



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 104 за 2017 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Попков К.А.

Полные проверяющие тесты
длины два для схем при
произвольных константных
неисправностях элементов

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Попков К.А. Полные проверяющие тесты длины два для схем при произвольных константных неисправностях элементов // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2017. № 104. 16 с. doi:[10.20948/prepr-2017-104](https://doi.org/10.20948/prepr-2017-104)
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2017-104>

Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Российской академии наук

К. А. Попков

**Полные проверяющие тесты
длины два для схем
при произвольных константных
неисправностях элементов**

Москва — 2017

Попков К. А.

Полные проверяющие тесты длины два для схем при произвольных константных неисправностях элементов

Рассматривается задача синтеза схем из функциональных элементов, реализующих булевы функции от n переменных и допускающих короткие полные проверяющие тесты относительно произвольных константных неисправностей на выходах элементов. Доказано, что существует базис, состоящий из двух булевых функций от не более чем четырёх переменных, в котором любую булеву функцию можно реализовать схемой, допускающей указанный тест длины не более 2.

Ключевые слова: схема из функциональных элементов, константная неисправность, полный проверяющий тест

Kirill Andreevich Popkov

Complete fault detection tests of the length two for logic networks under stuck-at faults of gates

We consider a problem of synthesis of logic networks implementing Boolean functions on n variables and allowing short complete fault detection tests regarding arbitrary stuck-at faults on outputs of gates. It is proved that there exists a basis consisting of two Boolean functions not more than on four variables, in which one can implement any Boolean function by a network allowing such a test with a length not exceeding 2.

Key words: logic network, stuck-at fault, complete fault detection test

Работа выполнена при поддержке гранта РФФ, проект 14-21-00025 П.

Оглавление

Введение	3
Формулировки и доказательства основных результатов	5
Список литературы	15

Введение

В работе рассматривается задача синтеза легкотестируемых схем, реализующих заданные булевы функции. Логический подход к тестированию электрических схем предложен С. В. Яблонским и И. А. Чегис в [1]; этот подход также применим к тестированию схем из функциональных элементов (см. [2, 3, 4]). Пусть имеется схема из функциональных элементов S с одним выходом, реализующая булеву функцию $f(\tilde{x}^n)$, где $\tilde{x}^n = (x_1, \dots, x_n)$. Под воздействием некоторого источника неисправностей один или несколько элементов схемы S могут перейти в неисправное состояние. В результате схема S вместо исходной функции $f(\tilde{x}^n)$ будет реализовывать некоторую булеву функцию $g(\tilde{x}^n)$, вообще говоря, отличную от f . Все такие функции $g(\tilde{x}^n)$, получающиеся при всевозможных допустимых для рассматриваемой задачи неисправностях элементов схемы S , называются *функциями неисправности* данной схемы.

Введём следующие определения [2, 3, 4]. *Проверяющим тестом* для схемы S называется такое множество T наборов значений переменных x_1, \dots, x_n , что для любой отличной от $f(\tilde{x}^n)$ функции неисправности $g(\tilde{x}^n)$ схемы S в T найдётся набор $\tilde{\sigma}$, на котором $f(\tilde{\sigma}) \neq g(\tilde{\sigma})$. *Диагностическим тестом* для схемы S называется такое множество T наборов значений переменных x_1, \dots, x_n , что T является проверяющим тестом и, кроме того, для любых двух различных функций неисправности $g_1(\tilde{x}^n)$ и $g_2(\tilde{x}^n)$ схемы S в T найдётся набор $\tilde{\sigma}$, на котором $g_1(\tilde{\sigma}) \neq g_2(\tilde{\sigma})$. Число наборов в T называется *длиной* теста. В качестве тривиального диагностического (и проверяющего) теста длины 2^n для схемы S всегда можно взять множество, состоящее из всех двоичных наборов длины n . Тест называется *полным*, если в схеме могут быть неисправны сколько угодно элементов, и *единичным*, если в схеме может быть неисправен только один элемент. Единичные тесты обычно рассматривают для избыточных схем [4], т. е. для таких схем, в которых любая допустимая неисправность любого одного элемента приводит к функции неисправности, отличной от исходной функции, реализуемой данной схемой.

Любое множество булевых функций будем называть *(схемным) базисом*.

Пусть зафиксирован вид неисправностей элементов, B — произвольный функционально полный базис и T — полный проверяющий тест для некоторой схемы из функциональных элементов S в базисе B . Введём следующие обозначения: $D_{\text{ПП}}^B(T)$ — длина теста T ; $D_{\text{ПП}}^B(S) = \min D_{\text{ПП}}^B(T)$, где минимум берётся по всем полным проверяющим тестам T для схемы S ; $D_{\text{ПП}}^B(f) = \min D_{\text{ПП}}^B(S)$, где минимум берётся по всем схемам S в базисе B , реализующим функцию f ; $D_{\text{ПП}}^B(n) = \max D_{\text{ПП}}^B(f)$, где максимум

берётся по всем булевым функциям f от n переменных. Функция $D_{\text{ПП}}^B(n)$ называется *функцией Шеннона* длины полного проверяющего теста. По аналогии с функциями $D_{\text{ПП}}^B$ можно ввести функции $D_{\text{ЕП}}^B$, $D_{\text{ЕД}}^B$ и $D_{\text{ПД}}^B$ для соответственно единичного проверяющего, единичного и полного диагностического тестов, зависящие от T , от S , от f и от n (в определениях функций $D_{\text{ЕП}}^B(f)$ и $D_{\text{ЕД}}^B(f)$ дополнительно предполагается избыточность схем). Так, например, $D_{\text{ЕД}}^B(n)$ — функция Шеннона длины единичного диагностического теста.

