



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 127 за 2017 г.



ISSN 2071-2898 (Print)  
ISSN 2071-2901 (Online)

**Попов И.В., Вихров Е.В.**

Об одном подходе к  
построению поверхностных  
и объемных сеток

**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Попов И.В., Вихров Е.В. Об одном подходе к построению поверхностных и объемных сеток // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2017. № 127. 14 с. doi:[10.20948/prepr-2017-127](https://doi.org/10.20948/prepr-2017-127)  
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2017-127>

**Ордена Ленина  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ  
имени М.В.Келдыша  
Российской академии наук**

**И.В. Попов, Е.В. Вихров**

**Об одном подходе к построению  
поверхностных и объемных сеток**

**Москва — 2017**

**И.В. Попов, Е.В. Вихров**

**Об одном подходе к построению поверхностных и объемных сеток**

В работе рассматриваются вопросы построения выпуклых и минимальных оболочек тел, построения треугольных сеток на их поверхности и построения тетраэдральных сеток с использованием различных критериев качества.

**Ключевые слова:** минимальная оболочка, поверхностная сетка, объёмная сетка, математическое моделирование.

**I.V. Popov, E.V. Vikhrov**

**One approach to construction of surface grids and volumetric grids**

This paper describes the method of shells construction, surface triangular grids construction and volumetric tetrahedral grids construction.

**Keywords:** minimal shell, surface grid, volumetric grid, mathematical modeling.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты №№ 15-01-04620-а, 16-07-00519-а, 16-29-15095-офи-м).

## **Оглавление**

Введение .....	3
Постановка задачи .....	4
Построение поверхностной триангуляции.....	4
Построение грубой тетраэдральной сетки .....	5
Перестроение тэтраэдральной сетки по критерию Делоне .....	8
Измельчение грубой тэтраэдральной сетки .....	9
Приложение 1. Алгоритм построения сферической оболочки вокруг объёмного тела и её последующая триангуляция.....	10
Заключение .....	13
Список литературы .....	14

## **Введение**

Важным этапом при численном моделировании различных процессов является дискретизация объекта и построение расчетных сеток. Этот процесс подразумевает трудоемкую и монотонную работу, предъявляет высокие требования к квалификации инженерных и научных работников. Поэтому необходимо автоматизировать или хотя бы упростить некоторые этапы этого процесса.

Для построения как поверхностных треугольных, так и объемных тетраэдральных сеток в основном используются методы, основанные на триангуляции Делоне, или алгоритмы движущегося фронта [1-3]. В случаях, основанных на алгоритме движущегося фронта, возникает проблема представления поверхности рассматриваемого геометрического объекта, его триангуляции и оптимизации, так как большинство тел имеют изменяющуюся криволинейную поверхность и подбор шага для движущегося фронта становится еще труднее.

Этими построениями сеток, и в частности построениями поверхностных сеток занимались, например, в институтах вычислительной математики, прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН и многих других [4-5].

В этом препринте предлагается усовершенствование и дальнейшее развитие проводимых ранее работ.

Для того чтобы построить объемную расчетную сетку, вначале требуется построить сетку на поверхности тела с заданной точностью дискретизации. Суть метода построения поверхностной треугольной сетки, предлагаемого в данной работе, заключается в следующем. Тело задается конечным множеством опорных точек. Вокруг него строится сферическая оболочка, затем эта оболочка триангулируется и проецируется на исходное множество точек. В результате этого получается геометрическая модель тела с грубой триангуляцией на поверхности. На следующем этапе по полученной поверхностной сетке проводится процедура переброски ребер с целью получения минимально возможной невыпуклой оболочки. Затем на основе этой триангуляции строится грубая тетраэдральная сетка, ячейки которой перестраиваются в соответствии с критерием Делоне и измельчаются до требуемого размера. В процессе измельчения контролируется качество сетки по различным критериям.

## Постановка задачи

В многомерных задачах математической физики со сложной геометрией исходного объекта начальным этапом при численных исследованиях является дискретизация расчётной области. Использование сеток с регулярной структурой является достаточно затруднительной задачей, поэтому многие исследователи используют тетраэдральные неструктурированные сетки.

В этой работе был разработан и реализован подход к построению тетраэдральных сеток для задач со сложной исходной геометрией, который включает в себя следующие этапы:

1. построение поверхностной триангуляции;
2. построение грубой тетраэдральной сетки;
3. перестроение грубой тетраэдральной сетки по критерию Делоне;
4. измельчение грубой тетраэдральной сетки до требуемого размера элементов;
5. перестроение сетки по критерию Делоне;
6. оптимизация сетки под геометрию области или к решению.

