



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 119 за 2017 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Шильков А. В.

Решение эллиптических
уравнений методом лучевых
переменных

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Шильков А. В. Решение эллиптических уравнений методом лучевых переменных // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2017. № 119. 36 с.
<http://doi.org/10.20948/prepr-2017-119>
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2017-119>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Российской академии наук**

А.В. Шильков

**Решение эллиптических уравнений
методом лучевых переменных**

Москва — 2017

Шильков А.В.

Решение эллиптических уравнений методом лучевых переменных

Изложен метод решения краевой задачи для линейного эллиптического уравнения второго порядка с помощью сведения к краевой задаче для системы кинетических уравнений. Кинетические уравнения имеют характеристики – лучи, пересекающие область. В результате перехода к лучевым переменным поиск решения исходной многомерной задачи заменяется на решение серии одномерных задач на лучах. Построена конечно-аналитическая схема для численного решения задач в области с разрывными коэффициентами и источниками. Область разбивается на ячейки, в пределах которых коэффициенты и источники непрерывны, а конечные разрывы (если они есть) проходят по границам ячеек. Далее выполняется сшивка решений, выходящих из ячеек на границах. В схеме отсутствует жесткая зависимость точности аппроксимации от размеров и формы ячеек, присущая конечно-разностным схемам. Для разрешения малоразмерной системы алгебраических уравнений схемы могут применяться прямые (неитерационные) алгоритмы вычислительной алгебры, такие как метод исключения Гаусса, алгоритм прогонки.

Ключевые слова: эллиптические уравнения, краевые задачи, метод лучевых переменных, конечно-аналитические схемы.

Alexander Victorovich Shilkov

On the solution of elliptic equations by the ray variable method

A method for solving a boundary value problem for a linear elliptic equation of the second order is described using reduction to a boundary value problem for a system of kinetic equations. Kinetic equations have characteristics, i.e. rays crossing a region. Due to the transition to ray variables, the solution to the original multidimensional problem is replaced by the solution of a series of one-dimensional problems at the rays. A finite-analytic scheme for numerically solving problems in a domain with discontinuous coefficients and sources is constructed. The region is divided into cells, within which the coefficients and sources are continuous, and the finite discontinuities (if any) occur at the cell boundaries. Next, the solutions are cross-linking at the cell boundaries. In the scheme, there is no strong dependence of the accuracy of approximation from the size and shape of the cells that inherent in finite difference schemes. To solve a small-sized system of the scheme algebraic equations, direct (non-iterative) algorithms of computational algebra can be used, such as the Gaussian elimination technique, and and the tridiagonal matrix algorithm.

Key words: elliptic equations, boundary value problems, ray variables method, finite-analytic schemes

Введение

В работе изложен метод решения линейного эллиптического уравнения достаточно общего вида с помощью сведения краевой задачи к краевой задаче для системы кинетических уравнений. Кинетические уравнения имеют характеристики. Решение системы ищется переходом к лучевым (характеристическим) переменным.

Во введении обсуждается постановка краевых задач для эллиптического уравнения в области с разрывными коэффициентами и источником, проводится разбиение области на однородные ячейки, формулируются условия сшивки классических решений, выходящих из соседних ячеек, и граничные условия на внешней границе области.

В первом разделе устанавливается соответствие между эллиптическим уравнением и системой кинетических уравнений, описывающей распространение возмущений вдоль лучей. Уравнения формулируются относительно функции распределения возмущений. Нулевой момент распределения (интеграл по угловым переменным) равен искомой функции, удовлетворяющей эллиптическому уравнению и граничным условиям.

Кинетические уравнения имеют характеристики – лучи, пересекающие область от точки входа до точки выхода. На луче уравнения переходят в систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Во втором разделе выполняется переход к лучевым переменным, формулируется одномерная краевая задача на луче (вместо исходной многомерной краевой задачи) и условия сшивки решений в точках пересечения границ ячеек. Приведены формулы решений типичных задач на хорде – отрезке луча между границами ячейки. Показано, что постановка на концах хорды условий Дирихле или Неймана позволяет удовлетворить условиям сшивки.

В третьем разделе построена конечно-аналитическая схема для численного решения одномерной краевой задачи на луче, а, следовательно, и для нахождения решения многомерной краевой задачи в области. Если решить совокупность задач на всех лучах, пересекающих область, то можно найти распределение возмущений в области. Численное интегрирование распределения по угловым переменным дает решение исходной краевой задачи для эллиптического уравнения.

Конечно-аналитическим схемам, которые используют аналитические формулы решений дифференциальных уравнений внутри ячеек и сшивку решений на границах ячеек, посвящено относительно мало работ (см. [1]-[14] и цит. литературу). В первых работах [2], [3] схемы назывались «точными». Термин конечно-аналитическая схема был введен позднее [8].

Основные уравнения. Пусть в ограниченной области V трехмерного евклидова пространства некоторый процесс описывается системой линейных уравнений в частных производных:

$$\begin{cases} \frac{\partial \Psi_1^i(\mathbf{r})}{\partial r^i} + \sigma_0(\mathbf{r}) \Psi_0(\mathbf{r}) = Q(\mathbf{r}), \\ \frac{\partial [D^{ij}(\mathbf{r}) \Psi_0(\mathbf{r})]}{\partial r^j} + \sigma_1(\mathbf{r}) \Psi_1^i(\mathbf{r}) = 0, \quad 1 \leq i \leq 3. \end{cases} \quad (1)$$

$$D^{ij} = D^{ji}, \quad b_D < D^{ij} \Omega^i \Omega^j < c_D \quad (|\Omega|=1),$$

$$|Q| < c_Q, \quad |\sigma_0| < c_0, \quad b_1 < \sigma_1 < c_1, \quad b_{(\cdot)}, c_{(\cdot)} > 0.$$

Здесь $\mathbf{r} = (r^1, r^2, r^3)$ есть вектор координат, $\Psi_0(\mathbf{r})$ – искомая скалярная функция (далее – плотность), $\Psi_1^i(\mathbf{r})$ – искомая векторная функция (поток), $Q(\mathbf{r})$ – заданная функция (распределенный источник), $D^{ij}(\mathbf{r})$ – симметричный положительно определенный тензор, Ω ($|\Omega|=1$) – единичный вектор. В (1) и последующих формулах по повторяющимся координатным индексам i, j, k, \dots подразумевается суммирование. Коэффициенты уравнений $\sigma_0(\mathbf{r})$, $\sigma_1(\mathbf{r})$ источник и тензор ограничены положительными постоянными $b_{(\cdot)}, c_{(\cdot)} > 0$. Коэффициент σ_0 может иметь любой знак, коэффициент σ_1 принимает только положительные значения. Коэффициенты, источник и тензор могут иметь конечные разрывы на поверхностях размерности 2. Область может быть неодносвязной – иметь, например, тороидальную форму.

Мы ограничимся рассмотрением пространства размерности $N=3$. Обобщение на пространства большей размерности выполняется без затруднений. Вопрос приведения некоторых систем более общего вида к стандартному виду (1) обсуждается в приложении. Там же обсуждаются эквивалентные формы решения краевой задачи.

Необходимость разрешения уравнений (1) возникает в математическом моделировании многих проблем физики и техники. Это расчеты теплообмена в технических установках, процессов переноса нейтронов в ядерных реакторах и теплового излучения в газах и плазме, протекания химических реакций, распространения реагентов и загрязнений в природных средах, колебаний конструкций и распространения электромагнитных волн.

Если из второго уравнения системы (1) выразить поток $\Psi_1^i(\mathbf{r})$ и подставить в первое уравнение, то в областях гладкости/непрерывности функций система сводится к уравнению второго порядка:

$$-\frac{\partial}{\partial r^i} \left[\frac{1}{\sigma_1} \frac{\partial [D^{ij} \Psi_0]}{\partial r^j} \right] + \sigma_0 \Psi_0 = Q. \quad (2)$$

Вследствие положительной определенности тензора $D^{ij} = D^{ji}$ оператор уравнения (2) можно привести локально (в точке) к оператору эллиптического типа. Действительно, с помощью поворота локальной системы координат симметричный тензор приводится к диагональному виду с положительными числами на диагонали. Если далее выполнить растяжение вдоль координатных осей, то уравнение (2) перейдет (локально) в стационарное уравнение Шредингера, в случае постоянных коэффициентов – в уравнение Гельмгольца, в случае $|\sigma_0| \ll \sigma_1$ – в уравнение Пуассона.

Разбиение области на ячейки. Ограничимся рассмотрением задач, в которых область V допускает разбиение на непересекающиеся подобласти – ячейки V_α , $\alpha = 1, \dots, A$, такое, что ячейки плотно покрывают область. Поверхности разрывов коэффициентов и источника (если такие есть), а также смены знака коэффициента σ_0 , проходят по границам ячеек. Ячейки могут быть отнесены к одному из трех типов:

ячейки А с положительным коэффициентом σ_0 , в которых $\sigma_0/\sigma_1 > c$, где c – малое положительное число $0 < c \ll 1$;

вырожденные ячейки Б, в которых $|\sigma_0|/\sigma_1 \leq c$ и решение уравнений (1) близко к решению уравнения Пуассона – (2) при $\sigma_0 = 0$;

ячейки В с отрицательным коэффициентом σ_0 , в которых $\sigma_0/\sigma_1 < -c$.

Для ячеек выполнены условия, необходимые для существования в них классического решения. В частности, внутри ячейки коэффициенты и источник являются непрерывными функциями, а тензор $D^{ij}(\mathbf{r})$ – гладкой функцией. Граница ячейки Γ_α состоит из гладких участков, на которых вектор внешней нормали \mathbf{n}_α меняется непрерывно, а ячейка видна под телесным углом 2π , равным половине полного угла 4π . В точках пересечения участков ячейка видна под углом, который больше числа b_ω и меньше $4\pi - b_\omega$.

Без ограничений общности далее считаем, что тензор $D^{ij}(\mathbf{r})$ есть нормированный тензор с единичным следом

$$\text{Sp}D^{ij} = \delta^{ij} D^{ij}(\mathbf{r}) = 1, \quad \mathbf{r} \in V. \quad (3)$$

Если это не так и след тензора равен функции $d(\mathbf{r})$, то замена: $D^{ij}/d \rightarrow D^{ij}$, $\Psi_0 d \rightarrow \Psi_0$, $\sigma_0/d \rightarrow \sigma_0$ дает требуемую нормировку.

Условия сшивки решений. Зададим на гладких участках *внутренних границ* области (границ между ячейками) *естественные условия сшивки* решений, выходящих из смежных ячеек V_α , V_β

$$n_\alpha^i \Psi_{1,\alpha}^i + n_\beta^i \Psi_{1,\beta}^i = n_\alpha^i [\Psi_{1,\alpha}^i - \Psi_{1,\beta}^i] = 0, \quad \mathbf{r} \in \Gamma_\alpha, \Gamma_\beta, \quad (4)$$

$$D_{\alpha}^{ij} n_{\alpha}^i n_{\alpha}^j \Psi_{0,\alpha} = D_{\beta}^{ij} n_{\beta}^i n_{\beta}^j \Psi_{0,\beta}, \quad \mathbf{n}_{\alpha} = -\mathbf{n}_{\beta}.$$

Первое условие выражает равенство компонентов потока, нормальных к элементу границы. Второе равенство выражает равенство нормальных компонентов тензорной функции $D^{ij}\Psi_0$. (Во многих задачах $D^{ij}\Psi_0$ имеет смысл тензора давления.) В (4) учтено, что векторы внешней нормали ячеек противоположны по направлению. Естественные условия сшивки согласованы с уравнениями системы (1).

Условия на внешней границе. На гладких участках *внешней границы* Γ области V на решения системы (1) наложим условия

$$\frac{1+\chi}{1-\chi} G_{ij} n^j \left[\Psi_1^i - \Psi_{1,ent}^i \right] = \Psi_0 - \Psi_{0,ent}, \quad \mathbf{r}_{\Gamma} \in \Gamma, \quad (5)$$

$$G_{ij} = G_{ji}, \quad 0 < b_G < G_{ij} \Omega^i \Omega^j < c_G, \quad |\mathbf{\Omega}| = 1, \quad -1 < \chi \leq 1.$$

Индекс ячейки α , примыкающей к гладкому участку внешней границы области, опущен. $G_{ij}(\mathbf{r}_{\Gamma})$, $\chi(\mathbf{r}_{\Gamma})$, $\Psi_{0,ent}(\mathbf{r}_{\Gamma})$, $\Psi_{1,ent}^i(\mathbf{r}_{\Gamma})$ – заданные ограниченные кусочно-непрерывные функции, $n^i(\mathbf{r}_{\Gamma})$ есть вектор внешней нормали. G_{ij} – положительно определенный тензор, $\Psi_{0,ent}$, $\Psi_{1,ent}^i$ – граничные источники, χ – коэффициент отражения границы. При $\chi = 0$ отражение отсутствует. Если на участке границы $\chi(\mathbf{r}_{\Gamma}) \rightarrow -1$, то условия (5) переходят в граничные условия Дирихле. Если на участке границы $G_{ij} = kD_{ij}$, где $k(\mathbf{r}_{\Gamma})$ – кусочно-непрерывная функция, D_{ij} – котензор (обратный тензор) тензора D^{ij} ($D_{jk}D^{ki} = D^{ki}D_{jk} = \delta^{ij}$), то условия (5) соответствуют граничным условиям обобщенной задачи Неймана [15, с.436]; [16, с.158]; [17, с.16]. Случай $\chi \rightarrow 1$ соответствует условиям классической задачи Неймана. Случай $G_{ij} \neq kD_{ij}$, $\chi \neq -1$ принято называть условиями с косою производной. Общий случай будем называть смешанными граничными условиями. Далее термином граничные условия Дирихле обозначается ситуация, когда на участке границы поставлены условия Дирихле. Его следует отличать от термина «краевая задача Дирихле», когда данный тип условий поставлен на всей границе.