Перечислим основные результаты, касающиеся тестирования схем из функциональных элементов. Класс допустимых неисправностей функциональных элементов ограничим константными неисправностями на выходах элементов, при которых значение на выходе любого неисправного элемента становится равно некоторой булевой константе. Неисправности на выходах элементов называются *однотипными константными* типа p , если эта константа одна и та же для каждого неисправного элемента и равна p , и произвольными константными, если эта константа может быть равна как 0, так и 1 для каждого неисправного элемента независимо от неисправностей других элементов. Для удобства над буквой D после символов, обозначающих базис, через точку с запятой будем ставить символы «0, 1», «0» или «1» в случаях, когда в схемах допускаются произвольные константные неисправности, однотипные константные неисправности типа 0 или типа 1 на выходах элементов соответственно. Вполне разумно предполагать, что если в базисе содержится булева константа α , то у элемента, её реализующего, не может быть неисправности типа α .

Для удобства сперва будут перечислены результаты для произвольных, а затем — для однотипных константных неисправностей на выходах функциональных элементов.

В работе С. М. Редди [5] для базиса Жегалкина $B_1 = \{\&, \oplus, 1, 0\}$ была получена оценка $D_{\text{ЕП}}^{B_1; 0,1}(n) \leq n + 3$. В дальнейшем результат работы [5] был обобщён С. С. Колядой в [6] на случай произвольного функционально полного конечного базиса. Последний результат, в свою очередь, был впоследствии усилен Д. С. Романовым, который в [7] для любого функционально полного базиса B получил оценку $D_{\text{ЕП}}^{B; 0,1}(n) \leq 4$ (правда, в указанной работе использовалось несколько другое определение избыточных схем). Для полных проверяющих тестов Н. П. Редькин в [8, 9] для любого полного конечного базиса B_2 получил оценку $D_{\text{ПП}}^{B_2; 0,1}(n) \leq 2 \left(2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + 2^{\lceil \frac{n}{2} \rceil} + n \right)$; Д. С. Романов в [10] доказал, что существует базис B_3 , состоящий из не более чем сорока шести булевых функций от не более чем семи переменных, в котором $2 \leq D_{\text{ПП}}^{B_3; 0,1}(n) \leq 4$. В [4, с. 113,

теорема 9] с использованием идей С. В. Яблонского установлено, что для любого полного базиса B функция $D_{\text{ЕД}}^{B;0,1}(n)$ асимптотически не превосходит $\frac{2^{n+1}}{n}$; аналогично можно показать, что $D_{\text{ЕД}}^{B;p}(n) \lesssim \frac{2^n}{n}$, $p = 0, 1$.

Для базиса $B_4 = \{\&, \vee, \neg\}$ Н. П. Редькин в [11, 12] получил оценки $D_{\text{ПП}}^{B_4;p}(n) \leq n$ и $D_{\text{ЕД}}^{B_4;p}(n) \leq 2n + 1$ для $p = 0, 1$. Первая из этих двух оценок впоследствии была улучшена Ю. В. Бородиной, которая в [13] установила, что $D_{\text{ПП}}^{B_4;p}(n) = 2$; вторая оценка улучшена в [14], где, в частности, доказано, что $D_{\text{ЕД}}^{B_4;p}(n) = 2$. Для базиса $B_5 = \{\&, \neg\}$ в работе [15], в том числе, получены равенства $D_{\text{ЕП}}^{B_5;p}(n) = 3$ для $p = 0, 1$. Ю. В. Бородина в базисе $B_5 = \{\{\}\}$ (штрих Шеффера) получила оценку $D_{\text{ПП}}^{B_5;1}(n) \geq n + 1$ [16]. Ей же для базиса Жегалкина B_1 удалось найти точное значение функций Шеннона $D_{\text{ЕП}}^{B_1;1}(n) = 1$ [17] и $D_{\text{ПП}}^{B_1;0}(n) = 1$ [18] (совместно с П. А. Бородиным). В работе [19], в частности, установлено равенство $D_{\text{ЕД}}^{B_1;0}(n) = 2$, а в работе [20] — неравенство $D_{\text{ПД}}^{B_5;1}(n) \gtrsim \frac{2^{\frac{n}{2}}}{\sqrt[4]{n}}$.

В данной работе будут рассматриваться только полные проверяющие тесты, а в качестве неисправностей функциональных элементов — произвольные константные неисправности на выходах элементов. Для краткости вместо $D_{\text{ПП}}^{B;0,1}(f)$ и $D_{\text{ПП}}^{B;0,1}(n)$ будем писать соответственно $D^B(f)$ и $D^B(n)$.

Вместо «вход схемы S (элемента E), отвечающий переменной x_i » для краткости будем писать «вход „ x_i “ схемы S (соответственно элемента E)».

Будем говорить, что функциональный элемент E' расположен в схеме S или в цепочке Z выше (ниже) функционального элемента E , если в этой схеме (цепочке) существует ориентированный путь от E' к E (соответственно от E к E').