## Построение поверхностной триангуляции

Рассмотрим первый этап. Пусть дано множество точек в трехмерном пространстве, заданных своими координатами, – множество  $P$ . Будем конструировать оболочку так, чтобы в процессе построения к множеству  $P$  не добавлялись новые точки. Для этого воспользуемся следующей идеей: рассмотрим сферу с центром в центре масс множества точек и радиусом, равным максимальному расстоянию от центра масс до точек множества. Спроецируем все точки на сферу. Если какие-то две точки множества при проекции попали в одну точку на сфере, то во избежание неоднозначности проигнорируем ту точку, которая лежит ближе к центру сферы. Все исключенные точки при построении не учитываются, так как эти точки будут находиться внутри построенной поверхности. По полученному набору точек на сфере строим триангуляцию сферы (*Приложение 1 содержит более подробное описание этой процедуры*).

После того как триангуляция на сфере будет построена, применим операцию, обратную рассмотренному проектированию, при помощи которой мы перенесем построенную сферическую триангуляцию на исходное множество точек. Заметим, что, удалив «совпавшие точки» из рассмотрения, мы сделали обратную операцию однозначной. Таким образом, получаем оболочку исходного множества точек вместе с её триангуляцией.

При решении второй задачи использовалась построенная выпуклая оболочка, которая с помощью переборки поверхностных ребер приводилась к минимальному объёму.

Приведём пример построения выпуклой оболочки (Рис. 1) и минимальной оболочки (в смысле минимального объёма) (Рис. 2).

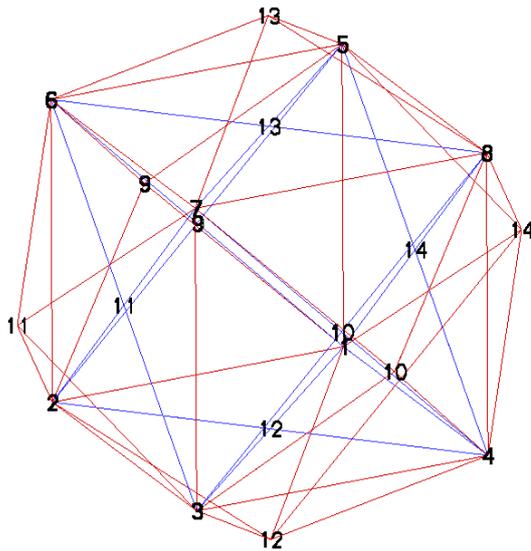


Рис.1

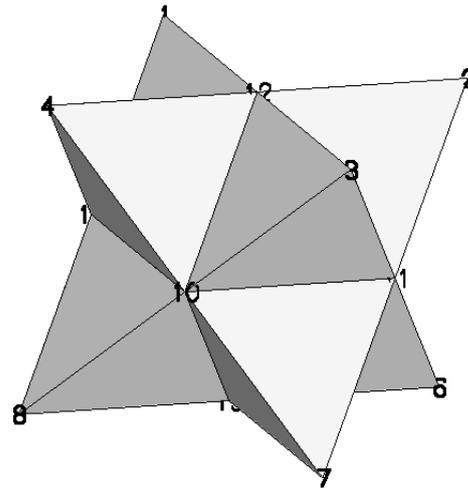


Рис. 2

Приведём ещё пример двух цилиндров, расположенных один внутри другого (рис. 3).

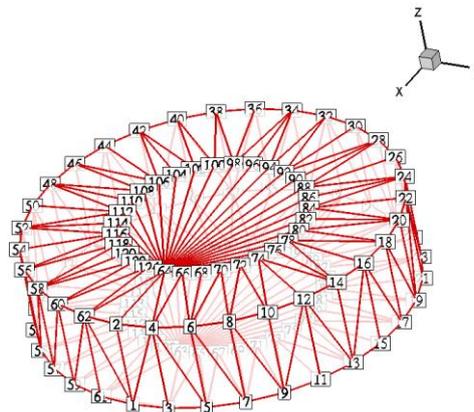


Рис. 3

### Построение грубой тетраэдральной сетки

На втором этапе построения грубой тетраэдральной сетки использован алгоритм декомпозиции. В основу этого алгоритма была положена следующая идея. На первом шаге ищутся телесные углы при каждом узле

поверхностной сетки, образованные поверхностными треугольниками, окружающими данный узел. Следующим шагом является определение из всей совокупности минимального телесного угла и удаление данного узла вместе с теми тетраэдрами, которые образуются при его удалении из общей поверхностной триангуляции. Удаляемые тетраэдры оставляют на оставшейся части сетки новую поверхностную триангуляцию того куска, который был удалён, и, таким образом, объём исходного тела уменьшается. Завершающим шагом является пересчёт телесных углов изменённых узлов сетки и возврат к первому шагу алгоритма.

