



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 131 за 2017 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Галепова В.Д., [Лукин В.В.](#),
Марчевский И.К., Фуфаев И.Н.

Сравнительное
исследование лимитеров
семейства WENO и Hermite
WENO для расчета
одномерных течений газа
методом RKDG

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Сравнительное исследование лимитеров семейства WENO и Hermite WENO для расчета одномерных течений газа методом RKDG / В.Д.Галепова [и др.] // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2017. № 131. 32 с. doi:[10.20948/prepr-2017-131](https://doi.org/10.20948/prepr-2017-131)
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2017-131>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М. В. Келдыша
Российской академии наук**

**Галепова В. Д., Лукин В. В.,
Марчевский И. К., Фуфаев И. Н.**

**Сравнительное исследование лимитеров
семейства WENO и Hermite WENO
для расчета одномерных течений газа
методом RKDG**

Москва — 2017

Галепова В. Д., Лукин В. В., Марчевский И. К., Фуфаев И. Н.

Сравнительное исследование лимитеров семейства WENO и Hermite WENO для расчета одномерных течений газа методом RKDG

Проведено сравнительное исследование методов монотонизации семейства WENO численного решения одномерных уравнений газовой динамики, получаемого разрывным методом Галеркина. Рассмотрены варианты методики, основанные как на лагранжевой, так и эрмитовой интерполяции. Проведены тестовые расчеты для задачи Сода о распаде разрыва с образованием ударной волны, волны разрежения и контактного разрыва. Исследованы достоинства и недостатки рассмотренных подходов, включая вопросы монотонности получаемого решения, величины численной диссипации, вычислительных затрат и расширяемости программной реализации.

Ключевые слова: разрывный метод Галеркина; лимитер; WENO-реконструкция; разрывное решение; ударная волна.

**Valentina Dmitrievna Galepova, Vladimir Vladimirovich Lukin,
Ilya Konstantinovich Marchevsky, Ivan Nikolaevich Fufayev**

Comparative study of WENO and Hermite WENO limiters for 1D gas flows numerical simulations using the RKDG method

A comparative study of WENO-type monotonization methods for numerical solution of 1D gas dynamics equations system obtained by using discontinuous Galerkin method is presented. The Lagrangian and Hermitian interpolation-based variants of the technique are considered. Test simulations for the Sod problem, which solution contains a shock wave, a rarefaction wave, and a contact discontinuity, are performed. The merits and demerits of the considered variants of the limiters including the questions of the numerical solution monotonicity, numerical dissipation magnitude, computational costs and extensibility of software implementation are investigated.

Key words: discontinuous Galerkin method; limiter; WENO reconstruction; discontinuous solution; shock wave.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проекты №№ 15-01-03073, 16-02-00656, 16-31-00302).

1. Введение

Разрывный метод Галеркина [1–4], или Discontinuous Galerkin method (DG), благодаря относительной простоте повышения порядка аппроксимации без увеличения шаблона является одним из важнейших методов моделирования гидро- и газодинамических неустойчивостей. Возрастающий интерес к данному методу связан с его высокой разрешающей способностью при анализе разрывных решений уравнений, выражающих законы сохранения различных физических субстанций. При этом достижение аналогичного разрешения при помощи конечно-разностных методов, как правило, оказывается затруднительным [5].

Высокий порядок аппроксимации схемы приводит, как следует из теоремы С. К. Годунова [6], к необходимости использования нелинейных схем для обеспечения монотонности численного решения. В основу их построения положено использование функций-ограничителей — лимитеров [7, 8] — позволяющих корректировать величину производных приближенного решения. Основными требованиями, предъявляемыми к лимитерам, являются сохранение величины среднего значения решения на ячейке (консервативность) и исходного порядка точности метода [9]. Кроме того, актуальной задачей является разработка таких схем, которые позволяют избегать вычислительно затратных процедур лимитирования решения на ячейках, где монотонизация не требуется (при отсутствии разрывов решения). Для этого используются функции-индикаторы «проблемных» ячеек, методика построения которых в ряде случаев родственна алгоритмам применения распространенных лимитеров [10].