Формулировки и доказательства основных результатов

Рассмотрим в качестве базиса множество $B_6 = \{h(x, y, z, t), x \oplus y \oplus z, \bar{x}\}$, где $h(x, y, z, t)$ — булева функция, заданная следующей таблицей:

x	y	z	t	$h(x, y, z, t)$	x	y	z	t	$h(x, y, z, t)$
0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
0	0	0	1	0	1	0	0	1	1
0	0	1	0	0	1	0	1	0	1
0	0	1	1	0	1	0	1	1	0
0	1	0	0	1	1	1	0	0	1
0	1	0	1	1	1	1	0	1	1
0	1	1	0	*	1	1	1	0	0
0	1	1	1	0	1	1	1	1	1

(вместо звёздочки может стоять как 0, так и 1). Если вместо звёздочки стоит 0, то функция h может быть задана следующей несложной формулой:

$$h(x, y, z, t) = x(y \sim zt) \vee y\bar{z}.$$

Любой функциональный элемент, реализующий функцию вида $h(x, y, z, t)$ (вида $x \oplus y \oplus z, \bar{x}$), будем называть *контролирующим элементом* (соответственно *сумматором*, *инвертором*).

Выделим два возможных представления функции $f(\tilde{x}^n)$:

$$f(\tilde{x}^n) = x_i, \quad (1)$$

где $i \in \{1, \dots, n\}$;

$$f(\tilde{x}^n) \equiv 0 \text{ или } 1. \quad (2)$$

Теорема 1. Для любой булевой функции $f(\tilde{x}^n)$ справедливо равенство

$$D^{B_6}(f) = \begin{cases} 0, & \text{если функция } f \text{ представима в виде (1),} \\ 1, & \text{если функция } f \text{ представима в виде (2),} \\ 2, & \text{если функция } f \text{ не представима в видах (1), (2).} \end{cases}$$

Следствие 1. Для любого $n \geq 1$ справедливо равенство $D^{B_6}(n) = 2$.

Доказательство теоремы 1. Вместо $D^{B_6}(f)$ для краткости будем писать $D(f)$. Можно считать, что в базисе B_6 содержится функция $x\&y$: достаточно отождествить входы « x », « y » и « z » у произвольного контролирующего элемента (КЭ) и получить двухвходовой элемент, реализующий функцию вида $x\&y$ от своих входов (это следует из равенств $h(0, 0, 0, 0) = h(0, 0, 0, 1) = h(1, 1, 1, 0) = 0$, $h(1, 1, 1, 1) = 1$) и допускающий те же самые неисправности (а именно, неисправности типов 0 и 1 на его выходе), что и исходный КЭ. Любой функциональный элемент, реализующий функцию вида $x\&y$, будем называть *конъюнктом*.

Если функция f представима в виде (1), то её, очевидно, можно реализовать схемой, не содержащей функциональных элементов. У такой схемы нет ни одной функции неисправности, поэтому пустое множество является для неё полным проверяющим тестом, откуда следует равенство $D(f) = 0$.

Пусть функция f представима в виде (2), т. е. $f(\tilde{x}^n) \equiv \alpha$, $\alpha \in 0, 1$. Поскольку она не представима в виде (1), выход любой схемы, реализующей функцию f , не может совпадать ни с одним из её входов, поэтому он является выходом некоторого функционального элемента. Тогда при неисправности типа $\bar{\alpha}$ на выходе этого элемента получающаяся схема

будет реализовывать константу $\bar{\alpha}$, которую надо отличить от функции f хотя бы на одном наборе, откуда следует, что $D(f) \geq 1$.

Докажем неравенство $D(f) \leq 1$. Реализуем функцию f схемой S в базисе B_6 , содержащей один инвертор и один КЭ. На вход инвертора подадим переменную x_1 , его выход соединим со входом « t » и — в случае $\alpha = 1$ — со входом « y » КЭ; на входы « x », « z » и — в случае $\alpha = 0$ — на вход « y » этого КЭ подадим переменную x_1 . Пользуясь таблицей значений функции $h(x, y, z, t)$, нетрудно проверить, что указанная схема реализует функцию $f \equiv \alpha$ и имеет две отличные от f функции неисправности — константу $\bar{\alpha}$ и функцию x_1 . Действительно, в случае $\alpha = 1$ схема S реализует функцию $h(x_1, \bar{x}_1, x_1, \bar{x}_1) \equiv 1$, а в случае $\alpha = 0$ — функцию $h(x_1, x_1, x_1, \bar{x}_1) \equiv 0$; при неисправности типа α (типа $\bar{\alpha}$) КЭ данная схема станет реализовывать функцию α (соответственно $\bar{\alpha}$); если же КЭ в схеме S исправен, то при неисправности типа β инвертора она станет реализовывать функцию

$$h(x_1, \beta, x_1, \beta) = \begin{cases} x_1, & \text{если } \beta = 0, \\ 1 = \alpha, & \text{если } \beta = 1, \end{cases}$$

в случае $\alpha = 1$ и функцию

$$h(x_1, x_1, x_1, \beta) = \begin{cases} 0 = \alpha, & \text{если } \beta = 0, \\ x_1, & \text{если } \beta = 1, \end{cases}$$

в случае $\alpha = 0$. Каждую из функций $\bar{\alpha}$, x_1 можно отличить от функции f на любом наборе длины n , первая слева компонента которого равна $\bar{\alpha}$. Поэтому схема S допускает полный проверяющий тест длины 1, откуда $D(f) \leq 1$. В итоге для любой функции f вида (2) получаем равенство $D(f) = 1$.

