цель – найти решение уравнения (1), (2), которое определяет эволюцию функции распределения под действием двух механизмов: релятивистского переноса в геометрическом пространстве, а также процесса диффузии в импульсном пространстве, с движущейся во времени границей диффузионного воздействия,  $x_f = v_g t$ , которое захватывает новые области невозмущенной плазмы  $x_f(t) \geq x > 0$ .

## Кинетическое уравнение для электронов: перенос и диффузия

Прежде чем перейти к описанию дискретной модели и численному решению, перенормируем величины, входящие в уравнение (1), (2). Используем в качестве нормировки следующие характерные величины:

$$f \rightarrow f \cdot \frac{n_0}{m_e c}, \quad p_x \rightarrow p_x \cdot m_e c, \quad v_x \rightarrow v_x \cdot c, \quad t \rightarrow t \cdot \frac{1}{\omega_{pe} a_p^2}, \quad x \rightarrow x \cdot \frac{c}{\omega_{pe} a_p^2}. \quad (3)$$

Кинетическое уравнение для электронов в безразмерных переменных примет вид

$$f_t + u(p) \frac{\partial f}{\partial x} = \theta(v_g t - x) \frac{\partial}{\partial p} \left[ D(p) \frac{\partial f}{\partial p} \right], \quad 0 \leq x < \infty, \quad -\infty < p < \infty, \quad t \geq 0, \quad (4)$$

где

$$u(p) = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}, \quad D(p) = D_0 \cdot \frac{1}{|u|} \exp \left[ \left( \frac{|u| - 1}{\delta |u|} \right) \right], \quad \delta = \delta k / k_p. \quad (5)$$

Функция  $u(p)$  меняет знак в точке  $p = 0$  и достаточно быстро выходит на практически постоянное значение. Из графика (рис.1) видно, что  $|u(p)| \approx 1$  уже для  $p \geq 5$ . В отсутствие стохастического нагрева решением уравнения (1) являются бегущие волны, распространяющиеся в противоположных направлениях с изменяющейся скоростью  $0 \leq u(p) \leq \pm 1$ : правая – для отрицательных (по отношению к  $x$ ) импульсам и левая – для положительных  $f(t, x, p) \sim f_0(t, x - u(p) \cdot t, p)$ .

Диффузионный оператор выполаживает функцию распределения в импульсном пространстве. Множитель  $D_0$  в коэффициенте  $D(p) = D(|u(p)|)$  определяет в уравнении (4) интенсивность нагрева. Для простоты эта постоянная в численном решении, при соответствующей нормировке, может считаться равной единице. Коэффициент диффузии  $D(p) \rightarrow 1$  при  $p \rightarrow \infty$ . Постоянная  $\delta$  в формуле (5) в рассматриваемой задаче имеет значения порядка  $\delta \leq 0.2 \div 0.3$ . Этот параметр определяет зависимость от импульса коэффициента диффузии, который резко изменяется в узкой окрестности значений импульса  $p = 0$  и, по сути, определяет интенсивность (скорость) взаимодействия плазмы с волнами. То есть, чем холоднее плазма (уже начальная функция распределения электронов), тем больше времени займет процесс диффузии и, соответственно, стохастического нагрева. На рис. 2 приведена зависимость  $D(p)$  для  $\delta = 0.3$ , из которой видно, что  $D(p) \simeq 1$  для  $|p| \geq 5$  и  $D(p) \simeq 0$   $|p| \ll 1$ . Следовательно, стохастический нагрев вблизи значения импульса  $p = 0$  будет медленным и существенным образом зависит как от степени размытости начальной функции распределения, так и от времени расчета (времени действия диффузии). При этом в непосредственной близости  $p = 0$  функция распределения  $f(x, p, t)$  будет оставаться неизменной.

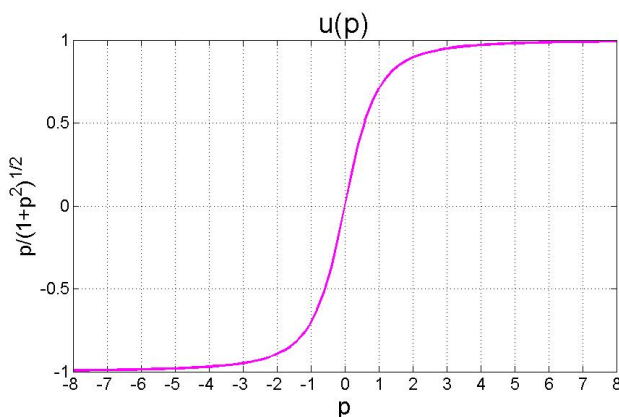


Рис.1. Зависимость  $u(p)$ .

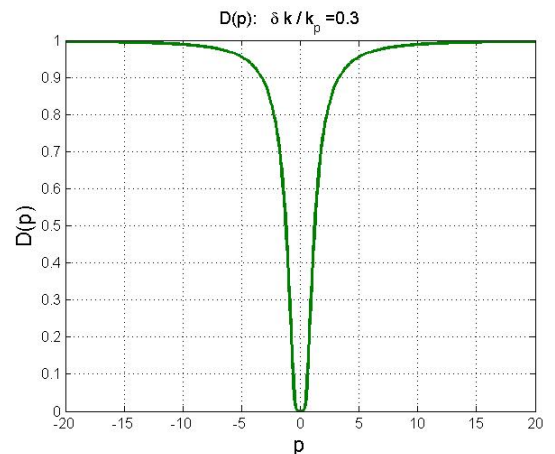


Рис.2. Зависимость  $D(p)$ .

Эволюция функции распределения электронов определяется в уравне-



нии (4), (5) взаимодействием операторов переноса по пространству и диффузии в импульсном пространстве. Диффузионный оператор нагревает электроны и формирует высокоэнергетичные хвосты функции распределения. Его воздействие вблизи фронта зависит от  $v_g$ : чем меньше  $v_g$ , тем больше размывание распределения, тем больше нагрев. Обычное значение групповой скорости близко к скорости света  $1 \geq v_g \geq 0.9$ , однако интересны и меньшие значения  $v_g \sim 0.7 - 0.8$ . Сделаем замену переменных в уравнении (4):  $f(x, p, t) \rightarrow \tilde{f}(\xi, p, t)$ , где  $\xi(t) = v_g t - x$ . Получим уравнение

$$\tilde{f}_t + u_1(p) \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \xi} = \tilde{D}(\xi(t), p) \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial p^2}, \quad 0 \leq \xi(t) < x_f(t), \quad -\infty < p < \infty, \quad t > 0, \quad (6)$$

в котором  $u_1(p) = v_g - u(p)$ . Это уравнение имеет ту же структуру, что и исходное уравнение (4), однако в нём явным образом выделено действие групповой скорости  $v_g$ , которая входит теперь в характеристику уравнения (6)  $u_1(p)$ . На рис. 3 показана зависимость функции  $u_1(p)$  от импульса для различных значений  $v_g$ . Видно, что  $u_1(p)$  имеет небольшие отрицательные значения для реальных значений групповой скорости  $v_g$ . Можно сказать, что  $p_g^2 = v_g^2 / (1 - v_g^2)$  является точкой, в которой решение левой части уравнения (уравнение переноса) разбивается на левую и правую волну. Если мы возьмем  $v_g > 1$ , то  $u_1(p) > 0$  для любых значений импульса.