Этот алгоритм работает до тех пор, пока объём заданного тела не будет полностью исчерпан, после этого получена грубая тетраэдрализация исходного объекта. Приведём пример разборки объекта типа рамы на грубую тетраэдральную сетку (см. серию рисунков 4-16). На рис. 17 изображена окончательная грубая тетраэдральная сетка.

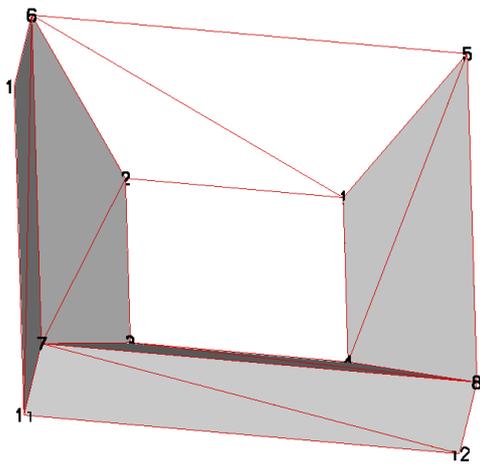


Рис. 4

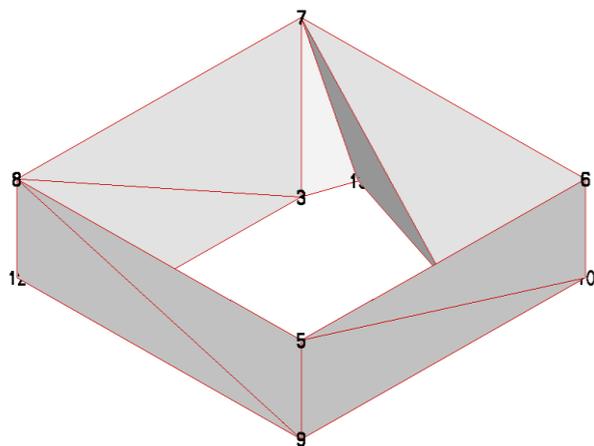


Рис. 5

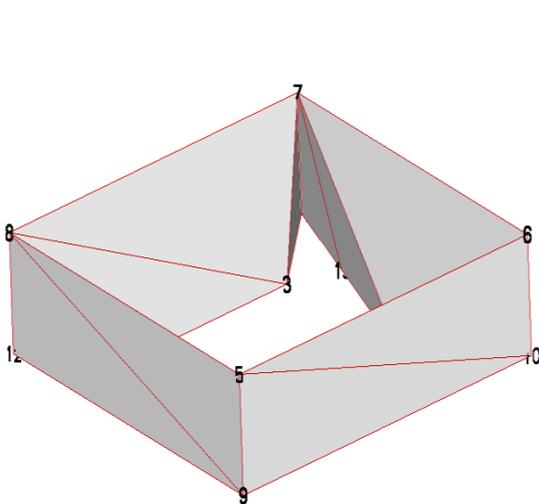


