



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

**Елизарова Т.Г., Злотник А.А.,
Истомина М.А.**

О двумерном численном
КГД моделировании
спирально-вихревых
структур в аккреционных
газовых дисках

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Елизарова Т.Г., Злотник А.А., Истомина М.А. О двумерном численном КГД моделировании спирально-вихревых структур в аккреционных газовых дисках // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2017. № 1. 30 с. doi:[10.20948/prepr-2017-1](https://doi.org/10.20948/prepr-2017-1)
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2017-1>

ОРДЕНА ЛЕНИНА
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. КЕЛДЫША
Российской академии наук

Т.Г. Елизарова, А.А. Злотник, М.А. Истомина

О двумерном численном КГД моделировании
спирально-вихревых структур в аккреционных
газовых дисках

Москва —2017

*Т.Г. Елизарова*¹, *А.А. Злотник*², *М.А. Истомина*³. **О двумерном численном КГД моделировании спирально-вихревых структур в аккреционных газовых дисках.**

Аннотация. Выведены новые аксиально симметричные стационарные решения баротропных уравнений Эйлера с массовой силой в изэнтропическом и изотермическом случаях. Они использованы в качестве начальных распределений в нестационарной задаче. С помощью квазигазодинамического подхода выполнены численные эксперименты по развитию малых начальных возмущений угловой скорости и формирование крупных структур в виде “рукавов” плотности, с их раздвоением и уменьшением момента импульса газа в центральной части области. Подтверждена корректность приближения мелкой воды для описания образования рукавов.

Построенный алгоритм универсален и позволяет выполнять на персональном компьютере различные численные эксперименты, представляющие интерес для астрофизики.

Ключевые слова: уравнения газовой динамики, полярные координаты, стационарные решения, аккреционный диск, квазигазодинамический подход, разностная аппроксимация, численные эксперименты

Elizarova T.G., Zlotnik A.A., Istomina M.A. On two-dimensional numerical QGD-modelling of spiral-vortex structures in accretion gas disks.

Abstract. We derive new axially symmetric stationary solutions to the barotropic Euler equations with a body force in the isentropic and isothermal cases. They are used as the initial distributions in the related non-stationary problem. Basing on a quasi-hydrodynamic approach, we perform numerical experiments on the development of small initial perturbations of the azimuthal velocity and the formation of large structures like the density “sleeves”. Splitting of the sleeves and decreasing of the gas angular momentum in the middle of the field are observed. Also the correctness of the shallow water approximation for describing the sleeve formation is confirmed.

The designed algorithm is universal and allows one to perform various numerical experiments of interest in astrophysics on a personal computer.

Key words: gas dynamic equations, polar coordinates, stationary solutions, accretion disk, quasi-gas dynamic approach, finite-difference approximation, numerical experiments

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 16-01-00048а, 15-51-50023 и 15-01-03654а.

¹ ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 125047 Москва, Миусская пл., 4

² НИУ Высшая школа экономики, 101000 Москва, ул. Мясницкая, 20

³ ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 125047 Москва, Миусская пл., 4

1. Введение

Согласно [1, 2] спиральная структура туманностей впервые была замечена в наблюдениях лорда Росса в 1845 г. Позднее спиральные рукава и гигантские вихри — циклоны и антициклоны — были обнаружены в двумерном поле скоростей газовых дисков ряда галактик. Спирали характеризуются своей формой. Наиболее часто встречаются “отстающие” спирали. Они вращаются концами назад, и поэтому имеют хорошую “аэродинамическую” форму. Распространенным явлением является ветвление спиралей, при котором рукава раздваиваются в направлении их концов.

В [1]-[3] обсуждались механизмы возникновения спирально-вихревых структур в астрофизических объектах — галактиках и аккреционных дисках. В частности, генерация спиральных волн плотности связывалась с нелинейным взаимодействием гравитационной и гидродинамической неустойчивости, которая в реальных галактиках может быть вызвана быстрыми локальными падениями скорости вращения газа. Последние хорошо заметны на кривых вращения галактик, полученных ранее в наблюдениях на телескопах.

Для экспериментального моделирования генерации спиральной структуры в газовом галактическом диске, вызванной развитием гидродинамической неустойчивости из-за наличия градиента скорости вращения, использовалась вращающаяся мелкая вода. В частности, на установке “Спираль” была подтверждена правильность гравитационно-гидродинамической теории генерации спиральной структуры. Наблюдалось ветвление рукавов, и были обнаружены антициклонические вихри.

В дополнение к уже проведенным исследованиям представляет большой интерес использование аппарата прямого численного моделирования для проверки гипотез о чисто гидродинамической природе развития рукавов в астрофизических дисках и аналогии между гравитационной неустойчивостью в газовых дисках и в течениях мелкой воды. Численное моделирование гравитационных неустойчивостей в аккреционных дисках проводилось в работах [5]-[7] на основе решения полных уравнений Эйлера. Совсем недавно в [9] была рассмотрена аналогичная постановка задачи в рамках квазигазодинамических (КГД) — т.е. специальным образом регуляризованных [10]-[12] — уравнений Эйлера в баротропном приближении.

В данной работе исходным также является начальное распределение плотности и скорости, выведенное для стационарной трехмерной конфигурации в [5]. Но, в отличие от указанных работ, для его сведения к двумерному распределению применяется усреднение исходных уравнений по вертикальной координате, которое выполнено аналитически. Это приводит к иным результатам численных экспериментов, чем в [9]. При этом анализируется не только изэнтропический случай (показатель адиабаты $\gamma > 1$), но и также популярный

в литературе изотермический случай ($\gamma = 1$), для которого тоже получаются интересные численные результаты.

Эти новые аксиально симметричные стационарные решения получены в рамках уравнений Эйлера в баротропном приближении, и они используются в качестве начального распределения (с внесением малого возмущения) для нестационарных уравнений. Устойчивость начальных распределений к малым возмущениям аналитически в данной работе не исследовалась, однако из физических соображений следует, что баротропные течения газа в поле гравитационных сил являются неустойчивыми [1, 4].

В отличие от [5]-[7] в [9] и настоящей работе задача решается в баротропном приближении уравнений Эйлера, что представляется естественным, поскольку начальные распределения построены именно для него. При этом уравнения и их разностный аналог записываются в естественной полярной системе координат.

Укажем, что точное решение стационарной системы Эйлера является одновременно и точным решением стационарной КГД системы согласно структуре ее диссипации (в отсутствие вязкости типа Навье-Стокса). Также КГД уравнения не нарушают закон сохранения момента импульса [12]. Для системы Навье-Стокса построенные в работе решения стационарными уже не являются.

Ниже в разделе 2 выписаны уравнения газовой динамики в баротропном приближении в полярной системе координат и их КГД регуляризация. В разделе 3 построены новые стационарные решения. Разностная схема в компактном операторном виде выписана в разделе 4. Результаты численного моделирования подробно даны в разделе 5. Представлены случаи $\gamma = 5/3$ – течение идеального одноатомного газа, $\gamma = 2$ – течение в приближении мелкой воды, $\gamma = 1$ – изотермическое течение. Основные результаты подытожены в разделе 6.

2. Баротропные уравнения газовой динамики в полярной системе координат и их КГД регуляризация

Система уравнений Эйлера в баротропном приближении в полярной системе координат (r, φ) представляет собой следующие уравнения баланса массы и импульса

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0, \quad \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial (\rho r u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (\rho u_\varphi)}{\partial \varphi}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial (\rho u_r)}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r \rho u_r^2)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (\rho u_r u_\varphi)}{\partial \varphi} + \frac{\partial p(\rho)}{\partial r} - \frac{\rho u_\varphi^2}{r} = \rho f_r, \quad (2)$$

$$\frac{\partial(\rho u_\varphi)}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 \rho u_r u_\varphi)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho u_\varphi^2)}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial p(\rho)}{\partial \varphi} = \rho f_\varphi, \quad (3)$$

где $\rho(r, \varphi, t)$ – плотность, $\mathbf{u} = (u_r, u_\varphi)$ – вектор скорости, $u_r(r, \varphi, t)$ и $u_\varphi(r, \varphi, t)$ – его радиальная и азимутальная компоненты, $p(\rho) = p_0(\rho/\rho_0)^\gamma = k\rho^\gamma$ – давление газа, f_r и f_φ – радиальная и азимутальная компоненты внешней массовой силы. Здесь $\gamma = \text{const} \geq 1$ – показатель адиабаты, а коэффициент $k = p_0/\rho_0^\gamma$ определяется постоянной удельной энтропией течения при $\gamma > 1$ (изэнтропический случай) либо постоянной температурой при $\gamma = 1$ (изотермический случай). Скорость звука – это $c_s = \sqrt{\gamma p(\rho)/\rho}$.

КГД регуляризация системы уравнений (1)–(3) имеет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \mathbf{j}_m = 0, \quad (4)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(\rho u_r)}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r j_{mr} u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(j_{m\varphi} u_r)}{\partial \varphi} + \frac{\partial p(\rho)}{\partial r} - \frac{\rho u_\varphi^2}{r} = \\ & = (\rho - \tau \text{div}(\rho \mathbf{u})) f_r + \frac{1}{r} \frac{\partial(r \rho u_r w_r^*)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho u_\varphi w_r^*)}{\partial \varphi} + \\ & + \frac{\partial}{\partial r} \left(\tau \gamma \frac{p(\rho)}{\rho} \text{div}(\rho \mathbf{u}) \right) - \tau \frac{u_\varphi^2}{r} \text{div}(\rho \mathbf{u}) - 2\rho \frac{u_\varphi}{r} w_\varphi^* + \\ & + \frac{1}{r} \frac{\partial(r \Pi_{rr})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Pi_{\varphi r}}{\partial \varphi} - \frac{\Pi_{\varphi\varphi}}{r}, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(\rho u_\varphi)}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 j_{mr} u_\varphi)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(j_{m\varphi} u_\varphi)}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial p(\rho)}{\partial \varphi} = \\ & = (\rho - \tau \text{div}(\rho \mathbf{u})) f_\varphi + \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 \rho u_r w_\varphi^*)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho u_\varphi w_\varphi^*)}{\partial \varphi} + \\ & + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\tau \gamma \frac{p(\rho)}{\rho} \text{div}(\rho \mathbf{u}) \right) + \frac{\partial \Pi_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Pi_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{2}{r} \Pi_{r\varphi} \end{aligned} \quad (6)$$

в соответствии с [9, 13].

Регуляризованный поток массы \mathbf{j}_m и соответствующие слагаемые таковы

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_m &= (j_{mr}, j_{m\varphi}), \quad j_{mr} = \rho(u_r - w_r), \quad j_{m\varphi} = \rho(u_\varphi - w_\varphi), \\ \text{div} \mathbf{j}_m &= \frac{1}{r} \frac{\partial(r j_{mr})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial j_{m\varphi}}{\partial \varphi}, \\ w_r &= \frac{\tau}{\rho} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial(r \rho u_r^2)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho u_r u_\varphi)}{\partial \varphi} + \frac{\partial p(\rho)}{\partial r} - \frac{\rho u_\varphi^2}{r} - \rho f_r \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 w_\varphi &= \frac{\tau}{\rho} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 \rho u_r u_\varphi)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (\rho u_\varphi^2)}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial p(\rho)}{\partial \varphi} - \rho f_\varphi \right], \\
 w_r^* &= \tau \left[u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} u_\varphi \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p(\rho)}{\partial r} - \frac{u_\varphi^2}{r} - f_r \right], \\
 w_\varphi^* &= \tau \left[\frac{1}{r} u_r \frac{\partial (r u_\varphi)}{\partial r} + \frac{1}{r} u_\varphi \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r \rho} \frac{\partial p(\rho)}{\partial \varphi} - f_\varphi \right].
 \end{aligned}$$

Для общности подхода в уравнения включен тензор Π вязких напряжений Навье–Стокса с компонентами

$$\begin{aligned}
 \Pi_{rr} &= 2\mu \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{1}{3} \operatorname{div} \mathbf{u} \right), \\
 \Pi_{\varphi\varphi} &= 2\mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r} - \frac{1}{3} \operatorname{div} \mathbf{u} \right), \\
 \Pi_{r\varphi} &= \Pi_{\varphi r} = \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} \right),
 \end{aligned}$$

где μ — коэффициент динамической вязкости. Объемная вязкость не учитывается.

КГД система включает в себя регуляризирующие слагаемые с малым коэффициентом — параметром $\tau = \tau(r, \rho, \mathbf{u}) > 0$, имеющим размерность времени. Отметим, что баротропная КГД система в декартовых координатах была предложена и строго математически изучена в работе [14]; в дальнейшем она модифицировалась и исследовалась в [15, 16].