Одним из широко известных классов лимитеров является семейство схем WENO [11, 12]. Их применение позволяет сохранять порядок аппроксимации исходной численной схемы в случае гладкости решения. Различным вариантам [13–16] методов этого класса присущи неодинаковые монотонизирующие свойства в случае их применения к RKDG-методу (Runge — Kutta Discontinuous Galerkin). Использование некоторых из них позволяет сохранить преимущество компактного шаблона, характерного для DG-методов. Лимитеры семейства WENO основаны на лагранжевой (WENO) или эрмитовой (Hermite WENO) интерполяции решения, а также выделении наиболее гладкой (в TVD-смысле [8]) реконструкции решения путем построения линейной комбинации нескольких интерполянтов. Сравнительному анализу лимитеров данного семейства и посвящена данная работа.

Авторами разработан программный комплекс, реализующий алгоритм одномерного RKDG-метода для решения линейного и квазилинейного уравнений переноса, а также системы уравнений газовой динамики, и предназначенный для проведения методических исследований лимитеров, индикаторов и численных потоков, а также их сочетаний. Программный комплекс написан на языке C++ и имеет модульную структуру, основанную на использовании возможностей объектно-ориентированного программирования. Исходный код доступен по ссылке <https://github.com/vortexmethods/RKDG-1D>.

2. Система уравнений газовой динамики

Нестационарная система уравнений газовой динамики, описывающая одномерные течения идеального сжимаемого нетеплопроводного газа, имеет вид [17]

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} = \mathbf{0}, \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= [\rho, \rho u, \rho v, \rho w, e]^\top, \\ \mathbf{F} &= [\rho u, \rho u^2 + p, \rho uv, \rho iw, (e + p)u]^\top. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь \mathbf{U} и \mathbf{F} — векторы консервативных переменных и потоков соответственно; ρ — плотность; u, v, w — компоненты вектора скорости газа \mathbf{v} ; $p = p(\rho, \varepsilon)$ — давление газа; ε — удельная внутренняя энергия; e — полная энергия единицы объема,

$$e = \rho\varepsilon + \frac{1}{2}\rho(u^2 + v^2 + w^2).$$

Связь p, ρ и ε определяется уравнением состояния газа. Используемое в данной работе простейшее уравнение состояния совершенного газа имеет вид

$$p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon, \quad \text{или} \quad \varepsilon = \frac{p}{(\gamma - 1)\rho}, \quad (3)$$

где $\gamma > 1$ — показатель адиабаты.

Систему (1)–(2) можно записать в квазилинейной неконсервативной форме

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + A \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = \mathbf{0}, \quad (4)$$

где

$$A = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -u^2 + \frac{1}{2}b\mathbf{v}^2 & 2u - ub & -vb & -wb & b \\ -uv & v & u & 0 & 0 \\ -uw & w & 0 & u & 0 \\ -uh + \frac{1}{2}ub\mathbf{v}^2 & h - u^2b & -uvb & -uwb & u + ub \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Здесь $b = \gamma - 1$; $h = \frac{e+p}{\rho}$ — энтальпия единицы объема газа.

Система уравнений (4) является гиперболической, поскольку все собственные числа матрицы A действительны и существует полная система отвечающих им собственных векторов. Следовательно, матрица может быть диагонализирована и записана в виде

$$A = \Omega_R \Lambda \Omega_L, \quad \Omega_L = \Omega_R^{-1},$$

где $\Lambda = \text{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_5]$ — диагональная матрица из собственных значений матрицы A ; Ω_R, Ω_L — матрицы правых и левых собственных векторов соответственно.

Можно показать, что

$$\Omega_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ u - c & 0 & 0 & u & u + c \\ v & 1 & 0 & v & v \\ w & 0 & 1 & w & w \\ h - uc & v & w & h - c^2/b & h + uc \end{pmatrix}, \quad (6)$$

$$\Lambda = \text{diag}[u - c, u, u, u, u + c],$$

$$\Omega_L = \frac{b}{2c^2} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}v^2 + uc/b & -u - c/b & -v & -w & 1 \\ -2vc^2/b & 0 & 2c^2/b & 0 & 0 \\ -2wc^2/b & 0 & 0 & 2c^2/b & 0 \\ 2h - 2v^2 & 2u & 2v & 2w & -2 \\ \frac{1}{2}v^2 - uc/b & -u + c/b & -v & -w & 1 \end{pmatrix}, \quad (7)$$

где $c = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$ — скорость звука в идеальном совершенном газе.