Пусть теперь функция f не представима в видах (1), (2). Выход любой схемы, реализующей эту функцию, не может совпадать ни с одним из её входов, поэтому он является выходом некоторого функционального элемента. Тогда при неисправности типа 0 (1) этого элемента получающаяся схема будет реализовывать константу 0 (соответственно 1), которую надо отличить от функции f хотя бы на одном наборе. Отсюда следует, что в любой полный проверяющий тест для рассматриваемой схемы должен входить хотя бы один набор, на котором функция f принимает значение 1 (соответственно 0), поэтому $D(f) \geq 2$.

Докажем неравенство $D(f) \leq 2$. Представим функцию f полиномом Жегалкина:

$$f(\tilde{x}^n) = K_1 \oplus \dots \oplus K_m \oplus c, \quad (3)$$

где $m \geq 1$, $c \in \{0, 1\}$, а K_1 — самая короткая конъюнкция в этом полиноме. Положим $\tilde{\sigma}_1 = (\underbrace{1, \dots, 1}_n)$, $\tilde{0}^n = (\underbrace{0, \dots, 0}_n)$. Если $f(\tilde{\sigma}_1) \neq f(\tilde{0}^n)$ (назовём это случаем А), то пусть $\tilde{\sigma}_2 = \tilde{0}^n$ и $k = 0$. Тогда из представления (3) следует, что $f(\tilde{\sigma}_2) = c$, $f(\tilde{\sigma}_1) = \underbrace{1 \oplus \dots \oplus 1}_m \oplus c$, поэтому m нечётно.

Если же $f(\tilde{\sigma}_1) = f(\tilde{0}^n)$ (назовём это случаем Б), то без ограничения общности будем считать, что $K_1 = x_1 \& \dots \& x_k$, где $k \in \{1, \dots, n\}$, и положим $\tilde{\sigma}_2 = (\underbrace{1, \dots, 1}_k, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-k})$. Тогда, поскольку K_1 — самая короткая конъюнкция в полиноме Жегалкина для функции f , то в каждую конъюнкцию K_2, \dots, K_m входит хотя бы одна переменная из числа x_{k+1}, \dots, x_n . Отсюда и из представления (3) следует, что $f(\tilde{0}^n) = c$, а $f(\tilde{\sigma}_2) = 1 \oplus \underbrace{0 \oplus \dots \oplus 0}_{m-1} \oplus c = \bar{c}$, т.е. $f(\tilde{0}^n) \neq f(\tilde{\sigma}_2)$. Тогда

$$f(\tilde{\sigma}_1) \neq f(\tilde{\sigma}_2); \quad (4)$$

в частности, $\tilde{\sigma}_1 \neq \tilde{\sigma}_2$, т.е. $k < n$. (Отметим, что соотношение (4) верно также в случае А.) Если в полиноме Жегалкина для функции f присутствует слагаемое $x_1 \& \dots \& x_k \& x_{k+1}$, то будем без ограничения общности считать, что это слагаемое K_m . Представим K_1 в виде $K'_1 \oplus K_{m+1}$, где $K'_1 = x_1 \& \dots \& x_k \& \bar{x}_{k+1}$, $K_{m+1} = x_1 \& \dots \& x_k \& x_{k+1}$. Тогда

$$\begin{aligned} f(\tilde{x}^n) &= K'_1 \oplus K_2 \oplus \dots \oplus K_m \oplus K_{m+1} \oplus c = K'_1 \oplus K_2 \oplus \dots \oplus K_r \oplus c = \\ &= (K'_1 \oplus 1) \oplus K_2 \oplus \dots \oplus K_r \oplus \bar{c}, \end{aligned} \quad (5)$$

где $r = m - 1$ при $K_m = K_{m+1}$ и $r = m + 1$ при $K_m \neq K_{m+1}$ (в случае $r = 1$ полагаем $K_2 \oplus \dots \oplus K_r = 0$). Заметим, что

$$c = f(\tilde{0}^n) = f(\tilde{\sigma}_1) = K'_1(\tilde{\sigma}_1) \oplus K_2(\tilde{\sigma}_1) \oplus \dots \oplus K_r(\tilde{\sigma}_1) \oplus c = 0 \oplus \underbrace{1 \oplus \dots \oplus 1}_{r-1} \oplus c$$

в силу (3), (5) и предположения случая Б, откуда $\underbrace{1 \oplus \dots \oplus 1}_{r-1} = 0$, т.е. r нечётно.

В случае А положим $r = m$. Тогда r нечётно и $\tilde{\sigma}_2 = (\underbrace{1, \dots, 1}_k, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-k})$ в каждом из случаев А и Б (напомним, что $k = 0$ в случае А). Введём для удобства обозначение

$$q = \begin{cases} 1 & \text{в случае А,} \\ 2 & \text{в случае Б.} \end{cases}$$

Как было отмечено выше, в случае Б в каждую конъюнкцию K_i , где $i = q, q + 1, \dots, r$ (при $r \geq q$), входит хотя бы одна переменная из числа x_{k+1}, \dots, x_n . Аналогичный факт, очевидно, верен и в случае А, в котором $q = 1, r = m$ и $k = 0$. Обозначим произвольную такую переменную через y_i , а ранг конъюнкции K_i — через t_i .