Существование и единственность решения. Вопросы существования классического решения краевой задачи в одной ячейке V_{α} и обобщенного решения в полной области V с разрывными коэффициентами обсуждаются в работах [15]-[21].

Поставим на границе некоторой ячейки V_α общие смешанные граничные условия (5). Представим решение краевой задачи (1), (5) в ячейке в виде суммы: $\Psi_0 = \Phi + \Phi_\lambda$, $\Psi_1^i = \Phi^i + \Phi_\lambda^i$. Функции Φ , Φ^i удовлетворяют неоднородной задаче (1), (5) с источником $Q' = Q + [\lambda^2 - 1]\sigma_0\Phi_\lambda$, а функции Φ_λ , Φ_λ^i удовлетворяют однородной краевой задаче

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi_\lambda^i}{\partial r^i} + \lambda^2 \sigma_0 \Phi_\lambda = 0, \\ \frac{\partial [D^{ij} \Phi_\lambda]}{\partial r^j} + \sigma_1 \Phi_\lambda^i = 0, \end{cases} \quad \frac{1+\chi}{1-\chi} G_{ij} n^j \Phi_\lambda^i \Big|_{\Gamma_\alpha} = \Phi_\lambda \Big|_{\Gamma_\alpha}, \quad (6)$$

где $\lambda > 0$ – собственное число. Для решения краевой задачи в ячейке имеет место альтернатива [15, с.443]; [16, с.157]; [17, с.17].

1) В ячейках А и Б однородная задача (6) решений не имеет, кроме тривиального решения $\Phi_\lambda = \Phi_\lambda^i = 0$. Неоднородная задача (1), (5) имеет единственное решение. Исключение составляет классическая задача Неймана в вырожденной ячейке Б. Задача разрешима, если полная мощность источников Q равна полному потоку через границу. При этом плотность Ψ_0 определяется с точностью до постоянной.

2) Ячейка В, $\sigma_0/\sigma_1 < -c$ может иметь ряд собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, \dots > 0$ и соответствующих им нетривиальных решений однородной задачи (6), интерпретируемых как собственные колебания. Множество решений однородной задачи состоит из линейных комбинаций колебаний. Пусть в ячейке возбуждена некоторая комбинация собственных колебаний. Тогда неоднородная краевая задача (1), (5) имеет единственное решение, если выполнено условие ортогональности источника Q каждому колебанию комбинации. Если условие ортогональности источника не выполнено, то неоднородная задача решений не имеет. Если в ячейке нет возбужденных собственных колебаний, то неоднородная краевая задача имеет единственное решение.

Некоторые аналитические решения неоднородной краевой задачи в ячейке при частном виде тензора $D^{ij} = D\delta^{ij}$, коэффициентов, источников, граничных условий и формы ячейки, полученные методом функций Грина или методом разделения переменных приведены в [16, с.125]; [22, с.116]; [23, с.492]. Коэффициенты и источники уравнений полагаются постоянными, ячейка имеет форму параллелепипеда или плоского, цилиндрического, сферического слоя.

В работе мы будем обсуждать вопрос нахождения решения неоднородной краевой задачи (1)–(5) в области V с ячейками типа А, Б, В в предположении, что решение существует и оно единственное.

1. Распределения возмущений

Введем четное и нечетное $\psi^\pm(\mathbf{\Omega}, \mathbf{r}) = \pm\psi^\pm(-\mathbf{\Omega}, \mathbf{r})$ распределения возмущений. Распределения есть функции координат и единичного вектора $\mathbf{\Omega} = (\Omega^1, \Omega^2, \Omega^3) = (\sqrt{1-\mu^2} \cos \alpha, \sqrt{1-\mu^2} \sin \alpha, \mu)$ ($d\mathbf{\Omega} = d\alpha d\mu$), задающего направление распространения возмущений; α ($0 \leq \alpha < 2\pi$) – азимутальный угол, отсчитываемый от оси r_1 в плоскости $r_1 \times r_2$, μ ($-1 \leq \mu \leq 1$) – косинус угла между вектором $\mathbf{\Omega}$ и осью r_3 . Распределения определены в области $\mathbf{r} \times \mathbf{\Omega}$, $\mathbf{r} \in V$, $\mathbf{\Omega} \in 4\pi$ пятимерного евклидова пространства.

Нормируем скалярный и векторный угловые моменты распределений соответственно на искомую плотность и искомый поток

$$\Psi_0(\mathbf{r}) = \int_{4\pi} \psi^+(\mathbf{\Omega}, \mathbf{r}) d\mathbf{\Omega}, \quad \Psi_1^i(\mathbf{r}) = \int_{4\pi} \Omega^i \frac{\psi^-(\mathbf{\Omega}, \mathbf{r})}{h} d\mathbf{\Omega}, \quad (7)$$

$$h(\mathbf{\Omega}, \mathbf{r}) = \sqrt{g_{ij}(\mathbf{r}) \Omega^i \Omega^j}, \quad g_{ij}(\mathbf{r}) = g_{ji}(\mathbf{r}), \quad g_{ij} \Omega^i \Omega^j \geq 3b/2 > 0,$$

где $h(\mathbf{\Omega}, \mathbf{r}) > 0$ есть положительная четная $h(\mathbf{\Omega}) = h(-\mathbf{\Omega})$ функция, вычисляемая через некоторый симметричный метрический тензор $g_{ij}(\mathbf{r})$. Кроме младших моментов (7) нам также понадобятся моменты распределений второго $\Psi_2^{ij}(\mathbf{r})$ и третьего $\Psi_3^{ijk}(\mathbf{r})$ порядка:

$$\Psi_2^{ij}(\mathbf{r}) = \int_{4\pi} P_2^{ij}(\mathbf{\Omega}) \psi^+(\mathbf{\Omega}, \mathbf{r}) d\mathbf{\Omega}, \quad P_2^{ij}(\mathbf{\Omega}) = \frac{3\Omega^i \Omega^j - \delta^{ij}}{2}, \quad (8)$$

$$\Psi_3^{ijk}(\mathbf{r}) = \int_{4\pi} P_3^{ijk}(\mathbf{\Omega}) \frac{\psi^-(\mathbf{\Omega}, \mathbf{r})}{h} d\mathbf{\Omega}, \quad P_3^{ijk} = \frac{5\Omega^i \Omega^j \Omega^k - \Omega^i \delta^{jk} - \Omega^j \delta^{ik} - \Omega^k \delta^{ij}}{2},$$

$$\text{Sp} \Psi_2^{ij} = \Psi_2^{ij} \delta^{ij} = 0, \quad \text{Sp} \Psi_3^{ijk} = \Psi_3^{ijk} \delta^{ij} = \Psi_3^{ijk} \delta^{ik} = \Psi_3^{ijk} \delta^{jk} = 0.$$

Здесь $P_n^{ij\dots}(\mathbf{\Omega})$ – сферические тензоры Лежандра ($P_0 = 1$, $P_1^i = \Omega^i$). Тензор моментов второго порядка Ψ_2^{ij} выражается через момент нулевого порядка Ψ_0 и симметричный нормированный тензор C^{ij} , который является дробно-линейным функционалом четного распределения возмущений

$$\Psi_2^{ij}(\mathbf{r}) = \frac{3C^{ij}(\mathbf{r}) - \delta^{ij}}{2} \Psi_0(\mathbf{r}), \quad C^{ij} = C^{ji}, \quad C^{ij}\delta^{ij} = 1, \quad (9)$$

$$C^{ij}(\mathbf{r}) = C^{ij}(\psi^+) = \int_{4\pi} \Omega^i \Omega^j \psi^+(\Omega, \mathbf{r}) d\Omega \Big/ \int_{4\pi} \psi^+(\Omega, \mathbf{r}) d\Omega.$$

Кинетическая задача. Пусть распределения удовлетворяют системе четно-нечетных кинетических уравнений, согласованных с уравнениями (1)

$$\begin{cases} \frac{\Omega^i}{h} \frac{\partial \psi^-(\Omega, \mathbf{r})}{\partial r^i} + \sigma_0(\mathbf{r}) \psi^+(\Omega, \mathbf{r}) = q_0(\mathbf{r}), \\ \frac{\Omega^j}{h} \frac{\partial \psi^+(\Omega, \mathbf{r})}{\partial r^j} + \sigma_1(\mathbf{r}) \psi^-(\Omega, \mathbf{r}) = q_1(\Omega, \mathbf{r}). \end{cases} \quad (10)$$

$$q_0(\mathbf{r}) = \frac{Q(\mathbf{r})}{4\pi} + \frac{K_0(\mathbf{r})}{4\pi}, \quad q_1(\Omega, \mathbf{r}) = \frac{3}{4\pi} \frac{\Omega^i K_1^i(\mathbf{r})}{h}.$$

Здесь $K_0(\mathbf{r})$, $K_1^i(\mathbf{r})$ – скалярный и векторный источники, дополняющие основной источник $Q(\mathbf{r})$, $h(\Omega, \mathbf{r})$ – функция, введенная в (7). Уравнения (10) описывают распространение возмущений вдоль лучей. Возмущения порождаются основным и дополняющими источниками.

На гладких участках внутренних границ между смежными ячейками V_α и V_β на решение системы (10) накладываются условия сшивки

$$\lim_{l \rightarrow 0} \left[\psi^\pm(\Omega, \mathbf{r}_\alpha + \Omega l) - \psi^\pm(\Omega, \mathbf{r}_\alpha - \Omega l) \right] = 0, \quad \Omega \mathbf{n}_\alpha \neq 0, \quad (11)$$

где l – расстояние, отсчитываемое вдоль луча $\mathbf{r}_\alpha + \Omega l$, пересекающего гладкий участок общей границы в точке $\mathbf{r}_\alpha \in \Gamma_\alpha, \Gamma_\beta$ в направлении Ω , отличном от тангенциального направления. Точка $\mathbf{r}_\alpha - \Omega l$ принадлежит ячейке V_α , точка $\mathbf{r}_\alpha + \Omega l$ – ячейке V_β .

На внешних границах области на решения системы наложим условия

$$\frac{1+\chi}{1-\chi} G_{ij} \Omega^i n^j \frac{\psi^-(\Omega, \mathbf{r}_\Gamma) - \psi_{ent}^-(\Omega, \mathbf{r}_\Gamma)}{h(\Omega, \mathbf{r}_\Gamma)} = \psi^+(\Omega, \mathbf{r}_\Gamma) - \psi_{ent}^+(\Omega, \mathbf{r}_\Gamma), \quad (12)$$

$$\psi_{ent}^+(\Omega, \mathbf{r}_\Gamma) = \frac{\Psi_{0,ent}(\mathbf{r}_\Gamma)}{4\pi}, \quad \frac{\psi_{ent}^-(\Omega, \mathbf{r}_\Gamma)}{h(\Omega, \mathbf{r}_\Gamma)} = \frac{3}{4\pi} \Omega^i \Psi_{1,ent}^i(\mathbf{r}_\Gamma).$$

Интегрирование условий сшивки решений (11) по угловым переменным с весами $\mathbf{\Omega n}_\alpha/h$ и $[\mathbf{\Omega n}_\alpha]^2$ дает условия сшивки (4), а интегрирование граничных условий (12) с весом 1 – граничные условия (5).

Подберем метрический тензор $g_{ij}(\mathbf{r})$ и дополняющие источники $K_0(\mathbf{r})$, $K_1^i(\mathbf{r})$ так, чтобы результат интегрирования уравнений (10) по угловым переменным в точности воспроизводил уравнения (1).

Метрический тензор целесообразно задать в виде

$$g_{ij}(\mathbf{r}, a) = g_{ij}(\psi^+) = \frac{5-3a}{2} D_{ik}(\mathbf{r}) C^{jk}(\psi^+) - \frac{1-a}{2} C^{pq} D_{pq} \delta_{ij}, \quad (13)$$

$$g = \text{Sp} g_{ij} = \delta^{ij} g_{ij} = C^{pq} D_{pq}, \quad D_{kj} D^{ik} = D^{ik} D_{kj} = \delta^{ij},$$

где $D_{ij}(\mathbf{r})$ – симметричный положительный котензор (обратный тензор) тензора $D^{ij}(\mathbf{r})$ (1), $C^{ij}(\psi^+)$ – симметричный нормированный тензор (9), a – подбираемый параметр, g – след метрического тензора. Метрический тензор (13), как и тензоры D^{ij} , C^{ij} (см. (3), (9)), есть нормированный тензор. Как и тензор C^{ij} , он является дробно-линейный функционалом четного распределения ψ^+ . Если $C^{ij} = D^{ij}$, то $g_{ij}(\psi^+)$ переходит в единичный метрический тензор евклидова пространства δ_{ij} ($\text{Sp} \delta_{ij} = N = 3$).