Будем далее предполагать, что для системы уравнений (1) на отрезке $[0, L]$ и временном интервале $(0, T]$ ставится задача с начальным условием

$$\mathbf{U}(x, 0) = \mathbf{U}_0(x). \quad (8)$$

3. Численный метод

3.1. Общая схема RKDG метода

На рассматриваемом отрезке $[0, L]$ введем равномерную сетку с шагом $h = L/n$, состоящую из n ячеек I_j с центрами $x_j = (j - 1/2)h$ и граничными точками

$$x_{j\pm 1/2} = x_j \pm h/2, \quad j = \overline{1, n}.$$

Построим аппроксимацию уравнений (1), (8), следуя схеме метода взвешенных невязок [7] и считая, что пробные функции отличны от нуля лишь на I_j [1]. Умножив уравнения (1) и (8) на произвольную гладкую функцию $v(x)$, проинтегрировав эти произведения по $I_j = [x_{j-1/2}, x_{j+1/2}]$ и применив формулу интегрирования по частям, получим

$$\begin{aligned} & \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} v(x) dx - \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \mathbf{F}(\mathbf{U}) \frac{dv(x)}{dx} dx + \\ & + \mathbf{F}(\mathbf{U}(x, t))v(x) \Big|_{x=x_{j+1/2}} - \mathbf{F}(\mathbf{U}(x, t))v(x) \Big|_{x=x_{j-1/2}} = 0, \\ & \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \mathbf{U}(x, 0)v(x) dx = \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \mathbf{U}_0(x)v(x) dx. \end{aligned}$$

Для каждого момента времени $t \in (0, T]$ будем искать приближенное решение для каждой компоненты вектора \mathbf{U} в виде элемента конечномерного пространства

$$V_h^m = \left\{ v_h \in L_2(0, L) : v_h|_{I_j} \in P^m(I_j), j = \overline{1, n} \right\}, \quad (9)$$

где $P^m(I_j)$ — пространство полиномов степени не выше m , определенных на I_j .

Заменим в записанных выше уравнениях гладкую функцию v произвольной пробной функцией v_h , принадлежащей пространству V_h^m , а точное решение \mathbf{U} — приближенным

$$\mathbf{U}_h(x, t) = \sum_{j=1}^n \sum_{s=0}^m \mathbf{U}_j^{(s)}(t) \varphi_j^{(s)}(x), \quad (10)$$

где $\varphi_j^{(s)}(x)$ — базисные функции из пространства V_h^m , отличные от нуля только на отрезке I_j . Поскольку в дальнейшем речь всегда будет идти о поиске приближенного решения, индекс h будем опускать. Коэффициенты $\mathbf{U}_j^{(s)}$ будем называть моментами приближенного решения s -го порядка.

В качестве базисных функций $\varphi_j^{(s)}(x)$ на каждой ячейке будем использовать смещенную ортогональную систему полиномов Лежандра

$$\varphi_j^{(s)}(x) = P_s \left(\frac{2(x - x_j)}{h} \right),$$

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \quad \dots$$

Используя в качестве пробных функций $v(x)$ на ячейке I_j те же самые базисные функции $\varphi_j^{(r)}(x)$, $r = \overline{0, m}$, получим

$$\int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \sum_{s=0}^m \frac{d\mathbf{U}_j^{(s)}(t)}{dt} \varphi_j^{(s)}(x) \varphi_j^{(r)}(x) dx - \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \mathbf{F}_j(x, t) \frac{d\varphi_j^{(r)}(x)}{dx} dx +$$

$$+ \mathbf{F}(\mathbf{U}(x, t)) \varphi_j^{(r)}(x) \Big|_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} = 0, \quad (11)$$

$$\int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \sum_{s=0}^m \mathbf{U}_j^{(s)}(0) \varphi_j^{(s)}(x) \varphi_j^{(r)}(x) dx = \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \mathbf{U}_0(x) \varphi_j^{(r)}(x) dx, \quad (12)$$

где обозначено $\mathbf{F}_j(x, t) = \mathbf{F}(\mathbf{U}_j(x, t))$; $\mathbf{U}_j(x, t) = \sum_{s=0}^m \mathbf{U}_j^{(s)}(t) \varphi_j^{(s)}(x)$.