КГД система (4)–(6) удовлетворяет условиям равновесия, т.е. для покоящегося газа $\rho = \rho(r, \varphi)$, $\mathbf{u} = 0$ она, также как и системы Эйлера и Навье–Стокса, редуцируется к уравнениям

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho f_r, \quad \frac{\partial p}{\partial \varphi} = r \rho f_\varphi. \tag{7}$$

Отметим, что к ним сводятся уравнения (5), (6), поэтому $w_r = w_\varphi = 0$ и $\mathbf{j}_m = 0$ и выполнено также уравнение (4).

В [12] показано, что регуляризирующие τ -добавки не нарушают выполнение закона сохранения момента импульса.

Для системы уравнений (4)–(6) ставится начально-краевая задача в кольце $\Omega_r \times \Omega_\varphi = (r_1, r_2) \times [0, 2\pi)$, где $0 < r_1 < r_2$. По φ ставятся условия 2π -периодичности решения.

3. Стационарные решения

В работе [5] изучены стационарные уравнения газовой динамики с учетом силы гравитации в (r, φ, z) -геометрии

$$\frac{\partial p(\rho)}{\partial r} - \frac{\rho u_\varphi^2}{r} = -\frac{\rho r}{(r^2 + z^2)^{3/2}}, \quad (8)$$

$$\frac{\partial p(\rho)}{\partial z} = -\frac{\rho z}{(r^2 + z^2)^{3/2}}, \quad (9)$$

записанные в предположении, что $\rho = \rho(r, z)$, $u_\varphi = u_\varphi(r)$ и $u_r = u_z = 0$.

Пусть $p(\rho) = k\rho^\gamma$ с $k > 0$, $\gamma \geq 1$ и задана функция

$$\zeta \in C^1(\bar{\Omega}_r), \quad \zeta(r) > 0, \quad r + \zeta(r)\zeta'(r) > 0 \quad \text{на } \bar{\Omega}_r,$$

где $\Omega_r := (r_1, r_2)$ с $r_1 > 0$.

1. При $\gamma > 1$ для указанных уравнений в области $\{(r, z); r \in \bar{\Omega}_r, |z| \leq \zeta(r)\}$ найдено решение

$$\rho(r, z) = \left[\frac{1}{k\gamma'} \left(\frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + \zeta^2(r)}} \right) \right]^{1/(\gamma-1)}, \quad (10)$$

$$u_\varphi(r) = \left[r \frac{r + \zeta(r)\zeta'(r)}{(r^2 + \zeta^2(r))^{3/2}} \right]^{1/2}, \quad (11)$$

где $\gamma' = \gamma/(\gamma - 1)$. Оно обладает свойством

$$\rho(r, \pm\zeta(r)) = 0 \quad \text{на } \bar{\Omega}_r. \quad (12)$$

Эти формулы легко проверить, переписав уравнения (8), (9) в виде

$$k\gamma' \frac{\partial}{\partial r} (\rho^{\gamma-1}) - \frac{u_\varphi^2}{r} = -\frac{r}{(r^2 + z^2)^{3/2}}, \quad (13)$$

$$k\gamma' \frac{\partial}{\partial z} (\rho^{\gamma-1}) = -\frac{z}{(r^2 + z^2)^{3/2}}. \quad (14)$$

С подходом [5]-[7] связано использование усредненной по z плотности

$$\hat{\rho}(r) := \frac{1}{2\zeta(r)} \int_{-\zeta(r)}^{\zeta(r)} \rho(r, z) dz = \frac{1}{\zeta(r)} \int_0^{\zeta(r)} \rho(r, z) dz \quad (15)$$

и приближенного уравнения

$$\frac{dp(\hat{\rho})}{dr} - \frac{\hat{\rho}u_{\varphi}^2}{r} \approx \hat{\rho}\hat{F}(r), \quad \hat{F}(r) := -\frac{1}{r^2} \text{ на } \bar{\Omega}_r. \quad (16)$$

Оказывается, что можно *точно* выполнить усреднение решений по z так, чтобы новые решения $\bar{\rho}(r) > 0$, $u_{\varphi}(r)$ подчинялись стационарному уравнению

$$\frac{dp(\rho)}{dr} - \frac{\rho u_{\varphi}^2}{r} = \rho F(r) \text{ на } \bar{\Omega}_r. \quad (17)$$

Для этого при фиксированном r проинтегрируем уравнение (13) по $[-\zeta(r), \zeta(r)]$ и разделим результат на $2\zeta(r)$:

$$k\gamma' \frac{1}{2\zeta(r)} \int_{-\zeta(r)}^{\zeta(r)} \frac{\partial}{\partial r} (\rho^{\gamma-1}) dz - \frac{u_{\varphi}^2}{r} = -\frac{1}{2\zeta(r)} \int_{-\zeta(r)}^{\zeta(r)} \frac{r}{(r^2 + z^2)^{3/2}} dz.$$

Поскольку справедливо свойство (12) и

$$\int_0^a \frac{r}{(r^2 + z^2)^{3/2}} dz = \frac{a}{r\sqrt{r^2 + z^2}},$$

то

$$k\gamma' \frac{1}{2\zeta(r)} \frac{d}{dr} \int_{-\zeta(r)}^{\zeta(r)} \rho^{\gamma-1} dz - \frac{u_{\varphi}^2}{r} = -\frac{1}{r\sqrt{r^2 + \zeta^2(r)}}. \quad (18)$$

Введем функцию

$$\bar{\rho}(r) := \left(\frac{1}{2\zeta(r)} \int_{-\zeta(r)}^{\zeta(r)} \rho^{\gamma-1}(r, z) dz \right)^{1/(\gamma-1)} = \left(\frac{1}{\zeta(r)} \int_0^{\zeta(r)} \rho^{\gamma-1}(r, z) dz \right)^{1/(\gamma-1)}.$$

Возводя обе части формулы (10) в степень $\gamma - 1$ и интегрируя результат по z , имеем

$$\bar{\rho}(r) = \left(\frac{\lambda(r)}{k\gamma'} \right)^{1/(\gamma-1)}, \quad (19)$$

где

$$\lambda(r) := \frac{1}{\zeta(r)} \ln \left(\frac{\zeta(r)}{r} + \sqrt{\frac{\zeta^2(r)}{r^2} + 1} \right) - \frac{1}{\sqrt{r^2 + \zeta^2(r)}}. \quad (20)$$

Теперь перепишем равенство (18) в виде

$$k\gamma' \frac{d}{dr} (\bar{\rho}^{\gamma-1}) - k\gamma' \left(\frac{d}{dr} \frac{1}{\zeta(r)} \right) \zeta(r) \bar{\rho}^{\gamma-1} - \frac{u_\varphi^2}{r} = -\frac{1}{r\sqrt{r^2 + \zeta^2(r)}},$$

откуда

$$k\gamma' \frac{d}{dr} (\bar{\rho}^{\gamma-1}) - \frac{u_\varphi^2}{r} = F(r) := -\frac{1}{r\sqrt{r^2 + \zeta^2(r)}} - \frac{\zeta'(r)}{\zeta(r)} \lambda(r). \quad (21)$$

Тем самым найденные функции $\bar{\rho}$ и u_φ , см. формулы (19), (20) и (11), удовлетворяют и стационарному уравнению (17) с введенной F .

2. Пусть теперь $\gamma = 1$. Фиксируем $\rho_0 > 0$. Перепишем уравнения (8), (9) в виде

$$k \frac{\partial}{\partial r} \ln \frac{\rho}{\rho_0} - \frac{u_\varphi^2(r)}{r} = -\frac{r}{(r^2 + z^2)^{3/2}}, \quad (22)$$

$$k \frac{\partial}{\partial z} \ln \frac{\rho}{\rho_0} = -\frac{z}{(r^2 + z^2)^{3/2}}. \quad (23)$$

В силу первого из этих уравнений имеем

$$\ln \frac{\rho}{\rho_0} = \frac{1}{k} \left(\int \frac{u_\varphi^2(r)}{r} dr + \frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}} + \psi(z) \right), \quad (24)$$

а в силу второго — можно взять $\psi(z) = 0$ (соответствующая формула имеется в [5]). Отметим, что тогда согласно (24) функция $\rho(r, z)$ убывает с ростом $|z|$.

Найдем решение, обладающее свойством

$$\rho(r, \pm\zeta(r)) = \rho_0 \quad \text{на } \bar{\Omega}_r, \quad (25)$$

ср. с (12). Подставим $z = \zeta(r)$ в (24) и, продифференцировав обе части полученного равенства по r с учетом последнего свойства, получим

$$\frac{u_\varphi^2(r)}{r} = -\frac{d}{dr} \frac{1}{\sqrt{r^2 + \zeta^2(r)}}.$$

Поэтому u_φ по-прежнему задается формулой (11) (при желании в ее правой части можно поставить знак минус). Теперь из (24) и (25) следует формула

$$\frac{\rho(r, z)}{\rho_0} = \exp \left[\frac{1}{k} \left(\frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + \zeta^2(r)}} \right) \right], \quad (26)$$

ср. с (10).

С той же целью, что и в п. 1, выполним усреднение найденного решения по z . Введем функцию $\bar{\rho}$, такую, что

$$\frac{\bar{\rho}(r)}{\rho_0} := \exp \left(\frac{1}{2\zeta(r)} \int_{-\zeta(r)}^{\zeta(r)} \ln \frac{\rho(r, z)}{\rho_0} dz \right) = \exp \left(\frac{1}{\zeta(r)} \int_0^{\zeta(r)} \ln \frac{\rho(r, z)}{\rho_0} dz \right).$$

В силу (26) подобно (19) имеем

$$\bar{\rho}(r) = \rho_0 \exp \left(\frac{\lambda(r)}{k} \right). \quad (27)$$

Интегрирование уравнения (22) при фиксированном r по $[-\zeta(r), \zeta(r)]$ и деление результата на $2\zeta(r)$ дает:

$$k \frac{1}{2\zeta(r)} \int_{-\zeta(r)}^{\zeta(r)} \frac{\partial}{\partial r} \ln \frac{\rho(r, z)}{\rho_0} dz - \frac{u_\varphi^2}{r} = -\frac{1}{2\zeta(r)} \int_{-\zeta(r)}^{\zeta(r)} \frac{r}{(r^2 + z^2)^{3/2}} dz.$$

Рассуждая так же, как и в п. 1, с учетом свойства (25) получим уравнение

$$k \frac{d}{dr} \ln \frac{\bar{\rho}}{\rho_0} - \frac{u_\varphi^2}{r} = F \quad \text{на } \bar{\Omega}_r$$

с прежней функцией F . Тем самым найденные функции $\bar{\rho}$ и u_φ , см. формулы (27), (20) и (11), удовлетворяют и стационарному уравнению (17) при $\gamma = 1$ с введенной F .

Найденные аксиально симметричные решения $\rho = \rho(r)$, $u_r = 0$, $u_\varphi = u_\varphi(r)$ при $f_r = f_r(r)$ и $f_\varphi = 0$ являются точными решениями не только системы Эйлера, но и КГД системы при $\mu = 0$. Во-первых, для таких решений $w_\varphi = w_\varphi^* = 0$, а уравнение (5) сводится к уравнению (17) с $F = f_r$. Значит, во-вторых, $w_r = w_r^* = j_{mr} = 0$ и выполняются также уравнения (4) и (6).

Если же $\mu > 0$, то $\Pi_{rr} = \Pi_{\varphi\varphi} = 0$, но $\Pi_{r\varphi} = \Pi_{\varphi r} \equiv \mu r \frac{\partial}{\partial r} \frac{u_\varphi}{r} = 0$ только для $u_\varphi(r) = cr$.

4. Разностная схема

Запишем разностную схему [9] в компактном операторном виде, следуя в основном обозначениям из [17]. Введем на $\bar{\Omega}_r$ равномерную сетку $\bar{\omega}_r$ по переменной r с узлами $r^{(i)} = r_1 + i\Delta r$, $0 \leq i \leq N_r$ с шагом $\Delta r = (r_2 - r_1)/N_r$. Введем вторую сетку $\bar{\omega}_r^*$ с узлами $r_{i-1/2} = (i - 0.5)h$, $0 \leq i \leq N_r + 1$. Узлы $r_{-1/2}$, $r_{N_r+1/2}$ выходят за пределы $\bar{\Omega}_r$ и называются фиктивными. Пусть ω_r^*

состоит из ее внутренних узлов $r_{i-1/2}$, $1 \leq i \leq N_r$.