Реализуем функцию $f(\tilde{x}^n)$ схемой S в базисе B_6 в соответствии с представлением (3) (где $m = r$) в случае А и представлением (5) в случае Б (см. рис. 1). Каждую конъюнкцию $K_i, i = q, \dots, r$ (при $r \geq q$), реализуем цепочкой Z_i из $t_i - 1$ конъюнкторов $E_{i,1}^{\&}, \dots, E_{i,t_i-1}^{\&}$, занумерованных «сверху вниз», причём на один из входов элемента $E_{i,1}^{\&}$ — верхнего конъюнктора цепочки Z_i — подадим переменную y_i (в случае $t_i = 1$ в этой цепочке не содержится элементов, а её выход совпадает со входом « y_i » схемы S). Слагаемое $K'_1 \oplus 1 = \overline{x_1 \& \dots \& x_k \& \overline{x_{k+1}}$ в случае Б реализуем цепочкой Z_1 из двух инверторов и k конъюнкторов, верхним и нижним элементами в которой являются инверторы; на вход одного инвертора подадим переменную x_{k+1} , а на «правые» входы конъюнкторов — последовательно переменные x_1, \dots, x_k ; выход нижнего конъюнктора соединим со входом другого инвертора.

Затем выходы всех построенных цепочек Z_1, \dots, Z_r соединим со входами цепочки Z_{\oplus} , состоящей из $\frac{r-1}{2}$ сумматоров (напомним, что r нечётно; в случае $r \geq 3$ в этой цепочке все три входа верхнего сумматора и по два входа каждого из остальных $\frac{r-3}{2}$ сумматоров последовательно соединяются с выходами цепочек Z_1, \dots, Z_r , в частности, выход цепочки Z_1 соединяется с одним из входов верхнего сумматора; в случае $r = 1$ в цепочке Z_{\oplus} не содержится элементов, а её выход совпадает с выходом цепочки Z_1).

Далее, для каждого определённого выше конъюнктора $E_{i,s}^{\&}, i = q, \dots, r; s = 1, \dots, t_i - 1$, построим КЭ $E_{i,s}^C$, вход « y » которого соединим с выходом этого конъюнктора, а входы « z » и « t » — с теми входами схемы S или выходами элементов, с которыми в цепочке Z_i соединяются входы конъюнктора $E_{i,s}^{\&}$, причём вход « z » КЭ $E_{i,s}^C$ соединим либо со входом « y_i » схемы S (при $s = 1$), либо с выходом конъюнктора $E_{i,s-1}^{\&}$ (при $s > 1$). Затем соединим все построенные КЭ $E_{i,s}^C$ в цепочку Z_C через их входы « x », оставшиеся незанятыми; при этом вход « x » верхнего КЭ соединим с выходом цепочки Z_{\oplus} (в случаях $r < q$ или $r \geq q$ и $t_q = \dots = t_r = 1$ считаем, что цепочка Z_C не содержит элементов, а её выход совпадает с выходом цепочки Z_{\oplus}). Пусть элементы $E_{i,s}^C$ идут в цепочке Z_C «сверху вниз» в порядке возрастания индекса i , а для элементов $E_{i,s}^C$ с одинаковым индексом i — в порядке убывания индекса s . Таким образом, если, например, $t_q > 1$ и $t_r > 1$, то верхним элементом в цепочке Z_C будет являться E_{q,t_q-1}^C , а нижним — $E_{r,1}^C$.

Докажем, что построенная схема S при отсутствии в ней неисправностей реализует функцию $f(\tilde{x}^n)$. Легко видеть, что на выходе цепочки $Z_i, i = q, \dots, r$, реализуется конъюнкция K_i , а на выходе цепочки Z_1 в случае Б — слагаемое $K'_1 \oplus 1$. Тогда на выходе цепочки Z_{\oplus} в случае А реализуется функция $K_1 \oplus \dots \oplus K_m$ (напомним, что в этом случае $r = m$), а в случае Б — функция $(K'_1 \oplus 1) \oplus K_2 \oplus \dots \oplus K_r$. В каждом из случаев А и Б данная функция равна $f(\tilde{x}^n) \oplus c'$ в силу (3), (5).

Рассмотрим далее произвольный КЭ $E_{i,s}^C$ из цепочки Z_C . Пусть на его входы « x », « y », « z » и « t » в схеме S подаются булевы функции $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$ и φ_t соответственно, тогда на его выходе реализуется функция $h(\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z, \varphi_t)$. Как было отмечено выше, входы « z » и « t » элемента $E_{i,s}^C$ соединяются с теми же выходами элементов или входами схемы S , что и входы конъюнктора $E_{i,s}^{\&}$, выход которого соединён со входом « y » элемента $E_{i,s}^C$. Поэтому на выходе конъюнктора $E_{i,s}^{\&}$ в схеме S реализуется функция $\varphi_y = \varphi_z \& \varphi_t$, а на выходе КЭ $E_{i,s}^C$ — функция

$$h(\varphi_x, \varphi_z \& \varphi_t, \varphi_z, \varphi_t) \equiv \varphi_x \quad (7)$$

(данное соотношение следует из равенств

$$\begin{aligned} h(0, 0, 0, 0) &= h(0, 0, 0, 1) = h(0, 0, 1, 0) = h(0, 1, 1, 1) = 0, \\ h(1, 0, 0, 0) &= h(1, 0, 0, 1) = h(1, 0, 1, 0) = h(1, 1, 1, 1) = 1. \end{aligned}$$

Таким образом, функция, реализуемая на выходе каждого КЭ в цепочке Z_C , совпадает с функцией, подающейся на его вход « x ». В силу построения цепочки Z_C это означает, что на её выходе в схеме S реализуется та же булева функция, что и на выходе цепочки Z_{\oplus} , т. е. функция $f(\tilde{x}^n) \oplus c'$. Тогда в каждом из случаев $c' = 0$ и $c' = 1$ на выходе схемы S реализуется функция $f(\tilde{x}^n)$.