Корректирующий параметр $a(\mathbf{r})$ введен в (13) для обеспечения выполнения неравенства $g_{ij}(\mathbf{r}, a) \Omega^i \Omega^j \geq 3b/2 > 0$ при сильных отклонениях тензора $C^{ij}(\psi^+)$ от тензора $D^{ij}(\mathbf{r})$; $b \approx 0.1$ – заданное малое число. Параметр равен нулю $a = 0$, если выполнено условие $\min g_{ij}(\mathbf{r}, 0) \Omega^i \Omega^j \geq 3b/2$, $|\mathbf{\Omega}| = 1$. В противном случае (большие отклонения C^{ij} от D^{ij}) параметр находится из уравнения $\min g_{ij}(\mathbf{r}, a) \Omega^i \Omega^j = 3b/2$. Разрешая уравнение, найдем:

$$a(\mathbf{r}) = \begin{cases} 0, & [g + 3b]/5 \leq CD \leq g/3 \\ [g - 5CD + 3b]/[g - 3CD], & 0 < CD < [g + 3b]/5 \end{cases}, \quad (14)$$

$$CD(\mathbf{r}) = \min_{\mathbf{\Omega}} C^{ik} D_{kj} \Omega^i \Omega^j, \quad b \approx 0.1, \quad g(\mathbf{r}) = C^{pq} D_{pq},$$

где $CD(\mathbf{r}) > 0$ – минимальное собственное число тензора $C^{ik} D_{kj}$.

Пример. Пусть в исходной системе уравнений (1) $D^{ij} = \delta^{ij}/3$. Тогда:

$$g_{ij}(\mathbf{r}) = \frac{3[5-3a]}{2} C^{ij}(\mathbf{r}) - \frac{3[1-a]}{2} \delta_{ij}, \quad g(\mathbf{r}) = g_{ij} \delta^{ij} = 3,$$

$$h^2(\mathbf{\Omega}, \mathbf{r}) = g_{ij}(\mathbf{r}) \Omega^i \Omega^j = \frac{3[5-3a]}{2} C^{ij} \Omega^i \Omega^j - \frac{3[1-a]}{2}.$$

Корректирующий параметр принимает значения

$$a(\mathbf{r}) = \begin{cases} 0, & [1+b]/5 \leq C \leq 1/3 \\ [1-5C+b]/[1-3C], & 0 < C < [1+b]/5 \end{cases}, \quad b \approx 0.1, \quad C(\mathbf{r}) = \min_{\mathbf{\Omega}} C^{ij} \Omega^i \Omega^j.$$

$C(\mathbf{r}) > 0$ – минимальное собственное число тензора C^{ij} .

Соответствие первому уравнению системы (1). Интегрируя четное кинетическое уравнение (10) по угловым переменным

$$\int_{4\pi} \left[\Omega^i \frac{\partial}{\partial r^i} \frac{\Psi^-}{h} + \frac{\Psi^- \Omega^i}{h^2} \frac{\partial h}{\partial r^i} + \sigma_0 \Psi^+ \right] d\mathbf{\Omega} = [Q + K_0] \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} d\mathbf{\Omega},$$

мы получим уравнение (1), если определим дополняющий источник как

$$K_0(\mathbf{r}) = \int_{4\pi} \frac{\Omega^i \Psi^-}{h} \frac{\partial \ln h}{\partial r^i} d\mathbf{\Omega} = \frac{\Psi_1^i}{2g} \frac{\partial g}{\partial r^i} + \int_{4\pi} \frac{\Omega^i \Psi^-}{h} \frac{\partial \ln \sqrt{3g_{ij} \Omega^i \Omega^j / g}}{\partial r^i} d\mathbf{\Omega}.$$

Представим источник в удобном для вычислений виде, разложив логарифмическую функцию в ряд по сферическим тензорам (8). Вследствие четности функции по $\mathbf{\Omega}$ в разложение войдут только четные гармоники

$$\ln \sqrt{3g_{ij}(\mathbf{r}) \Omega^i \Omega^j / g(\mathbf{r})} \simeq \sum_{n=0}^{\infty} [4n+1] \underbrace{\Omega^i \Omega^j \dots \Omega^q}_{2n} h_{2n}^{ij\dots q}(\mathbf{r}),$$

$$h_{2n}^{ij\dots q}(\mathbf{r}) = \int_{4\pi} P_{2n}^{ij\dots q}(\mathbf{\Omega}) \ln \sqrt{3g_{ij}(\mathbf{r}) \Omega^i \Omega^j / g(\mathbf{r})} \frac{d\mathbf{\Omega}}{4\pi},$$

$$h_0(\mathbf{r}) = \int_{4\pi} \ln \sqrt{3g_{ij} \Omega^i \Omega^j / g} \frac{d\mathbf{\Omega}}{4\pi}, \quad h_2^{ij}(\mathbf{r}) = \int_{4\pi} \frac{3\Omega^i \Omega^j - \delta^{ij}}{2} \ln \sqrt{3g_{ij} \Omega^i \Omega^j / g} \frac{d\mathbf{\Omega}}{4\pi}, \dots$$

Здесь $h_{2n}^{ij\dots q}(\mathbf{r})$ – четные моменты функции, $P_{2n}^{ij\dots q}(\mathbf{\Omega})$ – сферические тензоры Лежандра (8). Подставив разложение в интеграл, найдем

$$K_0(\psi^\pm) = \Psi_1^j \frac{\partial}{\partial r^i} \left[\frac{\ln g}{2} \delta^{ij} + h_0 \delta^{ij} + 2h_2^{ij} \right] + \Psi_3^{jkl} \frac{\partial}{\partial r^i} \left[2h_2^{kl} \delta^{ij} + \frac{8}{5} h_4^{ijkl} \right] + \dots \quad (15)$$

Источник $K_0(\psi^\pm)$ выражается через моменты $\Psi_{2n-1}^{ij\dots}$ нечетного распределения ψ^- и производные от четных моментов $h_{2n}^{ij\dots q}(\mathbf{r})$.

Ряд (15) быстро сходится. Ограничимся решением задач, в которых для расчета дополняющего источника $K_0(\psi^\pm)$ достаточно учитывать члены разложения, содержащие моменты Ψ_1^i , Ψ_3^{ijk} и h_0 , h_2^{ij} .

Соответствие второму уравнению (1). Перед интегрированием умножим второе (нечетное) уравнение (10) на множитель $h\Omega^i$

$$\int_{4\pi} \left[\Omega^i \Omega^j \frac{\partial \Psi^+}{\partial r^j} + \sigma_1 g_{jk} \Omega^i \Omega^j \Omega^k \frac{\Psi^-}{h} \right] d\Omega = K_1^j \frac{3}{4\pi} \int_{4\pi} \Omega^i \Omega^j d\Omega.$$

Применением (7), (8) уравнение преобразуется к виду

$$K_1^i(\psi^\pm) = \frac{\partial [C^{il} \Psi_0]}{\partial r^l} + \sigma_1 \left[\frac{2g_{ij} + g\delta_{ij}}{5} \Psi_1^j + \frac{2}{5} g_{jk} \Psi_3^{ijk} \right].$$

Если воспользоваться равенствами

$$\frac{\partial [C^{il} \Psi_0]}{\partial r^l} = \frac{\partial [C^{ik} D_{jk} D^{jl} \Psi_0]}{\partial r^l} = C^{ik} D_{jk} \frac{\partial [D^{jl} \Psi_0]}{\partial r^l} + D^{jl} \Psi_0 \frac{\partial [C^{ik} D_{jk}]}{\partial r^l},$$

$$2g_{ij} + g\delta_{ij} = 5C^{ik} D_{jk} - a[3C^{ik} D_{jk} - g\delta_{ij}]$$

и принять во внимание второе уравнение системы (1), то для дополняющего источника получаем выражение

$$K_1^i(\psi^\pm) = D^{jl} \frac{\partial [C^{ik} D_{kl}]}{\partial r^j} \Psi_0 + \frac{2\sigma_1}{5} \left[g_{jk} \Psi_3^{ijk} - \frac{a}{2} [3C^{ik} D_{jk} - g\delta_{ij}] \Psi_1^j \right]. \quad (16)$$

Обсуждение. Уравнения (1)–(5) следуют из уравнений (10)–(16). Поэтому решение краевой задачи (1)–(5) в условиях его существования и единственности можно получить из решения кинетической задачи (10)–(16).

Кинетические уравнения (10) относятся к классу интегро-дифференциальных уравнений со слабой нелинейностью. Нелинейность уравнений вызвана слабой дробно-линейной зависимостью тензоров $g_{ij}(\psi^+)$, $C^{ij}(\psi^+)$ от четного распределения. Входящие в правую часть уравнений дополняющие источники $K_0(\psi^\pm)$, $K_1^i(\psi^\pm)$ (15), (16) есть линейные комбинации моментов $\Psi_n^{ij\dots}$ – угловых интегралов (7), (8) от искомым распределений.

Аналогичные *линейные* интегро-дифференциальные уравнения, содержащие моменты $\Psi_n^{ij\dots}$, но не содержащие метрического тензора $g^{ij}(\psi^+)$, возникают в задачах переноса частиц – нейтронов и фотонов (см., например [12], [13], [24], [25]). Решение уравнений может быть найдено численными методами выполнением итераций по значениям моментов и тензоров. Из 75-летней практики решения уравнений (она началась с Атомного проекта) известно, что итерации сходятся быстро, если дополняющие источники относительно малы в сравнении с основным источником $Q(\mathbf{r})$

$$\left| K_0(\psi^\pm) \right|, \left| \frac{1}{\sigma_1} \frac{\partial K_1^i(\psi^\pm)}{\partial r^i} \right| < A |Q(\mathbf{r})|, \quad A \leq 1 \div 10, \quad \mathbf{r} \in V. \quad (17)$$

В этом случае для разрешения интегро-дифференциальных уравнений достаточно применять так называемые простые итерации, в которых тензоры C^{ij} , g_{ij} и моменты $\Psi_n^{ij\dots}$ вычисляются по значениям распределений ψ^\pm на предыдущей итерации. Скорость сходимости простых итераций тем выше, чем меньше постоянная A .

Анализ дополняющих источников (15), (16) нашей кинетической задачи (10)–(12), показывает, что главный момент нулевого порядка Ψ_0 входит с малым коэффициентом только в источник K_1^i (16), момент первого порядка Ψ_1^i входит в оба источника, но тоже с малыми коэффициентами. Поэтому для многих прикладных задач дополняющие источники относительно малы и условие (17) выполняется вполне. Подстановка главных членов источников (15), (16) в (17) дает следующие условия быстрой сходимости простых итераций

$$\left| \frac{\Psi_1^i}{2g} \frac{\partial g}{\partial r^i} \right|, \left| \frac{1}{9\sigma_1} \frac{\partial}{\partial r^i} \left[\Psi_0 \frac{\partial g}{\partial r^i} \right] \right|, \left| \frac{2}{5} \frac{\partial [g_{jk} \Psi_3^{ijk}]}{\partial r^i} \right| < A |Q(\mathbf{r})|, \quad A \leq 1 \div 10. \quad (18)$$

В ряде задач дополняющими источниками можно пренебрегать вообще, или оставить (для контроля точности приближения) только их главные члены

$$K_0(\Psi^\pm) \approx \frac{\Psi_1^i}{2g} \frac{\partial g}{\partial r^i}, \quad K_1^i(\Psi^\pm) \approx \frac{\Psi_0}{3} D^{ij} \frac{\partial g}{\partial r^j}.$$

В этом приближении с помощью быстроходящихся простых итераций уточняются только значения тензоров C^{ij} , g_{ij} и искомым функций Ψ_0 , Ψ_1^i .

Отличительным свойством уравнений (10) является наличие характеристик. Переход к лучевым (характеристическим) переменным позволит нам продвинуться вперед как в интегрировании уравнений – в построении аналитических формул для *неявного* представления решения краевой задачи, так и в составлении конечно-аналитических дискретных схем и алгоритмов решения задачи.

Замечание. Если иметь в виду вопрос формального интегрирования уравнений (10), то в ячейках V_α области V можно определить гладкие римановы многообразия с метрическим тензором $g_{ij}(\mathbf{r})$ и связностью [26], [27, с.359], заменить в (10) обычное дифференцирование вдоль направлений на ковариантное дифференцирование вдоль геодезических линий многообразий. Тогда прямые лучи перейдут в отрезки геодезических. Дополняющие источники $K_0(\mathbf{r})$, $K_1^i(\mathbf{r})$ еще более уменьшатся по величине – из них уйдет ряд комбинаций производных от метрического тензора $g_{ij}(\mathbf{r})$. В данной работе, имея в виду разработку простых численных методов нахождения решения системы, мы останемся в евклидовом пространстве, т.к. расчет геодезических линий в ячейках сам по себе отнимает ресурсы компьютера.

2. Переход к лучевым переменным

Лучевые переменные. Рассмотрим точку области $\mathbf{r}_0 \in V$ (рис. 1). Через точку в направлении $\mathbf{\Omega}$, $|\mathbf{\Omega}|=1$ проходит только один луч $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{\Omega}l$, где l – расстояние от точки \mathbf{r}_0 до точки на луче \mathbf{r} (далее – *размерная лучевая переменная*, другое название – характеристическая переменная).