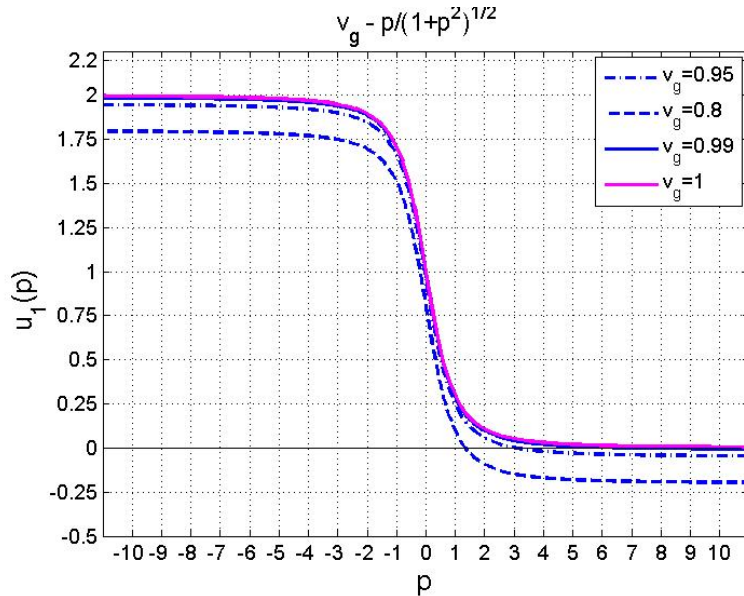


Рис. 3. Зависимость  $u_1(p)$  для различных значений параметра  $v_g$ .

Действие диффузионного оператора приводит к размыванию начальной функции распределения электронов, формированию высокоэнергетичных хвостов вблизи фронта лазерного импульса с последующим выполаживанием

распределения в импульсном пространстве далеко за фронтом  $0 < x \ll x_f(t)$  лазерного импульса, распространяющегося в плазме со скоростью  $v_g$ . Чем больше скорость  $v_g$ , тем меньше времени на диффузионное рассеяние электронов вблизи фронта и тем профиль функции распределения ближе к начальному распределению сразу за фронтом импульса.

## Дискретная модель и численный алгоритм

Предполагается, что при  $t = 0$  лазерный импульс входит в однородную плазму, находящуюся слева от границы  $x = 0$ . Начальное распределение электронов однородно по пространству и сосредоточено в узкой области  $-\Delta p \leq p \leq \Delta p$ ,  $\Delta p \ll 1$  (холодная плазма). Например, это может быть распределение Гаусса, дельта-функция и т.п. Эволюция электронов описывается уравнением

$$f_t + u(p) \frac{\partial f}{\partial x} = D(t, x, p) \frac{\partial^2 f}{\partial p^2}, \quad 0 \leq x < \infty, \quad -\infty < p < \infty, \quad t \geq 0,$$

где

$$u(p) = \frac{p}{\sqrt{1 + p^2}}, \quad D(t, x, p) = D(p) \cdot \theta[\xi(x, t)], \quad \xi(x, t) = x_f(t) - x.$$

Начальное распределение определяет плотность

$$n(x) = \int dp f_0(x, p).$$

Вследствие того, что релятивистский импульс захватывает новые области пространства, плотность плазмы растет со временем. Для удобства численного рассмотрения можно ввести дополнительную нормировку на функцию распределения исходя из полного рассматриваемого интервала  $x_{max}$ , например так, чтобы

$$\int_0^{x_{max}} dx n(x, t) = 1.$$

Перейдем к описанию дискретной модели для уравнения. Рассмотрим расчетную область размера  $x_{max} = L$ . Введем пространственно-временную сетку  $\omega = \omega_h \times \omega_t$ , где

$$\begin{aligned} \omega_x &= \{x_{k+1} = x_k + \Delta x, \quad k = 0, 1, \dots, K, \quad x_0 = 0, \quad x_K = L\}, \\ \omega_t &= \{t^{n+1} = t^n + \Delta t, \quad n = 0, 1, \dots, \quad t^0 = 0\}, \\ \omega_p &= \{p_{j+1} = p_j + \Delta p, \quad j = 0, 1, \dots, J, \quad p_0 = -p_{max}, \quad p_J = p_{max}\}. \end{aligned}$$

**Начальное условие** выбираем однородным по пространству, для каждой точки  $x$  виде гауссового распределения по импульсам с узким разбросом около  $p = 0$ . Типичный пример такого распределения в разностном случае представлен на рис. 4.

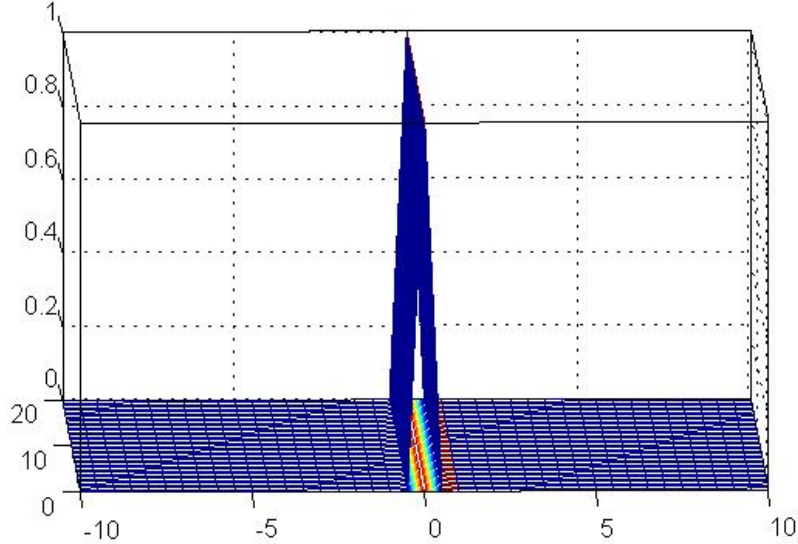


Рис. 4. Пример аппроксимации начальной функции распределения.

Плотность электронов, как и другие интегральные характеристики, как обычно, аппроксимируются суммами

$$\int_{-\infty}^{\infty} dp f^0(x, p) = n(x) \quad \propto \quad \sum_j \Delta p f_{k,j}^0 = n_k.$$

Для корректной сшивки начальной функции распределения с граничным условием введено отступление на шаг  $\Delta x$  в точке  $x_0 = 0$  :  $f^0(x_0, p_j) = 0$  для всех  $p_j$ ,  $j = 1, \dots, J$ .

**Граничные условия.** Поскольку мы решаем начально-граничную задачу, нам нужно определить граничные условия по пространству  $x$  и по моментному пространству  $p$ .

Граничные условия по импульсу  $p$  для диффузионного оператора – это условия отсутствия потока частиц через границы области:

$$\left[ D(p) \frac{\partial f}{\partial p} \right]_{p_{min}}^{p_{max}} = 0.$$

Граничные условия для оператора переноса по пространству ставятся, исходя из характера решения для дифференциального уравнения – бегущей вправо или влево волны, а также некоторых физических соображений. А именно, мы предполагаем, что слева от границы  $x \leq 0$  имеется вакуум, т.е.

частицы не влетают в рассматриваемую область. Следовательно, на левой границе

$$x = 0 : \quad f(t, x = 0, p > 0) = 0$$

для частиц, летящих внутрь области с  $p > 0$ . На правой границе, т.е. в области, близкой к фронту импульса  $x_f(t)$ , для функции налетающих частиц с  $p > 0$  граничное условие не требуется.