Рис. 6

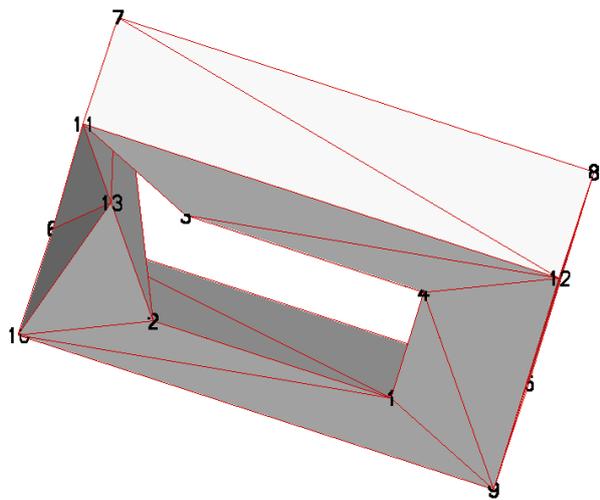


Рис. 7

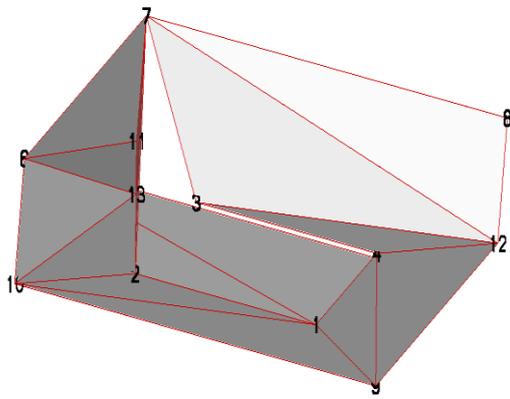


Рис. 8

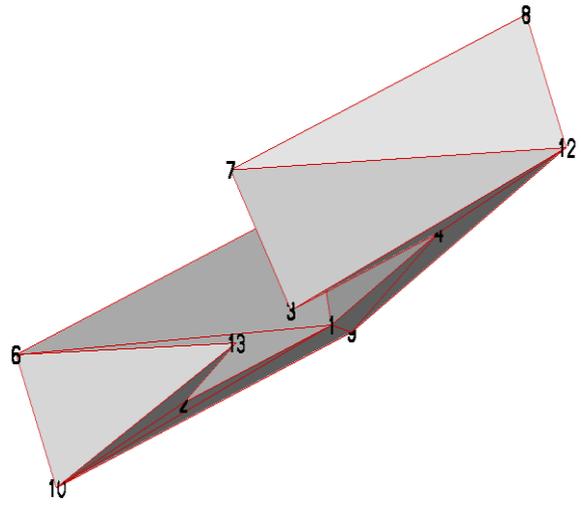


Рис. 9

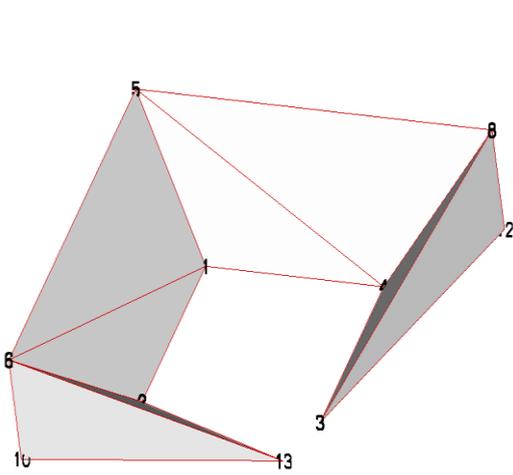


Рис. 10

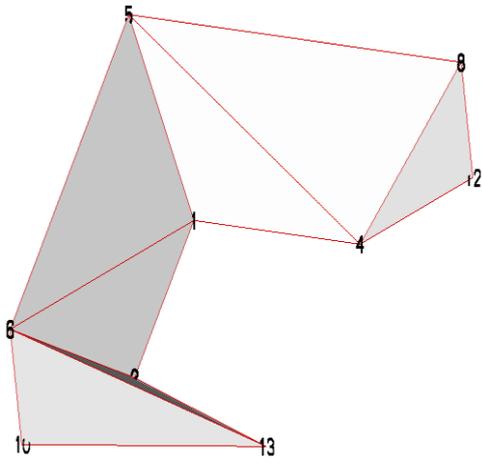


Рис. 11

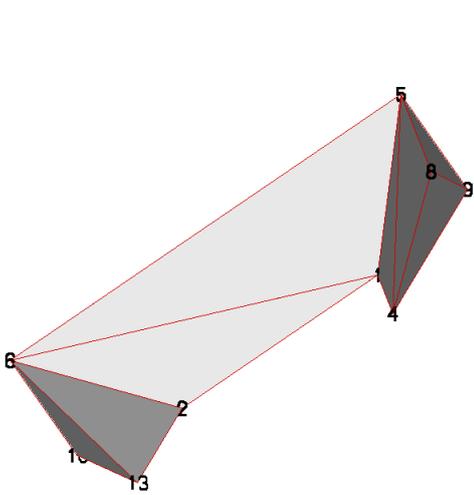


Рис. 12

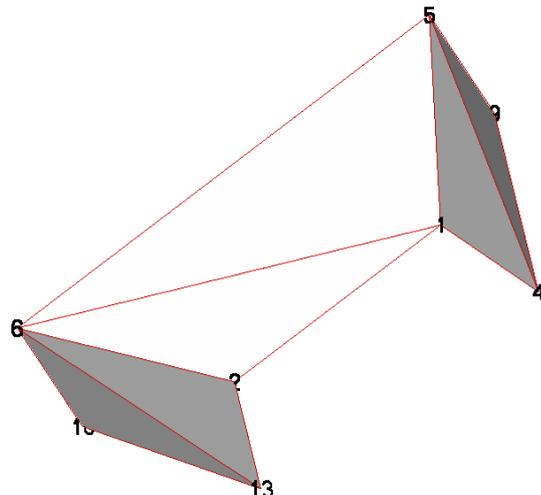


Рис. 13

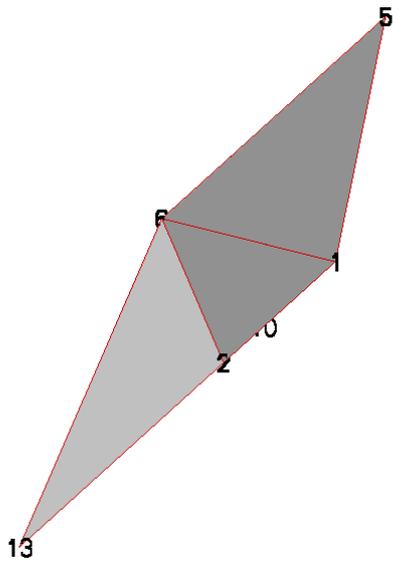


Рис. 14

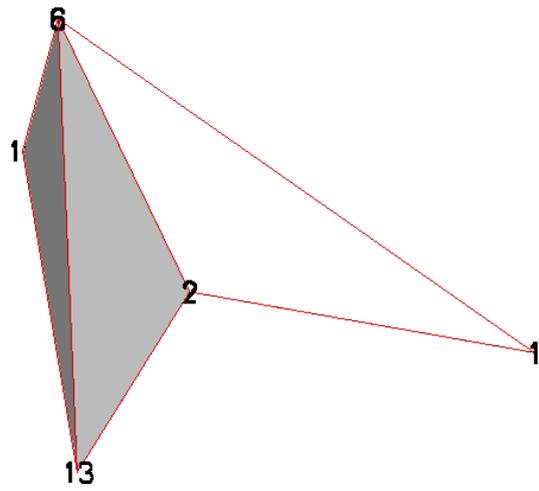


Рис. 15