Также введем на луче *безразмерную лучевую переменную* ξ

$$\xi(l) = \xi(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}) = \int_0^l \sigma(\mathbf{r}') h(\mathbf{\Omega}, \mathbf{r}') dl', \quad \mathbf{r}'(l') = \mathbf{r}_0 + \mathbf{\Omega}l', \quad (19)$$

$$\sigma(\mathbf{r}) = \left[\begin{array}{ll} \sqrt{|\sigma_0 \sigma_1|}, & \text{ячейки А и В,} \\ \sigma_1, & \text{ячейка Б } (\sigma_0 \approx 0), \end{array} \right] \quad \sigma(\mathbf{r}) > 0.$$

Здесь $\sigma(\mathbf{r})$ – положительный коэффициент, равный геометрическому среднему $|\sigma_0|$ и σ_1 . В вырожденной ячейке Б полагаем $\sigma = \sigma_1$. Дифференциалы лучевых переменных и декартовых координат связаны соотношениями:

$$d\xi = \sigma h dl = \sigma h \frac{dr^1}{\Omega^1} = \sigma h \frac{dr^2}{\Omega^2} = \sigma h \frac{dr^3}{\Omega^3}, \quad \frac{\Omega^i}{h} \frac{\partial}{\partial r^i} = \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial l} = \sigma \frac{\partial}{\partial \xi}. \quad (20)$$

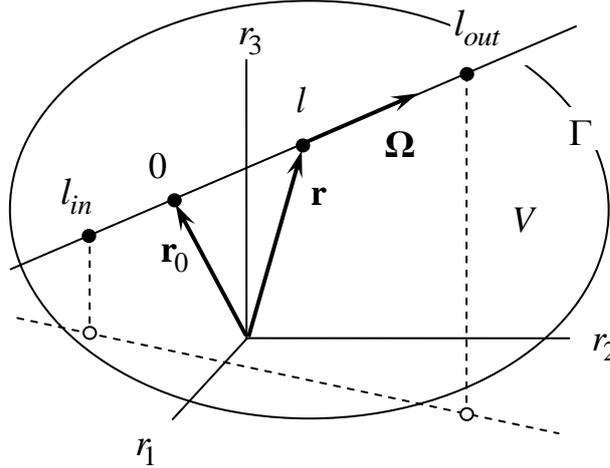


Рис. 1. Луч $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{\Omega}l$ входит в область в точке \mathbf{r}_{in} с лучевой координатой l_{in} , проходит в направлении $\mathbf{\Omega}$ через точку наблюдения \mathbf{r} с лучевой координатой l и покидает область в точке \mathbf{r}_{out} с координатой l_{out} . \mathbf{r}_0 – точка отсчета.

Краевая задача на луче. Из (20) следует, что лучи являются характеристиками уравнений (10). На луче $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{\Omega}l$ система принимает форму системы обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка:

Размерная переменная	Безразмерная переменная	
$\begin{cases} \frac{1}{h} \frac{d\psi^-}{dl} + \sigma_0 \psi^+ = q_0, \\ \frac{1}{h} \frac{d\psi^+}{dl} + \sigma_1 \psi^- = q_1, \end{cases}$	$\begin{cases} \frac{d\psi^-}{d\xi} + \frac{\sigma_0}{\sigma} \psi^+ = \frac{q_0}{\sigma}, \\ \frac{d\psi^+}{d\xi} + \frac{\sigma_1}{\sigma} \psi^- = \frac{q_1}{\sigma}, \end{cases}$	(21)

$$q_0(\xi) = \frac{Q(\mathbf{r}(\xi))}{4\pi} + \frac{K_0(\mathbf{r}(\xi))}{4\pi}, \quad q_1(\xi) = \frac{3}{4\pi} \frac{\Omega^i K_1^i(\mathbf{r}(\xi))}{h}.$$

Лучевые координаты l_α , ξ_α ($in \leq \alpha \leq out$) точек \mathbf{r}_α , в которых луч пересекает границы ячеек, будем нумеровать индексом « α »; l_{in} , ξ_{in} и l_{out} , ξ_{out}

– координаты точки входа и точки выхода луча из области. Порядок нумерации точек согласован с направлением роста лучевой переменной. На луче противоположного направления $-\Omega$ те же точки нумеруются в обратном порядке. В этих обозначениях условия сшивки решений на внутренних границах (11) имеют вид

$$\psi^\pm(\xi_\alpha + 0) = \psi^\pm(\xi_\alpha - 0), \quad \Omega \mathbf{n}_\alpha \neq 0 \quad (in < \alpha < out). \quad (22)$$

Смешанные условия на внешних границах области (12) запишем в форме:

$$\begin{aligned} -\theta_{in} \left[\psi^-(\xi_{in}) - \psi_{ent}^-(\xi_{in}) \right] &= \psi^+(\xi_{in}) - \psi_{ent}^+(\xi_{in}), \\ \theta_{out} \left[\psi^-(\xi_{out}) - \psi_{ent}^-(\xi_{out}) \right] &= \psi^+(\xi_{out}) - \psi_{ent}^+(\xi_{out}), \end{aligned} \quad (23)$$

где параметры θ и ψ_{ent}^\pm принимают значения

$$\theta_{in} = -\frac{1 + \chi_{in}}{1 - \chi_{in}} \frac{G_{ij}(\xi_{in}) \Omega^i n_{in}^j}{h(\xi_{in})}, \quad \theta_{out} = \frac{1 + \chi_{out}}{1 - \chi_{out}} \frac{G_{ij}(\xi_{out}) \Omega^i n_{out}^j}{h(\xi_{out})}, \quad (24)$$

$$\psi_{ent}^+ = \frac{\Psi_{0,ent}}{4\pi}, \quad \frac{\psi_{ent}^-}{h} = \frac{3}{4\pi} \Omega^i \Psi_{1,ent}^i.$$

При расстановке знаков мы учли знак скалярного произведения $\Omega \mathbf{n}$. В точке входа луча в область $\Omega \mathbf{n}_{in} < 0$, а в точке выхода $\Omega \mathbf{n}_{out} > 0$.

Отрезок луча $\xi_{\alpha-1} \leq \xi \leq \xi_\alpha$ ($l_{\alpha-1} \leq l \leq l_\alpha$) между точками пересечения границ ячейки будем называть хордой. На границах ячеек коэффициенты и источники системы уравнений (21) могут испытывать разрывы и/или смену знака. Поэтому говорить о классическом решении системы в общем случае можно только на хорде. *Решением системы уравнений (21) или (10) на луче $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \Omega l$, $l_{in} \leq l \leq l_{out}$* будем называть решение, составленное из классических решений, заданных на хордах (если решения существуют), удовлетворяющее условиям сшивки (22) на внутренних границах и условиям (23), (24) на внешней границе области.

3. Решение в ячейке

В этом разделе мы будем заниматься вопросом нахождения классического решения системы уравнений (21) на хорде. Вопрос нахождения решения на луче рассматривается в следующем разделе.

Решение уравнений (21) на хорде нетрудно выписать в вырожденной ячейке Б. В ячейках А и В случаи интегрирования системы более многообразны и определяются зависимостями коэффициентов $\sigma_0(\mathbf{r})$, $\sigma_1(\mathbf{r})$. Ограничимся рассмотрением часто встречающегося на практике случая, когда коэффициенты меняются подобно или почти подобно друг другу $\sigma_0/\sigma_1 \approx \text{const}$. Пусть производные отношения коэффициентов по направлениям ограничены малой постоянной c_R

$$\left| \Omega^i \frac{\partial}{\partial r^i} \left[\frac{\sigma_0(\mathbf{r})}{\sigma_1(\mathbf{r})} \right] \right| \leq c_R \sigma_1(\mathbf{r}), \quad c_R < 0.3, \quad \mathbf{r} \in V_\alpha. \quad (25)$$

Если исключить из системы (21) четное или нечетное распределение, то мы получим уравнение второго порядка относительно другого распределения

$$\left[-\frac{d^2}{d\xi^2} + \frac{\sigma_0}{|\sigma_0|} \right] \psi^\pm \approx p^\pm, \quad \begin{aligned} p^+ &= \frac{q_0}{\sigma} - \frac{d}{d\xi} \left[\frac{q_1}{\sigma_1} \right], \\ p^- &= \frac{\sigma_0}{|\sigma_0|} \left[\frac{q_1}{\sigma} - \frac{d}{d\xi} \left[\frac{q_0}{\sigma_0} \right] \right]. \end{aligned} \quad (26)$$

Замечание. Во многих практических задачах выполнения условия (25) можно добиться уменьшением размера ячеек. Если в некоторых ячейках этого сделать не удастся, то отношение коэффициентов на хорде $\xi_{\alpha-1} \leq \xi \leq \xi_\alpha$ можно аппроксимировать экспонентой $|\sigma_0|/\sigma_1 \approx e^{4k[\xi-\xi_\alpha]}$. Этот случай сводится к случаю $\sigma_0/\sigma_1 \approx \text{const}$ заменой искомым функций:

$$\varphi^\pm = e^{\pm k[\xi-\xi_\alpha]} \psi^\pm, \quad \frac{\sigma_0}{\sigma} = \frac{\sigma_0}{|\sigma_0|} e^{2k[\xi-\xi_\alpha]}, \quad \frac{\sigma_1}{\sigma} = e^{-2k[\xi-\xi_\alpha]}.$$

Исключив из системы четное или нечетное распределение, мы приходим к уравнению вида (26)

$$\left[-\frac{d^2}{d\xi^2} + \frac{\sigma_0}{|\sigma_0|} + k^2 \right] \varphi^\pm = e^{\mp k[\xi-\xi_\alpha]} p^\pm.$$

Некоторые частные решения уравнения (26) при заданном источнике:

$$1). \quad -\frac{d^2 y}{d\xi^2} + y = a \sin k\xi + b \cos k\xi \quad (\sigma_0 > 0),$$

$$y = C_1 \sinh \xi + C_2 \cosh \xi + \frac{a \sin k\xi + b \cos k\xi}{k^2 + 1}.$$

$$2). \quad -\frac{d^2 y}{d\xi^2} - y = a \sin k\xi + b \cos k\xi \quad (\sigma_0 < 0),$$

$$y = C_1 \sin \xi + C_2 \cos \xi + \begin{bmatrix} \frac{a \sin k\xi + b \cos k\xi}{k^2 - 1}, & k^2 \neq 1 \\ \frac{\xi}{2} [a \cos \xi - b \sin \xi], & k = \pm 1 \end{bmatrix}.$$

$$3). \quad -\frac{d^2 y}{d\xi^2} + y = a \sinh k\xi + b \cosh k\xi \quad (\sigma_0 > 0),$$

$$y = C_1 \sinh \xi + C_2 \cosh \xi - \begin{bmatrix} \frac{a \sinh k\xi + b \cosh k\xi}{k^2 - 1}, & k^2 \neq 1 \\ \frac{\xi}{2} [a \cosh \xi + b \sinh \xi], & k = \pm 1 \end{bmatrix}.$$

$$4). \quad -\frac{d^2 y}{d\xi^2} - y = a \sinh k\xi + b \cosh k\xi \quad (\sigma_0 < 0),$$

$$y = C_1 \sin \xi + C_2 \cos \xi - \frac{a \sinh k\xi + b \cosh k\xi}{k^2 + 1}.$$

Основное решение краевой задачи на хорде. Будем считать, что на концах хорды $\xi_{\alpha-1} \leq \xi \leq \xi_\alpha$ поставлены смешанные граничные условия, аналогичные условиям на внешней границе (23) ($in = \alpha - 1$, $out = \alpha$), но без конкретизации параметров $\theta_{\alpha-1}$, θ_α , ψ_{ent}^\pm значениями (24)

$$\begin{aligned} -\theta_{\alpha-1} \left[\Psi^-(\xi_{\alpha-1}) - \Psi_{ent}^-(\xi_{\alpha-1}) \right] &= \Psi^+(\xi_{\alpha-1}) - \Psi_{ent}^+(\xi_{\alpha-1}), \\ \theta_\alpha \left[\Psi^-(\xi_\alpha) - \Psi_{ent}^-(\xi_\alpha) \right] &= \Psi^+(\xi_\alpha) - \Psi_{ent}^+(\xi_\alpha). \end{aligned} \tag{27}$$

Параметры принимают значения (24), если концы хорды лежат на внешней границе области. Если одна из точек или обе точки лежат на внутренней границе между ячейками, то мы будем переходить в этих точках к частному случаю условий (27) – условиям Дирихле ($\theta_\alpha \rightarrow 0$). Это позволит удовлетворить условиям сшивки решений (22) на внутренних границах.