Для частиц, летящих в противоположном направлении, т.е. имеющих отрицательные (относительно  $x$ ) импульсы, граничное условие имеет вид

$$x = x_f(t) : \quad f(t, x, p < 0) = f_{k,j}^0 = \delta(p).$$

На противоположной границе  $x = 0$  для налетающих частиц с  $p < 0$  граничное условие для функции распределения не требуется, функция остается такой, какой она получается из численного решения уравнения.

Заметим, что граничные условия при  $x = 0$  могут меняться в соответствии с другой физической постановкой задачи. Однако в данной работе нас интересует, главным образом, состояние плазмы вблизи фронта лазерного импульса, и поэтому условия при  $x = 0$  не играют существенной роли.

В разностной схеме граничные условия по импульсу аппроксимируются соответствующим образом в граничных точках алгебраического уравнения. Отметим, что в расчетах область импульсного пространства  $[-p_{max}, p_{max}]$  выбиралась достаточно большой так, чтобы функция распределения была близка к машинному нулю (хотя это и не является обязательным условием).

Мы используем явную конечно-разностную схему расчета. Разностная аппроксимация адвективного члена (переноса)  $\partial f / \partial t + u(p) \partial f / \partial x$  базируется на down-wind (производная назад) аппроксимации и выглядит следующим образом:

$$Tr_{k,j} = \frac{1}{2\Delta x} \left[ u_j \frac{fn_{k+1,j} - fn_{k-1,j}}{2} - |u_j| \frac{(fn_{k+1,j} - 2fn_{k,j} + fn_{k-1,j})}{2} \right].$$

Оператор диффузии в импульсном пространстве аппроксимируется обычным образом с учетом граничных условий:

$$\begin{aligned} Tp_{k,j}^+ &= D(k) \frac{f_{k,j+1}^n - f_{k,j}^n}{dp}; & Tp_{k,j}^- &= D(k) \frac{f_{k,j}^n - f_{k,j-1}^n}{dp}; & j &= 2, \dots, J-1; \\ Tp_{k,1} &= 2 \frac{Tp_{k,j}^+}{dp}; & Tp_{k,J} &= -2 \frac{Tp_{k,j}^-}{dp}; & Tp_{k,j} &= \frac{Tp_{k,j}^+ - Tp_{k,j}^-}{dp}. \end{aligned} \quad (7)$$

Тогда сеточная функция распределения на новом шаге  $t^{n+1}$  (первый порядок аппроксимации по времени) определяется явным выражением

$$f^{n+1} = f_{k,j}^n - dt \cdot (Tr_{k,j} + Tp_{k,j}).$$

Шаги сетки, которые мы брали в расчетах, менялись. Обычно выбирался шаг  $\Delta p = \Delta x = 0.05$  (из-за экономии времени расчета и приемлемого уровня ошибки аппроксимации). Шаг по времени ограничивается максимальной величиной начальной функции распределения и условием Куранта. Строго говоря, если  $1 - \varepsilon \leq v_g \leq 1 + \varepsilon$  и  $\varepsilon \sim 10^{-4} - 10^{-2}$ , то для малых  $\varepsilon$  желательна более мелкая сетка по импульсам. Кроме того, более мелкая сетка улучшает аппроксимацию и снижает уровень численной диффузии. Однако мы оставим детальное исследование таких значений на будущее для специально рассматриваемых конкретных приложений, как и функциональную зависимость коэффициента диффузии, более детально приближенную к конкретному эксперименту.

## Численные результаты

Приведем иллюстративные графики плотности и энергетической характеристики ( $\int f p^2 dp$ ). Как уже отмечалось, при движении фронта лазерного импульса его воздействие захватывает новые фракции плазмы, вследствие чего плотность числа частиц растет со временем. Вместе с тем, возможен уход частиц через границу  $x = 0$ . На рис. 5 слева приведен график плотности (в произвольных единицах) в зависимости от переменной  $\xi$  для различных моментов времени. Плотность скачком вырастает около значения  $v_g \cdot t \approx x_f$ . Справа на рис. 5 дана зависимость от времени энергии, энергии за фронтом импульса и плотности, общей и сразу за фронтом, нормированные на свое начальное значение.

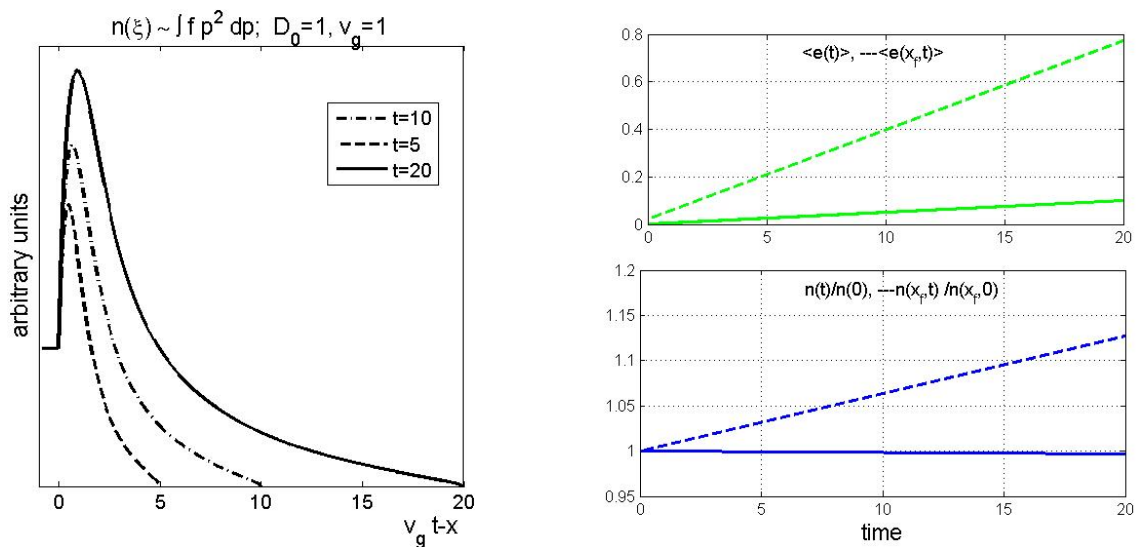


Рис. 5. Зависимость от времени плотности электронов  $n(\xi)$  (слева). Зависимость энергии и плотности от времени - справа. Пунктирные линии приведены для значений величин в непосредственной близости фронта импульса.

Видно, что общая энергия слегка растет из-за стохастического нагрева, а энергия электронов за фронтом импульса нарастает существенно. Общая (нормированная на свое начальное значение) плотность слегка уменьшается (утечка через границу), однако плотность около фронта также нарастает заметно.

Теперь приведем результаты численного расчета эволюции функции распределения для коэффициента диффузии, зависящего резко от импульса в окрестности нулевых его значений,  $\delta = 0.3$  (5). Видно, что нормированная на свое значение при  $p = 0$  функция распределения,  $f(x, p, t)/f(x, 0, t)$  состоит из двух частей (рис. 6) для положительных и отрицательных импульсов с особенностью в точке  $p = 0$ . Для положительных импульсов вблизи фронта отрастают ускоренные хвосты, в то время как для отрицательных импульсов решение практически не меняется. Сшивка этих двух ветвей решения происходит с начальной функцией распределения, в узкой окрестности  $p = 0$ . Справа показан этот график более детально.