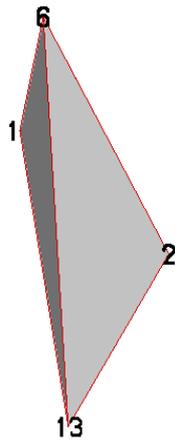


Рис. 16

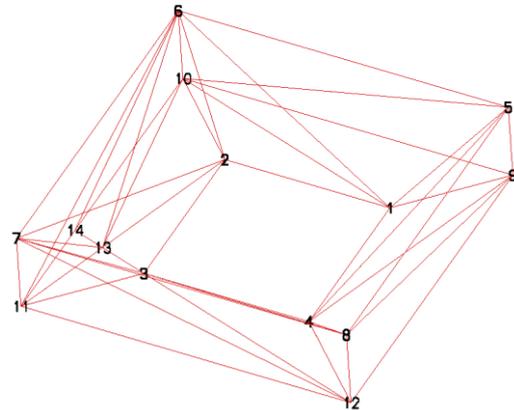


Рис. 17

Необходимо отметить, что в процессе построения грубой тетраэдральной сетки потребовалось решать задачу разрыва объекта (см. рис. 8), а некоторые объекты распались на несколько независимых объектов.

### Перестроение тетраэдральной сетки по критерию Делоне

Третий этап включал в себя перестроение полученной тетраэдральной сетки по критерию Делоне (см. рис. 18-20).

