



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 111 за 2017 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Подлазов А.В.

Модифицированная модель
роста социальной сети

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Подлазов А.В. Модифицированная модель роста социальной сети // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2017. № 111. 16 с. doi:[10.20948/prepr-2017-111](https://doi.org/10.20948/prepr-2017-111)
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2017-111>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Российской академии наук**

А.В.Подлазов

**Модифицированная модель роста
социальной сети**

Москва — 2017

А.В.Подлазов

Модифицированная модель роста социальной сети

В работе предлагается развитие модели роста социальной сети, основанного на опосредованном связывании узлов. Для этой модели представлены результаты компьютерного моделирования и дано квазилинейное среднеполевое решение. Продемонстрировано наличие в модели фаз плотной и разреженной сети, а также обусловленность маломировых свойств сети с ее плотностью.

Ключевые слова: малые миры, социальные сети, масштабная инвариантность, степенные распределения, конкурентный рост, преимущественное присоединение, опосредованное связывание

A.V. Podlazov

Modified model of social network growth

I propose the development of the social network growth model based on mediated binding. For this model I present the results of computer simulation and give a quasi-linear medium-field solution. The model shows phases of a dense and sparse network, and the former conditions the small-world properties.

Key words: small worlds, social networks, scale invariance, power law distribution, competitive growth, preferential accession, mediated binding

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 15-01-07944 и 16-01-00342).

Содержание

Введение	3
Природа степенных распределений	3
Границы степенного распределения	4
Базовая модель.....	5
Описание и решение модели.....	5
На пути к реалистичной модели.....	6
Модель опосредованного связывания.....	7
Правила модели и распределение узлов по валентности.....	7
Квазилинейное среднеполевое приближение	9
Обработка результатов моделирования.....	9
Конденсационный фазовый переход.....	12
Что такое малый мир	13
Выводы	16

ВВЕДЕНИЕ

В современной теории графов важнейшее место занимают т.н. *малые миры*, сочетающие малый диаметр с большим количеством узлов. Типовым примером малых миров служат *социальные сети* – системы связей, возникающие между людьми как при реальном, так и при виртуальном общении.

Ключевым свойством малых миров вообще и социальных сетей в частности является степенное распределение узлов графа по *валентности* x – числу связей:

$$u(x) \sim x^{-(1+\alpha)}. \quad (1)$$

Для социальных сетей показатель распределения $1 < \alpha < 2$ [1], хотя для малых миров иной природы он может быть и больше.

В работе [1] была предложена модель, объясняющая возникновение формулы (1). Здесь предлагается усовершенствованная версия этой модели, полнее раскрывающая природу социальных сетей и допускающая более глубокое теоретическое исследование.

Природа степенных распределений

Распределение узлов сети по валентности связано с конкурентным характером ее роста, при котором узлы соревнуются за возможность образовывать новые связи. Пусть вероятность для узла стать концом связи определяется числом уже имеющихся у него связей, а также – общими свойствами сети, которые можно учесть через явную зависимость скорости роста от времени:

$$\dot{x} = f(x, t). \quad (2)$$

Обозначив через $N(x, t)$ число узлов валентности x в момент времени t , запишем уравнение неразрывности для поля скоростей (2)

$$N_t + (fN)_x = 0. \quad (3)$$

Если распределение узлов по валентности $u(x)$ стационарно, возможно разделение переменных за счет представления $N(x, t) = u(x) \cdot n(t)$, где $n(t)$ – размер сети, дающее решение уравнения (3)

$$u(x) = \frac{1}{f(x, t)} \cdot e^{-\frac{n}{n} \int \frac{d\xi}{f(\xi, t)}}. \quad (4)$$

Более активные участники сети имеют большие шансы на образование новых связей, что можно учесть линейной зависимостью скорости роста валентности от ее величины

$$f(x, t) = h(t) + g(t)x, \quad (5)$$

в результате чего решение (4) упрощается до формулы

$$u(x) \sim (x + \delta)^{-(1+\alpha)}, \quad (6)$$

где показатель $\alpha = \dot{n}/ng$ и смещение $\delta = h/g$ должны быть постоянны, чтобы соблюдалось ранее сделанное предположение о стационарности распределения.

Границы степенного распределения

Если шкала модельного времени выбрана так, что $n(t) \sim t$, то с учетом введенных обозначений формулу (2) можно переписать в виде

$$\dot{x} = (x + \delta)/\alpha t. \quad (7)$$

Смещение δ отвечает за отклонение $u(x)$ от степенного вида в области малых x . Однако и при больших x чисто степенной вид плотности возможен только для сети бесконечного размера. А при его конечных значениях хвост распределения можно аппроксимировать скейлинговой формулой

$$u(x, n) \sim x^{-(1+\alpha)} \cdot \varphi(x/x^*), \quad (8)$$

где функция $\varphi(y)$ примерно постоянна при $y \ll 1$ и спадает быстрее любой степени y при $y \rightarrow \infty$, а значение x^* определяет валентность, настолько большую, что узлы с ней уже не помещаются в сеть размера n . В масштабнo-инвариантных системах, к числу которых, предположительно, относятся и социальные сети, нет никаких характерных значений, кроме обусловленных конечностью размеров системы и ее элементов, в силу чего следует ожидать зависимости

$$x^* \sim n^\nu. \quad (9)$$

При этом доля *гиперхабов* – узлов, не помещающихся в сеть, убывает с ее ростом как

$$P\{x \geq x^*\} \sim \int_{x^*}^{\infty} u(x, n) dx \sim n^{-\alpha\nu},$$

а их количество возрастает как

$$N\{x \geq x^*\} = n \cdot P\{x \geq x^*\} \sim n^{1-\alpha\nu}. \quad (10)$$

Как правило, чем раньше появился в сети узел, тем больше он успевает образовать связей. Если увеличение валентности узла ничем не ограничено, она подчиняется уравнению (7), для которого можно поставить задачу Коши с

начальным условием $x(0) = 1$, имея в виду самый первый узел. Ее решение имеет асимптотический вид $x^*(t) \sim t^{1/\alpha} \sim n^{1/\alpha}$, откуда получаем

$$\alpha v = 1, \tag{11}$$

или $N\{x \geq x^*\} \cong \text{const}$, т.е. сеть содержит лишь конечное число гиперхабов. Однако, если имеются некоторые дополнительные факторы, затрудняющие образование новых связей узлами высокой валентности, их рост перестает описываться уравнением (7). Тогда может возникнуть отклонение от формулы (11), приводящее к возрастанию доли гиперхабов по мере роста сети. Далее мы увидим реализацию обеих этих возможностей в модели опосредованного связывания.