Учитывая равенства

$$\int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \varphi_j^{(s)}(x) \varphi_j^{(r)}(x) dx = \frac{h}{2r+1} \delta_{sr}, \quad P_s(1) = 1, \quad P_s(-1) = (-1)^s,$$

где δ_{sr} — символ Кронекера, получим из (11)–(12) следующую систему уравнений для определения приближенного решения задачи:

$$\frac{h}{2r+1} \frac{d\mathbf{U}_j^{(r)}(t)}{dt} - \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \mathbf{F}_j(x, t) \frac{d\varphi_j^{(r)}}{dx} dx +$$

$$+ (\mathbf{F}(\mathbf{U}(x_{j+1/2}, t)) - (-1)^r \mathbf{F}(\mathbf{U}(x_{j-1/2}, t))) = 0, \quad (13)$$

$$\frac{h}{2r+1} \mathbf{U}_j^{(r)}(0) = \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \mathbf{U}_0(x) \varphi_j^{(r)}(x) dx, \quad j = \overline{1, n}, \quad r = \overline{0, m}. \quad (14)$$

Таким образом, задача нахождения приближенного решения $\mathbf{U}(x, t)$ сводится к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений (13) относительно коэффициентов $\mathbf{U}_j^{(s)}(t)$ разложения по базису на каждом отрезке I_j с начальными условиями (14). В краткой форме запишем полученную задачу Коши в виде

$$\frac{d\mathbf{U}_j^{(r)}}{dt} = \mathbf{L}_h \left(\left\{ \mathbf{U}_i^{(s)} \right\}_{i=\overline{1, n}}^{s=\overline{0, m}} \right), \quad (15)$$

$$\mathbf{U}_j^{(r)}(0) = \mathbf{U}_{j,0}^{(r)}.$$

Для решения системы (15) можно использовать любой подходящий метод решения обыкновенных дифференциальных уравнений. В силу нелинейности и сложности оператора

$$\mathbf{L}_h \left(\left\{ \mathbf{U}_i^{(s)} \right\}_{i=\overline{1, n}}^{s=\overline{0, m}} \right) = \mathbf{L}_h(\mathbf{U})$$

принято использовать явные методы Рунге — Кутты. В то же время, полученный путем аппроксимации «пространственной части» гиперболической системы уравнений, оператор $\mathbf{L}_h(\mathbf{U})$ ограничивает применимый набор методов. В частности, при использовании пространства V_h^m с $m \geq 1$, т. е. представлении решения кусочно-полиномиальной функцией степени не ниже первой, метод не может иметь первый порядок аппроксимации, поскольку в этом случае он будет неустойчив [7]. Среди методов более высокого порядка необходимо выбирать те, которые дают минимальную временную немонотонность численного решения [16]. В данной работе используется TVD метод Рунге — Кутты третьего порядка:

$$\mathbf{U}^* = \mathbf{U}^n + \tau \mathbf{L}_h(\mathbf{U}^n),$$

$$\mathbf{U}^{**} = \frac{3}{4} \mathbf{U}^n + \frac{1}{4} \mathbf{U}^* + \frac{1}{4} \tau \mathbf{L}_h(\mathbf{U}^*), \quad (16)$$

$$\mathbf{U}^{n+1} = \frac{1}{3} \mathbf{U}^n + \frac{2}{3} \mathbf{U}^{**} + \frac{2}{3} \tau \mathbf{L}_h(\mathbf{U}^{**}),$$

где τ — шаг по времени; \mathbf{U}^n и \mathbf{U}^{n+1} — приближенные решения на текущем и следующем временных слоях соответственно.

3.2. Численные потоки

Поскольку приближенное решение в точках $x_{i\pm 1/2}$ на границах ячеек терпит разрыв, для вычисления потоков в этих точках следует заменить поток $\mathbf{F}(\mathbf{U}(x_{j\pm 1/2}, t))$, входящий в уравнение (1), численным. Численный поток $\mathbf{F}_{j\pm 1/2}$ на границе ячеек вычисляется по предельным значениям приближенного решения на ячейках слева и справа от разрыва (\mathbf{U}_L и \mathbf{U}_R на рис. 1), т. е.

$$\mathbf{F}_{j+1/2} = \mathbf{F}_{j+1/2}(\mathbf{U}_L, \mathbf{U}_R).$$

Чтобы получаемая численная схема была консервативной, численный поток должен быть согласован с исходным физическим потоком, т. е. $\mathbf{F}_{j\pm 1/2}(\mathbf{U}, \mathbf{U}) = \mathbf{F}(\mathbf{U})$.