Введем на хорде элементарные функции лучевой переменной (19):

$$s_{\alpha-1}^{\rightarrow}(\xi) = \frac{\sigma_1(\xi)}{\sigma(\xi)} \begin{bmatrix} \sinh(\xi - \xi_{\alpha-1}) \\ \sin(\xi - \xi_{\alpha-1}) \end{bmatrix} + \theta_{\alpha-1} \begin{bmatrix} \cosh(\xi - \xi_{\alpha-1}) \\ \cos(\xi - \xi_{\alpha-1}) \end{bmatrix}, \quad (28)$$

$$s_{\alpha}^{\leftarrow}(\xi) = \frac{\sigma_1(\xi)}{\sigma(\xi)} \begin{bmatrix} \sinh(\xi_{\alpha} - \xi) \\ \sin(\xi_{\alpha} - \xi) \end{bmatrix} + \theta_{\alpha} \begin{bmatrix} \cosh(\xi_{\alpha} - \xi) \\ \cos(\xi_{\alpha} - \xi) \end{bmatrix},$$

$$c_{\alpha-1}^{\rightarrow}(\xi) = \begin{bmatrix} \cosh(\xi - \xi_{\alpha-1}) \\ \cos(\xi - \xi_{\alpha-1}) \end{bmatrix} + \theta_{\alpha-1} \frac{\sigma(\xi)}{\sigma_1(\xi)} \begin{bmatrix} \sinh(\xi - \xi_{\alpha-1}) \\ -\sin(\xi - \xi_{\alpha-1}) \end{bmatrix},$$

$$c_{\alpha}^{\leftarrow}(\xi) = \begin{bmatrix} \cosh(\xi_{\alpha} - \xi) \\ \cos(\xi_{\alpha} - \xi) \end{bmatrix} + \theta_{\alpha} \frac{\sigma(\xi)}{\sigma_1(\xi)} \begin{bmatrix} \sinh(\xi_{\alpha} - \xi) \\ -\sin(\xi_{\alpha} - \xi) \end{bmatrix},$$

$$x_{\alpha}(\xi) = s_{\alpha-1}^{\rightarrow}(\xi) c_{\alpha}^{\leftarrow}(\xi) + c_{\alpha-1}^{\rightarrow}(\xi) s_{\alpha}^{\leftarrow}(\xi) = \frac{\sigma_1(\xi)}{\sigma(\xi)} \begin{bmatrix} \sinh \Delta \xi_{\alpha} \\ \sin \Delta \xi_{\alpha} \end{bmatrix} + \\ + [\theta_{\alpha-1} + \theta_{\alpha}] \begin{bmatrix} \cosh \Delta \xi_{\alpha} \\ \cos \Delta \xi_{\alpha} \end{bmatrix} + \theta_{\alpha-1} \theta_{\alpha} \frac{\sigma(\xi)}{\sigma_1(\xi)} \begin{bmatrix} \sinh \Delta \xi_{\alpha} \\ -\sin \Delta \xi_{\alpha} \end{bmatrix} \approx \text{const}.$$

Здесь $\Delta \xi_{\alpha} = \xi_{\alpha} - \xi_{\alpha-1}$ – длина хорды. Верхняя строка относится к ячейке А ($\sigma_0/\sigma_1 > c$), нижняя – к ячейке В ($\sigma_0/\sigma_1 < -c$). В вырожденной ячейке Б ($|\sigma_0/\sigma_1| \leq c$) функции (28) непрерывно переходят в функции

$$s_{\alpha-1}^{\rightarrow}(\xi) = \xi - \xi_{\alpha-1} + \theta_{\alpha-1}, \quad s_{\alpha}^{\leftarrow}(\xi) = \xi_{\alpha} - \xi + \theta_{\alpha}, \quad (29)$$

$$c_{\alpha-1}^{\rightarrow}(\xi) = c_{\alpha}^{\leftarrow}(\xi) = 1, \quad x_{\alpha} = \xi_{\alpha} - \xi_{\alpha-1} + \theta_{\alpha-1} + \theta_{\alpha} = \text{const},$$

где лучевая координата ξ вычисляется по коэффициенту $\sigma = \sigma_1$ (см. (19)).

Общее решение системы уравнений (21), (27) и уравнения (26) на хорде $\xi_{\alpha-1} \leq \xi \leq \xi_{\alpha}$ имеет вид

$$\Psi^+(\xi) \approx \frac{s_\alpha^{\leftarrow}(\xi)}{x_\alpha(\xi)} \left[I_{\alpha-1} + J_{\alpha-1}^{\rightarrow}(\xi) \right] + \frac{s_{\alpha-1}^{\rightarrow}(\xi)}{x_\alpha(\xi)} \left[I_\alpha + J_\alpha^{\leftarrow}(\xi) \right], \quad (30)$$

$$\Psi^-(\xi) \approx \frac{c_\alpha^{\leftarrow}(\xi)}{x_\alpha(\xi)} \left[I_{\alpha-1} + J_{\alpha-1}^{\rightarrow}(\xi) \right] - \frac{c_{\alpha-1}^{\rightarrow}(\xi)}{x_\alpha(\xi)} \left[I_\alpha + J_\alpha^{\leftarrow}(\xi) \right], \quad (31)$$

$$I_{\alpha-1} = \Psi_{ent}^+(\xi_{\alpha-1}) + \theta_{\alpha-1} \Psi_{ent}^-(\xi_{\alpha-1}), \quad I_\alpha = \Psi_{ent}^+(\xi_\alpha) - \theta_\alpha \Psi_{ent}^-(\xi_\alpha),$$

$$J_{\alpha-1}^{\rightarrow}(\xi) = \int_{\xi_{\alpha-1}}^{\xi} \left[s_{\alpha-1}^{\rightarrow}(\xi') q_0(\xi') + c_{\alpha-1}^{\rightarrow}(\xi') q_1(\xi') \right] \frac{d\xi'}{\sigma}, \quad (32)$$

$$J_\alpha^{\leftarrow}(\xi) = \int_{\xi}^{\xi_\alpha} \left[s_\alpha^{\leftarrow}(\xi') q_0(\xi') - c_\alpha^{\leftarrow}(\xi') q_1(\xi') \right] \frac{d\xi'}{\sigma}, \quad \frac{d\xi'}{\sigma} = h(l') dl',$$

где $I_{\alpha-1}$ и $J_{\alpha-1}^{\rightarrow}(\xi)$ есть вклады граничных и распределенных источников с отрезка луча $\xi_{\alpha-1} \leq \xi' < \xi$, а I_α , $J_\alpha^{\leftarrow}(\xi)$ – вклады источников с отрезка луча $\xi < \xi' \leq \xi_\alpha$. В справедливости (30), (31) можно убедиться подстановкой формул в уравнения (21), (27). Проверка предоставляется читателю. При дифференцировании функций лучевой переменной (28) следует пользоваться условиями (25) и пренебрегать производными отношения коэффициентов σ/σ_1 в сравнении с остальными функциями. Формулы (30), (31) дают приближенное решение, которое сходится к точному решению при уменьшении постоянной c_R в (25). Можно показать, что модуль погрешности формул равномерно стремится к нулю на любой хорде ячейки в пределе $c_R \rightarrow 0$. При $c_R = 0$ приближенные равенства переходят в точные равенства. В вырожденной ячейке Б решение является точным, если параметры $\theta_{\alpha-1}$, θ_α не обращаются в бесконечность одновременно.

Решение задачи Дирихле (решение во внутренней ячейке). Поставим на концах хорды условия Дирихле, переходя в (27) к пределу $\theta_{\alpha-1}, \theta_\alpha \rightarrow 0$: $\Psi^+(\xi_{\alpha-1}) = \Psi_{ent}^+(\xi_{\alpha-1})$, $\Psi^+(\xi_\alpha) = \Psi_{ent}^+(\xi_\alpha)$. Решение задачи на хорде $\xi_{\alpha-1} \leq \xi \leq \xi_\alpha$ дается формулами (30), (31) при параметрах $\theta_{\alpha-1} = \theta_\alpha = 0$, $I_{\alpha-1} = \Psi_{ent}^+(\xi_{\alpha-1})$, $I_\alpha = \Psi_{ent}^+(\xi_\alpha)$. Пусть оба конца хорды лежат на внутренних границах между смежными ячейками. Если выбрать постоянные $\Psi_{ent}^+(\xi_{\alpha-1})$, $\Psi_{ent}^+(\xi_\alpha)$ равными значениям четного распределения, выходящего из соседних ячеек $\xi_{\alpha-2} \leq \xi \leq \xi_{\alpha-1}$ и $\xi_\alpha \leq \xi \leq \xi_{\alpha+1}$, то мы удовлетворим условия сшивки (22)

для четных распределений. Сшивая далее нечетные распределения, мы удовлетворим (22) полностью.

Решение в ячейке, примыкающей к внешней границе области. Рассмотрим хорду $\xi_{\alpha-1} \leq \xi \leq \xi_{\alpha}$, один из концов которой принадлежит внешней границе области, а другой – внутренней границе между ячейками. (Случай, когда оба конца хорды лежат на внешней границе, был рассмотрен первым). Пусть внутренней точкой является точка ξ_{α} . Поставим в ней условия Дирихле, положив в (27) $\theta_{\alpha} \rightarrow 0$, что дает $\psi^+(\xi_{\alpha}) = \psi_{ent}^+(\xi_{\alpha})$. Решение задачи дается формулами (30), (31) при параметрах $\theta_{\alpha} = 0$, $I_{\alpha} = \psi_{ent}^+(\xi_{\alpha})$. Если задать постоянную $\psi_{ent}^+(\xi_{\alpha})$ равной значению четного распределения, выходящего из соседней ячейки $\xi_{\alpha} \leq \xi \leq \xi_{\alpha+1}$, мы удовлетворим условию сшивки (22) четных распределений $\psi^+(\xi_{\alpha})$. Сшивая далее нечетные распределения $\psi^-(\xi_{\alpha})$, мы удовлетворим (22) полностью.

Пусть в точке ξ_{α} поставлены классические условия Неймана: $\theta_{\alpha} \rightarrow \infty$, $\psi^-(\xi_{\alpha}) = \psi_{ent}^-(\xi_{\alpha})$. Решение дается формулами (30), (31) при параметрах $\theta_{\alpha} \rightarrow \infty$, $I_{\alpha} = -\theta_{\alpha} \psi_{ent}^-(\xi_{\alpha})$. Если задать постоянную $\psi_{ent}^-(\xi_{\alpha})$ равной значению нечетного распределения, выходящего из соседней ячейки, мы удовлетворим условию сшивки (22) нечетных распределений.

Решение задачи Неймана – Дирихле. Конкретизируем случай, рассмотренный выше, поставив на конце хорды $\xi_{\alpha-1}$ условия Неймана, а на конце ξ_{α} – условия Дирихле. Для этого положим в (27) $\theta_{\alpha-1} \rightarrow \infty$, $\theta_{\alpha} \rightarrow 0$, что дает: $\psi^-(\xi_{\alpha-1}) = \psi_{ent}^-(\xi_{\alpha-1})$, $\psi^+(\xi_{\alpha}) = \psi_{ent}^+(\xi_{\alpha})$. Формулы решения нетрудно получить из формул основного решения (30), (31) с помощью соответствующего предельного перехода. Предоставляем его читателю.

Если точка ξ_{α} лежит на внутренней границе, то граничный источник $\psi_{ent}^+(\xi_{\alpha})$ сшивается с четным распределением, выходящим из соседней ячейки. Если точка ξ_{α} лежит на внешней границе, то $\psi_{ent}^+(\xi_{\alpha})$ дается (24). Аналогично поступаем с граничным источником $\psi_{ent}^-(\xi_{\alpha-1})$. Отметим, что для постановки на участке внешней границы условий Неймана в (24) выполняется переход к пределу $\chi_{in} \rightarrow 1$.

Решение классической задачи Неймана. (Решение *обобщенной* задачи Неймана в смысле ее определения [16, с.158]; [17, с.16] дается формулами (30), (31), где параметры $\theta_{\alpha-1}$ и θ_{α} (24) вычисляются с тензором $G_{ij} = kD_{ij}$, D_{ij} есть котензор тензора D^{ij} (см (5)).) Поставим на концах хорды $\xi_{\alpha-1} \leq \xi \leq \xi_{\alpha}$ классические условия Неймана, переходя в (27) к пределам $\theta_{\alpha-1}, \theta_{\alpha} \rightarrow \infty$:

$\Psi^-(\xi_{\alpha-1}) = \Psi_{ent}^-(\xi_{\alpha-1})$, $\Psi^-(\xi_\alpha) = \Psi_{ent}^-(\xi_\alpha)$. Соответствующие предельные переходы в (30), (31) дают искомое решение

$$\Psi^+(\xi) \approx \frac{\sigma_1(\xi)}{\sigma(\xi)} \begin{bmatrix} \cosh(\xi_\alpha - \xi)/\sinh \Delta\xi_\alpha \\ -\cos(\xi_\alpha - \xi)/\sin \Delta\xi_\alpha \end{bmatrix} \left[\Psi_{ent}^-(\xi_{\alpha-1}) + H_{\alpha-1}^{\rightarrow}(\xi) \right] + \quad (33)$$

$$- \frac{\sigma_1(\xi)}{\sigma(\xi)} \begin{bmatrix} \cosh(\xi - \xi_{\alpha-1})/\sinh \Delta\xi_\alpha \\ -\cos(\xi - \xi_{\alpha-1})/\sin \Delta\xi_\alpha \end{bmatrix} \left[\Psi_{ent}^-(\xi_\alpha) - H_\alpha^{\leftarrow}(\xi) \right],$$

$$\Psi^-(\xi) \approx \begin{bmatrix} \sinh(\xi_\alpha - \xi)/\sinh \Delta\xi_\alpha \\ \sin(\xi_\alpha - \xi)/\sin \Delta\xi_\alpha \end{bmatrix} \left[\Psi_{ent}^-(\xi_{\alpha-1}) + H_{\alpha-1}^{\rightarrow}(\xi) \right] +$$

$$+ \begin{bmatrix} \sinh(\xi - \xi_{\alpha-1})/\sinh \Delta\xi_\alpha \\ \sin(\xi - \xi_{\alpha-1})/\sin \Delta\xi_\alpha \end{bmatrix} \left[\Psi_{ent}^-(\xi_\alpha) - H_\alpha^{\leftarrow}(\xi) \right],$$

$$H_{\alpha-1}^{\rightarrow}(\xi) = \int_{\xi_{\alpha-1}}^{\xi} \begin{bmatrix} \cosh(\xi' - \xi_{\alpha-1}) \\ \cos(\xi' - \xi_{\alpha-1}) \end{bmatrix} q_0(\xi') + \frac{\sigma}{\sigma_1} \begin{bmatrix} \sinh(\xi' - \xi_{\alpha-1}) \\ -\sin(\xi' - \xi_{\alpha-1}) \end{bmatrix} q_1(\xi') \frac{d\xi'}{\sigma},$$

$$H_\alpha^{\leftarrow}(\xi) = \int_{\xi}^{\xi_\alpha} \begin{bmatrix} \cosh(\xi_\alpha - \xi') \\ \cos(\xi_\alpha - \xi') \end{bmatrix} q_0(\xi') - \frac{\sigma}{\sigma_1} \begin{bmatrix} \sinh(\xi_\alpha - \xi') \\ -\sin(\xi_\alpha - \xi') \end{bmatrix} q_1(\xi') \frac{d\xi'}{\sigma}.$$

Решение справедливо в ячейках А и В и не относится к вырожденной ячейке Б. Решение классической задачи Неймана в ячейке Б существует, если источники q_0 , q_1 удовлетворяют условию разрешимости задачи.