Обозначим через $H(\omega)$ пространство функций, заданных на сетке ω . Для $v \in H(\bar{\omega}_r)$ и $z \in H(\bar{\omega}_r^*)$ введем сеточные усреднения и разностные отношения

$$\begin{aligned} (s_r v)_{i-1/2} &= \frac{v_{i-1} + v_i}{2}, & \delta_r v_{i-1/2} &= \frac{v_i - v_{i-1}}{\Delta r}, \\ (s_r^* z)_i &= \frac{z_{i-1/2} + z_{i+1/2}}{2}, & \delta_r^* z_i &= \frac{z_{i+1/2} - z_{i-1/2}}{\Delta r}. \end{aligned}$$

Ясно, что s_r, δ_r действуют из $H(\bar{\omega}_r)$ в $H(\omega_r^*)$, а s_r^*, δ_r^* — из $H(\bar{\omega}_r^*)$ в $H(\bar{\omega}_r)$.

Введем также на $[0, 2\pi]$ равномерную сетку $\bar{\omega}_\varphi$ с узлами $\varphi^{(j)} = j\Delta_\varphi$, $0 \leq j \leq N_\varphi$ с шагом $\Delta_\varphi = 2\pi/N_\varphi$. Введем фиктивный узел $\varphi^{(-1)} = -\Delta_\varphi$ и для $v \in H(\bar{\omega}_\varphi)$ будем предполагать, что $v_0 = v_{N_\varphi}$, $v_{-1} = v_{N_\varphi-1}$. Пусть $\omega_\varphi = \bar{\omega}_\varphi \setminus \{\varphi^{(N_\varphi)}\}$. Введем также вторую сетку ω_φ^* с узлами $\varphi^{(j+1/2)} = (j+1/2)\Delta_\varphi$, $0 \leq j \leq N_\varphi - 1$. Введем фиктивный узел $\varphi^{(-1/2)} = -\Delta_\varphi/2$ и для $z \in H(\omega_\varphi^*)$ будем предполагать, что $z_{-1/2} = z_{N_\varphi-1/2}$.

Операторы $s_\varphi, \delta_\varphi, \delta_\varphi^\circ, s_\varphi^*, \delta_\varphi^*$ по переменной φ вводятся совершенно аналогично соответствующим операторам по r . Пусть также $s = s_r^* s_\varphi$.

Введем сетку по t с узлами $t_m = m\Delta t$, $m \geq 0$ и шагом $\Delta t > 0$ и положим $\delta_t v^m = (v^{m+1} - v^m)/\Delta t$.

Явная по времени разностная аппроксимация КГД уравнений с вычислением всех пространственных производных с помощью введенных центральных разностных отношений на сетке $\omega_r^* \times \omega_\varphi$ имеет операторный вид:

$$\delta_t \rho + \frac{1}{r} \delta_r (r j_{mr}) + \frac{1}{r} \delta_\varphi^* j_{m\varphi} = 0, \quad (28)$$

$$\begin{aligned} & \delta_t (\rho u_r) + \frac{1}{r} \delta_r (r j_{mr} s_r^* u_r) + \frac{1}{r} \delta_\varphi^* (j_{m\varphi} s_\varphi u_r) + \delta_r p(s_r^* \rho) - \rho \frac{u_\varphi^2}{r} = \\ & = [\rho - \tau \operatorname{div}_\omega(\rho \mathbf{u})] f_r + \frac{1}{r} \delta_r [r (s_r^* \rho) (s_r^* u_r) w_r^*] + \frac{1}{r} \delta_\varphi^* [(s_\varphi \rho) (s_\varphi u_\varphi) \tilde{w}_r^*] + \\ & + \delta_r \left[(s_r^* \tau) \gamma \frac{p(s_r^* \rho)}{s_r^* \rho} \operatorname{div}_{\omega_r}(\rho \mathbf{u}) \right] - \tau \frac{u_\varphi^2}{r} \operatorname{div}_\omega(\rho \mathbf{u}) - 2\rho \frac{u_\varphi}{r} \hat{w}_\varphi^* + \\ & + \frac{1}{r} \delta_r (r \Pi_{rr}) + \frac{1}{r} \delta_\varphi^* \Pi_{\varphi r} - \frac{1}{r} \hat{\Pi}_{\varphi\varphi}, \quad (29) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \delta_t (\rho u_\varphi) + \frac{1}{r^2} \delta_r (\hat{r}^2 j_{mr} s_r^* u_\varphi) + \frac{1}{r} \delta_\varphi^* (j_{m\varphi} s_\varphi u_\varphi) + \frac{1}{r} \delta_\varphi^* p(s_\varphi \rho) = \\ & = [\rho - \tau \operatorname{div}_\omega(\rho \mathbf{u})] f_\varphi + \frac{1}{r^2} \delta_r [\hat{r}^2 (s_r^* \rho) (s_r^* u_r) \tilde{w}_\varphi^*] + \frac{1}{r} \delta_\varphi^* [(s_\varphi \rho) (s_\varphi u_\varphi) w_\varphi^*] + \\ & + \frac{1}{r} \delta_\varphi^* \left[(s_\varphi \tau) \gamma \frac{p(s_\varphi \rho)}{s_\varphi \rho} \operatorname{div}_{\omega_\varphi^*}(\rho \mathbf{u}) \right] + \delta_r \Pi_{r\varphi} + \frac{1}{r} \delta_\varphi^* \Pi_{\varphi\varphi} + \frac{2}{r} \hat{\Pi}_{r\varphi}. \quad (30) \end{aligned}$$

Здесь основные искомые функции ρ, u_r, u_φ и функции τ, f_r, f_φ определены на сетке $\bar{\omega}_r^* \times \bar{\omega}_\varphi$.

Аппроксимации потока массы и соответствующих слагаемых таковы:

$$\begin{aligned}
 j_{mr} &= (s_r^* \rho)(s_r^* u_r - w_r), \quad j_{m\varphi} = (s_\varphi \rho)(s_\varphi u_\varphi - w_\varphi), \\
 w_r &= \frac{s_r^* \tau}{s_r^* \rho} \left[\frac{1}{r} \delta_r^* (r \rho u_r^2) + \frac{1}{r} \delta_\varphi^* ((s_\varphi \rho)(s u_r) s u_\varphi) + \right. \\
 &\quad \left. + \delta_r^* p(\rho) - \frac{(s_r^* \rho)(s_r^* u_\varphi)^2}{r} - (s_r^* \rho) s_r^* f_r \right], \\
 w_\varphi &= \frac{s_\varphi \tau}{s_\varphi \rho} \left[\frac{1}{r^2} \delta_r (\hat{r}^2 (s_\varphi \rho)(s u_r) s u_\varphi) + \frac{1}{r} \delta_\varphi (\rho u_\varphi^2) + \frac{1}{r} \delta_\varphi p(\rho) - (s_\varphi \rho) s_\varphi f_\varphi \right], \\
 w_r^* &= (s_r^* \tau) \left[(s_r^* u_r) \delta_r^* u_r + \frac{1}{r} (s_r^* u_\varphi) \delta_\varphi^* s u_r + \frac{1}{s_r^* \rho} \delta_r^* p(\rho) - \frac{(s_r^* u_\varphi)^2}{r} - s_r^* f_r \right], \\
 \tilde{w}_r^* &= (s_\varphi \tau) \left[(s_\varphi u_r) \delta_r s u_r + \frac{1}{r} (s_\varphi u_\varphi) \delta_\varphi u_r + \frac{1}{s_\varphi \rho} \delta_\varphi p(\rho) - \frac{(s_\varphi u_\varphi)^2}{r} - s_\varphi f_r \right], \\
 w_\varphi^* &= (s_\varphi \tau) \left[\frac{1}{r} (s_\varphi u_r) \delta_r (r s u_\varphi) + \frac{1}{r} (s_\varphi u_\varphi) \delta_\varphi u_\varphi + \frac{1}{r s_\varphi \rho} \delta_\varphi p(\rho) - s_\varphi f_\varphi \right], \\
 \tilde{w}_\varphi^* &= (s_r^* \tau) \left[\frac{1}{r} (s_r^* u_r) \delta_r^* (r u_\varphi) + \frac{1}{r} (s_r u_\varphi) \delta_\varphi^* s u_\varphi + \frac{1}{r s_r^* \rho} \delta_\varphi^* p(s_\varphi \rho) - s_r^* f_\varphi \right], \\
 \hat{w}_\varphi^* &= \tau \left[\frac{1}{r} u_r \delta_r (r s_r^* u_\varphi) + \frac{1}{r} u_\varphi \delta_\varphi^* s_\varphi u_\varphi + \frac{1}{r \rho} \delta_\varphi^* p(s_\varphi \rho) - f_\varphi \right],
 \end{aligned}$$

где $\hat{r} = s_r^* r$. Функции $j_{mr}, w_r, \tilde{w}_\varphi^*$ определены на сетке $\bar{\omega}_r \times \bar{\omega}_\varphi$, а $j_{m\varphi}, w_\varphi, \tilde{w}_r^*$ — на сетке $\omega_r^* \times \omega_\varphi^*$, \hat{w}_φ^* — на сетке $\omega_r^* \times \bar{\omega}_\varphi$.

Тензор Навье-Стокса аппроксимируется следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \Pi_{rr} &= 2\alpha_\mu (s_r^* \tau) p(s_r^* \rho) \left(\delta_r^* u_r - \frac{1}{3} \operatorname{div}_{\omega_r} \mathbf{u} \right), \\
 \Pi_{\varphi\varphi} &= 2\alpha_\mu (s_\varphi \tau) p(s_\varphi \rho) \left(\frac{1}{r} \delta_\varphi u_\varphi + \frac{s_\varphi u_r}{r} - \frac{2}{3} \operatorname{div}_{\omega_\varphi^*} \mathbf{u} \right), \\
 \Pi_{\varphi r} &= \alpha_\mu (s_\varphi \tau) p(s_\varphi \rho) \left(\frac{1}{r} \delta_\varphi u_r + \delta_r s u_\varphi - \frac{s_\varphi u_\varphi}{r} \right), \\
 \Pi_{r\varphi} &= \alpha_\mu (s_r^* \tau) p(s_r^* \rho) \left(\frac{1}{r} \delta_\varphi^* s u_r + \delta_r^* u_\varphi - \frac{s_r^* u_\varphi}{r} \right), \\
 \hat{\Pi}_{\varphi\varphi} &= 2\alpha_\mu \tau p(\rho) \left(\frac{1}{r} \delta_\varphi^* s_\varphi u_\varphi + \frac{u_r}{r} - \frac{1}{3} \operatorname{div}_\omega \mathbf{u} \right),
 \end{aligned}$$

$$\widehat{\Pi}_{\varphi r} = \alpha_\mu \tau p(\rho) \left(\frac{1}{r} \delta_\varphi^* s_\varphi u_r + \delta_r s_r^* u_\varphi - \frac{u_\varphi}{r} \right).$$

Компоненты Π_{rr} , $\Pi_{r\varphi}$ определены на сетке $\bar{\omega}_r \times \omega_\varphi$, $\Pi_{\varphi\varphi}$, $\Pi_{\varphi r}$ — на $\omega_r^* \times \bar{\omega}_\varphi^*$, $\widehat{\Pi}_{\varphi\varphi}$, $\widehat{\Pi}_{\varphi r}$ — на $\omega_r^* \times \omega_\varphi$. Здесь коэффициент вязкости μ взят искусственно как

$$\mu = \alpha_\mu \tau p \quad (31)$$

с числовым параметром $\alpha_\mu \geq 0$.

Входящие в предыдущие выражения сеточные дивергенции таковы

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_\omega(\rho \mathbf{u}) &= \frac{1}{r} \delta_r (r (s_r^* \rho) s_r^* u_r) + \frac{1}{r} \delta_\varphi^* ((s_\varphi \rho) s_\varphi u_\varphi), \\ \operatorname{div}_{\omega_r}(\rho \mathbf{u}) &= \frac{1}{r} \delta_r^* (r \rho u_r) + \frac{1}{r} \delta_\varphi^* ((s \rho) s u_\varphi), \\ \operatorname{div}_{\omega_\varphi^*}(\rho \mathbf{u}) &= \frac{1}{r} \delta_r (r (s \rho) s u_r) + \frac{1}{r} \delta_\varphi (\rho u_\varphi) \end{aligned}$$

на сетках $\omega_r^* \times \omega_\varphi$, $\omega_r \times \omega_\varphi$, $\omega_r^* \times \omega_\varphi^*$ соответственно.

Выберем параметр регуляризации в виде

$$\tau = \tau(r, \rho, \mathbf{u}) = \alpha \frac{\sqrt{r \Delta r \Delta \varphi}}{c_s + \sqrt{u_r^2 + u_\varphi^2}}, \quad (32)$$

где $\alpha > 0$ — числовой параметр, подбираемый из соображений устойчивости и точности расчета. Такой выбор связан с тем, что в полярной системе координат площадь пространственной ячейки можно оценить как $\Delta S = r \Delta r \Delta \varphi$.