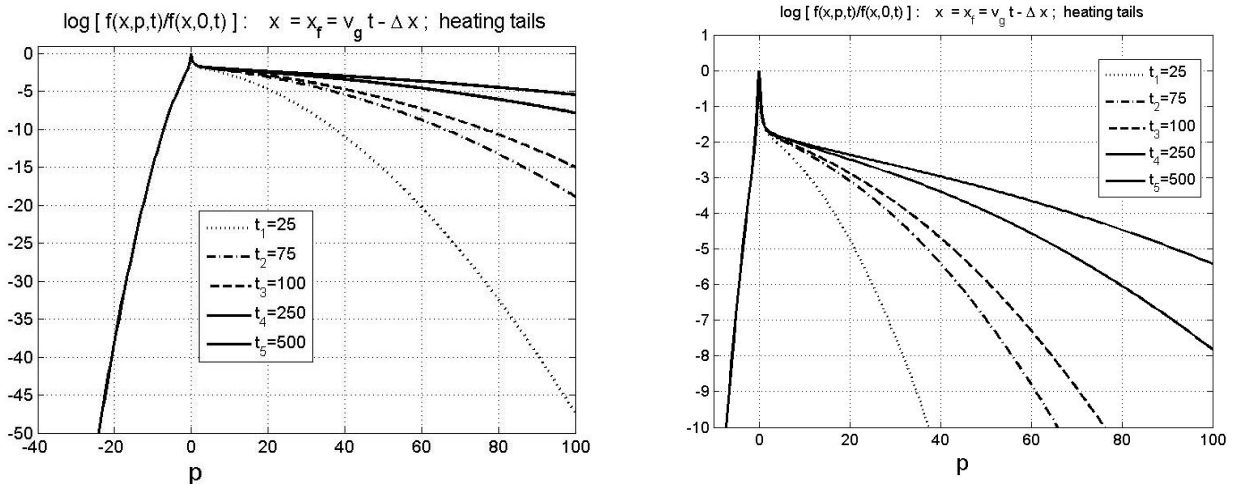


Рис. 6. Нормированная функция вблизи фронта лазерного импульса  $x_f(t)$ .

Как видно из рисунка 6, для момента времени  $t_2 = 75$  (штрих-пунктирная линия) хвостовое распределение электронов значительно выше, чем для времени  $t_1 = 25$  (пунктирная линия). Изменение происходит за интервал времени  $\Delta t = 50$ . С другой стороны, для моментов времени  $t_4 = 250$  и  $t_5 = 500$  (сплошные линии), то есть за интервал  $\Delta t = 250$ , функции меняются мало. В рассматриваемой области импульсов  $0 < p \leq 100$  происходит, в целом, установление функции распределения.

Если мы будем наблюдать за фиксированной точкой  $x$ , то увидим, что решение со временем выравнивается по импульсам. На рис. 7 представлена эволюция функции распределения, которая выполаживается по импульсам со

временем, при этом максимум нормированной функции смещается в сторону  $p < 0$  (справа это видно нагляднее), поскольку в плазму (для положительных направлений импульса) частицы не влетают и функция распределения равна 0. Фронт импульса уходит вперед и далеко за фронтом функция распределения электронов размывается, нагревается и выравнивается.

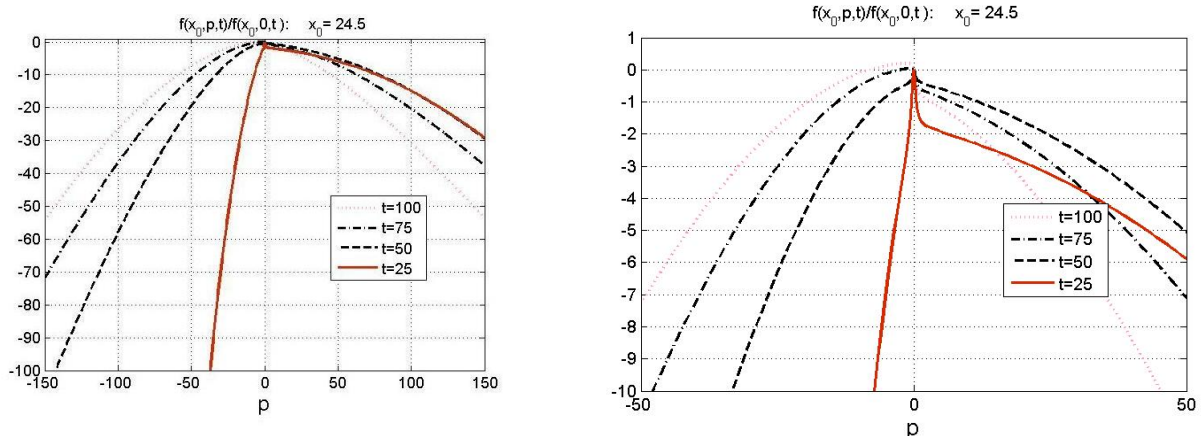


Рис. 7. Эволюция функции распределения во времени для фиксированного значения  $x$ .

Более ясно картина эволюции электронной функции распределения во времени представлена на рис. 8 для трех значений  $x$  и  $t$  в виде ее линий уровня в координатах  $x, p$ . Этот график хорошо иллюстрирует вышесказанное.

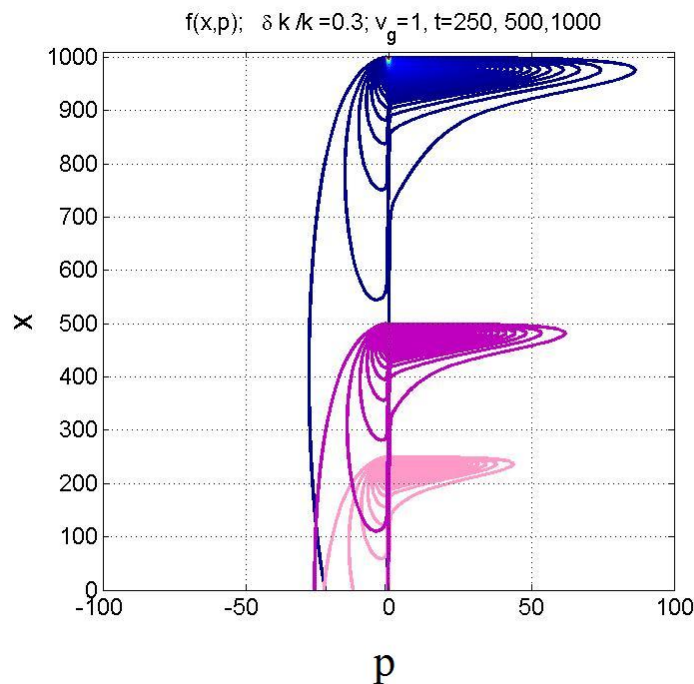


Рис. 8. Линии уровня функции распределения в координатах  $x, p$  для трех моментов времени  $t$ .

Рассмотрим упрощенный вариант задачи, когда коэффициент квазилинейной диффузии в уравнении (4) постоянен в импульсном пространстве. В этом случае начальная функция распределения размывается интенсивно в окрестности нулевого импульса за короткий промежуток времени. Однако можно ожидать, что в области  $|p| \rightarrow \infty$  поведение функции распределения описывается вышеуказанным образом.