БАЗОВАЯ МОДЕЛЬ

Сформулированный выше теоретический аппарат линейных моделей конкурентного роста, развитый в работах [2,3], легко адаптируется к материалу социальных сетей.

Описание и решение модели

При росте сети связи делятся на *первичные*, образуемые с присоединяемыми к ней новыми узлами, и *вторичные*, образуемые между уже существующими узлами. Если узлы для образования связей выбираются случайно, то этот процесс может осуществляться как *равновероятно* (компонента h формулы (5)), так и *преимущественно*, т.е. с вероятностью, пропорциональной валентности узла (компонента g).

Пусть на очередном шаге роста сети для образования первичных связей выбираются p_0 узлов равновероятно и p_1 – преимущественно, а для образования вторичных связей s_0 – равновероятно и s_1 – преимущественно. Всего при этом образуются $p = p_0 + p_1$ первичных и $s = (s_0 + s_1)/2$ вторичных связей, а к сети добавляется p новых узлов.

Вероятность того, что узел валентности x будет выбран для образования связи равновероятным образом, равна $1/n(t)$, а преимущественным – $x/S(t)$, где $n(t) \cong pt$ – размер сети, а $S(t) = \sum_{i=1}^{n(t)} x_i(t)$ – ее суммарная валентность. Это дает модель линейного роста (2)–(5) с компонентами поля скоростей $h(t) = (p_0 + s_0)/n(t)$ и $g(t) = (p_1 + s_1)/S(t)$. Для ее решения необходимо знание вида функции $S(t)$, который находится суммированием формулы (2) по всем узла сети с учетом вклада присоединяемых к ней новых узлов

$$\dot{S} = \sum_{i=1}^{n(t)} \dot{x}_i(t) + \dot{n} = (p_1 + s_1) + (p_0 + s_0) + p = 2(p + s).$$

Таким образом,

$$S(t) = 2(p + s)t, \quad (12)$$

что приводит к распределению (6) с параметрами

$$\alpha = 2 + \frac{2p_0 + s_0 - s_1}{p_1 + s_1} \quad \text{и} \quad \delta = \alpha \frac{p_0 + s_0}{p_0 + p_1} \quad (13)$$

при средней валентности узла

$$\langle x \rangle = \frac{S(t)}{n(t)} = 2 + \frac{s_0 + s_1}{p_0 + p_1}. \quad (14)$$

Средняя валентность не может быть определена непосредственно на основе приближенной записи плотности распределения, поскольку при $\alpha > 1$ интеграл для первого момента распределения набирает значение в области малых x , где формула (8) неточна.

На пути к реалистичной модели

В классической модели Барабаши–Альберт [4,5,6] с преимущественным образованием первичных связей, описываемой параметрами $p_1 > 0$ и $p_0 = s_0 = s_1 = 0$, возникает сеть, узлы которой распределены по валентности степенным образом с $\alpha = 2$. Однако для реальных социальных сетей типичны значения показателя $\alpha < 2$, что требует выполнения неравенства $s_1 > 2p_0 + s_0$, означающего принципиальную важность преимущественного образования вторичных связей, тогда как первичные связи можно образовывать любым способом. А поскольку новые узлы, еще не подключенные к сети, не имеют возможностей как-либо определять валентности ее узлов, наиболее правдоподобным представляется равновероятное образование первичных связей, т.е. ситуация с $p_1 = 0$.

С другой стороны, узлы, соединяемые вторичными связями, скорее всего, не являются независимыми, т.к. должны иметь способ находить друг друга в сети. Поэтому правило выбора отдельных узлов необходимо заменить правилом выбора их пар. Если предположить, что узлы такой пары должны быть близко расположены, то правдоподобной основой реалистичных правил становится возможность соединять вторичными связями только вторичных же соседей, т.е. узлы, уже имеющие хотя бы одного общего соседа. При реальном общении этой посылке соответствует представление людей друг другу общим знакомым, а при виртуальном – комментирование постов общих френдов или репосты.

МОДЕЛЬ ОПОСРЕДОВАННОГО СВЯЗЫВАНИЯ

Сочетание идеологии конкурентного роста, положенной в основу базовой модели, и представлений о связывании вторичных соседей позволяет сформулировать правила реалистичной модели роста социальной сети. Однако перед этим необходимо сделать одно замечание алгоритмического плана. В ненаправленной сети преимущественный выбор узла эквивалентен выбору случайного соседа равновероятно выбранного узла, в каждый узел можно прийти по числу связей, равному его валентности [7].

Правила модели и распределение узлов по валентности

Шаг модели состоит из двух стадий.

1) Создать p первичных связей за счет присоединения новичков к равновероятно выбранным узлам сети.

2) Выполнить s попыток образовать вторичные связи по такому алгоритму:

- a. выбрать равновероятным образом узел А;
- b. выбрать случайного соседа узла А – узел В (первый конец будущей связи, де-факто выбранный преимущественным образом);
- c. выбрать случайного соседа узла В – узел С (посредник);
- d. выбрать случайного соседа узла С – узел D (второй конец будущей связи);
- e. если $B = D$, вернуться к пункту а (попытка продолжается);
- f. если $B \neq D$, связать узлы В и D (попытка успешна, если узлы еще не связаны, и потрачена впустую, если они уже связаны).

В отличие от правил модели, изученной в работе [1], попытка не завершается при случайном совпадении концов будущей вторичной связи, из-за чего тормозилось их образование при $p > s$.

Единственным параметром модели является величина $r = p/s$, соотносящая скорость образования первичных связей с максимально возможной скоростью образования вторичных. Как видно из рис. 1, по мере роста этого отношения показатель α увеличивается, а ν уменьшается.