Ниже почти во всех расчетах $\alpha_\mu = 0$, т.е. тензор Навье–Стокса не учитывается.

5. Результаты численного моделирования

5.1. Общие замечания

Задача решается в безразмерных переменных, причем система уравнений в безразмерных переменных сохраняет прежний вид. Расчетная область — это $\Omega = \Omega_r \times \Omega_\varphi$ с границами по радиусу $r_1 = 0.2$ и $r_2 = 1.4$.

Форма исходного газового облака задается с помощью функции

$$\zeta(r) = \pm ar \exp(-b(r - r_0)^2)$$

с параметрами $a = 0.2$, $b = 9.0$, $r_0 = 0.8$ в соответствии с [6].

Начальное распределение плотности берется согласно формулам (19), (20)

при $\gamma > 1$ и (27), (20) при $\gamma = 1$. Начальное распределение скорости – это $u_r^0 = 0$ и

$$u_\varphi^0(r, \varphi) = u_\varphi(r)(1 + Ae^{-b(r-r_0)^2} \sin(N_0\varphi)), \quad (33)$$

являющееся возмущенной функцией u_φ , см. (11). По сравнению с [6] возмущение сглажено по r . Параметр $A > 0$ – амплитуда, а N_0 – число периодов возмущения на $[0, 2\pi]$. Массовая сила задается в виде $f_r = F$, см. (21), и $f_\varphi = 0$.

Ставятся “мягкие” граничные условия сноса для искомым функций

$$\delta_r^* \rho|_{i=0, N_r} = 0, \quad \delta_r^* u_r|_{i=0, N_r} = 0, \quad \delta_r^* u_\varphi|_{i=0, N_r} = 0.$$

Для их задания используются фиктивные узлы по радиусу. По углу ставятся условия 2π -периодичности тех же функций.

Коэффициент α в (32) для базовых вариантов составлял 0.2 и 0.3. Шаг по времени выбран постоянным $\Delta t = 0.0005$; это значение не оптимизировалось. Используются равномерные пространственные сетки. Для базовых вариантов расчетов число узлов $(N_r + 2) \times (N_\varphi + 1) = 80 \times 260$. Безразмерное время расчета было ограничено значением $T = 10$. Все расчеты выполнены на персональном компьютере.

5.2. Эволюция течения в базовых вариантах

Результаты расчетов представим сначала для параметров из [5]-[7], а именно, в случае $\gamma = 5/3$, $k = 0.012$. Распределение начальной плотности для него приведено слева на рис. 1. Здесь же для сравнения приведено распределение плотности $\hat{\rho}$, см. (15), полученное численным интегрированием. Там же справа даны графики соответствующей притягивающей силы F и, для сравнения, силы \hat{F} , см. (16). Видно, что различие между этими вариантами распределений плотности и сил невелико. На рис. 2 показано начальное распределение угловой скорости течения. Напомним, что начальная радиальная скорость полагается равной нулю.

Численный расчет течения с указанными начальными данными оказывается устойчивым. Распределения плотности на моменты времени $t=0$ и 10 практически совпадают. Отличие радиальной скорости от нуля составляет не более 1% вблизи границ расчетной области. Эти возмущения скорости обусловлены постановкой граничных условий сноса.

Для задания возмущения угловой скорости выберем параметры $A=0.1$ и $N_0 = 10$ в (33). Расчет эволюции течения для этого варианта приведен на рис. 3. Отметим, что эти результаты существенно не меняются при замене начальной плотности $\bar{\rho}$ на $\hat{\rho}$ и/или силы F на \hat{F} .

Влияние параметров расчета на численное решение. На рис. 3

приведены результаты расчета при выборе коэффициента $\alpha = 0.3$ в формуле для параметра регуляризации τ . Уменьшение α до 0.1 приводит к появлению осцилляций численного решения. Увеличение его до 0.4 несколько сглаживает численное решение. Дальнейшее увеличение α приводит к излишнему размазыванию графиков плотности.

Уменьшение амплитуды возмущения A до 0.01 или увеличение до 0.2 приводит к соответствующему пропорциональному увеличению или уменьшению максимумов плотности без изменения физической картины решения.

Сгущение сетки практически не меняет картину течения, что говорит о достаточной точности расчета и адекватности выбора сетки.

Структура течения. Согласно [1] типичные значения c_s в газовом диске составляют порядка 10 км/с при угловой скорости его вращения ω порядка 200 км/с, что определяет число Маха $M \sim 20$. При таких M существует центробежная неустойчивость, относящаяся к классу неустойчивостей сдвиговых течений и вызванная тем, что угловая скорость вращения центральной части диска больше, чем его периферии.

При выбранном $k=0.012$ эти соотношения выполняются: в центре диска $M_1 \sim 23$, $\omega_1 \sim 11.5$, а вблизи внешней его границы $M_2 \sim 8$, $\omega_2 \sim 0.6$.

Распределения ρ на моменты времени $t = 0.6, 1.1, 3$ и 9.4 приведены на рис. 3. На этих рисунках видно развитие возмущений плотности и формирование классических спиральных рукавов в виде отстающих спиралей “аэродинамической” формы.

Постановка свободных граничных условий на внешней границе области обеспечивает свободное прохождение возмущений через нее и не нарушает картины течения.

Распределение плотности на момент времени $t=1.1$ на рис. 3 приведено в виде изолиний плотности, по аналогии с представлением в работе [8]. Данное представление показывает очень близкое соответствие расчетов настоящей работы и результатов из [8].

Сложная вихревая структура решений хорошо видна при использованной не слишком подробной сетке. Это свидетельствует о достаточно высокой точности алгоритма, несмотря на его первый порядок аппроксимации. Отметим, что в [8] отмечено, что на такой же сетке методы 1-го порядка давали полностью размазанную картину без рукавов, и их формирование было получено только при применении методов 3-го порядка по пространству и 2-го по t .

С течением времени распределение плотности в диске эволюционирует, система рукавов сглаживается и распределение плотности принимает форму концентрических колец на временах порядка $T \sim 8 - 9$.

На рис. 4 представлено распределение радиальной скорости течения u_r на момент $t = 1.55$ и угловой скорости, которая мало меняется со временем. Видно, что u_r меняет знак, что в принципе может вызывать появление в те-

чении циклонических вихрей. Однако по абсолютной величине u_r не велика и не превосходит 1% от u_φ . Поэтому линии тока в полученном течении по своей форме близки к концентрическим окружностям, и циклонические вихри в данных расчетах не наблюдаются.

Согласно [1] при генерации спиральных рукавов в реальных галактиках роль вязкости пренебрежимо мала. Поэтому приведенные выше расчеты выполнены в рамках уравнений без слагаемых Навье-Стокса ($\mu = 0$). Для проверки влияния вязкости был проведен расчет варианта с учетом слагаемых Навье-Стокса, с выбором μ по формуле (31) с $\alpha_\mu = 10$. В результате распределение ρ эволюционирует с образованием рукавов плотности, и затем также принимает кольцевую структуру, но за более короткое время ($T \sim 5$).

На рис. 5–10 показано развитие возмущений для числа $N_0 = 1, 2, 3, 5$ и 7. Для всех вариантов малое начальное возмущение u_φ приводит к развитию крупномасштабных образований и формированию “отстающих” рукавов плотности.

На некоторых рисунках при внимательном рассмотрении видно раздвоение максимумов плотности в спиральных рукавах, то есть формирование двух максимумов плотности в одном рукаве. Например, этот эффект заметен при $N_0 = 3$ на рис. 8, $N_0 = 5$ на рис.9 и $N_0 = 7$ на рис.10. Раздвоение рукавов развивается от начала рукава к его концу. Подобный эффект наблюдается в реальных галактиках.

Из приведенных графиков эволюции плотности видно, что крупные вихревые структуры более свободно формируются при малом числе начальных возмущений. При большом числе возмущений формируются более мелкие структуры, которые вскоре эволюционируют в кольцевые образования.

5.3. Приближение мелкой воды

Выше уже шла речь об использовании приближения мелкой воды для экспериментального моделирования вихревых течений в аккреционных дисках [1, 3]. Поэтому сопоставление результатов численного моделирования одной и той же задачи для разных постановок важно для анализа правомерности такого приближения. Для рассматриваемой системы уравнений случай $\gamma = 5/3$ соответствует течению идеального газа, а случай $\gamma = 2$ позволяет моделировать гидродинамическое течение в приближении мелкой воды. При этом плотность газа ρ соответствует толщине слоя жидкости h в метрах, давление выражается формулой гидростатики $p = gh^2/2$, где $g = 9.8 \text{ м/с}^2$ — ускорение силы тяжести, коэффициент $k = g/2$.

На рис. 11 приведен результаты расчета задачи в рамках приближения мелкой воды. Они соответствуют эксперименту в кольцевом канале с радиусами $r_1=0.2$ м и $r_2=1.4$ м. Представлен вариант с $N_0 = 10$.

Из сопоставления рис. 11 и 3 следует, что приближение мелкой воды дает картину течения, близкую к газодинамической, что подтверждает возможность использования этого приближения для анализа гидродинамических процессов в галактических облаках.

5.4. Случай $\gamma = 1$ (изотермическое течение)

В случае $\gamma=1$ вид исходных уравнений упрощается, скорость звука становится постоянной: $c_s = \sqrt{k}$. Вид начального распределения плотности (27) также становится проще. Оно содержит два свободных параметра: ρ_0 и k , определяющих распределение ρ по радиусу и общую массу газа в диске. Вид начального распределения при $\rho_0 = 1.0$ и $k = 0.12, 0.012$ приведен на рис. 12. Изменение ρ_0 пропорционально меняет полную массу газового диска, а увеличение коэффициента k делает форму распределения плотности в диске более плоской и уменьшает полную массу.

Для определенности в численных расчетах выбрано $N_0 = 10$. Эволюция решения при $\rho_0 = 1, k = 0.012$ на моменты $t = 1.0, 2.0, 3.0, 6.0$ представлена на рис.13. На этих рисунках хорошо видны процессы раздвоения максимума плотности в каждом из рукавов, выход возмущения плотности на внешнюю границу области и последующее формирование кольцевых структур.

Рис. 14 демонстрирует эволюцию газового диска малой массы и с близким к постоянному распределением усредненной плотности по радиусу для $\rho_0 = 0.01, k = 0.12$ на моменты $t = 0.5$ и 0.6 . Общее время расчета $T = 10$. Для этого варианта наглядно видно раздвоение рукавов плотности.

Данная серия расчетов показывает, что в дисках малой массы с “плоским” распределением усредненной плотности раздвоение рукавов проявляется наиболее сильно.

5.5. Распределение углового момента

На рис. 15 – 18 приведены распределения углового момента $M(r) = r\rho u_\varphi$ на три характерные момента времени для всех рассмотренных случаев. Графики построены для угла $\varphi = 0$.

Видно, что для газодинамического течения при $\gamma = 5/3$ наибольший перенос момента импульса наблюдается для малого числа N_0 возмущений скорости. При числе возмущений $N_0 = 10$ перенос момента затруднен из-за взаимного влияния возникающих вихрей. При этом для вариантов $N_0 = 1, 2, 3$ и 5 в начальные моменты времени перенос углового момента происходит в основном в направлении внутренней границы области. Перенос углового момента от центра облака к его периферии происходит за счет развития крупных вихревых структур без нагрева газа, который в данной модели считается малым.

6. Основные результаты

В работе проведено численное моделирование неустойчивостей в аккреционном диске с использованием КГД приближения.

Выведены новые аксиально симметричные стационарные решения баротропных уравнений Эйлера с массовой силой. Проанализирован изэнтропический и изотермический случаи. Эти решения использованы в качестве начальных распределений в нестационарной задаче (с внесением малых возмущений в распределение угловой скорости).

Построенный алгоритм и его программная реализация позволили в численном эксперименте наблюдать развитие малых начальных возмущений угловой скорости и порождаемое ими формирование крупных структур в виде отстающих спиралей — рукавов плотности, которые имеют характерную “аэродинамическую” форму.

В процессе развития возмущений наблюдается раздвоение рукавов плотности. Этот эффект наиболее выражен для уплотненных дисковых образований относительно малой массы, когда происходит отрыв дополнительного максимума плотности и его перемещение наружу через внешнюю границу расчетной области.

Наблюдается перенос момента импульса от центральной области диска к его периферии. При этом чем меньшее число возмущений скорости мы вносим, тем сильнее проявляется перенос момента импульса.

В численном эксперименте подтверждено, что приближение мелкой воды корректно описывает гидродинамическую картину образования рукавов.