В качестве иллюстративного примера приведем расчет функции распределения для постоянного коэффициента  $D(p) = 1$  и  $v_g = 1$ . Видно (рис. 9), что общий функциональный характер решения в области  $|p| \gg 1$  имеет такой же вид, как и для случая  $D \neq const$  в окрестности  $p = 0$ . На рис. 9 приводится нормированная функция распределения за фронтом для двух моментов  $x_f(t_1, t_2)$  (в логарифмическом масштабе). Решение состоит из двух частей, сшитых в точке  $p = 0$ . Хвосты распределения существенно отрастают для положительных импульсов, в то время как для отрицательных направлений импульса функция практически не меняется. То есть, мы наблюдаем качественно то же поведение распределения, исключая область  $|p| < 1$ .

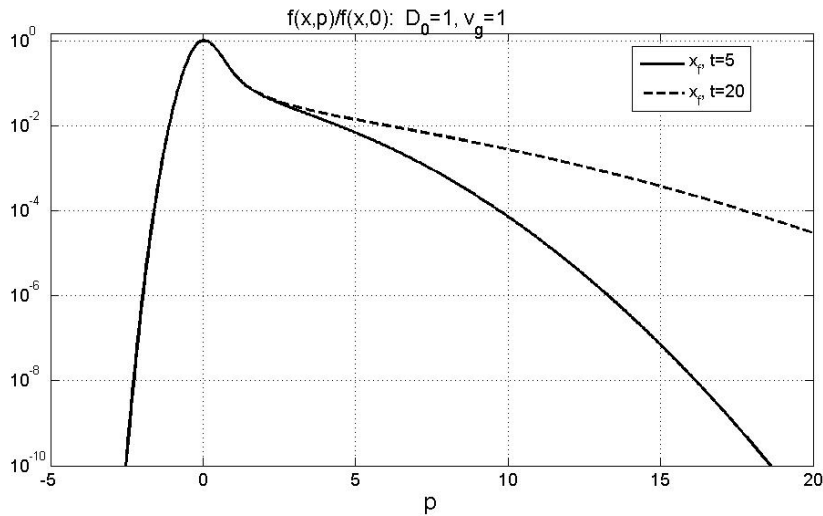


Рис. 9. Зависимость функции распределения от импульса в разные моменты времени около фронта  $x_f$ .

На рис. 10 функция распределения дана для фиксированного значения  $x$  и двух моментов времени: один —  $t \simeq x_f$  и второй —  $t \simeq 2x_f$ . Как видно, со временем электронная функция под постоянным действием диффузии в областях далеко за фронтом, как и должно быть, выполаживаются, сохраняя качественно характер распределения и обладая теми же особенностями в области  $|p| \gg 1$ . Максимум смещается в отрицательную область и в области  $|p| < 1$  функция имеет более плавную зависимость.



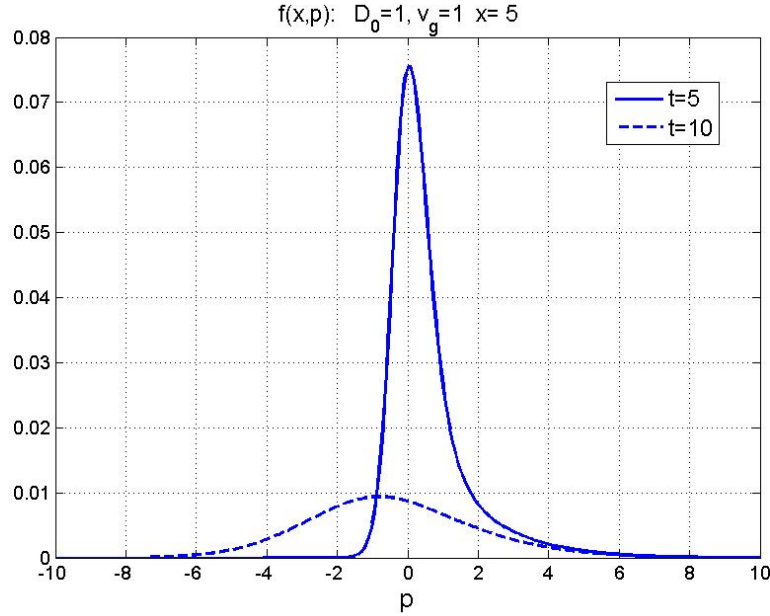


Рис. 10. Зависимость функции распределения от импульса при фиксированном значении  $x \simeq 5$  в разные моменты времени  $t \simeq x_f$ ,  $t \simeq 2 \cdot x_f$ .

Эти численные расчеты дают идею, как упростить задачу получения аналитического решения. А именно, исследовать область, далекую от нулевых импульсов  $|p| \gg 1$ , и рассмотреть асимптотическое аналитическое решение уравнения (4), (5).

## Аналитическое решение. Сравнение численного решения с асимптотикой

Для получения аналитического решения уравнения (4),(5) упростим задачу, приняв коэффициент квазилинейной диффузии постоянным, не зависящим от импульса:  $D(p) = 1$ , т.е. равным его значению при  $|p| > 5$ . Таким образом, мы отсекаем резкую зависимость распределения от  $D(p)$  в окрестности  $0 < |p| < 5$  и вносим в этой области дополнительную (нефизическую) диффузию. Однако, в области  $|p| \gg 1$  асимптотика должна правильно описывать решение. Мы не будем приводить подробные выкладки, а приведем наводящие рассуждения и укажем основную идею получения асимптотического решения.

Пусть  $|p| \gg 1$ , тогда  $u(p) = \pm 1$  и  $D(p) = D_0 = 1$ ,  $v_g = 1$ . Уравнение (4) примет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = \theta[x_f(t) - x] \frac{\partial^2 f}{\partial p^2}. \quad (8)$$

Введем (формально) функции  $f^\pm$  для отрицательных и положительных импульсов в уравнении (8). Разобьем область решения на две подобласти: область, где действует оператор квазилинейной диффузии, и область, где он отсутствует.

Тогда уравнение (8) можно записать в виде системы двух уравнений:

$$\begin{cases} f_t^\pm \pm f_x^\pm = f_{pp}, & D(x, t) = 1 \quad ; \\ f_t^\pm \pm f_x^\pm = 0, & D(x, t) = 0 \quad . \end{cases} \quad (9)$$

Введем новые переменные

$$z = \frac{t - x}{2}, \quad y = \frac{t + x}{2},$$

для которых система уравнений (9) для "положительной" и "отрицательной" функций  $f^\pm$  в этих двух подобластях запишется в виде следующей системы:

$$\frac{\partial f^+}{\partial y} = f_{pp}, \quad \frac{\partial f^-}{\partial z} = f_{pp}, \quad D = 1;$$

и

$$\frac{\partial f^+}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial f^-}{\partial z} = 0, \quad D = 0.$$

При этом

$$y + z = t, \quad y - z = x, \quad y = \frac{1 + v_g}{1 - v_g} z.$$

Единичная функция, зависящая от времени, которая представляет коэффициент стохастической диффузии, примет вид  $\theta[x_f(t) - x] = \theta[v_g(z + y) - (y - z) = z(1 + v_g) - y(1 - v_g)]$ , где  $x_f = v_g t$  (4).