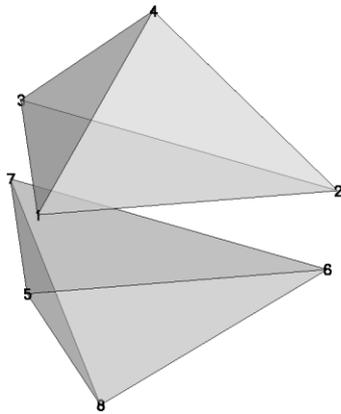


Рис. 18

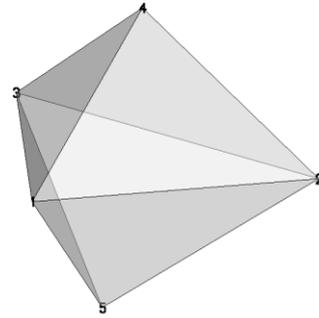


Рис. 19

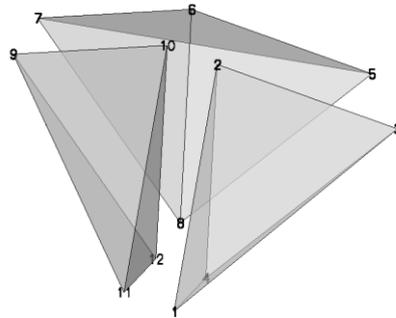


Рис. 20

При перестроении по критерию Делоне в регулярном случае получаем из двух тетраэдров три. Эта процедура продолжается до тех пор, пока все тетраэдры не будут удовлетворять заданному требованию.

### **Измельчение грубой тетраэдральной сетки**

На четвертом этапе измельчение грубой тетраэдральной сетки до требуемого размера элементов осуществляется следующим образом: определяется тетраэдр максимального размера, и в его объём добавляется новая точка с последующей процедурой перестроения этого тетраэдра с учётом добавленной точки. Эта процедура продолжается до тех пор, пока все тетраэдры не будут удовлетворять заданному размеру. На приведённом ниже примере показано добавление точек в уже существующую тетраэдральную сетку (см. рис. 21-22).

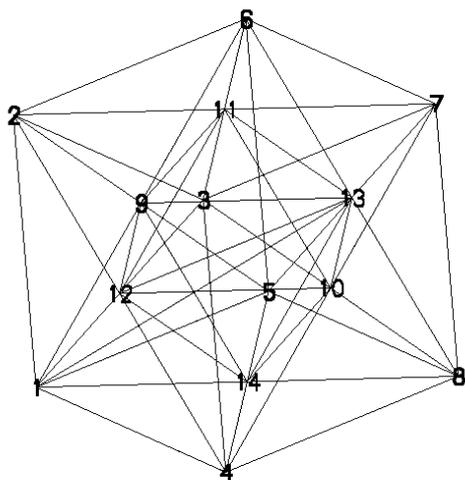


Рис. 21

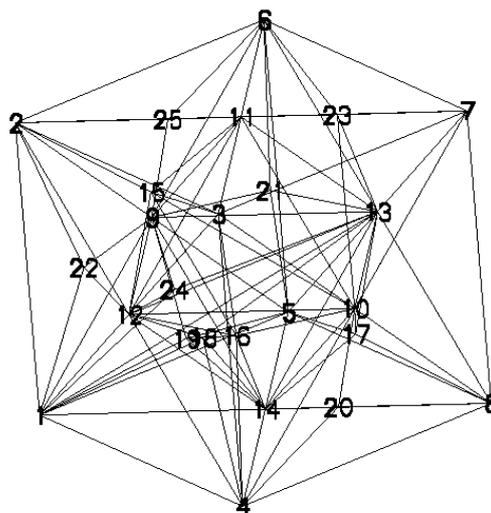


Рис. 22

Перестроение по критерию Делоне для измельчённой сетки проводится аналогично третьему этапу.

## Приложение 1. Алгоритм построения сферической оболочки вокруг объёмного тела и её последующая триангуляция

### Постановка задачи

Дано односвязное невыпуклое трехмерное тело, заданное конечным множеством опорных точек. Пусть число точек равно  $n$ . Для каждой точки этого множества известны её координаты в декартовой системе координат. Необходимо построить сферическую оболочку вокруг данного тела, спроецировать опорные точки на поверхность сферы и построить поверхностную сферическую триангуляцию на получившемся множестве проекций.

### Определение координат центра сферы и её радиуса

В качестве центра сферы возьмём точку, координаты которой представляют собой средние величины координат исходного множества точек. Получим точку с координатами  $O\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n y_i, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n z_i\right)$ . Для удобства последующих вычислений перенесём начало координат в точку  $O$  и пересчитаем координаты всех исходных точек. Радиус  $R$  будущей сферы