Проанализировано влияние на решение параметров алгоритма. Увеличение параметра τ приводит к дополнительному размазыванию решения, уменьшение — к появлению осцилляций, что свидетельствует о рациональности сделанного его выбора. Сгущение сетки не приводит к заметным изменениям решения, т.е. достигнута сходимость численного решения по сетке.

Построенный численный алгоритм достаточно универсален и позволяет проводить численные эксперименты с другими начальными распределениями угловой скорости, плотности и притягивающими силами, представляющими интерес для астрофизики. Этот алгоритм таков, что расчеты быстро выполняются даже на персональном компьютере.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *А.М. Фридман.* Предсказание и открытие новых структур в спиральных галактиках // УФН. 2007. Т. 177. № 2. С. 121–147.
2. *А.М. Фридман, Д.В. Бисикало.* Природа аккреционных дисков тесных двойных звезд: неустойчивость сверхотражения и развитая турбулентность // УФН. 2008. Т. 178. № 6. С. 577–603.
3. *А.М. Незлин, Е.Н. Снежкин.* Вихри и спиральные структуры. Астрофизика и физика плазмы в опытах на мелкой воде. М.: Наука, 1990.
4. *О.М. Белоцерковский, А.М. Опарин, В.М. Четкин.* Турбулентность. Новые подходы. М: Наука, 2003.
5. *М.В. Абакумов, С.И. Мухин, Ю.П. Попов, В.М. Четкин.* Исследование равновесных конфигураций газового облака вблизи гравитирующего центра // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 1995. № 33.
6. *М.В. Абакумов, С.И. Мухин, Ю.П. Попов, В.М. Четкин.* Газодинамические процессы в аккреционном диске двойной звездной системы // Матем. моделирование. 1998. Т. 10. № 5. С. 35–47.
7. *Е.П. Велихов, А.Ю. Луговский, С.И. Мухин, Ю.П. Попов, В.М. Четкин.* Роль крупномасштабной турбулентности в перераспределении углового момента в аккреционных звездных дисках // Астрон. журнал. 2007. Т. 84. № 2. С. 1–8.
8. *А.Ю. Луговский, Ю.П. Попов.* Использование схемы Роу-Эйнфельдта-Ошера при математическом моделировании аккреционных звездных дисков на компьютерах с параллельной архитектурой // ЖМВиМФ, 2015 г., т. 55, № 8, с. 1444 – 1456.
9. *М.А. Истомина, Т.Г. Елизарова.* Квазигазодинамический алгоритм для полярной системы координат и пример численного моделирования неустойчивостей в аккреционном диске // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2016. № 92.
10. *Б.Н. Четверушкин.* Кинетические схемы и квазигазодинамическая система уравнений. М.: МАКС Пресс, 2004.
11. *Т.Г. Елизарова.* Квазигазодинамические уравнения и методы расчета вязких течений. М.: Научный мир, 2007.

12. *Ю.В. Шеретов*. Динамика сплошных сред при пространственно–временном осреднении. Москва–Ижевск: РХД, 2009.
13. *Т.Г. Елизарова, М.А. Истомина*. Квазигазодинамический алгоритм решения уравнений мелкой воды в полярной системе координат // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2014. № 65.
14. *А.А. Злотник, Б.Н. Четверушкин*. О параболичности квазигазодинамической системы уравнений, ее гиперболической 2-го порядка модификации и устойчивости малых возмущений для них // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2008. Т. 48. № 3. С. 445–472.
15. *А.А. Злотник*. Энергетические равенства и оценки для баротропных квазигазо– и квазигидродинамических систем уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2010. Т. 50. № 2. С. 325–337.
16. *А.А. Злотник*. О построении квазигазодинамических систем уравнений и баротропной системе с потенциальной массовой силой // Матем. моделирование. 2012. Т. 24. № 4. С. 65–79.
17. *А.А. Злотник*. О консервативных пространственных дискретизациях баротропной квазигазодинамической системы уравнений с потенциальной массовой силой // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2016. Т. 56. № 2. С. 301–317.

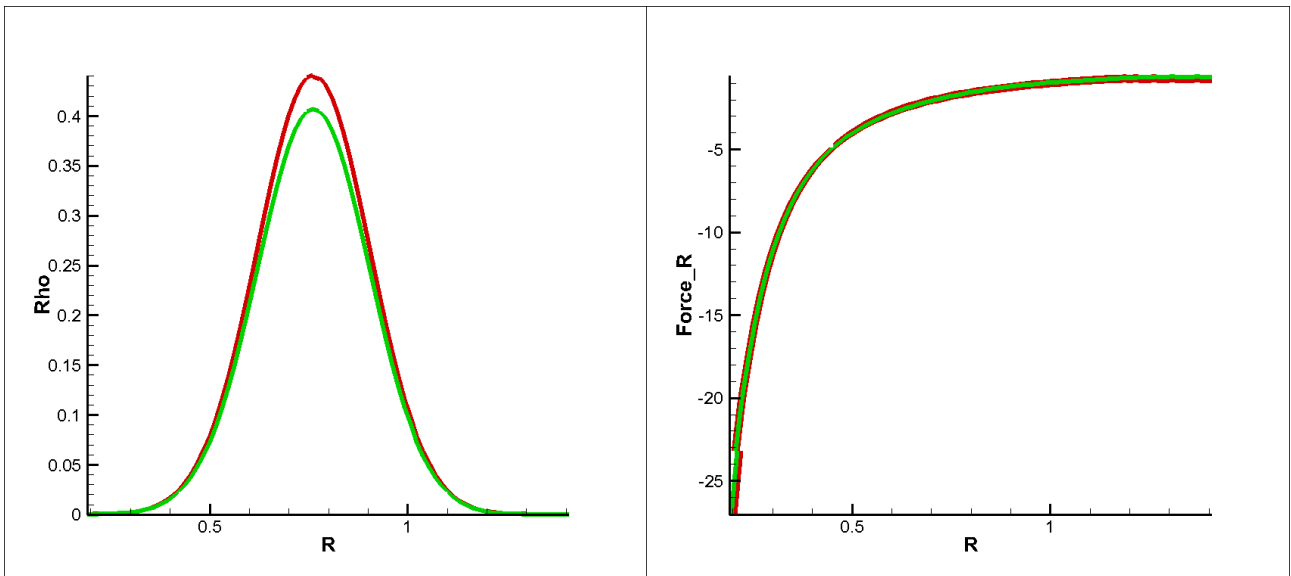


Рис. 1. Распределение плотности $\bar{\rho}$ (зеленый цвет) и силы F и плотности $\hat{\rho}$ и силы \hat{F} (красный цвет) при $\gamma = 5/3$, $k = 0.012$

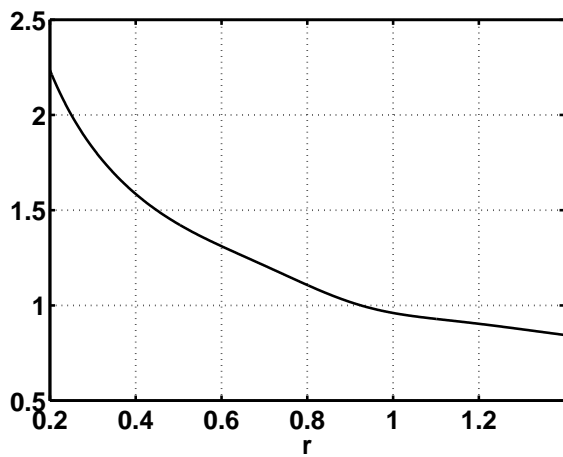


Рис. 2. Начальное распределение u_φ по радиусу при $\gamma = 5/3$, $k = 0.012$

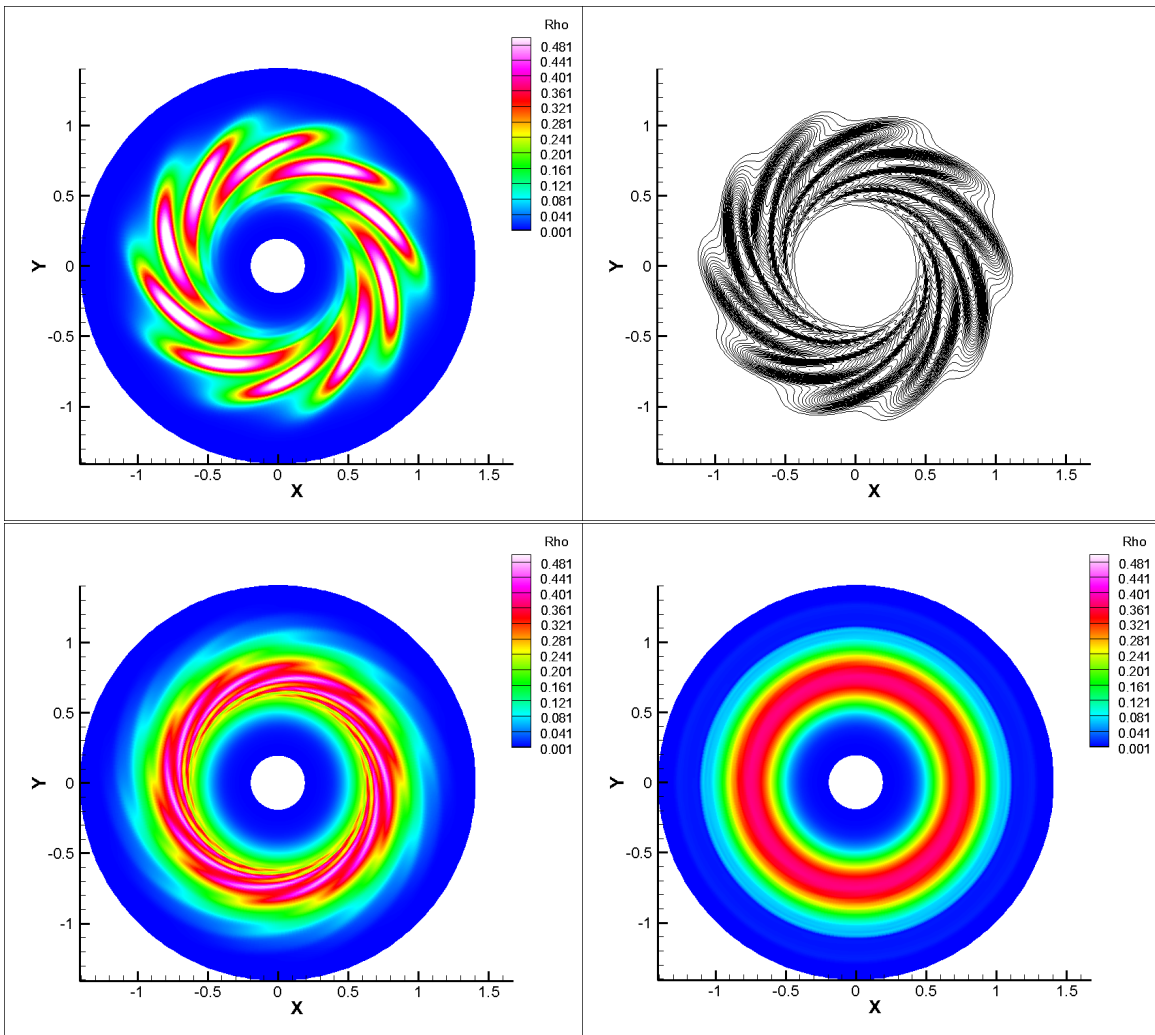


Рис. 3. Распределение ρ для $t = 1.0, 1.1, 3.0, 9.4$ при $\gamma = 5/3, k = 0.012, N_0 = 10$

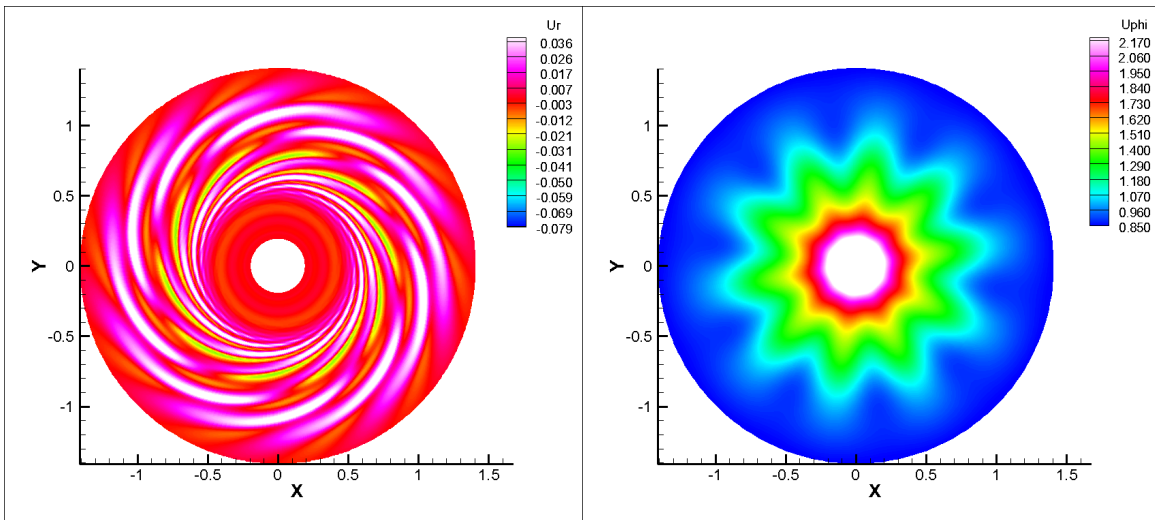


Рис. 4. Распределение u_r для $t = 2.0$ и распределение u_ϕ для $t = 0.0$ при $\gamma = 5/3$, $k = 0.012$ $N_0 = 10$