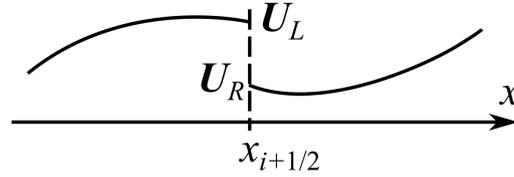


Рис. 1. Предельные значения компоненты решения на границе ячейки

Для проведения тестовых расчетов были реализованы следующие численные потоки, реализующие приближенные решения задачи Римана о распаде разрыва (здесь и далее обозначено $\mathbf{F}_L = \mathbf{F}(\mathbf{U}_L)$, $\mathbf{F}_R = \mathbf{F}(\mathbf{U}_R)$):

- локальный поток Лакса — Фридрикса [17]:

$$\mathbf{F}^{LF} = \frac{\mathbf{F}_R + \mathbf{F}_L}{2} - \frac{1}{2} \max\{|\lambda_1|, |\lambda_5|\}(\mathbf{U}_R - \mathbf{U}_L),$$

где собственные числа λ_1 и λ_5 вычисляются на границе ячеек по усредненным значениям консервативных переменных и скорости звука (с использованием среднего арифметического или среднего по Роу [8]).

- поток HLL [8]:

$$\mathbf{F}^{HLL} = \begin{cases} \mathbf{F}_L & \text{при } 0 \leq \lambda_1, \\ \frac{\lambda_5 \mathbf{F}_L - \lambda_1 \mathbf{F}_R + \lambda_1 \lambda_5 (\mathbf{U}_R - \mathbf{U}_L)}{\lambda_5 - \lambda_1} & \text{при } \lambda_1 \leq 0 \leq \lambda_5, \\ \mathbf{F}_R & \text{при } 0 \geq \lambda_5. \end{cases}$$

- поток HLLC [8]:

$$\mathbf{F}^{HLLC} = \begin{cases} \mathbf{F}_L & \text{при } 0 \leq \lambda_1, \\ \mathbf{F}_{*L} & \text{при } \lambda_1 \leq 0 \leq \lambda_*, \\ \mathbf{F}_{*R} & \text{при } \lambda_* \leq 0 \leq \lambda_5, \\ \mathbf{F}_R & \text{при } 0 \geq \lambda_5, \end{cases}$$

где помимо состояний слева и справа от $x_{j+1/2}$ используются два дополнительных состояния, разделенных контактным разрывом, движущимся со скоростью

$$\lambda_* = \frac{\rho_R - \rho_L + \rho_L u_L (\lambda_L - u_L) - \rho_R u_R (\lambda_R - u_R)}{\rho_L (\lambda_L - u_L) - \rho_R (\lambda_R - u_R)}.$$

Здесь λ_L и λ_R — наименьшее и наибольшее собственные числа на границе ячеек соответственно. Значения консервативных переменных в этих состояниях определяются соотношениями

$$\mathbf{U}_{*K} = \rho_K \begin{pmatrix} \frac{\lambda_K - u_K}{\lambda_K - \lambda_*} \\ \frac{1}{\lambda_*} \\ u_K \\ \omega_K \\ \frac{e_K}{\rho_K} + (\lambda_* - u_K) \left(\lambda_* + \frac{\rho_K}{\rho_K (\lambda_K - u_K)} \right) \end{pmatrix},$$

а соответствующие численные потоки

$$\mathbf{F}_{*K} = \mathbf{F}_K + \lambda_K (\mathbf{U}_{*K} - \mathbf{U}_K), \quad K = L, R.$$

3.3. Граничные условия

Граничные условия будем реализовывать путем построения «фиктивных» ячеек слева и справа от рассматриваемой области, что обеспечит однородность расчетной схемы. Введем в рассмотрение ячейки с индексами 0 и $(n + 1)$, находящиеся формально за пределами рассматриваемой области, и определим в них некоторым образом значения вектора \mathbf{U} . Заметим, что задавать на этих ячейках все моменты приближенного решения (все коэффициенты $\mathbf{U}_j^{(r)}$) не нужно, поскольку для расчета потоков необходимо определить лишь значение вектора консервативных переменных в предельных точках «фиктивных» ячеек — в узлах $x_{1/2}$ и $x_{n+1/2}$. Легко получить необходимые экстраполяции для распространенных типов граничных условий.