можно определить как расстояние от начала координат  $O$  до максимально удаленной от него точки. Пусть это будет точка  $M(x_m, y_m, z_m)$ , тогда

$$R = \sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2}.$$

### Проецирование исходного множества точек на полученную сферу

Исходные точки проецируются на поверхность сферы следующим образом: из центра сферы  $O$  через каждую точку  $N_i$  исходного множества проводится луч, который пересекает поверхность в единственной точке  $N_i^*$ . Рассмотрим эту процедуру более подробно. Есть точка с декартовыми координатами  $N_i(x_i, y_i, z_i)$ . Её сферическими координатами будут  $N_i(r_i, \theta_i, \varphi_i)$ , где

$$r_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2}, \quad \theta_i = \arccos\left(\frac{z_i}{\sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2}}\right), \quad \varphi_i = \arctg\left(\frac{y_i}{x_i}\right).$$

Необходимо учесть поправки значений для  $\theta_i$  и  $\varphi_i$  в зависимости от октанта, в котором располагается  $N_i$ . Имея сферические координаты оригинала, можно получить сферические координаты образа на поверхности сферы, т.е.  $N_i^*(R, \theta_i, \varphi_i)$ , где  $R$  — ранее вычисленный радиус сферы. Теперь можно получить декартовы координаты для  $N_i^*(x_i^*, y_i^*, z_i^*)$ , где

$$x_i^* = R \cdot \sin \theta_i \cdot \cos \varphi_i, \quad y_i^* = R \cdot \sin \theta_i \cdot \sin \varphi_i, \quad z_i^* = R \cdot \cos \theta_i.$$

### Триангуляция множества точек на поверхности сферы

Имея множество точек (проекций) на поверхности сферы, построим триангуляцию на нем. (*Замечание: отсюда и далее под словами расстояние, треугольник и звено (отрезок) понимаются сферические объекты.*)

Первым шагом данного этапа будет построение начального треугольника. Выберем две точки  $A$  и  $B$ , расстояние между которыми минимально. Под расстоянием понимается длина наименьшей из двух дуг большого круга. Расстояние можно вычислить по формуле:

$$L = R \cdot \arccos(\cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \cdot \sin \theta_2 \cdot \cos(\varphi_1 - \varphi_2)).$$

Теперь найдем третью точку  $P$ , такую, что сумма сферических расстояний до не от двух уже имеющих была бы минимальной. Так как точки  $A, B, P$  образуют треугольник с минимальным периметром, то внутри него нет других точек из множества проекций. После того как получен первый треугольник, имеем три сферических отрезка, представляющих собой

замкнутую ломаную (контур). Каждое её звено является стороной треугольника.

Вторым шагом является расширение полученного контура и его последующее сжатие до тех пор, пока триангуляция не будет построена на всей поверхности сферы. Эта процедура представляет собой цикл, рассмотрим его.

Для всех имеющихся на данный момент звеньев найдем точку, которая удовлетворяет следующим условиям:

- а) концы данного звена и точка не лежат на одной сферической прямой;
- б) точка и вершина треугольника, стороной которого является данное звено, лежат по разные от этого звена стороны (см рис. 23).