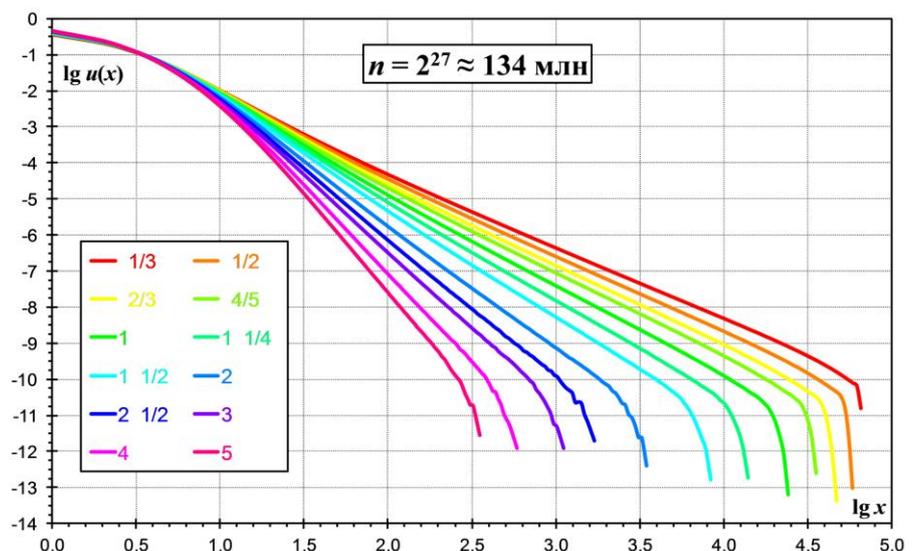


Рис. 1. Распределение узлов по валентности для различных r

В двойном логарифмическом масштабе линейный участок графика соответствует степенному убыванию плотности.

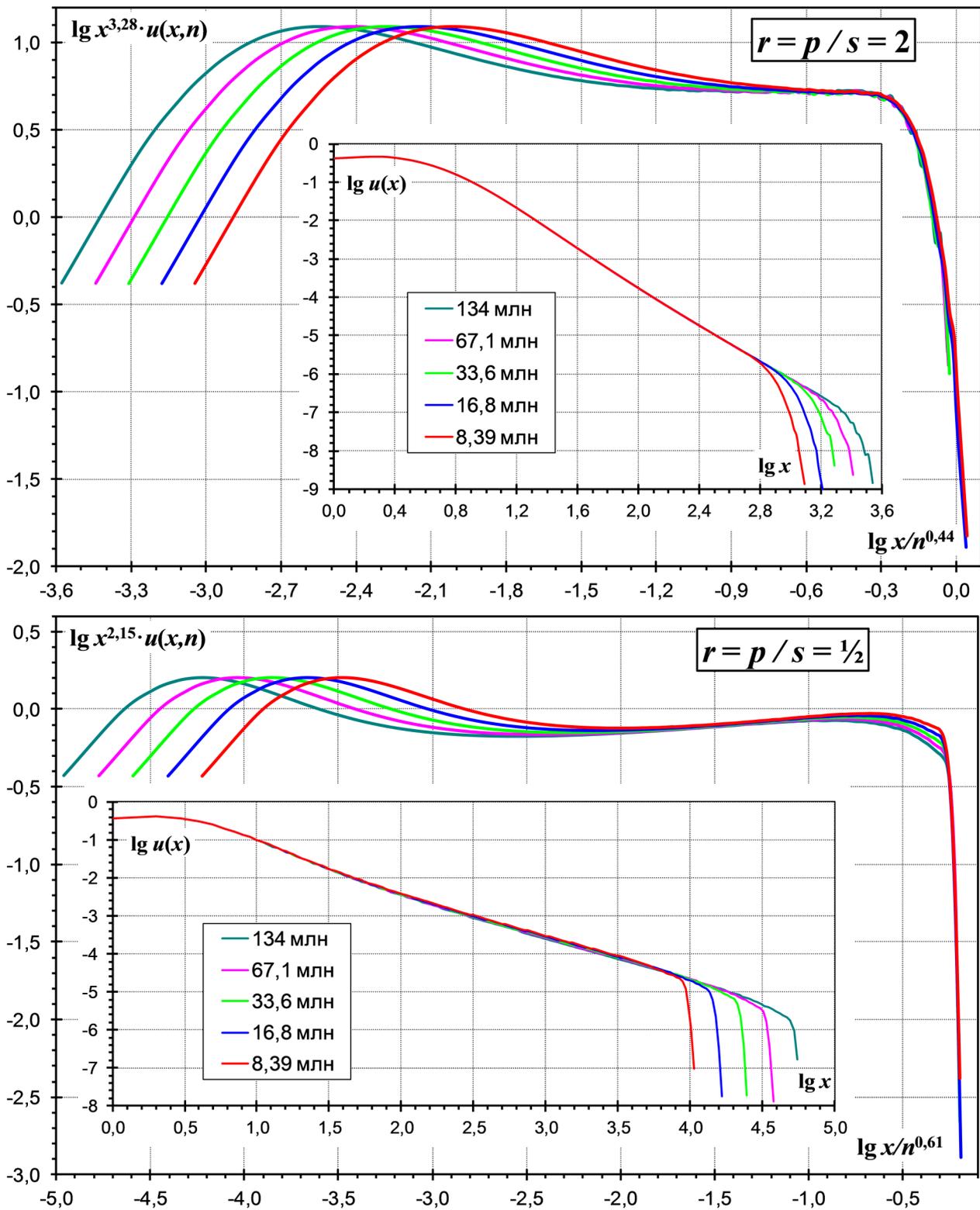


Рис. 2. Распределение узлов по валентности для сетей различного размера при больших и малых r

При масштабировании графики выполаживаются в средней части и демонстрируют сходное спадание в правой.

У немасштабированных графиков на врезках степенной участок кажется более широким, чем у масштабированных, за счет незаметности небольших отклонений от степенного вида в левой части.