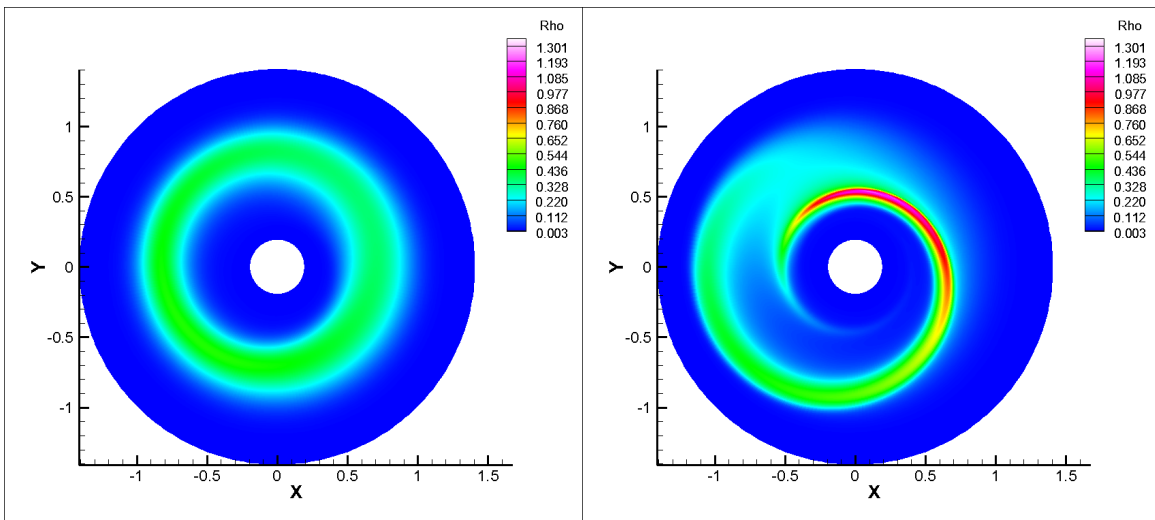


Рис. 5. Распределение ρ для $t = 0.6$ и 1.5 при $\gamma = 5/3$, $k = 0.012$, $N_0 = 1$.
Общее время расчета $T = 1.6$

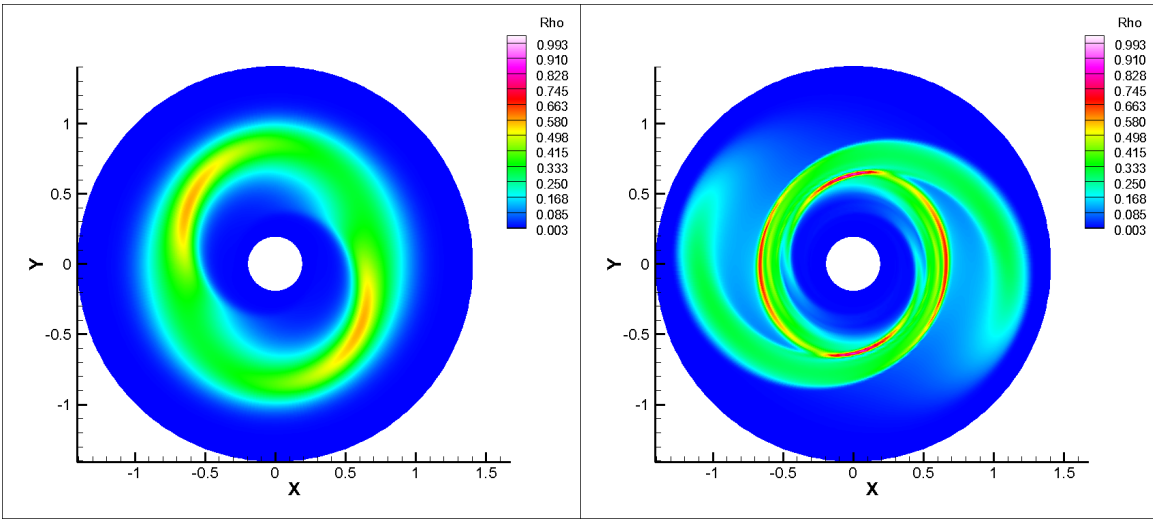


Рис. 6. Распределение ρ для $t = 0.6$ и 2.1 при $\gamma = 5/3$, $k = 0.012$, $N_0 = 2$.
Общее время расчета $T = 2.2$

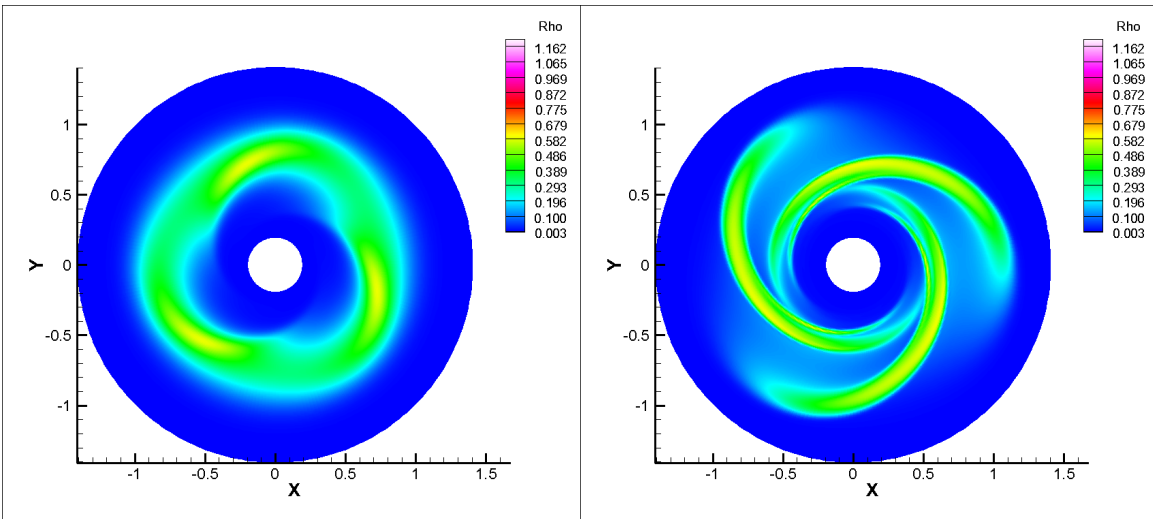


Рис. 7. Распределение ρ для $t = 0.5$ и 1.5 при $\gamma = 5/3$, $k = 0.012$, $N_0 = 3$.
Общее время расчета $T = 1.9$

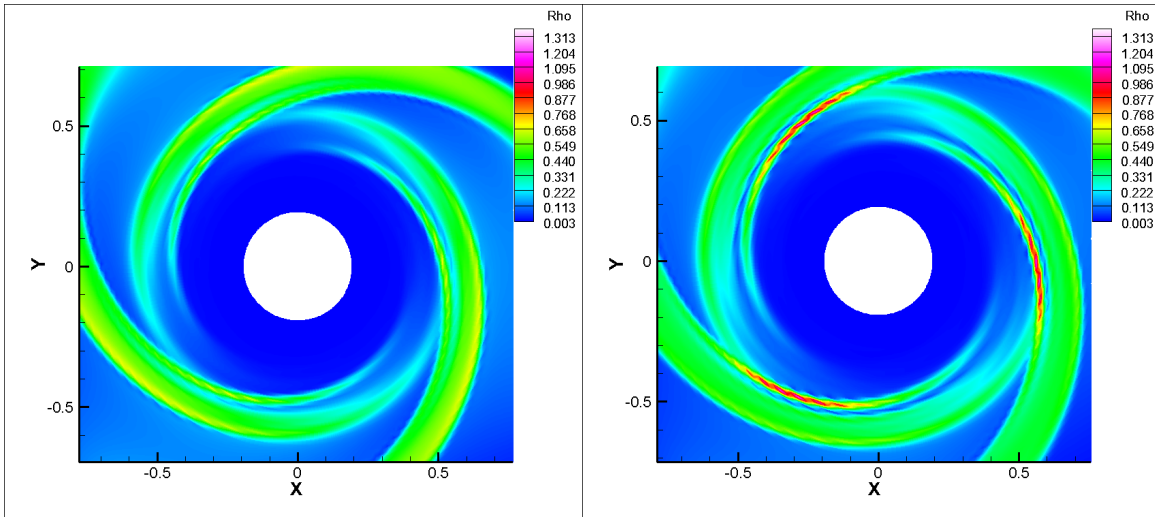


Рис. 8. Распределение ρ для $t = 1.5$ и $t = 1.7$ при $\gamma = 5/3$, $k = 0.012$, $N_0 = 3$. Раздвоение рукавов в увеличении

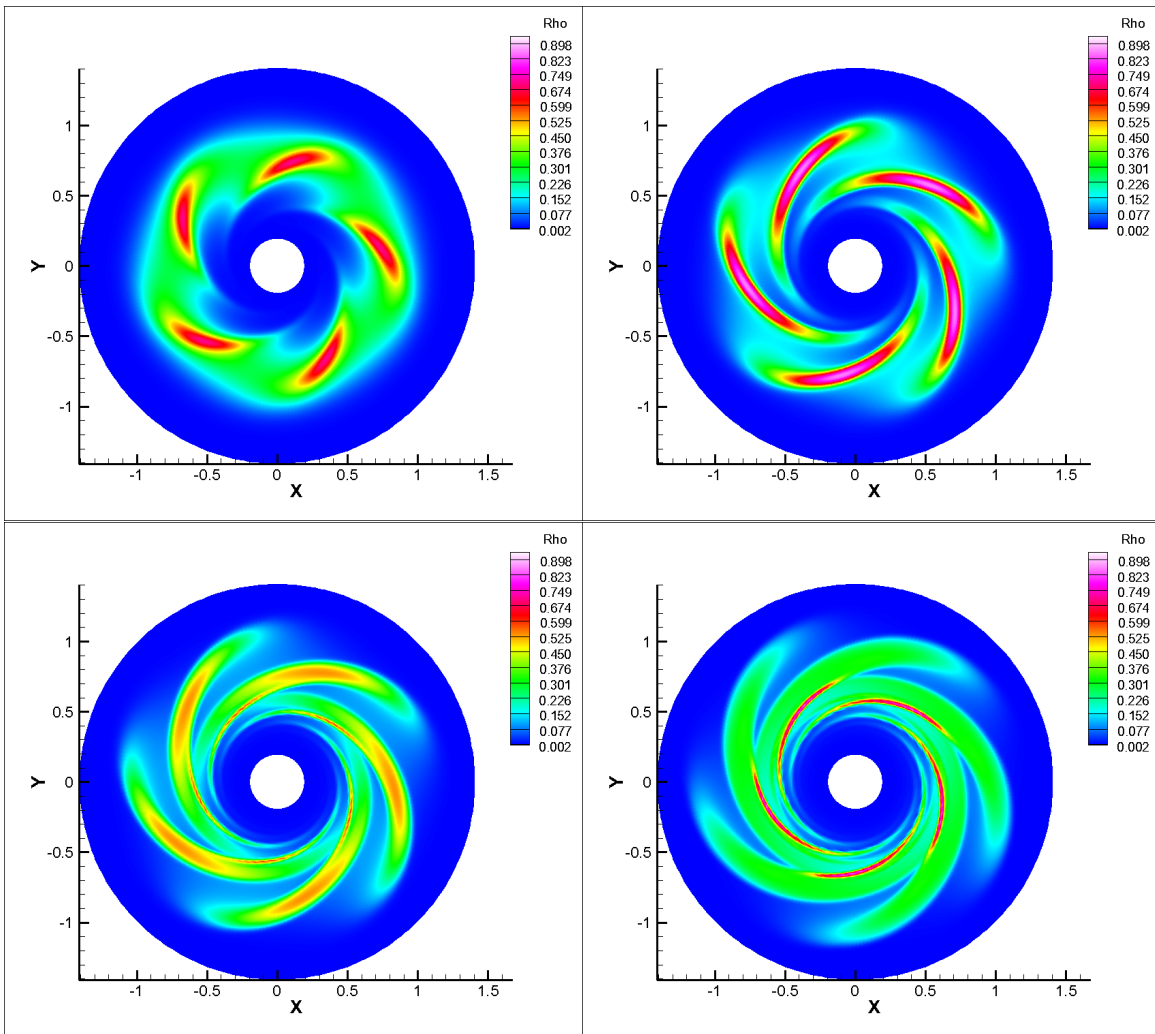


Рис. 9. Распределение ρ для $t = 0.5, 1.0, 1.4, 1.8$ при $\gamma = 5/3$, $k = 0.012$, $N_0 = 5$. Общее время расчета $T = 1.8$