Неявное представление решения краевой задачи в ячейке. В простейшем случае, когда область V состоит из одной ячейки, можно сформулировать систему интегральных уравнений для нахождения решения исходной краевой задачи (1)–(5) при ограничениях (25). Область может быть неодносвязной. Подставим основное решение (30), (31) в (7)–(9), полагая $in = \alpha - 1$, $out = \alpha$

$$\Psi_0(\mathbf{r}) = \int_{4\pi} \Psi^+(\mathbf{\Omega}, \mathbf{r}) d\mathbf{\Omega} \approx \int_{4\pi} \frac{s_{out}^{\leftarrow}(\mathbf{\Omega}, \mathbf{r})}{x(\mathbf{\Omega}, \mathbf{r})} \left[I_{in}(\mathbf{\Omega}, \mathbf{r}) + J_{in}^{\rightarrow}(\mathbf{\Omega}, \mathbf{r}) \right] d\mathbf{\Omega} + \quad (34)$$

$$+ \int_{4\pi} \frac{s_{in}^{\rightarrow}(\mathbf{\Omega}, \mathbf{r})}{x(\mathbf{\Omega}, \mathbf{r})} \left[I_{out}(\mathbf{\Omega}, \mathbf{r}) + J_{out}^{\leftarrow}(\mathbf{\Omega}, \mathbf{r}) \right] d\mathbf{\Omega},$$

$$\Psi_1^i(\mathbf{r}) = \int_{4\pi} \Omega^i \frac{\Psi^-(\Omega, \mathbf{r})}{h(\Omega, \mathbf{r})} d\Omega \approx \int_{4\pi} \frac{\Omega^i c_{out}^{\leftarrow}(\Omega, \mathbf{r})}{h(\Omega, \mathbf{r}) x(\Omega, \mathbf{r})} \left[I_{in}(\Omega, \mathbf{r}) + J_{in}^{\rightarrow}(\Omega, \mathbf{r}) \right] d\Omega -$$

$$- \int_{4\pi} \frac{\Omega^i c_{in}^{\rightarrow}(\Omega, \mathbf{r})}{h(\Omega, \mathbf{r}) x(\Omega, \mathbf{r})} \left[I_{out}(\Omega, \mathbf{r}) + J_{out}^{\leftarrow}(\Omega, \mathbf{r}) \right] d\Omega,$$

$$C^{ij}(\mathbf{r}) = \int \Omega^i \Omega^j \Psi^+ d\Omega / \int \Psi^+ d\Omega = \dots, \quad \Psi_3^{ijk}(\mathbf{r}) = \int P_3^{ijk}(\Omega) \frac{\Psi^-}{h} d\Omega = \dots,$$

$$I_{in} = \Psi_{ent}^+(\xi_{in}) + \theta_{in} \Psi_{ent}^-(\xi_{in}), \quad I_{out} = \Psi_{ent}^+(\xi_{out}) - \theta_{out} \Psi_{ent}^-(\xi_{out}).$$

При обходе полного телесного угла вклады каждого распределенного и граничного источника учитывается дважды: один раз на луче Ω и второй раз на луче противоположного направления $-\Omega$. Параметры θ_{in} , θ_{out} , Ψ_{ent}^{\pm} даются формулами (24). Входящие в лучевые интегралы J_{in}^{\rightarrow} , J_{out}^{\leftarrow} (32) источники q_0 , q_1 (10), (15), (16) зависят от моментов распределений. Координата ξ (19) зависит от значений тензора C^{ij} . Решение интегральных уравнений может быть найдено простыми итерациями (см. (17)).

Замечание. Некоторые из интегралов в формулах (34) имеют вид $\iint \dots dl' d\Omega$. Если выполнить обратную замену сферических координат на декартовы координаты $dl' d\Omega \rightarrow d\mathbf{r}' / |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2$, то интегралы преобразуются в интегралы по объему ячейки. Замену следует делать только в случае, если она упрощает расчет. В общем случае интегралы целесообразно вычислять применением квадратурных формул на единичной сфере и квадратурных формул на хорде.

4. Решение в области

Конечно-аналитической схемой называется дискретная аппроксимация решения задачи, которая строится с помощью сшивки точных (почти точных) решений дифференциальных уравнений, выходящих из ячеек. Сшивка выполняется на границах ячеек, на которые поделена область. Термин возник как аналог термина "конечно-разностная схема" [8]. Заметим, что последняя есть дискретная аппроксимация, построенная с помощью сшивки конечных разностей решения в ячейках.

Построим конечно-аналитическую схемы для нахождения решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений (21)–(24) на совокупности лучей, принизывающих область.

Элементы схемы. Как и другие дискретные схемы (схемы конечных разностей, схемы конечных элементов) конечно-аналитическая схема имеет шаблон. Шаблон есть набор точек, расположенных на гладких участках границы ячейки и внутри ячейки. Точки внутри ячейки будем называть «центральными» точками, точки на внешней границе области (если ячейка примыкает к границе) – «внешними» точками. Центральные и внешние точки принадлежат шаблону только одной ячейки. Кроме этих точек в шаблоне есть «внутренние» точки, расположенные на гладких участках внутренних границ между смежными ячейками. Любая внутренняя точка одновременно входит в состав двух шаблонов смежных ячеек.

Через точки шаблонов всех ячеек проходит совокупность лучей. Через одну точку шаблона проходит несколько лучей. Желательно подобрать направление и число лучей так, чтобы обеспечить расчет моментов $\Psi_n^{ij\dots}$, $0 \leq n \leq 3$ в этой точке с точностью, удовлетворяющей требованиям решаемой задачи. Расчет моментов (угловых интегралов) выполняется с помощью квадратурной формулы, определенной на поверхности единичной сферы. Для расчета моментов во всех точках всех шаблонов строится совокупность «типичных» квадратурных формул. Методы построения квадратурных формул на единичной сфере развиты в теории переноса частиц.

Один луч пересекает границы ячеек в некоторой серии точек. Желательно подобрать форму ячеек и разместить точки шаблонов так, чтобы в серии точек пересечения границ было как можно меньше «дополнительных» точек, которые не являются точками шаблонов.

В теории переноса частиц длинные лучи, пронизывающие область целиком, называются длинными характеристиками. Наилучшими пространственно-угловыми сетками с длинными характеристиками в смысле минимальности числа «дополнительных» точек и минимальности числа «типичных» квадратурных формул являются регулярные сетки, построенные на ячейках правильной симметричной формы. Это правильные тетраэдры, призмы, в основании которых лежит правильный шестиугольник, прямоугольник, правильный треугольник, и другие. Однако, с помощью регулярных сеток часто не удается передать положение разрывов коэффициентов и источников задачи, а также положение границы области. Поэтому наряду с регулярными сетками часто применяются и нерегулярные сетки.

Также в элементы схемы входят квадратурные формулы для расчета интегралов от источников вдоль лучей $J_\alpha^{\leftrightarrow}$ (32) между точками шаблона.

Уравнения конечно-аналитической схемы. Пусть луч $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \Omega l$ пересекает внутренние границы между ячейками в точках $\xi_\alpha = \xi_\alpha(l_\alpha)$, $\mathbf{r}_\alpha(l_\alpha)$. Это точки шаблонов ячеек и «дополнительные точки» (если они есть). Поставим в точках условия Дирихле. Сошьем четные распределения в соответствии с условиями сшивки (22):

$$\theta_\alpha = 0, \quad \psi_{ent}^+(\xi_\alpha) = \psi^+(\xi_\alpha) \quad (in + 1 \leq \alpha \leq out - 1). \quad (35)$$

Запишем формулу (31) для нечетного распределения $\psi^-(\xi)$ в одном и в другом конце каждой хорды $\xi_{\alpha-1}, \xi_\alpha$. Сошьем нечетные распределения, выходящие из соседних ячеек. В результате мы получим уравнения конечно-аналитической дискретной схемы на луче

$$\begin{cases} \psi^-(\xi_\alpha) \approx -[e_\alpha^{\rightarrow} + k_\alpha^{\rightarrow}] \psi^+(\xi_\alpha) + B_\alpha^{\rightarrow}, \\ \psi^-(\xi_\alpha) \approx [e_{\alpha+1}^{\leftarrow} + k_{\alpha+1}^{\leftarrow}] \psi^+(\xi_\alpha) - e_{\alpha+1}^{\leftarrow} \psi^+(\xi_{\alpha+1}) - B_{\alpha+1}^{\leftarrow}, \end{cases} \quad (\alpha = in + 1), \quad (36)$$

$$\begin{cases} \psi^-(\xi_\alpha) = e_\alpha^{\rightarrow} \psi^+(\xi_{\alpha-1}) - [e_\alpha^{\rightarrow} + k_\alpha^{\rightarrow}] \psi^+(\xi_\alpha) + B_\alpha^{\rightarrow}, \\ \psi^-(\xi_\alpha) = [e_{\alpha+1}^{\leftarrow} + k_{\alpha+1}^{\leftarrow}] \psi^+(\xi_\alpha) - e_{\alpha+1}^{\leftarrow} \psi^+(\xi_{\alpha+1}) - B_{\alpha+1}^{\leftarrow}, \end{cases} \quad (in + 2 \leq \alpha \leq out - 2),$$

$$\begin{cases} \psi^-(\xi_\alpha) = e_\alpha^{\rightarrow} \psi^+(\xi_{\alpha-1}) - [e_\alpha^{\rightarrow} + k_\alpha^{\rightarrow}] \psi^+(\xi_\alpha) + B_\alpha^{\rightarrow}, \\ \psi^-(\xi_\alpha) = [e_{\alpha+1}^{\leftarrow} + k_{\alpha+1}^{\leftarrow}] \psi^+(\xi_\alpha) - B_{\alpha+1}^{\leftarrow}, \end{cases} \quad (\alpha = out - 1),$$

где $e_\alpha^{\leftrightarrow}, k_\alpha^{\leftrightarrow}$ – коэффициенты схемы, $B_\alpha^{\leftrightarrow}$ – свободные члены:

$$e_\alpha^{\rightarrow} = \frac{1}{x_\alpha(\xi_\alpha)}, \quad k_\alpha^{\rightarrow} = \frac{c_{\alpha-1}^{\rightarrow}(\xi_\alpha) - 1}{x_\alpha(\xi_\alpha)} \quad (in + 1 \leq \alpha \leq out - 1), \quad (37)$$

$$e_\alpha^{\leftarrow} = \frac{1}{x_\alpha(\xi_{\alpha-1})}, \quad k_\alpha^{\leftarrow} = \frac{c_\alpha^{\leftarrow}(\xi_{\alpha-1}) - 1}{x_\alpha(\xi_{\alpha-1})} \quad (in + 2 \leq \alpha \leq out),$$

$$B_\alpha^{\rightarrow} = \frac{J_{\alpha-1}^{\rightarrow}(\xi_\alpha)}{x_\alpha(\xi_\alpha)} + e_{in+1}^{\rightarrow} \begin{bmatrix} 0, & in + 2 \leq \alpha \leq out - 1 \\ \psi_{ent}^+(\xi_{in}) + \theta_{in} \psi_{ent}^-(\xi_{in}), & \alpha = in + 1 \end{bmatrix}, \quad (38)$$

$$B_\alpha^{\leftarrow} = \frac{J_\alpha^{\leftarrow}(\xi_{\alpha-1})}{x_\alpha(\xi_{\alpha-1})} + e_{out}^{\leftarrow} \begin{bmatrix} 0, & in + 2 \leq \alpha \leq out - 1 \\ \psi_{ent}^+(\xi_{out}) - \theta_{out} \psi_{ent}^-(\xi_{out}), & \alpha = out \end{bmatrix}.$$

Исключением потоков $\psi^-(\xi_\alpha)$ уравнения схемы (36) преобразуются в замкнутую систему алгебраических уравнений относительно $\psi^+(\xi_\alpha)$ с квадратной трехдиагональной матрицей $n \times n$, где $n = out - in - 1$ – число точек

сшивки решений (35) или размерность системы. Так как краевая задача на луче одномерна, то размерность системы мала.

Нахождение решения. Пусть система алгебраических уравнений разрешима. Вследствие малой размерности системы, ее решение может быть найдено *прямыми* (не итерационными) алгоритмами вычислительной линейной алгебры, такими как методом исключения Гаусса с выбором максимального элемента или методом прогонки (экономичный вариант метода Гаусса для систем с трехдиагональной матрицей). После нахождения четных и нечетных распределений $\psi^\pm(\xi_\alpha)$ в точках, в которых луч пересекает границы между ячейками, находится решение во внешних и центральных точках, а также в континууме точек луча (если требуется). Восстановление решения на луче выполняется по формулам (30)–(33).