Из формул (8) и (9) следует, что графики зависимости $x^{1+\alpha} \cdot u(x, n)$ от x/n^ν , полученные для систем различного размера, должны совпадать при правильно подобранных показателях α и ν . Такое масштабирование является основным методом практического определения показателей (если неизвестен точный вид функции φ). Пример того, как это делается, приведен на рис. 2. Как можно видеть, скейлинговое представление плотности при малых r работает несколько хуже, чем при больших, но всё же остается применимым.

Квазилинейное среднеполевое приближение

В отличие от базовой модели модель опосредованного связывания уже не допускает точного аналитического решения, однако ее можно приближенно свести к базовой, опираясь на следующие предположения:

- выбор второго конца вторичной связи аппроксимируется сочетанием преимущественного или равновероятного выборов, осуществляемых с весами w и $1-w$ соответственно;
- попытка образования вторичной связи успешна с вероятностью q , не зависящей от способа выбора второго конца связи;
- вес w и вероятность q одинаковы для всех узлов и неизменны во времени.

Это приводит к базовой модели с параметрами $p_0 = p$, $s_0 = qs(1-w)$, $p_1 = 0$ и $s_1 = qs(1+w)$ (заметим, что обозначение s теперь имеет другой смысл, т.к. $s_0 + s_1 = 2qs$, а не $2s$, как в базовой модели).

Формула (13) дает показатель распределения узлов по валентности

$$\alpha = 2 \frac{1+r/q}{1+w}, \quad (15)$$

а формула (14) – среднюю валентность узла

$$\langle x \rangle = 2(1+q/r). \quad (16)$$

Обработка результатов моделирования

Подходом к обработке результатов моделирования систем с линейным ростом, альтернативным анализу плотностей распределения, является изучение динамики интегральных характеристик [3]. Простейшая из них – зависимость $S(t)$, которая в базовой модели была прямой пропорциональностью, однако при опосредованном связывании оказывается таковой лишь асимптотически. Не очень хороший скейлинг, демонстрируемый моделью, намекает на то, что даже при огромных размерах системы она еще весьма далека от асимптотического предела.

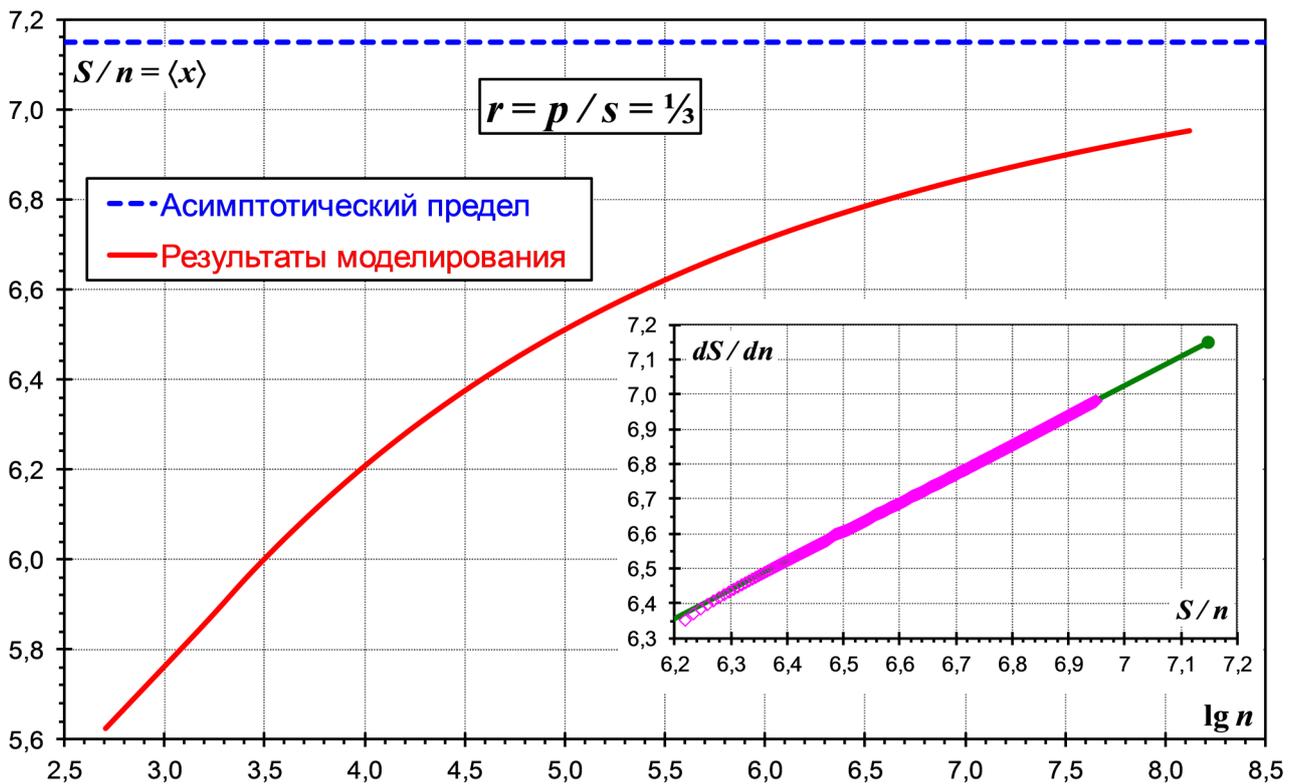


Рис. 3. Определение средней валентности узла

Для выхода графика на стационар необходимо увеличить размер сети на несколько порядков, что практически невыполнимо.

На врезке: скорость прироста суммарной валентности в зависимости от ее среднего значения и аппроксимация этих данных формулой (17) с $a = 0,8352(4)$ и $b = 1,178(3)$, при $R^2 = 99,988\%$. Точкой показан асимптотический предел $\langle x \rangle = 7,15(3)$, обозначенный пунктиром на основном рисунке.

И в самом деле, пример зависимости $\langle x \rangle$ от $\lg n$, приведенный на рис. 3, демонстрирует очень медленное насыщение. Вместе с тем, связь скорости прироста средней валентности с ее текущим значением, как показывает врезка к рис. 3, имеет линейный вид

$$\frac{dS}{dn} = a \frac{S}{n} + b. \quad (17)$$

Решение этого дифференциального уравнения

$$\frac{S}{n} = \frac{b}{1-a} - cn^{a-1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{b}{1-a}$$

позволяет выразить асимптотический предел через параметры зависимости (17).