Докажем, что множество $T = \{\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2\}$ является полным проверяющим тестом для схемы S . Если в данной схеме присутствует и при этом неисправен инвертор I , то она реализует булеву константу и неисправность будет обнаружена на одном из наборов $\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2$, поскольку $f(\tilde{\sigma}_1) \neq f(\tilde{\sigma}_2)$ в силу (4). Пусть теперь инвертор I , если он присутствует в схеме S , исправен. Тогда очевидно, что функция, реализуемая на выходе этой схемы, получается из функции, реализуемой на выходе цепочки Z_C , прибавлением по модулю 2 константы c' . Рассмотрим два случая.

1. Среди конъюнкторов $E_{i,s}^{\&}$ и КЭ $E_{i,s}^C, i = q, \dots, r; s = 1, \dots, t_i - 1$, есть хотя бы один неисправный элемент. Среди всех таких неисправных элементов выберем тот, у которого индекс i наибольший; если таких элементов несколько, выберем среди них тот, у которого индекс s

наименьший; если таких элементов два (а именно, $E_{i,s}^{\&}$ и $E_{i,s}^C$ для некоторых i и s), выберем из них КЭ $E_{i,s}^C$. Выбранный элемент обозначим через $E_{i,s}$ (без верхнего индекса $\&$ или C). Тогда в силу порядка расположения элементов в цепочке Z_C любой КЭ $E_{j,u}^C$, находящийся в этой цепочке ниже КЭ $E_{i,s}^C$, исправен, поскольку либо $j > i$, либо $j = i$ и $u < s$. Из этих же соотношений следует, что конъюнктор $E_{j,u}^{\&}$ исправен, поэтому на его выходе реализуется конъюнкция функций, подаваемых на его входы, а на выходе КЭ $E_{j,u}^C$ — функция, подаваемая на вход « x » данного КЭ, по аналогии с (7). Таким образом, на выходе цепочки Z_C будет реализована та же булева функция, что и на выходе элемента $E_{i,s}^C$. Возможны два подслучая.

1.1. Элемент $E_{i,s}$ — КЭ $E_{i,s}^C$. Так как он неисправен, то на его выходе, а значит, и на выходе цепочки Z_C будет реализована некоторая булева константа. Тогда и на выходе всей схемы S будет реализована булева константа вне зависимости от того, присутствует в ней инвертор I или нет, и неисправность будет обнаружена на одном из наборов $\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2$, поскольку $f(\tilde{\sigma}_1) \neq f(\tilde{\sigma}_2)$ в силу (4).

1.2. Элемент $E_{i,s}$ — конъюнктор $E_{i,s}^{\&}$. Тогда в силу выбора элемента $E_{i,s}$ он неисправен, а КЭ $E_{i,s}^C$ и все конъюнкторы $E_{i,1}^{\&}, \dots, E_{i,s-1}^{\&}$, расположенные в цепочке Z_i выше элемента $E_{i,s}$ (при $s > 1$), исправны. Рассмотрим два подслучая.

1.2.1. Элемент $E_{i,s}$ реализует константу 0. На наборе $\tilde{\sigma}_1$ на входы этого элемента в схеме S , очевидно, будут подаваться единицы. Тогда на входы « y », « z » и « t » КЭ $E_{i,s}^C$ на этом наборе поступят значения 0, 1 и 1 соответственно. Значит, на выходе элемента $E_{i,s}^C$ возникнет значение 0, поскольку $h(0, 0, 1, 1) = h(1, 0, 1, 1) = 0$. В силу написанного выше это значение «пройдёт» до выхода цепочки Z_C , а значение на выходе схемы S будет равно $0 \oplus c' = c' = f(\tilde{\sigma}_2) \neq f(\tilde{\sigma}_1)$ в силу (4), (6). Поэтому на наборе $\tilde{\sigma}_1$ неисправность будет обнаружена.

1.2.2. Элемент $E_{i,s}$ реализует константу 1. На один из входов конъюнктора $E_{i,1}^{\&}$ по построению схемы S подаётся переменная $y_i \in \{x_{k+1}, \dots, x_n\}$. На наборе $\tilde{\sigma}_2$ эта переменная примет значение 0, которое «пройдёт» по цепочке из исправных конъюнкторов вплоть до одного из входов конъюнктора $E_{i,s}^{\&}$. Тогда на входы « y » и « z » КЭ $E_{i,s}^C$ на этом наборе поступят значения 1 (с выхода конъюнктора $E_{i,s}^{\&}$) и 0 (с указанного входа этого конъюнктора) соответственно. Значит, на выходе элемента $E_{i,s}^C$ возникнет значение 1, поскольку $h(0, 1, 0, 0) = h(0, 1, 0, 1) = h(1, 1, 0, 0) = h(1, 1, 0, 1) = 1$. В силу написанного выше это значение «пройдёт» до выхода цепочки Z_C , а значение на выходе схемы S будет равно $1 \oplus c' \neq f(\tilde{\sigma}_2)$ в силу (6). Поэтому на наборе $\tilde{\sigma}_2$ неисправность будет обнаруже-

на. Случай 1 разобран.

2. Все конъюнкторы $E_{i,s}^{\&}$ и КЭ $E_{i,s}^C$, $i = q, \dots, r$; $s = 1, \dots, t_i - 1$, исправны. Рассмотрим два подслучая.