- Условия свободного вытекания газа из расчетной области:

$$\mathbf{U}_{0,R} = \mathbf{U}_{1,L}, \quad \mathbf{U}_{n+1,L} = \mathbf{U}_{n,R}.$$

В случае дозвукового истечения газа из расчетной области использование таких условий может привести к появлению численных артефактов в виде отраженных от границы волн. Для их подавления используют специальные «неотражающие» граничные условия [18, 19].

- Условия отражения падающих на границу волн, соответствующее наличию на границе твердой стенки:

$$\begin{aligned} \rho_{0,R} &= \rho_{1,L}, & p_{0,R} &= p_{1,L}, \\ u_{0,R} &= -u_{1,L}, & v_{0,R} &= v_{1,L}, & \omega_{0,R} &= \omega_{1,L}; \\ \rho_{n+1,L} &= \rho_{n,R}, & p_{n+1,L} &= p_{n,R} \\ u_{n+1,L} &= -u_{n,R}, & v_{n+1,L} &= v_{n,R}, & \omega_{n+1,L} &= \omega_{n,R}. \end{aligned}$$

- Граничные условия периодичности:

$$U_{0,R} = U_{n,R}, \quad U_{n+1,L} = U_{1,L}.$$

3.4. Монотонизация решения

Использование для аппроксимации решения на ячейках линейных и квадратичных базисных функций приводит как к повышению порядка точности метода, так и к немонотонности получаемой численной схемы, что может выражаться в возникновении нефизичных осцилляций приближенного решения, особенно в окрестности разрыва. Для подавления таких осцилляций применяются специальные ограничители — лимитеры [3, 9, 13], обеспечивающие монотонизацию численного решения.

Применение лимитеров имеет определенные отрицательные последствия: порядок точности метода в общем случае может снижаться до первого, что нивелирует эффект от введения полиномиальной аппроксимации решения на ячейках. Поэтому применять ограничители следует лишь на тех ячейках, где нарушается монотонность решения и возникают нефизичные осцилляции. Это, как правило, происходит вблизи разрывов и изломов решения, то есть там, где нарушается его гладкость. Для выявления таких ячеек используются т. н. функции-индикаторы [10].

В рассматриваемом семействе лимитеров (H)WENO монотонизация решения осуществляется за счет построения полиномиальной реконструкции $\tilde{q}(x)$ для каждой компоненты вектора решения $q(x)$ на «проблемной» ячейке и пересчета моментов приближенного решения. Базисные функции $\varphi_j^{(s)}(x)$ на ячейках сетки выбраны таким образом, что функции $\varphi_j^{(1)}(x)$ и $\varphi_j^{(2)}(x)$ имеют нулевые средние значения на ячейке, так что соответствующие моменты не влияют на величину интеграла от решения по ячейке (здесь и далее будем считать, что решение представляется кусочно-линейной либо кусочно-квадратичной функцией). Следовательно, их изменение не нарушает консервативности численной схемы и они могут быть пересчитаны с использованием построенной реконструкции:

$$\frac{h}{2s+1} \tilde{q}_j^{(s)} = \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \tilde{q}(x) \varphi_j^{(s)}(x) dx, \quad s = \overline{1, m}. \quad (17)$$

Таким образом, общая схема монотонизации решения по пространству (на очередном временном слое или стадии метода Рунге — Кутты) включает в себя следующие шаги:

- 1) определение «проблемных» ячеек с помощью выбранного индикатора;
- 2) построение полиномиальной реконструкции $\tilde{q}(x)$ решения на каждой «проблемной» ячейке;
- 3) проецирование реконструкции $\tilde{q}(x)$ на базисные функции с помощью (17).

3.5. Индикаторы немонотонности

Пусть

$$q(x) = \sum_{j=1}^n \sum_{s=0}^m q_j^{(s)} \varphi_j^{(s)}(x) = \sum_{j=1}^n q_j(x)$$

представляет собой одну из компонент вектора приближенного решения. В данной работе рассмотрим следующие индикаторы немонотонности этой компоненты на ячейке I_j .