Аналогичная ситуация имеет место с зависимостью q от $\lg n$, показанной на рис. 4. Однако здесь, как можно видеть из врезки к рис. 4, удобной оказывается другая модель роста

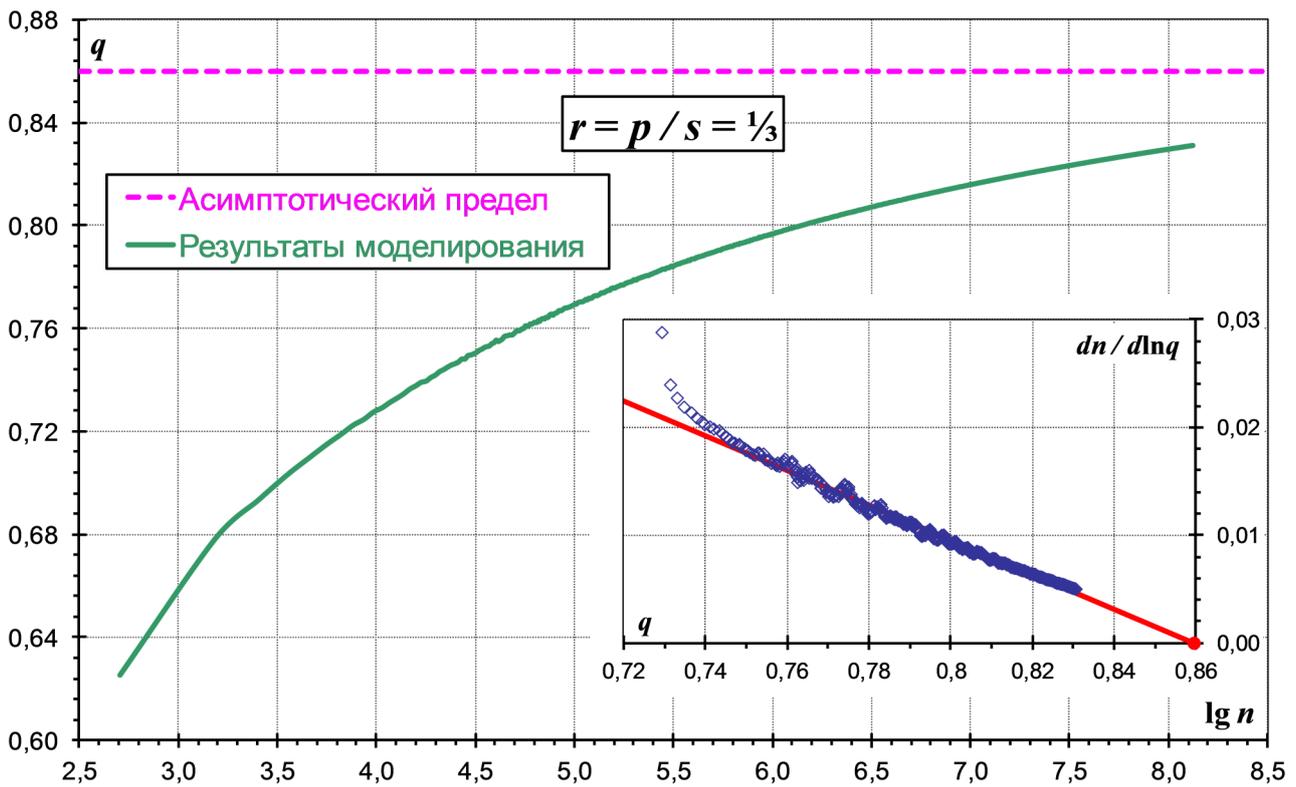


Рис. 4. Вероятность успешного образования вторичной связи

Рисунок аналогичен рис. 3.

На врезке: прирост вероятности в логарифмическом времени в зависимости от ее текущего значения и аппроксимация этих данных формулой (18) с $a' = 0,1607(6)$ и $b' = 0,1381(5)$, при $R^2 = 99,3\%$. Точкой показан асимптотический предел $q = 0,860(6)$.

$$\frac{dq}{d \ln n} = -a'q + b', \quad (18)$$

решение которой

$$q = \frac{b'}{a'} - c'n^{-a'} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{b'}{a'}$$

привязывает асимптотическое значение вероятности успешного образования вторичной связи к параметром зависимости (18).

Проверить качество реконструкции асимптотических значений $\langle x \rangle$ и q позволяющая их формула (16). Рис. 5 демонстрирует превосходное совпадение результатов.

Знание вероятности q дает возможность проверить и формулу (15). Как можно видеть из рис. 6, ее выполнение оказывается несколько менее точным по сравнению с формулой (16), что может быть обусловлено не только погрешностями определения показателя α , но и недостатками используемого приближения. К числу последних можно отнести и нефизичное значение $w > 1$, означа-

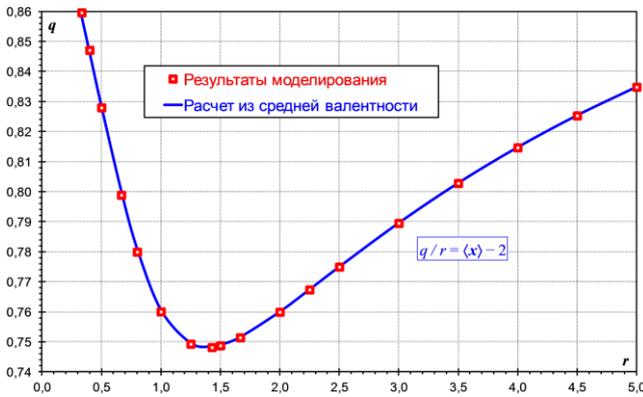


Рис. 5. Взаимосвязь двух экстраполяций

Асимптотические значения вероятности идеально ложатся на график, проведенный через значения, определенные из асимптотических значений средней валентности по формуле (16).