Не вдаваясь в детали получения асимптотического решения, дадим промежуточный результат:

$$f^- \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-x)}} e^{-\frac{p^2}{2(t-x)}} - \frac{\gamma}{t+x} \int_{p/\sqrt{2(t-x)}}^{\infty} du e^{-u^2}; \quad p < 0;$$

$$f^+ \simeq \frac{\beta}{\sqrt{(t-x)}} \int_0^x \frac{ds e^{-p^2/4s}}{\sqrt{s(x+t-2s)}}, \quad p > 0,$$

где  $\gamma, \beta$  – некоторые, приблизительно равные единице, постоянные.

Окончательно получим для  $|p| \gg 1$ ,  $u(p) = \pm 1$ ;  $D_0 = 1$ ,  $v_g = 1$  следующее асимптотическое решение:

$$\begin{aligned} f^-(x, p, t) &\approx F \cdot \exp[-p_{norm}], & p < 0, & & p_{norm} = \frac{p^2}{2(t-x)}; \\ f^+(x, p, t) &\approx F \cdot \operatorname{erfc}[-p_{norm}], & p > 0, & & p_{norm} = \frac{p}{2\sqrt{x}}; \\ F = f(x, 0, t) &= \frac{a}{\sqrt{2\pi(t-x)}}, & \operatorname{erfc}(z) &= 1 - \operatorname{erf}(z); & \alpha \approx 1, \end{aligned} \quad (10)$$

где  $\operatorname{erf}(z)$  – функция ошибок

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\pi} \int_0^z du e^{-u^2}.$$

Мы получили функцию распределения электронов, составленную из двух функций для разнонаправленных импульсов. Эта функция имеет особенность в точке  $p = 0$ , в которой два решения уравнения (8) (системы уравнений (9)) сшиваются. Стоит отметить, что аналитическая функция распределения электронов для положительно направленных импульсов  $f^+$  зависит от времени только через множитель  $F$ , в то время как для отрицательных импульсов зависимость  $f^-$  от времени и пространства  $(t, x)$  входит множителем в аргумент экспоненты. Вблизи фронта  $x = x_f \approx t$  функция  $F(x, t)$ , а следовательно и распределение электронов для положительных импульсов  $f^+$ , резко возрастают. В то же время для отрицательных импульсов в этом случае имеется резкое спадание  $f^-$  из-за экспоненциальной зависимости в аргументе  $p_{norm}$ . Можно сказать, что решение имеет, своего рода, параметр автотомодельности  $\xi_f(t) = x_f(t) - x$ . Напомним, что решение (10) справедливо в области  $|p| \gg 1$ . В реальной постановке решение в области  $p \approx 0$  будет существенным образом зависеть от поведения коэффициента диффузии и начальной функции распределения, которая в этой области остается практически неизменной в ходе процесса.

Тем не менее, интересно проверить, насколько полученное решение (10) отвечает реальной постановке задачи и как его можно использовать для оценок поведения электронной функции распределения в ходе распространения лазерного импульса в плазме. Приведем несколько численных расчетов для постоянного коэффициента диффузии  $D = \text{const}$  и различных значений групповой скорости  $v_g$  и сравним их с численным решением для  $D(p) \neq \text{const}$ .

Ниже демонстрируются графики расчетов, представленных в виде линий уровня функции распределения в координатах  $(\xi, \pm p^2)$ . В этом представлении координата фронта импульса  $\xi = 0$ , а  $\xi_{max} = v_g \cdot t$ . Функция нормирована

на множитель  $F$  из формулы (10). При такой нормировке выявляется авто-модельность распределения.

На рис. 11 сравниваются два варианта для  $v_g = 0.99$ ,  $D(p) = D_0$  и двух коэффициентов диффузии  $D_0^1 = 0.1$  и  $D_0^2 = 0.25$ . Функции распределения приведены в одинаковый момент времени. Разность в размерах расплывания функции распределения пропорциональна соотношению двух коэффициентов диффузии  $D_0$ . Цветом выделены более горячие и холодные участки распределения электронов.

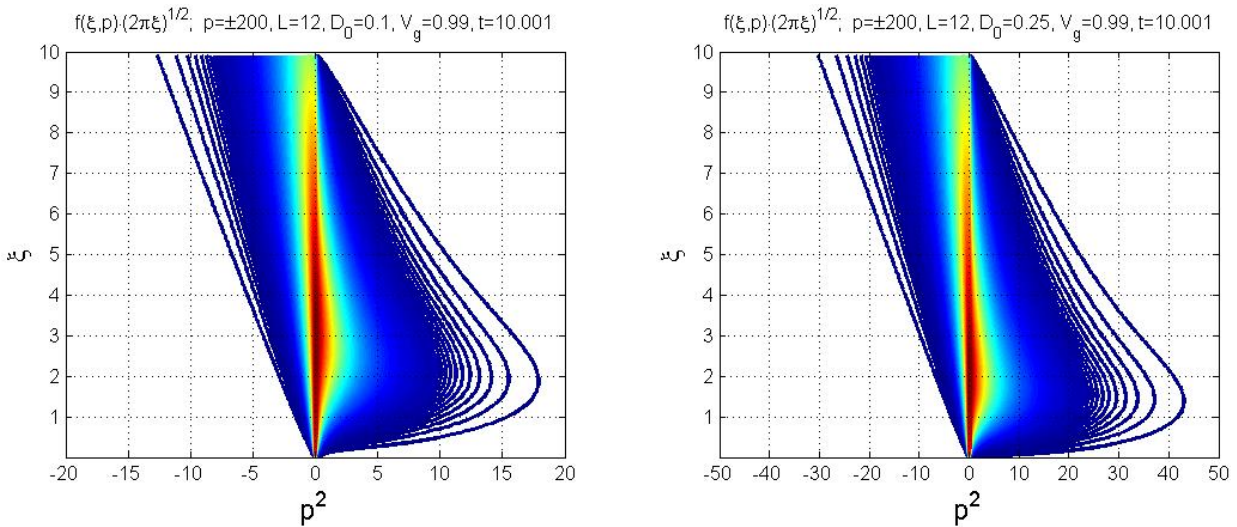


Рис. 11. Линии уровня функции распределения для  $v_g = 0.99$ ,  $D_0^1 = 0.1$  – слева, и  $D_0^2 = 0.25$  – справа.

Два следующих графика, рис. 12, рис. 13, иллюстрируют два расчета для постоянного коэффициента  $D_0 = 1$  и двух значений групповой скорости  $v_g = 0.8$ ,  $v_g = 1$ .

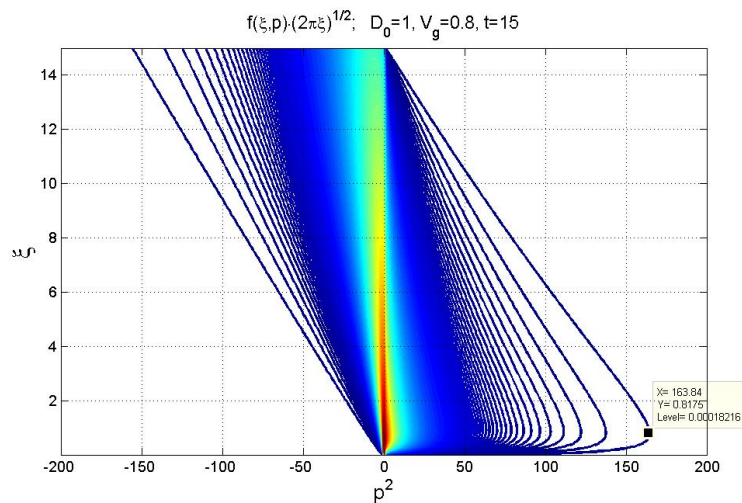


Рис. 12. Линии уровня функции распределения для  $v_g = 0.8$ ,  $D_0 = 1$ .