2.1. Неисправен хотя бы один сумматор из цепочки Z_{\oplus} . Пусть E_{\oplus} — нижний из этих неисправных сумматоров, а на его выходе реализуется булева константа β . Легко видеть, что на те два входа каждого сумматора, расположенного в цепочке Z_{\oplus} ниже элемента E_{\oplus} , которые соединены с выходами некоторых цепочек из Z_2, \dots, Z_r (напомним, что выход цепочки Z_1 по построению соединён с одним из входов верхнего сумматора цепочки Z_{\oplus}), на наборах $\tilde{\sigma}_1$ и $\tilde{\sigma}_2$ поступают значения 1, 1 и 0, 0 соответственно. Отсюда и из равенств $\beta \oplus 1 \oplus 1 = \beta \oplus 0 \oplus 0 = \beta$ следует, что значение на выходе нижнего сумматора цепочки Z_{\oplus} , т. е. на выходе самой этой цепочки, на каждом из наборов $\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2$ равно β . В силу предположения случая 2 на выходе каждого элемента $E_{i,s}^{\&}$; $i = q, \dots, r, s = 1, \dots, t_i - 1$, реализуется конъюнкция функций, подаваемых на его входы, а на выходе каждого элемента $E_{i,s}^C$ — функция, подаваемая на вход « x » данного КЭ, по аналогии с (7). Таким образом, на выходе цепочки Z_C будет реализована та же булева функция, что и на выходе цепочки Z_{\oplus} , и на каждом из наборов $\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2$ на выходе цепочки Z_C возникнет значение β . Тогда значение на выходе схемы S на обоих этих наборах будет равно $\beta \oplus c'$ и на одном из них неисправность будет обнаружена, поскольку $f(\tilde{\sigma}_1) \neq f(\tilde{\sigma}_2)$ в силу (4).

2.2. Все сумматоры из цепочки Z_{\oplus} исправны. Тогда неисправными могут быть только какие-то элементы из цепочки Z_1 в случае Б. При переходе от набора $\tilde{\sigma}_1$ к набору $\tilde{\sigma}_2$ при отсутствии таких неисправностей меняется значение на входе верхнего инвертора этой цепочки (с 1 на 0), а значения на всех остальных её входах остаются равными 1. Поэтому при наличии неисправности хотя бы одного элемента в цепочке Z_1 переход от набора $\tilde{\sigma}_1$ к набору $\tilde{\sigma}_2$ никак не отразится на значении, возникающем на её выходе. Пусть это значение равно β . Выход цепочки Z_1 по построению соединён с одним из входов верхнего сумматора цепочки Z_{\oplus} . Легко видеть, что на те два входа каждого сумматора цепочки Z_{\oplus} , которые соединены с выходами некоторых цепочек из Z_2, \dots, Z_r , на наборах $\tilde{\sigma}_1$ и $\tilde{\sigma}_2$ поступают значения 1, 1 и 0, 0 соответственно. Далее дословно повторяем рассуждения из подслучая 2.1, начиная со слов «Отсюда и из равенств...». Случай 2 разобран.

В итоге получаем, что в каждом из случаев А, Б любую функцию неисправности схемы S можно отличить от функции $f(\tilde{x}^n)$ хотя бы на одном наборе из множества T . Это означает, что указанное множество является для этой схемы полным проверяющим тестом. Его длина равна 2, откуда следует неравенство $D(f) \leq 2$. Теорема 1 доказана. \square

Рассмотрим теперь в качестве базиса множество $B_7 = \{h^{\sigma_1}(x, y, z, t), (x \oplus y \oplus z)^{\sigma_2}\}$, где $h(x, y, z, t)$ — та же булева функция, что и в базисе B_6 , а σ_1, σ_2 — фиксированные булевы константы, хотя бы одна из которых равна 0.

Теорема 2. Для любой булевой функции $f(\tilde{x}^n)$ справедливо равенство

$$D^{B_7}(f) = \begin{cases} 0, & \text{если функция } f \text{ представима в виде (1),} \\ 1, & \text{если функция } f \text{ представима в виде (2),} \\ 2, & \text{если функция } f \text{ не представима в видах (1), (2).} \end{cases}$$

Следствие 2. Для любого $n \geq 1$ справедливо равенство $D^{B_7}(n) = 2$.

Доказательство теоремы 2. Ограничимся рассмотрением случая $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$; случаи $\sigma_1 = 1, \sigma_2 = 0$ и $\sigma_1 = 0, \sigma_2 = 1$ рассматриваются аналогично. Вместо $D^{B_7}(f)$ для краткости будем писать $D(f)$. Равенство $D(f) = 0$ и неравенства $D(f) \geq 1$ и $D(f) \geq 2$ в случаях, когда функция f представима в виде (1), в виде (2) и не представима в видах (1), (2) соответственно, доказываются точно так же, как и аналогичные соотношения в теореме 1.