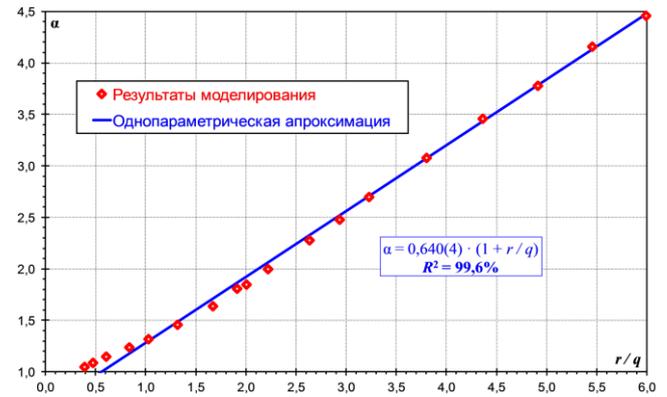


Рис. 6. Показатель распределения

Несмотря на наличие систематического отклонения экспериментальных точек от линейного тренда, их приближение формулой (15) является очень хорошим. Из нее по угловому коэффициенту регрессии находится весовой параметр $w = 2,13(2)$.

Ющее, что второй конец вторичной связи выбирается преимущественным образом чаще, чем всегда (что компенсируется отрицательным весом его равновероятного выбора). Иначе говоря, при опосредованном связывании шансы узла оказаться вторым концом возрастают с его валентностью быстрее чем линейно. Скорее всего, это объясняется ассортативностью социальных сетей, т.е. склонностью узлов высокой валентности в них связываться друг с другом.

Конденсационный фазовый переход

Распределение узлов сети по валентности имеет плотность $u(x) \sim x^{-(1+\alpha)}$ при их равновероятном выборе (пункт а правил) и $x \cdot u(x) \sim x^{-\alpha}$ — при преимущественном (пункт б). Зависимость средней валентности узла В от размера сети

$$\langle x_B \rangle = \int x^{1-\alpha} \cdot \varphi(xn^{-\nu}) dx \sim \begin{cases} \text{const} & \alpha > 2 \\ n^{\nu(2-\alpha)} & \alpha < 2 \end{cases}$$

принципиальным образом влияет на успешность образования вторичных связей узлами большой валентности. При продвижении по цепочке случайных соседств средняя валентность не уменьшается $\langle x_A \rangle \leq \langle x_B \rangle \leq \langle x_C \rangle \leq \langle x_D \rangle$, поскольку чем выше валентность узла, тем большим числом способов в него можно прийти. Таким образом, при $\alpha < 2$ узлы гарантированно имеют много еще не связанных с ними вторичных соседей, тогда как при $\alpha > 2$ у узлов высокой валентности значительная часть потенциальных вторичных связей может оказаться уже созданной.

Значение $\alpha = 2$ разделяет два фазовых состояния сети — плотное и разреженное, что выявляет выполненная на рис. 7 проверка соотношения (11). Оно выполняется только в разреженной сети, где образование связей узлами высо-

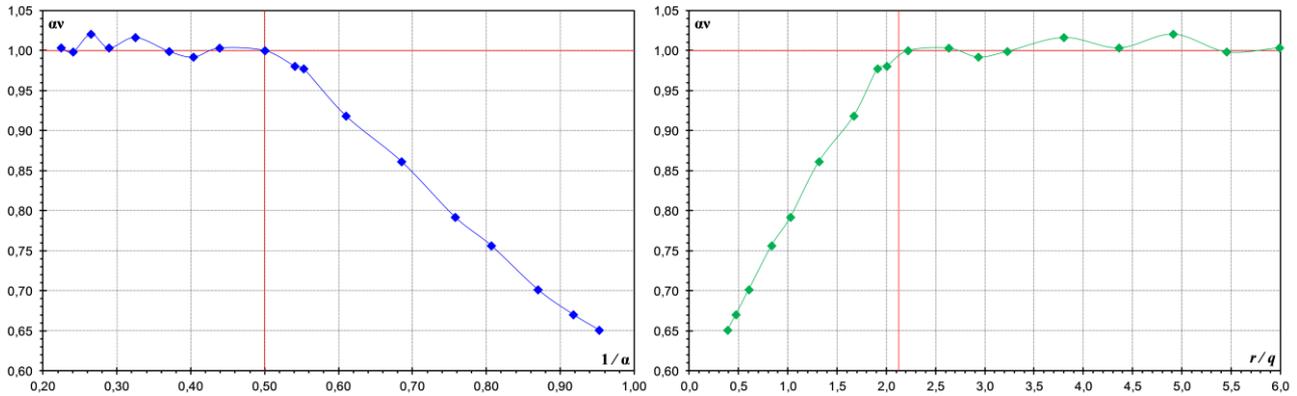


Рис. 7. Фазовый переход

При $1/\alpha < 1/2$ (при $r/q > w$) сеть разрежена и содержит конечное число гиперхабов. В противном случае сеть плотна и количество гиперхабов в ней увеличивается с ростом ее размера.

Как можно видеть, у скейлингового показателя ν имеется нетривиальное минимально-возможное значение $\nu_{\min} \approx 0,6$, достигаемое при $\alpha \rightarrow 1$ и ($r \rightarrow 0$).

кой валентности практически ничем не ограничено, и нарушается в плотной сети, где узлы высокой валентности испытывают сложности с ее наращиванием, т.к. у них почти не остается не связанных с ними вторичных соседей.

Фазовый переход модели является непрерывным, в нем отношение $1/\alpha$ (или r/q) играет роль управляющего параметра, а величина $1 - \alpha\nu$ – параметра порядка.

Различием между фазовыми состояниями сети объясняется и немонотонный вид зависимости $q(r)$ (см. рис. 5). В разреженной сети (большое r), высокие шансы на успешное образование вторичной связи обусловлены наличием у многих узлов молодых соседей, которые пока почти ни с кем больше не связаны. А в плотной сети (малое r) любой узел через гиперхабы связан со значительной частью сети, в которой лишь малая доля узлов связана с ним напрямую (разумеется, если он сам не гиперхаб).