- 1) Индикатор Хартена [20], основанный на подсеточной реконструкции приближенного решения. В общем случае этот индикатор указывает на необходимость реконструировать $q_j(x)$, если

$$\Psi_j(x_{j-1/2})\Psi_j(x_{j+1/2}) \leq 0,$$

где

$$\Psi_j(z) = \frac{1}{h} \left(\int_{x_{j-1/2}}^z q_{j-1}(x) dx + \int_z^{x_{j+1/2}} q_{j+1}(x) dx \right) - q_j^{(0)}.$$

Поскольку индикатор может сработать в случае наличия на ячейке I_j локального экстремума, проверяются две пары дополнительных условий

$$\begin{aligned} |q_j^{(m)}| &> \varkappa |q_{j-1}^{(m)}|, & \varkappa |q_j^{(m)}| &< |q_{j-1}^{(m)}|, \\ |q_j^{(m)}| &> \varkappa |q_{j+1}^{(m)}|, & \varkappa |q_j^{(m)}| &< |q_{j+1}^{(m)}|, \end{aligned}$$

где \varkappa — калибровочный коэффициент (в расчетах использованы значения $1 \leq \varkappa \leq 2$).

В случае $m = 1$, т.е. при представлении решения на каждой ячейке линейной функцией, данные условия задают предельное относительное изменение производной приближенного решения в подряд идущих ячейках.

2) Индикатор KXRCF [21]. Данный метод обнаружения разрывов основан на эффекте сверхсходимости разрывного метода Галеркина на границах ячеек в области, где решение является гладким. Пусть I_j^- и I_j^+ — границы j -й ячейки, через которые поток массы «втекает» и «вытекает» из ячейки соответственно (определяется по знаку нормальной компоненты вектора скорости на границах) и пусть граница I_j^- разделяет j -ю и p -ю ячейки, тогда значение KXRCF-индикатора можно вычислить следующим образом:

$$\mathcal{I}_j = \frac{|q_j|_{I_j^-} - q_p|_{I_j^-}|}{(h/2)^{(m+1)/2}|q_j^{(0)}|}. \quad (18)$$

Если $\mathcal{I}_j > 1$, то ячейка I_j идентифицируется как содержащая разрыв.

В случае срабатывания индикатора коэффициенты $q_j^{(1)}$ и $q_j^{(2)}$ приближенного решения реконструируются при помощи лимитера. В качестве $q(x)$ обычно выбирается либо плотность ρ , либо энергия единицы объема газа e .

Описания некоторых других индикаторов можно найти в [10].

3.6. Лимитеры

Используемые в работе полиномиальные реконструкции приближенного решения основываются как на классической идее WENO-аппроксимации [11], так и на ее развитии для случаев, когда кроме среднего значения приближенного решения на ячейках известны также моменты более высоких порядков (производные) и для реконструирования функции можно применять интерполяцию Эрмита. Такая модификация получила общее название Hermite WENO, или HWENO-реконструкции [15], и она позволяет обеспечить компактность шаблона аппроксимации, присущую RKDG-методу. В обоих случаях для лимитирования приближенного решения используются полиномы, степень которых выше порядка точности метода, что позволяет избежать потери порядка аппроксимации схемы RKDG-метода в случае ошибочного применения лимитера.

Простейшим способом применения лимитера к вектору неизвестных \mathbf{U} при решении системы уравнений является его отдельное покомпонентное применение. Такой прием прост для программной реализации, однако заведомо является «уязвимым» в силу высокой связности и нелинейности решаемой системы уравнений (1)–(2).

Применение лимитеров к инвариантам Римана (с использованием характеристического разложения матрицы (5) квазилинейной формы системы уравнений), хотя и существенно «утяжеляет» расчет, является более оправданным, и в ряде случаев может заметно улучшать результат [16]. В этом случае схема реконструкции приближенного решения усложняется и состоит из следующих шагов.