Можно считать, что в базисе B_7 содержится функция \bar{x} : достаточно отождествить все входы у произвольного функционального элемента, реализующего функцию вида $\bar{h}(x, y, z, t)$ или $\overline{x \oplus y \oplus z}$, и получить одновходовой элемент-инвертор, реализующий функцию вида \bar{x} и допускающий те же самые неисправности (а именно, неисправности типов 0 и 1 на его выходе), что и исходный КЭ (здесь используется равенства $\bar{h}(0, 0, 0, 0) = 1, \bar{h}(1, 1, 1, 1) = 0$). Далее, возьмём произвольный элемент, реализующий функцию вида $\overline{x \oplus y \oplus z}$ (вида $\bar{h}(x, y, z, t)$), и соединим его выход со входом инвертора. Полученный блок из двух элементов, очевидно, реализует булеву функцию вида $x \oplus y \oplus z$ (вида $h(x, y, z, t)$) и имеет только две функции неисправности — константы 0 и 1, поэтому можно рассматривать его как отдельный элемент-сумматор (КЭ) и считать, что в базисе B_7 содержится также функция $x \oplus y \oplus z$ (соответственно $h(x, y, z, t)$). В таком случае в базис B_7 входят все функции из базиса B_6 и любая схема в базисе B_6 является также схемой в базисе B_7 . Отсюда и из теоремы 1 следует, что $D(f) \leq 1$, если функция f представима в виде (2), и $D(f) \leq 2$, если функция f не представима в видах (1), (2). Теорема 2 доказана. \square

Используя теоремы 1, 2, следствия 1, 2 и принцип двойственности (см., например, [21, с. 24]), а именно, рассматривая схемы, получающиеся заменой всех элементов в схемах из доказательства теорем 1, 2 на двойственные, нетрудно получить двойственные им результаты для базисов $B_6^* = \{h^*(x, y, z, t), x \oplus y \oplus z, \bar{x}\}$ и $B_7^* = \{(h^*)^{\sigma_1}(x, y, z, t), (x \oplus y \oplus z)^{\sigma_2}\}$,

где $h^*(x, y, z, t)$ — двойственная к $h(x, y, z, t)$ булева функция, а σ_1, σ_2 — фиксированные булевы константы, хотя бы одна из которых равна 0. В частности, при $n \geq 1$ справедливы равенства $D^{B_6^*}(n) = D^{B_7^*}(n) = 2$.

Список литературы

1. Чегис И. А., Яблонский С. В. Логические способы контроля работы электрических схем // Труды МИАН. — 1958. — Т. 51. — С. 270–360.
2. Яблонский С. В. Надежность и контроль управляющих систем // Материалы Всесоюзного семинара по дискретной математике и ее приложениям (Москва, 31 января–2 февраля 1984 г.). — М.: МГУ. — 1986. — С. 7–12.
3. Яблонский С. В. Некоторые вопросы надежности и контроля управляющих систем // Математические вопросы кибернетики. Вып. 1. — М.: Наука, 1988. — С. 5–25.
4. Редькин Н. П. Надежность и диагностика схем. — М.: Изд-во МГУ, 1992. — 192 с.
5. Reddy S. M. Easily testable realizations for logic functions // IEEE Trans. Comput. — 1972. — Vol. C-21, No. 11. — P. 1183–1188.
6. Коляда С. С. Верхние оценки длины проверяющих тестов для схем из функциональных элементов. — Дисс. на соиск. уч. ст. к.ф.-м.н. — М., 2013. — 77 с.
7. Романов Д. С. Метод синтеза легкотестируемых схем, допускающих единичные проверяющие тесты константной длины // Дискретная математика. — 2014. — Т. 26, вып. 2. — С. 100–130.
8. Редькин Н. П. О полных проверяющих тестах для схем из функциональных элементов // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. — 1986. — №1. — С. 72–74.
9. Редькин Н. П. О полных проверяющих тестах для схем из функциональных элементов // Математические вопросы кибернетики. Вып. 2. — М.: Наука, 1989. — С. 198–222.
10. Романов Д. С. О синтезе схем, допускающих полные проверяющие тесты константной длины относительно произвольных константных неисправностей на выходах элементов // Дискретная математика. — 2013. — Т. 25, вып. 2. — С. 104–120.
11. Редькин Н. П. О схемах, допускающих короткие тесты // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. —

1988. — №2. — С. 17–21.
12. Редькин Н. П. О единичных диагностических тестах для однотипных константных неисправностей на выходах функциональных элементов // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. — 1992. — №5. — С. 43–46.
 13. Бородина Ю. В. О синтезе легкотестируемых схем в случае однотипных константных неисправностей на выходах элементов // Вестник Московского университета. Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика. — 2008. — №1. — С. 40–44.
 14. Попков К. А. О точном значении длины минимального единичного диагностического теста для одного класса схем // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. — 2015. — №74. — 21 с.
 15. Попков К. А. Единичные проверяющие тесты для схем из функциональных элементов в базисе «конъюнкция-отрицание» // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. — 2017. — №30. — 31 с.
 16. Бородина Ю. В. Нижняя оценка длины полного проверяющего теста в базисе $\{x | y\}$ // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. — 2015. — №4. — С. 49–51.
 17. Бородина Ю. В. О схемах, допускающих единичные тесты длины 1 при константных неисправностях на выходах элементов // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. — 2008. — №5. — С. 49–52.
 18. Бородина Ю. В., Бородин П. А. Синтез легкотестируемых схем в базисе Жегалкина при константных неисправностях типа 0 на выходах элементов // Дискретная математика. — 2010. — Т. 22, вып. 3. — С. 127–133.
 19. Попков К. А. О единичных диагностических тестах для схем из функциональных элементов в базисе Жегалкина // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. — 2016. — №50. — 16 с.
 20. Попков К. А. Нижние оценки длин полных диагностических тестов для схем и входов схем // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. — 2016. — №60. — 12 с.
 21. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. — М.: Наука, 1986. — 384 с.