Что такое малый мир

Расстоянием d между узлами сети называется минимальное число связей, по которым можно пройти от одного узла до другого (например, расстояние между соседними узлами равно 1, между вторичными соседями – 2 и т.д.). Диаметр сети называется максимум расстояния по всем парам ее узлов. Хотя трактовка малых миров как больших сетей с малым диаметром широко распространена и не лишена логики, она может не соответствовать действительности из-за наличия у сети нефункциональных выростов большой длины [8]. Поэтому при изучении сетевых расстояний более уместно использование не экстремальных, а типичных характеристик.

На рис. 8 представлены графики распределения расстояний между произвольно выбранным узлами сети, порождаемой моделью опосредованного связывания. Масштабирование плотности показывает, что ее вид почти полностью определяется средним и его среднеквадратическим отклонением (при небольшой асимметрии, немного усиливающей маломировые свойства).

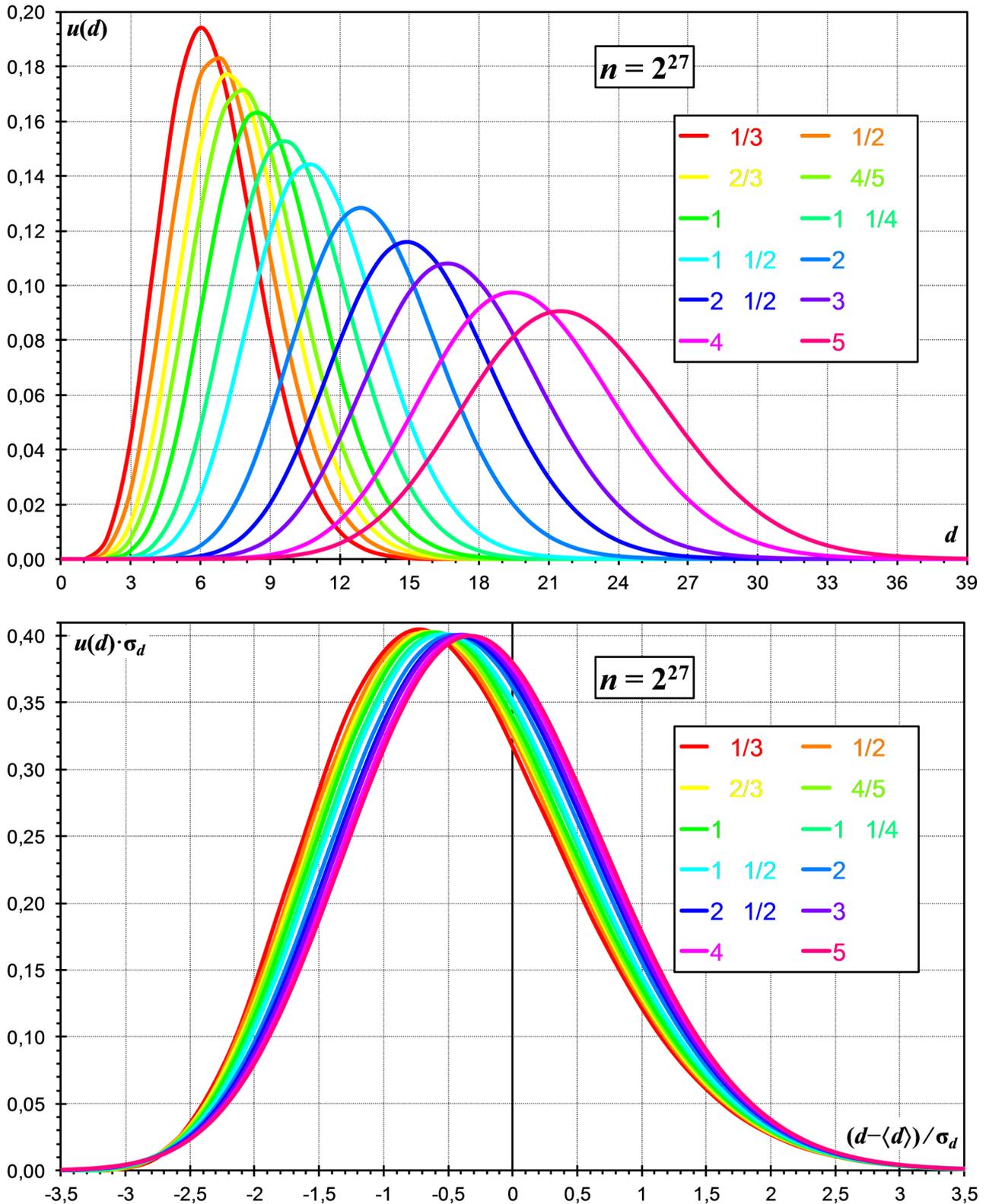


Рис. 8. Распределение пар узлов по расстоянию между ними для различных r

Плотность имеет колоколообразный вид и после центрирования и нормировки практически перестает зависеть от r .

Распределение скошено влево, причем тем сильнее, чем плотнее сеть.

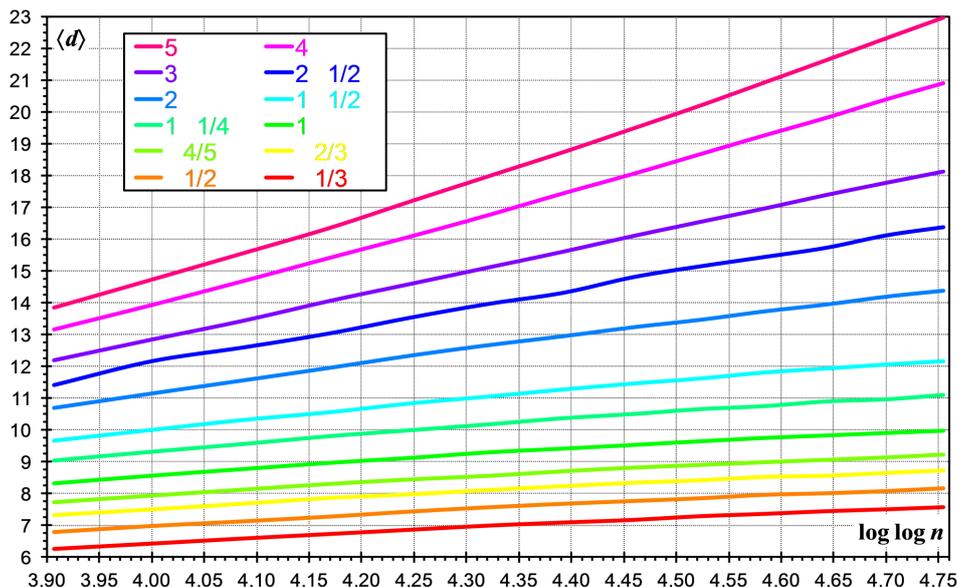


Рис. 9. Среднее расстояние между узлами для различных r

Исключительно медленная зависимость среднего расстояния между узлами сети от ее размера и определяет эффект малого мира.