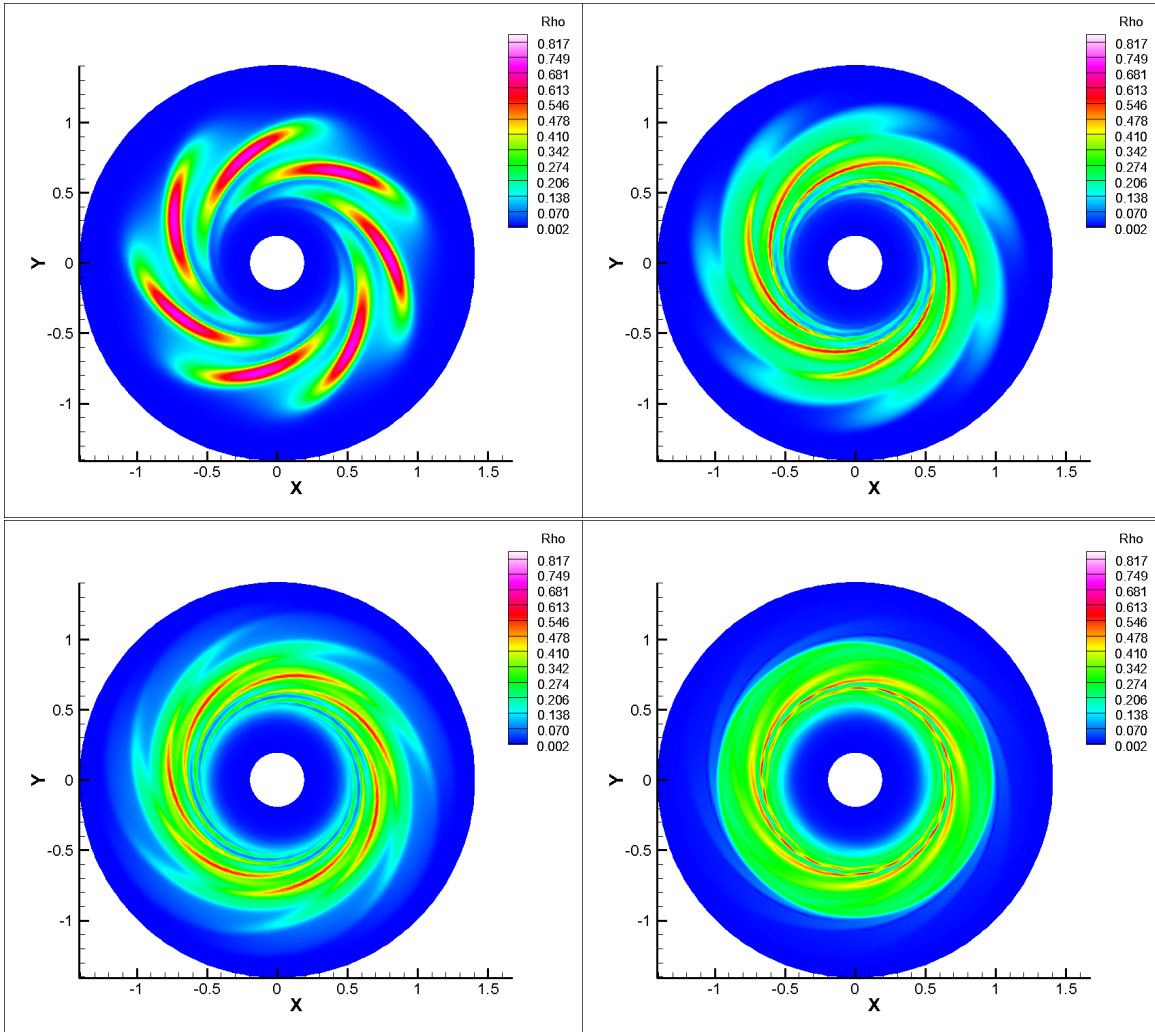


Рис. 10. Распределение ρ для $t = 1.0, 2.0, 3.0, 5.0$ при $\gamma = 5/3$, $k = 0.012$, $N_0 = 7$. Общее время расчета $T = 5.0$

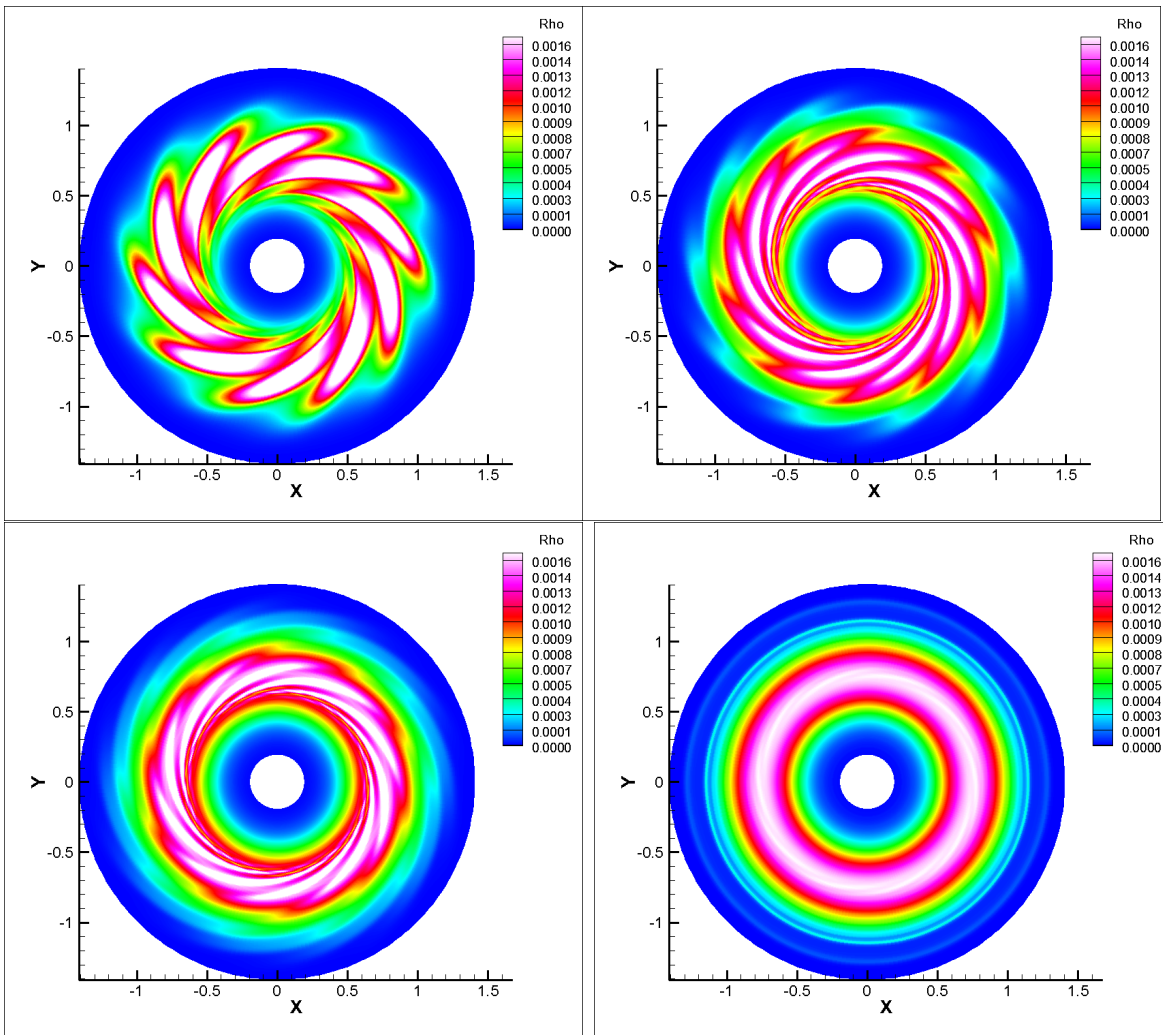


Рис. 11. Распределение ρ для $t = 1.0, 2.0, 3.0, 10.0$ при $\gamma = 2$ (приближение мелкой воды), $k = 9.8/2$, $N_0 = 10$. Общее время расчета $T = 10.0$

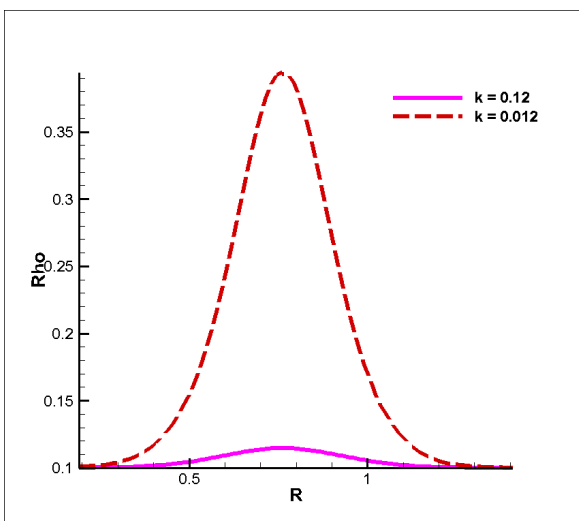


Рис. 12. Начальное распределение ρ по радиусу при $\gamma = 1$, $k = 0.12$ и $k = 0.012$

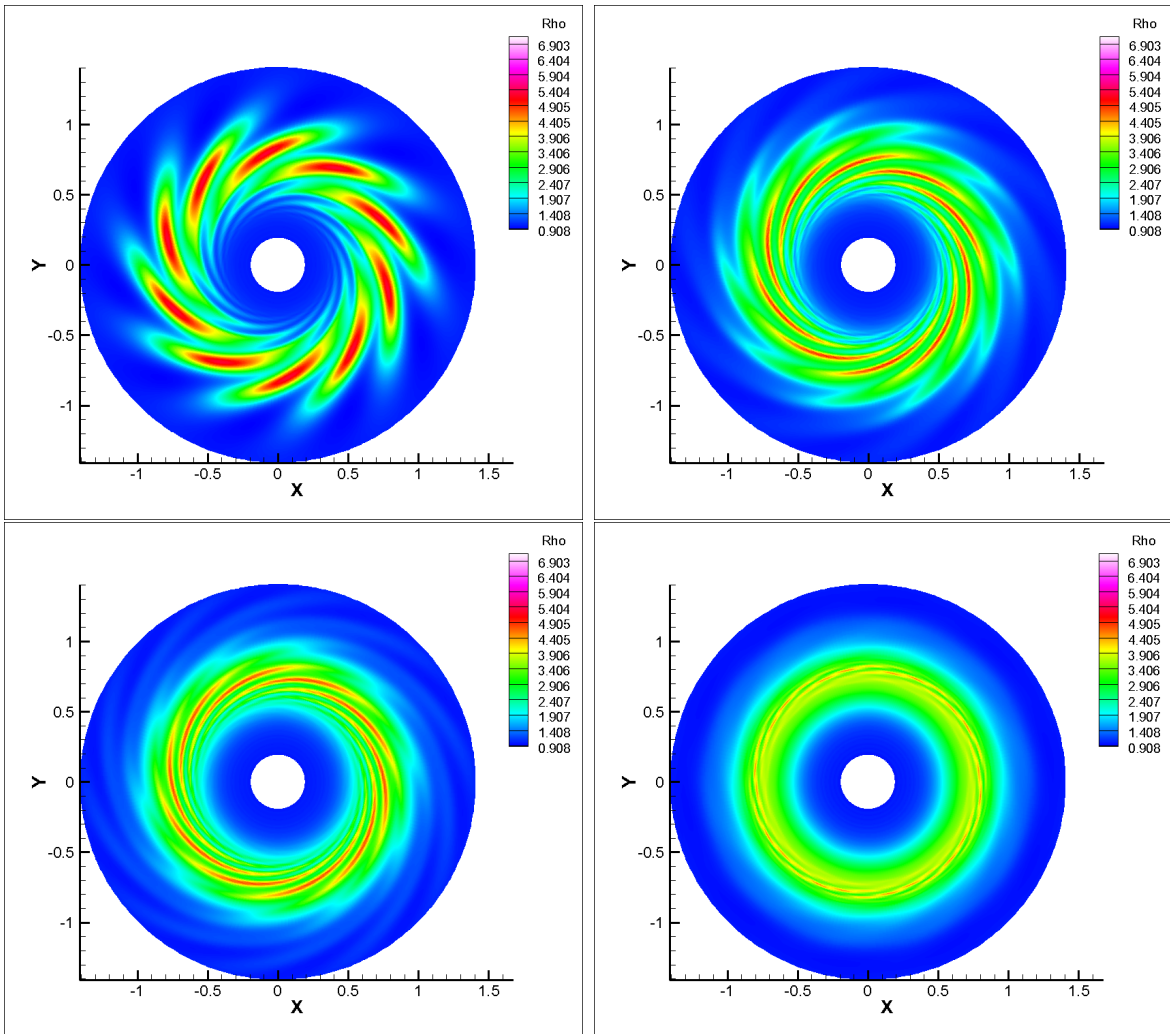


Рис. 13. Распределение ρ для $t = 1.0, 2.0, 3.0, 6.0$ при $\gamma = 1$ (изотермический случай), $k = 0.012$, $N_0 = 10$, $\rho_0 = 1$. Общее время расчета $T = 10.0$