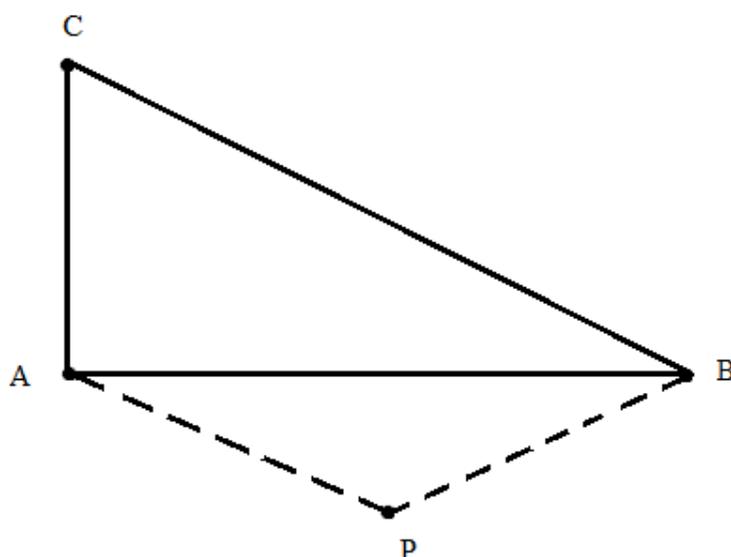


Рис. 23

Рассмотрим звено  $AB$ . Точка  $C$  — вершина треугольника  $ABC$ , лежащая напротив рассматриваемого звена  $AB$ . Пусть  $P$  — некоторая точка, для которой необходимо проверить выполнение условий а) и б). Проверим первое из них. Если точки  $A, B, P$  лежат на одной сферической прямой, то они будут лежать в одной плоскости, следовательно, условие а) будет выполнено, когда смешанное произведение радиусов векторов этих точек отлично от нуля, т.е.  $(\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OP}) \neq 0$ . Проверим второе условие. Если точки  $C$  и  $P$  находятся по разные стороны от звена  $AB$ , то ориентированные объемы параллелепипедов, построенных на векторах  $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}$  и  $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OP}$ , будут иметь различные знаки. Следовательно, условие б) выражается в том, что смешанные произведения  $(\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}) > 0$  и  $(\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OP}) < 0$  или  $(\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}) < 0$  и  $(\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OP}) > 0$ .

После того как для каждого звена найдены точки, удовлетворяющие вышеперечисленным условиям, получили набор пар звено–точка. Теперь необходимо решить, на основе какой из пар будет построен треугольник и добавлен в триангуляцию. Тут возможны две ситуации: добавляемый треугольник имеет одну сторону, не совпадающую с какими-либо звеньями ломаной, или две таких стороны (см. рис. 24). На рис. 24 треугольник  $ABC$  имеет одну новую сторону. Треугольник  $CDE$  имеет две новые стороны. Ломаная  $ABCD$  представляет собой контур в некоторую итерацию цикла.

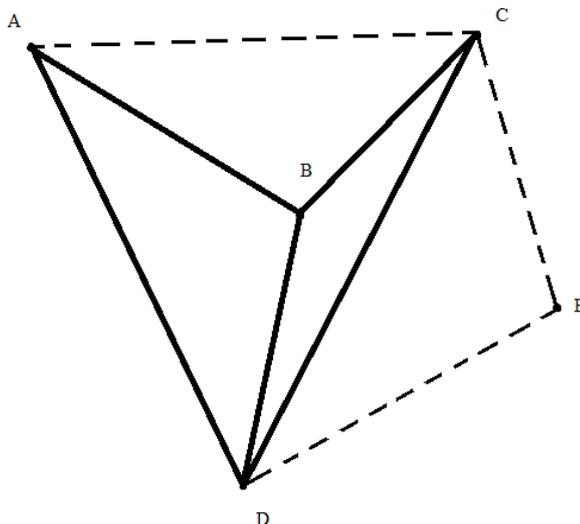


Рис. 14

Если среди возможных треугольников имеется треугольник с одной новой стороной, то следует добавить его. В том случае, когда таких треугольников несколько, выбирается тот, периметр которого минимален. При этом точка, лежащая напротив новой стороны, окажется внутри контура (см. рис 24, точка  $B$  окажется внутри контура  $ACD$ ). Если же все возможные треугольники имеют две новые стороны, то добавляется треугольник с минимальным периметром. После того как в триангуляцию добавлен один треугольник, получаем новую замкнутую ломаную. Точки, оказавшиеся внутри области, ограниченной ломаной, следует пометить как недоступные для последующих построений. Условием выхода из цикла будет такая ситуация, при которой одновременно выполнены два условия:

- а) число точек, для которых построения доступны, равно трем;
- б) ломаная содержит только эти три точки.

После выхода из цикла остается добавить последний треугольник, состоящий из этих трех точек.

### **Заключение**

В заключение отметим, что алгоритм построения оболочек может быть применён в задачах, связанных с распознаванием образов. Дорабатывался алгоритм построения тетраэдральной сетки для выпуклых объектов,

заданных поверхностной триангуляцией с большим количеством поверхностных треугольников. Этот объект тестировался для объектов, подобных тору, и для невыпуклых объектов. При работе с невыпуклыми объектами выявлен ряд особенностей, работа над которыми ведется.

### **Список литературы**

1. Препарата Ф., Шеймос Н. Вычислительная геометрия: введение. М.: Мир, 1989.
2. Соловьев А.В., Соловьева Е.В., Тишкин В.Ф. и др. Об одном алгоритме построения ячеек Дирихле // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша АН СССР. 1985. № 68.
3. Скворцов А.В. Обзор алгоритмов построения триангуляции Делоне. // Вычислительные методы и программирование. 2002, № 3, С. 14-39.
4. Данилов А.А. Технология построения неструктурированных сеток и монотонная дискретизация уравнения диффузии.
5. Popov I.V., Sedykh I.V. Construction of 3D convex and weakly nonconvex hulls in problems of mathematical physics // Russian Journal of numerical analysis and mathematical modeling. 2007. V.22, No. 6. P. 591-600.