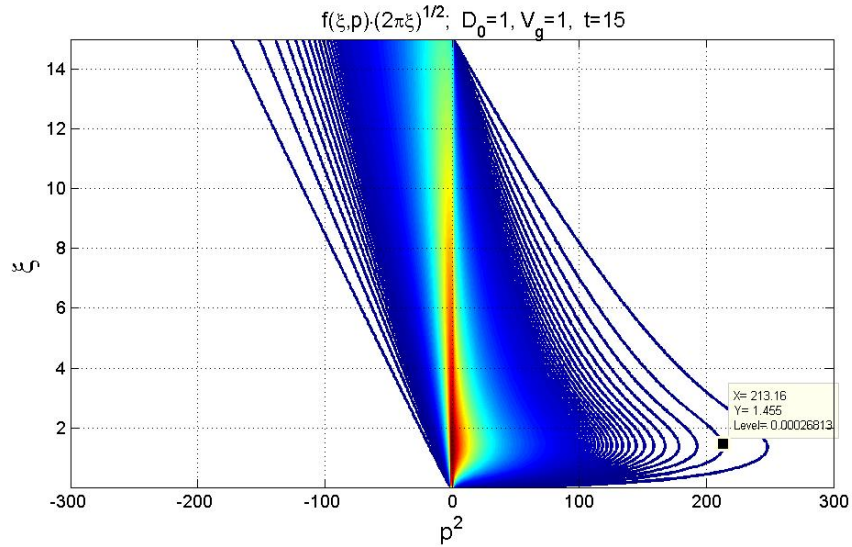


Рис. 13. Линии уровня функции распределения для  $v_g = 1$ ,  $D_0 = 1$ .

При сравнении двух графиков видно, что при  $v_g = 0.8$  линии уровня "прижаты" к фронту импульса, размытие тем сильнее, чем интенсивнее перенос. Указано направление наибольшего диффузионного роста функции по осям; значение  $Y$  соответствует значению  $\xi$ . Для  $v_g = 0.8$  значение  $Y$  почти в два раза ниже. Также обозначена величина функции распределения на последней приведенной линии контура. Для справки полезно посмотреть на функцию  $u_1(p)$  – рис. 3. Для иллюстрации на рис. 14 представлен результат для значения групповой скорости  $v_g = 1.2$ . В этом случае функция  $u_1(p) > 0$ , адвективный член (перенос) доминирует и фронт лазерного импульса больше "отрывается" от диффузии.

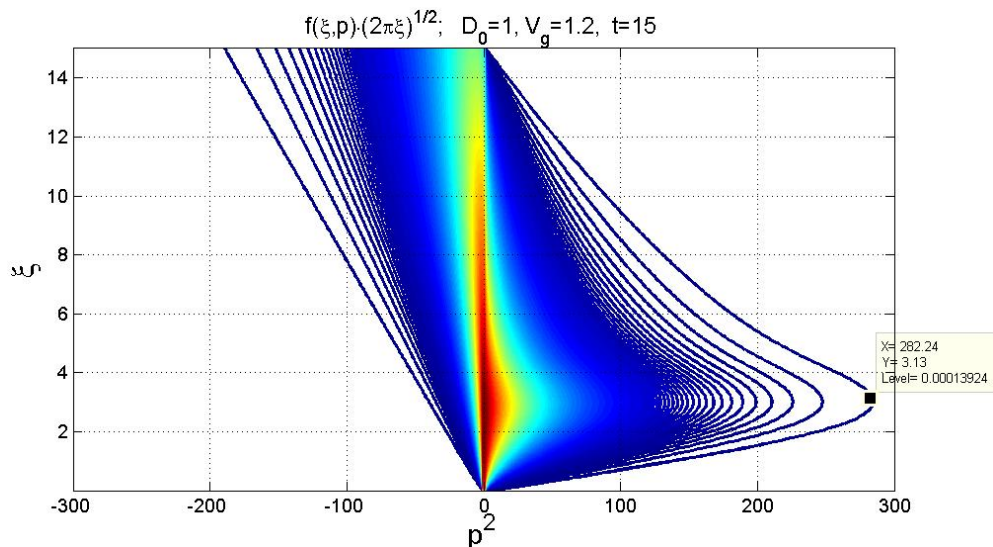


Рис. 14. Линии уровня функции распределения для  $v_g = 1.2$  для  $D_0 = 1$ .

Сравним на одном графике расчеты с постоянным коэффициентом диффузии и зависящим от импульса. Сравнение дано для малых времен. Кроме отличия в области малых импульсов, для случая  $D(p) = const$  будет дополнительный нагрев плазмы. Как можно видеть из рис. 14, аналитический и численный результаты находятся в хорошем качественном согласии.

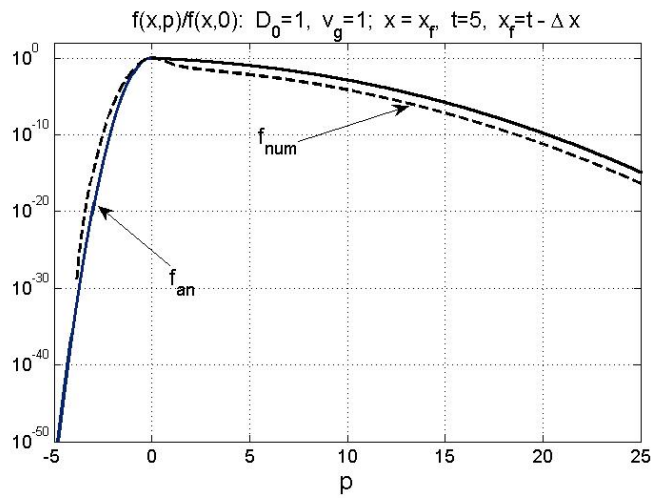


Рис. 14. Сравнение аналитической функции распределения (10) и численной функции распределения.

Теперь представим результат численного расчета для  $D(p)$  из формулы (5) с  $\delta = 0.3$ ,  $v_g = 1$  и для трех интервалов времени  $t = 100, 500, 1000$ .

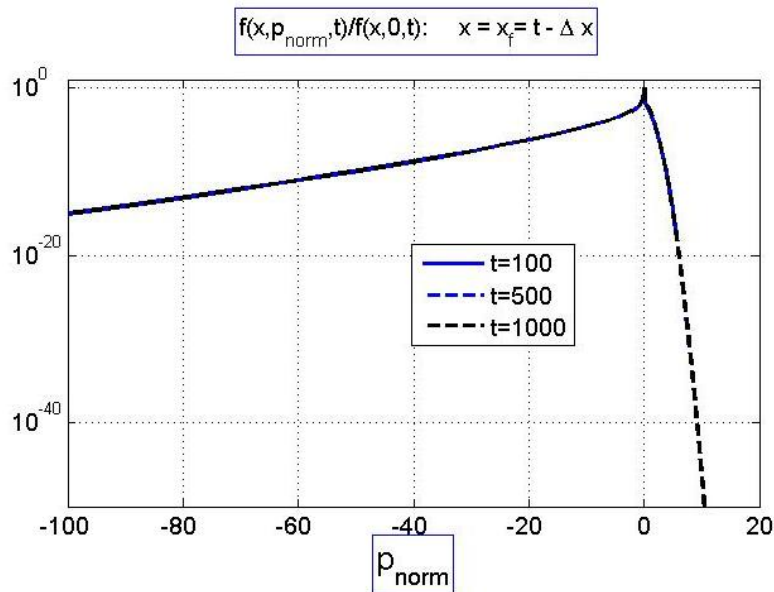


Рис. 15. Зависимость численной функции распределения за фронтом, нормированной на свое значение при  $p = 0$ , от координаты  $p_{norm}$  (10).