Замечание. Вопрос разрешимости системы (36), (37) тесно связан с существованием решений в ячейках. Имеет место утверждение. Если луч пересекает только ячейки типа А и Б (в этих ячейках всегда существует единственное решение неоднородной краевой задачи), то система уравнений всегда разрешима и решение может быть найдено методом прогонки. В самом деле, в ячейках А и Б выполняются неравенства $e_\alpha^{\leftrightarrow} > 0$, $k_\alpha^{\leftrightarrow} \geq 0$. Эти же неравенства есть условие устойчивости метода прогонки.

Аналогичные системы (36), (37) (краевые задачи на луче) решаются на всех лучах, составляющих пространственно-угловую сетку задачи.

Далее в точках шаблонов всех ячеек с помощью квадратурных формул выполняется расчет тензоров C^{ij} , g_{ij} , моментов распределений $\Psi_n^{ij\dots}$, уточняются значения источников q_0 , q_1 , входящих в уравнения кинетической задачи. На этом шаг простой итерации заканчивается. Итерации по уточнению значений тензоров и моментов выполняются до сходимости.

Обсуждение. Построенная в работе конечно-аналитическая схема в сравнении с разностными схемами и схемами конечных элементов имеет ряд преимуществ и недостатков.

Точность схем конечных разностей и конечных элементов существенно зависит от размеров и формы ячеек. В ряде задач для достижения требуемой точности решения приходится сильно измельчать пространственную сетку. В конечно-аналитической схеме отсутствует жесткая зависимость точности аппроксимации от размеров ячеек. Точность схемы определяется условием (25), точностью квадратурных формул для расчета интегралов вдоль лучей (32), (38) и точностью квадратурных формул на единичной сфере для вычисления угловых интегралов. Число лучей, проходящих через точку шаблона, не должно быть слишком мало (быть не меньше ~ 10). Расчеты могут выполняться на грубых (редких) пространственных сетках.

Алгоритмы. Переход к лучевым переменным сводит решение многомерной краевой задачи к решению серии одномерных задач на лучах. Система алгебраических уравнений схемы (36) имеет малую размерность. Поэтому ее решение может быть найдено прямыми алгоритмами (методом исключения Гаусса, методом прогонки). Размерность системы алгебраических уравнений схем конечных разностей и конечных элементов может быть велика (многомерность задачи, малый размер ячеек). Для решения систем большой размерности применяются итерационные алгоритмы вычислительной линейной алгебры [28]. Если в области много вырожденных ячеек типа Б и/или близких к ним, то итерации сходятся медленно.

Сложность. Конечно-аналитическая схема имеет элементы, которых нет в схемах конечных разностей и конечных элементов. Это лучи, составляющие пространственно-угловую сетку, квадратурные формулы на единичной сфере, метрический тензор, итерации по значениям моментов и тензоров. Наибольшую эффективность схема будет иметь при решении прикладных задач, где эти дополнительные элементы минимальны, например задач с регулярными пространственно-угловыми сетками, построенными на ячейках правильной симметричной формы.

Приложение

А. Приведение некоторых систем уравнений к стандартному виду (1).

Рассмотрим систему линейных уравнений в частных производных в области V евклидова пространства

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial Y_1^i}{\partial r^i} + \varkappa_0^i Y_1^i + \varkappa_0 Y_0 = S_0, \\ \frac{\partial [A^{ij} Y_0]}{\partial r^j} + B^{ij} k_1^j Y_0 + \varkappa_1 Y_1^i = S_1^i, \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} A^{ij}(\mathbf{r}) = A^{ji}(\mathbf{r}), \\ b_A < A^{ij} \Omega_i \Omega_j < c_A, \\ \det B^{ij}(\mathbf{r}) \neq 0, \\ |B^{ij} \Omega_i \Omega_j| < c_B, \end{array} \quad (39)$$

$$|S_0(\mathbf{r})|, |S_1^i(\mathbf{r})| < c_S, \quad |\varkappa_0(\mathbf{r})|, |\varkappa_0^i(\mathbf{r})|, |k_1^i(\mathbf{r})| < c_\varkappa, \quad b_w < \varkappa_1(\mathbf{r}) < c_w.$$

Здесь $Y_0(\mathbf{r})$, $Y_1^i(\mathbf{r})$ – искомые скалярная и векторная функции, $S_0(\mathbf{r})$ и $S_1^i(\mathbf{r})$ – заданные функции (источники), $A^{ij}(\mathbf{r})$ – симметричный положительно определенный тензор, $B^{ij}(\mathbf{r})$ – невырожденный тензор, $\mathbf{\Omega}$ ($|\mathbf{\Omega}|=1$) – единичный вектор. Коэффициенты уравнений \varkappa_0 , \varkappa_0^i , \varkappa_1 , k_1^i , тензоры и источники ограничены положительными постоянными $b_{(\cdot)}, c_{(\cdot)} > 0$. Коэффициент \varkappa_1 принимает только положительные значения.

На гладких участках границы Γ области V на решения системы (39) накладываются условия:

$$\frac{1+\chi}{1-\chi} H_{ij} n^j [Y_1^i - Y_{1,ent}^i] = Y_0 - Y_{0,ent}, \quad \mathbf{r}_\Gamma \in \Gamma, \quad (40)$$

$$H_{ij} = H_{ji}, \quad 0 < b_H < H_{ij} \Omega^i \Omega^j < c_H \quad (|\mathbf{\Omega}|=1), \quad -1 < \chi \leq 1.$$

$H_{ij}(\mathbf{r}_\Gamma)$, $\chi(\mathbf{r}_\Gamma)$, $Y_{0,ent}(\mathbf{r}_\Gamma)$, $Y_{1,ent}^i(\mathbf{r}_\Gamma)$ – заданные на гладких участках границы ограниченные кусочно-непрерывные функции, $n^i(\mathbf{r}_\Gamma)$ – вектор внешней нормали, H_{ij} – симметричный положительно определенный тензор.

Исключим из системы тензор B^{ij} с помощью замены векторного коэффициента $k_1^i(\mathbf{r})$ на векторный коэффициент $\varkappa_1^i(\mathbf{r})$:

$$B^{ij} k_1^j = \delta_k^i B^{kl} k_1^l = A^{ij} A_{jk} B^{kl} k_1^l = A^{ij} \varkappa_1^j, \quad \varkappa_1^j = A_{jk} B^{kl} k_1^l.$$

Здесь A_{ij} – котензор (обратный тензор) тензора A^{ij} : $A_{jk} A^{ki} = A^{ki} A_{jk} = \delta_j^i$, δ_k^j – символ Кронекера. В результате система (39) принимает вид

$$\begin{cases} \frac{\partial Y_1^i}{\partial r^i} + \varkappa_0^i Y_1^i + \varkappa_0 Y_0 = S_0, \\ \frac{\partial [A^{ij} Y_0]}{\partial r^j} + A^{ij} \varkappa_1^j Y_0 + \varkappa_1 Y_1^i = S_1^i. \end{cases} \quad (41)$$

Предположим, что в ячейках области $\mathbf{r} \in V_\alpha \subseteq V$ (зонах непрерывности/гладкости функций) поля векторных коэффициентов $\varkappa_0^i(\mathbf{r})$ и $\varkappa_1^i(\mathbf{r})$ потенциальны, т.е. можно подобрать скалярные функции $P_0(\mathbf{r})$, $P_1(\mathbf{r})$ такие, что

$$\varkappa_{0,1}^i = -2 \frac{\partial P_{0,1}}{\partial r^i}, \quad \frac{\partial \varkappa_{0,1}^i}{\partial r^j} = \frac{\partial \varkappa_{0,1}^j}{\partial r^i} = -2 \frac{\partial^2 P_{0,1}}{\partial r^i \partial r^j}, \quad \mathbf{r} \in V_\alpha.$$

Тогда замена искомых функций, тензора и коэффициентов

$$Y_0 = \frac{\Psi_0}{a} \exp(P_0 + P_1), \quad Y_1^i = \left[\Psi_1^i - D^{ij} \frac{\varkappa_1^j - \varkappa_0^j}{2\varkappa_1} \Psi_0 \right] \exp(P_0 + P_1) + \frac{S_1^i}{\varkappa_1}, \quad (42)$$

$$A^{ij} = a D^{ij}, \quad \sigma_1 = \varkappa_1, \quad \sigma_0 = \frac{\varkappa_0}{a} + D^{ij} \frac{[\varkappa_1^j - \varkappa_0^j][\varkappa_1^i - \varkappa_0^i]}{4\varkappa_1} - D^{ij} \frac{\partial}{\partial r^i} \left[\frac{\varkappa_1^j - \varkappa_0^j}{2\varkappa_1} \right]$$

преобразует систему уравнений (39) в ячейке V_α к стандартному виду (1)

$$\begin{cases} \frac{\partial \Psi_1^i}{\partial r^i} + \sigma_0 \Psi_0 = Q, \\ \frac{\partial [D^{ij} \Psi_0]}{\partial r^j} + \sigma_1 \Psi_1^i = 0, \end{cases} \quad Q = \left[S_0 - \frac{\varkappa_0^i S_1^i}{\varkappa_1} - \frac{\partial}{\partial r^i} \left[\frac{S_1^i}{\varkappa_1} \right] \right] \exp(-P_0 - P_1). \quad (43)$$

Здесь $\Psi_0(\mathbf{r})$, $\Psi_1^i(\mathbf{r})$ – новые искомые функции; $a(\mathbf{r})$, $a > 0$ – ограниченная положительная функция. Выбором функции $a(\mathbf{r})$ тензор $D^{ij}(\mathbf{r}) = A^{ij}/a$ всегда можно нормировать так, что его след равен единице $\text{Sp} D^{ij}(\mathbf{r}) = D^{ij} \delta_{ij} = 1$.

Вследствие линейности замены функций (42) линейные граничные условия (40) преобразуются в аналогичные линейные граничные условия вида (5).

Пример. При постоянных коэффициентах в ячейке $\varkappa_{0,1}^i(\mathbf{r}) = K_{0,1}^i = \text{const}$ искомые потенциалы – $P_{0,1}(\mathbf{r}) = -K_{0,1}^i [r^i - r_\alpha^i]/2 + R_{0,1}$. В случае линейной

зависимости коэффициентов от координат: $\varkappa_{0,1}^i(\mathbf{r}) = 2K_{0,1}^{ij}[r^j - r_\alpha^j] + K_{0,1}^i$, где $K_{0,1}^{ij} = K_{0,1}^{ji}$ – постоянная билинейная форма, потенциалы даются выражением

$$P_{0,1}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{2}K_{0,1}^{ij}[r^i - r_\alpha^i][r^j - r_\alpha^j] - \frac{1}{2}K_{0,1}^i[r^i - r_\alpha^i] + R_{0,1}, \quad \mathbf{r} \in V_\alpha.$$

Можно указать и ряд других простых потенциалов, с помощью которых (или их суперпозиции) задаются потенциальные коэффициенты. Это, например, функции, зависящие от расстояния до точки, прямой или плоскости.

Б. Эквивалентные формы решения. Получим эквивалентные представления решения краевой задачи (1)–(5) в невырожденных ячейках А и В ($\sigma_0 \neq 0$). Пусть коэффициенты и распределенный источник системы уравнений (1) – $2M$ раз дифференцируемые функции. Преобразуем уравнения (1):

$$\begin{cases} \frac{\partial[\Psi_1^i - F_{(0)}^i]}{\partial r^i} + \sigma_0 \left[\Psi_0 - \frac{Q}{\sigma_0} \right] = -\frac{\partial F_{(0)}^i}{\partial r^i}, \\ \frac{\partial}{\partial r^j} \left[D^{ij} \Psi_0 - \frac{D^{ij} Q}{\sigma_0} \right] + \sigma_1 [\Psi_1^i - F_{(0)}^i] = -\frac{\partial}{\partial r^j} \left[\frac{D^{ij} Q}{\sigma_0} \right] - \sigma_1 F_{(0)}^i. \end{cases} \quad (44)$$

Если определить поток $F_{(0)}^i$ и источник $Q_{(1)}$ в соответствии с формулами

$$F_{(0)}^i(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\sigma_1} \frac{\partial}{\partial r^j} \left[\frac{D^{ij} Q}{\sigma_0} \right], \quad Q_{(1)}(\mathbf{r}) = -\frac{\partial F_{(0)}^i}{\partial r^i} = \frac{\partial}{\partial r^i} \left[\frac{1}{\sigma_1} \frac{\partial}{\partial r^j} \left[\frac{D^{ij} Q}{\sigma_0} \right] \right], \quad (45)$$

то мы получим эквивалентную задачу относительно функций $\Psi_{0(1)}$ и $\Psi_{1(1)}^i$:

$$\begin{cases} \frac{\partial \Psi_{1(1)}^i}{\partial r^i} + \sigma_0 \Psi_{0(1)} = Q_{(1)}, & \Psi_{0(1)} = \Psi_0 - Q/\sigma_0, \\ \frac{\partial [D^{ij} \Psi_{0(1)}]}{\partial r^j} + \sigma_1 \Psi_{1(1)}^i = 0, & \Psi_{1(1)}^i = \Psi_1^i - F_{(0)}^i, \\ & Q_{(1)} = -\partial F_{(0)}^i / \partial r^i, \end{cases} \quad (46)$$

$$\frac{1+\chi}{1-\chi} G_{ij} n^j [\Psi_{1(1)}^i - \Psi_{1(1),ent}^i] = \Psi_{0(1)} - \Psi_{0(1),ent}, \quad \mathbf{r}_\Gamma \in \Gamma_\alpha,$$

$$\Psi_{0(1),ent} = \Psi_{0,ent} - \frac{Q}{\sigma_0}, \quad \Psi_{1(1),ent}^i = \Psi_{1,ent}^i - F_{(0)}^i.$$