В таком масштабе увеличение абсциссы на 1 соответствует возведению n в квадрат.

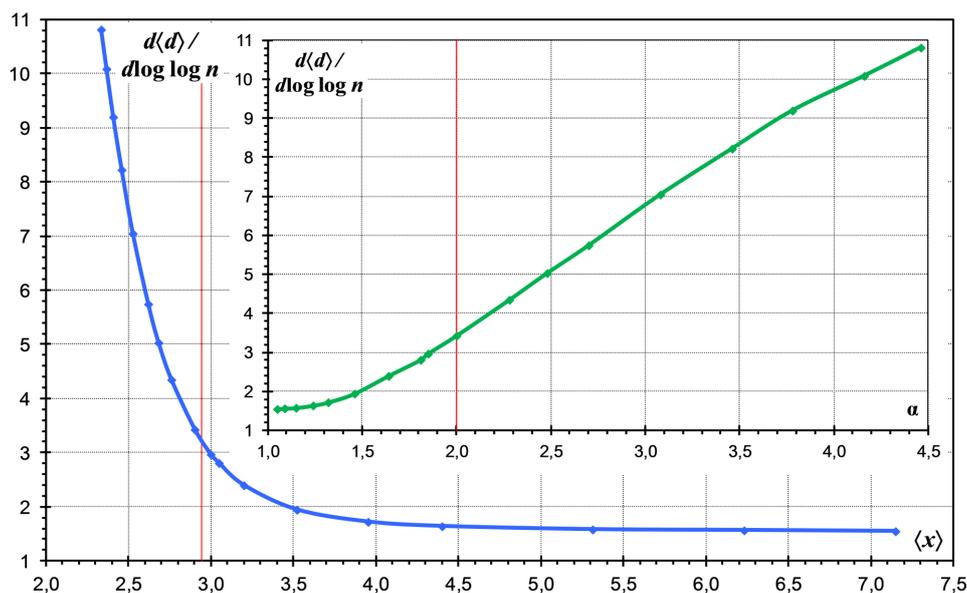


Рис. 10. Скорость роста среднего расстояния в зависимости от характеристик модели

При росте размера плотные сети существенно медленнее, чем разреженные, увеличивают среднее расстояние между узлами.

Абсцисса линии раздела фаз $\langle x \rangle = 2,94(1)$ получена из формулы (16) при $r/q = w$. В силу неточности самой этой оценки пересечения линий раздела фаз с графиками имеют немного различные ординаты.

Рис. 9 демонстрирует линейную зависимость среднего расстояния в сети от двойного логарифма ее размера. Связь углового коэффициента этих зависимостей с показателем распределения узлов по валентности и средней валентностью сети показана на рис 10. Как можно видеть, близко расположены друг

другу только узлы плотных сетей, за возведение в квадрат размера которых приходится платить $1,5 \div 2$ единицами $\langle d \rangle$, тогда как в разреженных сетях тот же результат обходится увеличением $\langle d \rangle$ на кратно большие величины. Иначе говоря, маломировые свойства в буквальном смысле слова присущи только плотным сетям с большим количеством вторичных связей.

Выводы

Равновероятное присоединение к сети новых узлов в комбинации со связыванием вторичных соседей, один из которых выбирается преимущественным образом, порождает сеть со степенным распределением вершин по валентности. Показатель распределения возрастает по мере увеличения относительной частоты присоединения новых узлов.

В свойствах порождаемой моделью сети происходит фазовый переход. Если показатель распределения превышает 2, то в сеть является разреженной и в ней имеется конечное число гиперхабов, в противном случае сеть плотна и число гиперхабов возрастает при увеличении ее размера.

Среднее расстояние между узлами сети пропорционально двойному логарифму ее размера, т.е. увеличивается с его ростом чрезвычайно медленно. А в случае плотных сетей сравнительно небольшим оказывается и коэффициент пропорциональности, что и объясняет маломировые свойства социальных сетей.

В среднеполевом приближении связывание, опосредованное общим соседом, может быть с хорошей точностью представлено как сочетание равновероятного и преимущественного выбора второго конца связи, однако вес первого способа оказывается отрицательным, а второй превосходит единицу.

Литература

1. Подлазов А.В., Щетинина Д.П. Модель роста социальной сети // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша, 2013. № 95. – 16 с.
2. Подлазов А.В. Распределение конкурентов, масштабная инвариантность состояния и модели линейного роста // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2002. Т.10, №1-2, с.20-43.
3. Подлазов А.В. Закон Ципфа и модели конкурентного роста // Новое в синергетике. Нелинейность в современном естествознании / Ред. Г.Г.Малинецкий / Синергетика: от прошлого к будущему. – М.: Либроком, 2009. С.229-256.
4. Barabási A.-L., Albert R. Emergence of scaling in random networks // Science. 1999. V.286, p.509-512.
5. Barabási A.-L., Albert R., Jeong H. Scale-free characteristics of random networks: The topology of the world-wide web // Physica A. 2000. V.281, p.69-77.
6. Albert R., Barabási A.-L. Statistical mechanics of complex networks // Rev. Mod. Phys. 2002. V.74, N1, p47-97.
7. Vázquez A. Growing network with local rules: Preferential attachment, clustering hierarchy, and degree correlations. Phys. Rev E 67, 056104 (2003).
8. Подлазов А.В., Митин Н.А., Щетинина Д.П. Исследование сетевых свойств Живого журнала. // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша, 2012. № 78. – 16 с.