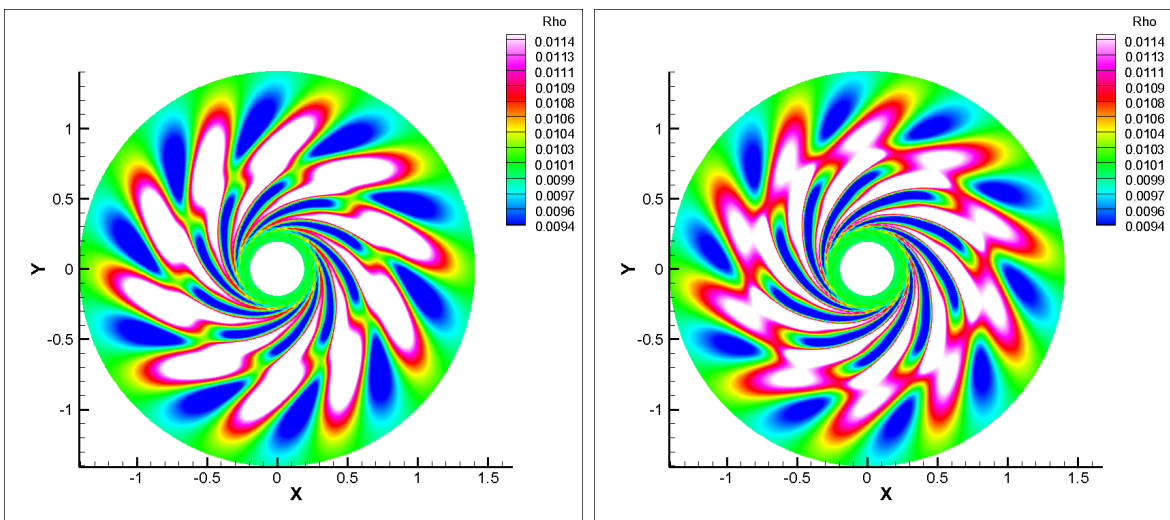


Рис. 14. Распределение ρ для $t = 0.5, 0.6$ при $\gamma = 1$ (изотермический случай), $k = 0.12$, $N_0 = 10$, $\rho_0 = 0.01$. Общее время расчета $T = 10.0$

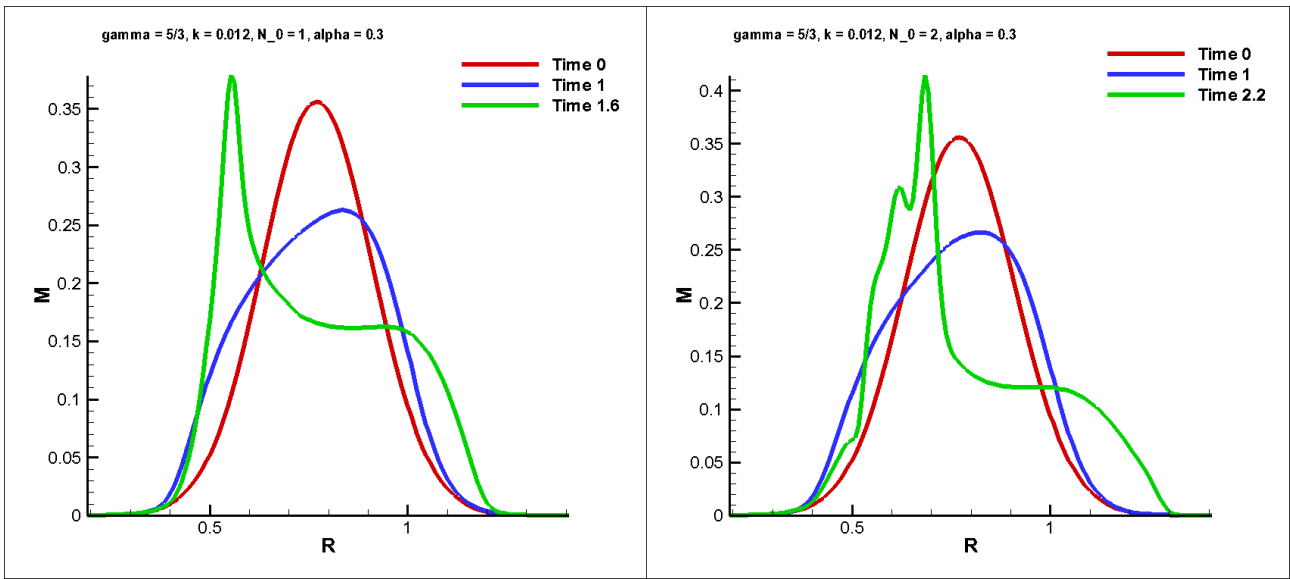


Рис. 15. Распределения углового момента при $\gamma = 5/3$, $k = 0.012$, $N_0 = 1$ и $N_0 = 2$

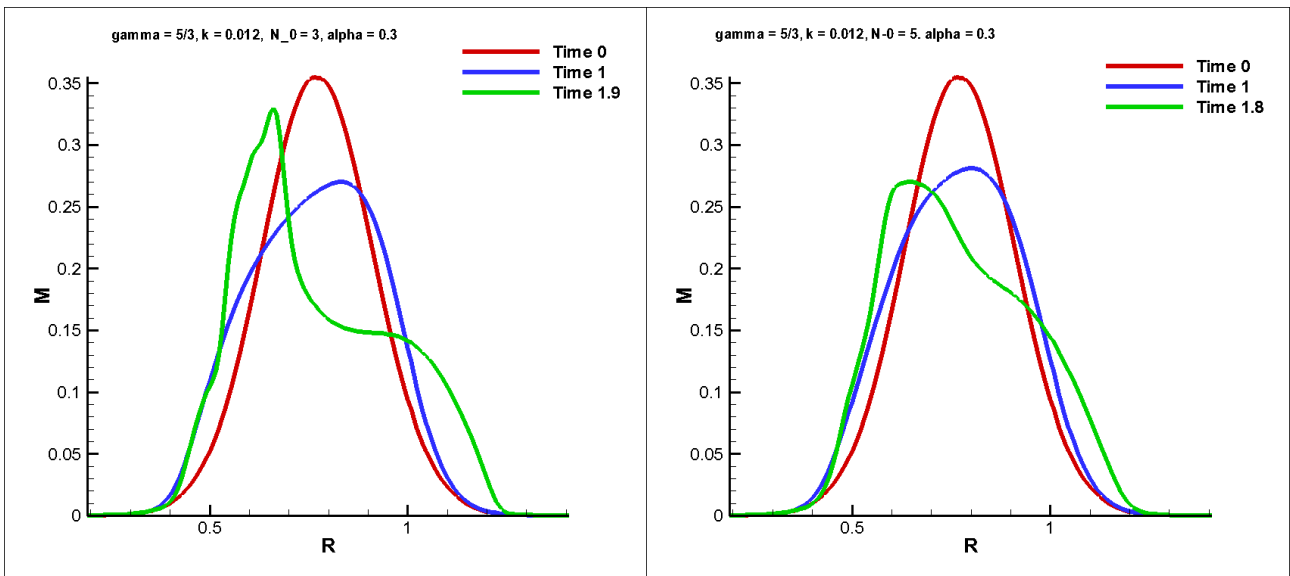


Рис. 16. Распределения углового момента при $\gamma = 5/3$, $k = 0.012$, $N_0 = 3$ и $N_0 = 5$

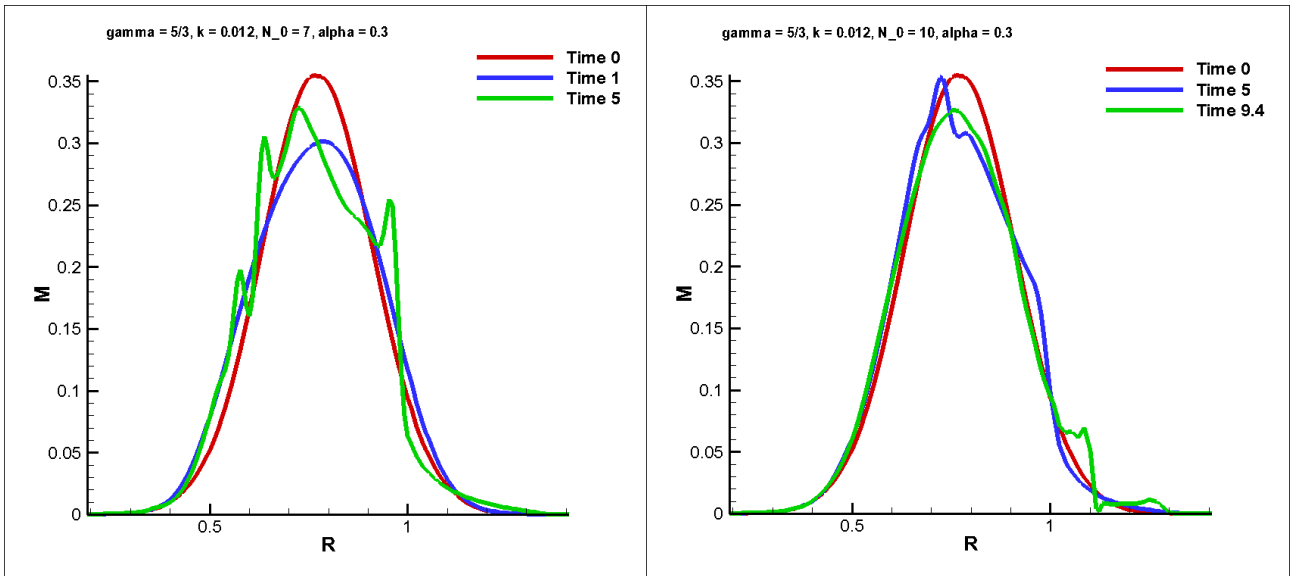


Рис. 17. Распределения углового момента при $\gamma = 5/3$, $k = 0.012$, $N_0 = 7$ и при $N_0 = 10$

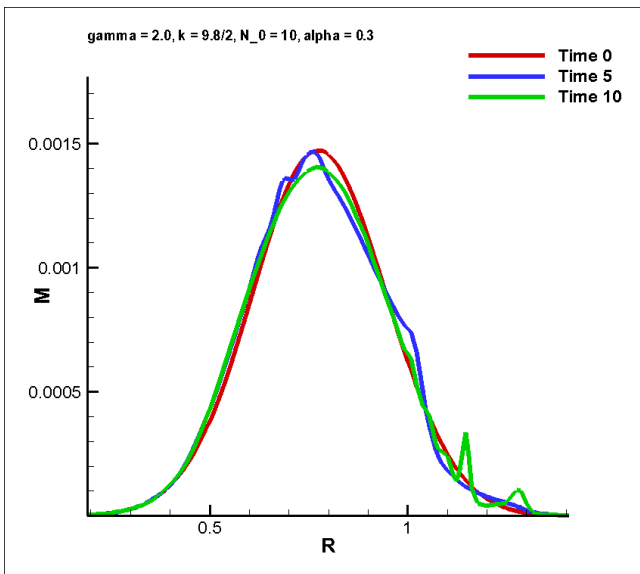


Рис. 18. Распределения углового момента при $\gamma = 2.0$, $k = 9.8/2$, $N_0 = 10$