Продолжим последовательно применять преобразование задач (44) в задачи (46). Введем рекуррентно вычисляемые источники

$$Q_{(0)} = Q, \quad F_{(0)}^i = -\frac{1}{\sigma_1} \frac{\partial}{\partial r^j} \left[\frac{D^{ij} Q_{(0)}}{\sigma_0} \right], \quad N_{(0)} = 0, \quad V_{(0)}^i = 0, \quad (47)$$

$$Q_{(1)} = -\frac{\partial F_{(0)}^i}{\partial r^i}, \quad F_{(1)}^i = -\frac{1}{\sigma_1} \frac{\partial}{\partial r^j} \left[\frac{D^{ij} Q_{(1)}}{\sigma_0} \right], \quad N_{(1)} = \frac{Q_{(0)}}{\sigma_0}, \quad V_{(1)}^i = -\frac{1}{\sigma_1} \frac{\partial [D^{ij} N_{(1)}]}{\partial r^j}, \dots,$$

$$Q_{(n)} = -\frac{\partial F_{(n-1)}^i}{\partial r^i}, \quad F_{(n)}^i = -\frac{1}{\sigma_1} \frac{\partial}{\partial r^j} \left[\frac{D^{ij} Q_{(n)}}{\sigma_0} \right], \quad N_{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{Q_{(k)}}{\sigma_0}, \quad V_{(n)}^i = -\frac{1}{\sigma_1} \frac{\partial [D^{ij} N_{(n)}]}{\partial r^j}.$$

Источники $Q_{(n)}$, $0 \leq n \leq M$ определяют последовательность граничных задач:

$$\begin{cases} \frac{\partial \Psi_{1(n)}^i}{\partial r^i} + \sigma_0 \Psi_{0(n)} = Q_{(n)}, \\ \frac{\partial [D^{ij} \Psi_{0(n)}]}{\partial r^j} + \sigma_1 \Psi_{1(n)}^i = 0, \end{cases} \quad \mathbf{r} \in V_\alpha \subseteq V. \quad (48)$$

$$\frac{1+\chi}{1-\chi} G_{ij} n^j [\Psi_{1(n)}^i - \Psi_{1(n),ent}^i] = \Psi_{0(n)} - \Psi_{0(n),ent}, \quad \mathbf{r} \in \Gamma_\alpha, \quad 0 \leq n \leq M.$$

$$\Psi_{0(n),ent} = \Psi_{0,ent} - N_{(n)}, \quad \Psi_{1(n),ent}^i = \Psi_{1,ent}^i - V_{(n)}^i.$$

Решение задачи (1)–(5) может быть представлено через решения задач (48)

$$\Psi_0 = \Psi_{0(1)} + \frac{Q_{(0)}}{\sigma_0} = \Psi_{0(2)} + \frac{Q_{(0)}}{\sigma_0} + \frac{Q_{(1)}}{\sigma_0} = \dots = \Psi_{0(n)} + N_{(n)}, \quad N_{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{Q_{(k)}}{\sigma_0},$$

$$\Psi_1^i = \Psi_{1(1)}^i + F_{(0)}^i = \Psi_{1(2)}^i + F_{(0)}^i + F_{(1)}^i = \dots = \Psi_{1(n)}^i + V_{(n)}^i, \quad V_{(n)}^i = -\frac{1}{\sigma_1} \frac{\partial [D^{ij} N_{(n)}]}{\partial r^j}.$$

Все эти представления решения эквивалентны.

В ряде практических задач, в которых коэффициенты σ_0 , σ_1 относительно велики по величине в сравнении с обратной длиной вариации источника Q , может оказаться более удобным решать одну из краевых задач (48) вместо исходной задачи (1)–(5).

Список литературы

- [1] *Владимиров В.С.* Численное решение кинетического уравнения для сферы // Выч. матем., сб. 3. Ред. А.А. Абрамов. М.: АН СССР, 1958, с. 3-33.
Vladimirov V.S. Numerical solution of the kinetic equation for the sphere // Comput. mathematics, v. 3. Ed. A.A. Abramov. Moscow: USSR Acad. of Sciences, 1958, pp. 3-33. [in Russian]
- [2] *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Однородные разностные схемы высокого порядка точности на неравномерных сетках // Ж. вычисл. матем. и матем. физики, 1961, т.1(3), с.425-440.
<http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=zvmmf&paperid=7969>
Tikhonov A.N., Samarskii A.A. Homogeneous difference schemes of a high degree of accuracy on non-uniform nets // USSR Comput. mathematics and math. physics, 1962, v. 1(3), pp. 465-486.
<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0041555363901484?via%3Dihub>
- [3] *Самарский А.А.* Введение в теорию разностных схем. – М.: Наука, 1971.
<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/numerics.htm>
Samarskii A.A. Introduction to the theory of difference schemes. – Moscow: Nauka, 1971. [in Russian]
- [4] *Ильин А.М.* Разностная схема для дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной // Матем. заметки, 1969, т. 6(2), с. 237-248.
<http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=mzm&paperid=6928>
Ilin A.M. Differencing scheme for a differential equation with a small parameter affecting the highest derivative // Math. notes of the Acad. of sciences of the USSR, 1969, v. 6(2), pp. 596-602.
<https://link.springer.com/article/10.1007%2F01093706>
- [5] *Емельянов К.В.* Разностная схема для трехмерного эллиптического уравнения с малым параметром при старших производных // Свердловск: Труды Ин-та матем. и механики Урал. центра АН СССР, 1973, №11, с. 30-42.
Emelyanov K.V., A difference scheme for a three-dimensional elliptic equation with a small parameter for the highest derivatives // Sverdlovsk: Trudy Inst. math. and mechanics of the Ural center of the USSR Acad. of sciences, 1973, No 11, pp. 30-42. [in Russian]
- [6] *Куликов Ю.Н., Четверушкин Б.Н.* Неявный разностный метод определения температуры в задачах радиационной газовой динамики // Ж. вычисл. матем. и матем. физики, 1973, т. 13(1), с. 136-146.
<http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=zvmmf&paperid=8348>
Kulikov Yu.N., and Chetverushkin B.N. An implicit difference method for temperature determination in problems of radiation gas dynamics // USSR Comput. mathematics and math. physics, 1974, v. 13(1), pp. 174-186.
<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0041555374900135?via%3Dihub>
- [7] *Чарахчян А.А.* Расчет нестационарных, сферически симметричных тече-

ний излучающего серого газа // Динамика излучающего газа, вып. 1. Ред. В.В. Александров. М.: ВЦ АН СССР, 1974, с.54-74.

Charakhchyan A.A., Calculation of non-stationary, spherically symmetric flows of a gray radiating gas // Dynamics of radiating gases, v. 1. Ed. V.V. Alexandrov. Moscow: Comp. center of the USSR Acad. of sciences, 1974, pp. 54-74. [in Russian]

- [8] *Chen C.J., Naseri-Nashet H., and Ho K.S.* Finite analytic numerical solution of heat transfer in two dimensional cavity flow // J. Numer. heat transfer, 1981, v. 4(2), pp. 179-197.
<http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/01495728108961786>
- [9] *Sun Y., and Militzer J.* The piecewise parabolic finite analytic method. Part I: Theory // Appl. math. modelling, 1992, v. 16, pp. 576-588.
<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0307904X9290033Y>
- [10] *Chen C.J., Bernatz R.A., Carlson K.D., Lin W., and de Vahl D.G.* Finite analytic method in flows and heat transfer // Appl. mech. rev., 2002, v.55(2), p.B34-B34.
<http://appliedmechanicsreviews.asmedigitalcollection.asme.org/article.aspx?articleid=1397008>
- [11] *Pontaza J.P., Chen H.C., and Reddy J.N.* A local-analytic-based discretization procedure for the numerical solution of incompressible flows // Num. methods in fluids, 2005, v. 49(6), pp. 657-699.
<http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/flf.1005/full>
- [12] *Шильков А.В.* Четно-нечетные кинетические уравнения переноса частиц. 2: Конечно-аналитическая характеристическая схема для одномерных задач // Матем. моделирование, 2014, т. 26(7), с. 33-53.
<http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jmid=mm&paperid=3495>
Shilkov A.V. Even and odd parity kinetic equations of particle transport. 2: A finite analytic characteristic scheme for one dimensional problems // Math. models and computer simulations, 2015, v. 7(1), pp. 36-50.
<https://link.springer.com/article/10.1134%2FS2070048215010093>
- [13] *Шильков А.В.* Четно-нечетные кинетические уравнения переноса частиц. 3: Конечно-аналитическая схема на тетраэдрах // Матем. моделирование, 2015, т. 27(2), с. 34-62.
<http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jmid=mm&paperid=3570>
Shilkov A.V. Even and odd parity kinetic equations of particle transport. 3: Finite analytic schemes on tetrahedral // Math. models and computer simulations, 2015, v. 7(5), pp. 409-429.
<https://link.springer.com/article/10.1134%2FS2070048215050117>
- [14] *Basko M.M., and Tsygvintsev I.P.* A hybrid model of laser energy deposition for multidimensional simulations of plasmas and metals // Comp. physics communications, 2017, v. 214, pp. 59-70.
<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S001046551730022X>
- [15] *Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М.* Уравнения в частных производных математической физики. – М.: Высшая школа, 1970.
<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/pde.htm>

- Koshlyakov N.S., Gliner E.B., Smirnov M.M.* Partial differential equations of mathematical physics. – Moscow: Vysshaya shkola, 1970. [in Russian]
- [16] *Бабич В.М., Капилевич М.Б., Михлин С.Г. и др.* Линейные уравнения математической физики. Справочник. – М.: Наука, 1964.
Babich V.M., Kapilevich M.B., Mikhlin S.G. Handbook of linear equations of mathematical physics. – Moscow: Nauka, 1964. [in Russian]
- [17] *Миранда К.* Уравнения с частными производными эллиптического типа. – М.: ИЛ, 1957.
<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/pde.htm>
Miranda C., Partial differential equations of elliptic type. – Berlin-Heidelberg: Springer, 1970.
- [18] *Курант Р., Гильберт Д.* Методы математической физики, т.2. – М.: Гостехиздат, 1945.
<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/pde.htm>
Courant R., and Hilbert D. Methods of mathematical physics, v.2. Partial differential equations. – New York: Wiley Interscience, 1962.
- [19] *Ландис Е.М.* Уравнения второго порядка эллиптического и параболического типов. – М.: Наука, 1971.
<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/pde.htm>
Landis E.M., Second order partial differential equations of elliptic and parabolic type. – Providence: AMS, Transl. of math. monographs, v. 171. 1998.
- [20] *Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. – М.: Наука, 1973.
<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/pde.htm>
Ladyzhenskaya O.A., Uraltseva N.N. Linear and quasilinear equations of elliptic type. – Moscow: Nauka, 1973. [in Russian]
- [21] *Михлин С.Г.* Линейные уравнения в частных производных. – М.: Высшая школа, 1977.
<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/pde.htm>
Mikhlin S.G. Linear equations of mathematical physics. – Holt: Rinehart and Winston, 1967.
- [22] *Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н.* Сборник задач по математической физике. 4-е изд. – М.: Физматлит, 2004.
<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/pde.htm>
Budak B.M., Samarskii A.A., and Tikhonov A.N. A Collection of problems in mathematical physics. – Oxford: Pergamon Press, 1964.
- [23] *Полянин А.Д.* Справочник по линейным уравнениям математической физики. – М.: Физматлит, 2001.
Polyanin A.D., and Nazaikinskii V.E. Linear partial differential equations for engineers and scientists. – 2nd ed. Boca Raton: CRC Press, 2016.
- [24] *Владимиров В.С.* Математические задачи односкоростной теории переноса частиц. – М.: Труды мат. института им.В.А. Стеклова (МИАН СССР), т. 61,

Изд-во АН СССР, 1961, с. 3-158.

<http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=tm&paperid=1576>

Vladimirov V.S. Mathematical problems in the one-velocity theory of particle transport. – Ontario: Atomic Energy of Canada, 1963.

https://inis.iaea.org/search/search.aspx?orig_q=RN:43103493

- [25] *Lewis E.E.* Second-order neutron transport methods // Nuclear Computational Science: A Century in Review. Eds: Azmy Y. and Sartori E., New York: Springer Science, 2010, pp. 85-115.
https://www.researchgate.net/publication/226141733_Second-Order_Neutron_Transport_Methods
- [26] *Бурого Ю.Д., Залгаллер В.А.* Введение в риманову геометрию. – СПб.: Наука, 1994.
Burago Yu.D., Zalgaller V.A. Introduction to Riemannian geometry. – SPb: Nauka, 1994. [in Russian]
- [27] *Рашевский П.К.* Риманова геометрия и тензорный анализ. – М.: Наука, 1967.
<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/difgeometry.htm>
Rashevsky P.K. Riemannian geometry and tensor analysis. – Moscow: Nauka, 1967. [in Russian]
- [28] *Деммель Дж.* Вычислительная линейная алгебра. Теория и приложения. – М.: Мир, 2001.
Demmel J.W. Applied numerical linear algebra. – Philadelphia, PA: SIAM, 1997.
<http://epubs.siam.org/doi/abs/10.1137/1.9781611971446.bm>

Оглавление

Введение	3
1. Распределения возмущений	8
2. Переход к лучевым переменным	14
3. Решение в ячейке	16
4. Решение в области	23
Приложение	28
Список литературы	32