Численная функция распределения на рис. 15 нормирована на свое значение при  $p = 0$ , то есть, если следовать решению (10), функция нормирована на множитель  $F$ . График дан для координаты  $x$ , которая на шаг сетки меньше координаты фронта лазерного импульса:  $x = x_f$ ,  $x_f = t - \Delta x$ . По горизонтальной координате отложен нормированный импульс  $p_{norm}$  из формулы (10). На приведенном графике видно совпадение численного и асимптотического решений сразу за фронтом лазерного импульса (за исключением узкой области размером  $|p| \leq 1$ ).

Ниже на рис. 16 дана попытка сравнить численный расчет функции распределения, используя аналитическое решение для разных значений координаты  $x$  и недалеких моментов времени  $t$ . Нормировка функции такая же, как и в предыдущем примере, поэтому максимум функции равен единице.

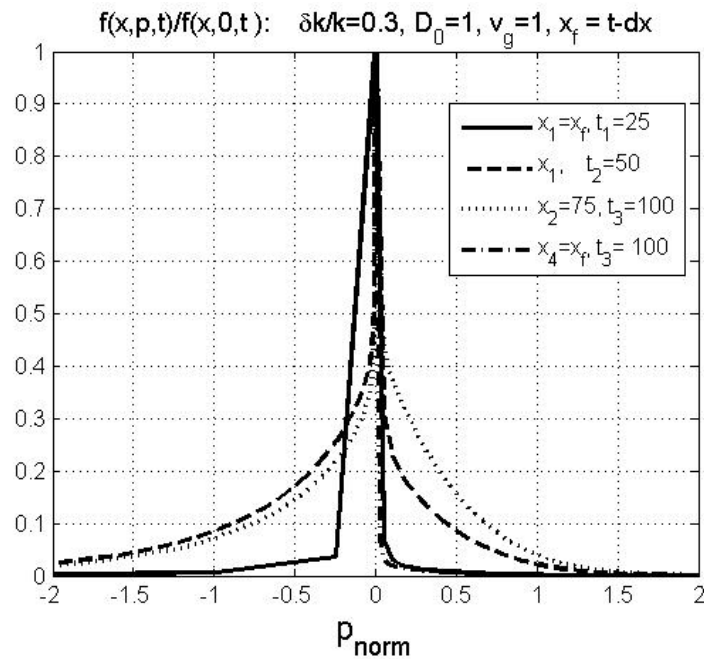


Рис. 16. Зависимость численной функции распределения, нормированной на свое значение при  $p = 0$ , от координаты  $p_{norm}$  (10) для различных  $x$  и  $t$ .

Функции распределения для  $x_1 = x_f = t_1$  и  $x_4 = x_f = t_3$ , то есть для  $x_f = 25$  (сплошная линия) и  $x_f = 100$  (штрих-пунктирная линия), практически совпадают для небольших значений импульсов.

Интересно проверить, используя асимптотическое решение, как ведут себя функции распределения далеко за фронтом. Для координаты  $x = 25$  и времени  $t = 50$  (пунктирная линия) наблюдается отрастание функции для отрицательных импульсов. Следующая кривая (пунктирная) дана для точки  $x_2 = 75$  в момент времени  $t_3 = 100$ . Идея была сравнить, насколько размылись и совпадают ли две кривые для одинакового интервала  $t - x$ . Качественно поведение кривых похоже, однако видно: за более долгий период времени  $t_3 = 100$  стохастический нагрев больше, кривые расходятся.

## Заключение

Численно исследуется нагрев и ускорение электронов плазменным кильватерным полем, создаваемым лазерным импульсом, на основе кинетического пространственно-неоднородного 1D1V уравнения Фоккера-Планка.

Релятивистски сильный лазерный импульс распространяется с заданными плотностью и квазистационарным спектром плазменных полей в плазме. Стохастический нагрев учитывается с помощью квазилинейной диффузии в пространстве импульсов. Для численного решения выбран конечно-разностный подход.

Анализируется взаимодействие оператора переноса и диффузионного оператора. Вычисляется и исследуется структура функции распределения электронов. В процессе распространения импульса вблизи за фронтом наблюдается формирование вытянутых хвостов распределения.

Численное решение асимптотически совпадает с полученным аналитическим решением. Функциональное поведение полученных численных распределений подсказало путь к аналитическому подходу для решения рассматриваемого уравнения. В свою очередь, полученное асимптотическое аналитическое решение является тестом для численного расчета.

Возможное дальнейшее направление деятельности связано с улучшением и расширением математической модели, численных расчетов для конкретных физических экспериментальных параметров, получением более сложного аналитического результата.

## Библиографический список

- [1] Hyung Taek Kim, Ki Hong Pae, Hyuk Jin Chael et al. // Phys. Rev. Lett. 111, 165002 (2013).
- [2] Leemans W. P., Gonsalves A. J., Mao H.-S. et al. // Phys. Rev. Lett. 113, 245002 (2014).
- [3] Kuramitsu Y., Sakawa Y., Kato T., Takabe H. // Astrophys. J. 682, L113 (2008).
- [4] Hidding B., Konigstein T., Willi O., et al. // Nuclear Instr. Methods Phys. Res. A 31, 636 (2011); Konigstein T., Karger O., Pretzler G., et al. // J. Plasma Phys. 78, 383 (2012).
- [5] Андреев Н.Е., Горбунов Л.М., Кирсанов В.И. и др. // Письма в ЖЭТФ 55, 551 (1992).



- [6] Antonsen T.M., Mora P. // Phys. Rev. Lett. 69, 2204 (1992).
- [7] Sprangle P., Esarey E. // Phys. Fluids B. 4, 2241 (1992).
- [8] Krall J., Ting A., Esarey E., Sprangle P. // Phys. Rev. E. 48, 2157 (1993).
- [9] Sentoku Y., Bychenkov V.Yu., Flippo F., et al. // Appl. Phys. B 74, 207 (2002).
- [10] Mangles S.P.D., Walton B.R., Tzoufras M., et al. // Phys. Rev. Lett. 94, 245001 (2004).
- [11] Walton B.R., Mangles S.P.D., Najmudin Z., et al. // Phys. Plasmas 13, 113103 (2006).
- [12] Paradkar B. S., Krasheninnikov S. I., and Beg F. N., Phys. Plasmas 19, 060703 (2012).
- [13] Бочкарев С. Г., Брантов А. В., В. Ю. Быченко и др. // Физика плазмы 40, 265 (2014).
- [14] Bulanov S. V., Yogo A., Esirkepov T. Zh., et al. // Phys. Plasmas 22, 063108 (2015).
- [15] Веденов А.А., Рютов Д.Д. Вопросы теории плазмы. Вып. 6 // Под ред. М.А. Леонтовича. М.: Госатомиздат, 1972. с. 3 - 68.
- [16] Chen P., Tajima T., Takahashi Y. // Phys. Rev. Lett. 89, 161101 (2002).