- 1) Используя вектор средних значений консервативных переменных $\mathbf{U}_j^{(0)}$ на помеченной индикатором «проблемной» ячейке, вычисляют матрицы Ω_R и Ω_L правых и левых собственных векторов по формулам (6) и (7).
- 2) От вектора решения \mathbf{U} переходят к вектору \mathbf{W} , состоящему из инвариантов Римана, с помощью формулы $\mathbf{W}_k = \Omega_R \mathbf{U}_k$, где k пробегает значения индексов ячеек, входящих в шаблон реконструкции.
- 3) Для вектора инвариантов \mathbf{W}_j покомпонентно применяют выбранную процедуру (H)WENO-реконструкции.
- 4) По полученному реконструированному вектору инвариантов $\tilde{\mathbf{W}}_j$ строят лимитированный вектор консервативных переменных $\tilde{\mathbf{U}}_j = \Omega_L \tilde{\mathbf{W}}_j$.

3.6.1. WENO

Оригинальная методика WENO [12] предусматривает построение набора интерполяционных полиномов, принимающих в центрах ячеек x_j значения, равные средним значениям приближенного решения $q_j^{(0)}$, либо же таких, среднее значение которых на «проблемной» ячейке совпадает с этими $q_j^{(0)}$. Классической является схема пятого порядка аппроксимации, использующая пятиточечный объемлющий шаблон $S_0 = \{x_{j-2}, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, x_{j+2}\}$, включающий в себя 3 трехточечных шаблона $S_1 = \{x_{j-2}, x_{j-1}, x_j\}$, $S_2 = \{x_{j-1}, x_j, x_{j+1}\}$, $S_3 = \{x_j, x_{j+1}, x_{j+2}\}$, см. рис. 2.

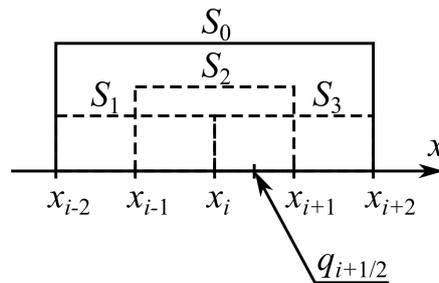


Рис. 2. Шаблоны интерполяции классической пятиточечной WENO-схемы

Рассмотрим применение схемы WENO для целей монотонизации численного решения. Лимитирование представляет собой замену на «проблемной» ячейке «плохого» решения q_j «хорошим» \tilde{q}_j , отличающегося от q_j моментами старше нулевого порядка. Моменты могут быть вычислены путем проецирования на базисные функции ячейки по формуле (17).

Для вычисления интеграла можно использовать квадратурные формулы Гаусса или Гаусса — Лобатто [13]. Таким образом, необходимо вычислить значения реконструирующего полинома \tilde{q}_j в соответствующих гауссовых точках x_i^G . В качестве такого полинома может быть взят полином четвертого порядка $p_0(x)$, проходящий через все пять точек расширенного шаблона S_0 .

Его значения в гауссовых точках x_i^G , в свою очередь, могут быть вычислены в виде линейной комбинации $\sum_{k=1}^3 \gamma_k^{(i)} p_k(x_i^G)$ значений полиномов $p_k(x)$ второго порядка, полученных на шаблонах S_k , $k = \overline{1, 3}$. Коэффициенты $\gamma_k^{(i)}$ этой комбинации называются линейными весами. Для четырехточечной квадратурной формулы Гаусса на отрезке $[-1, 1]$ и аппроксимации решения полиномами в смысле средних значений они приведены в таблице 1.

Таблица 1. Узлы и линейные веса WENO-реконструкции для четырехточечной квадратурной формулы Гаусса

i	x_i^G	$\gamma_1^{(i)}$	$\gamma_2^{(i)}$	$\gamma_3^{(i)}$
1	-0.8611363115940526	0.562500	0.375000	0.062500
2	-0.3399810435848563	0.374303	0.475000	0.150697
3	0.3399810435848563	0.150697	0.475000	0.374303
4	0.8611363115940526	0.062500	0.375000	0.562500

Однако использование $p_0(x)$ вместо $q_j(x)$ не позволяет учитывать информацию о скорости изменения решения в окрестности ячейки I_j . Чтобы это учесть, реконструирующий полином строится несколько иначе. Его значения в гауссовых точках выбираются равными

$$\bar{q}_j(x_i^G) = \sum_{k=1}^3 \omega_k^{(i)} p_k(x_i^G),$$

$$\omega_k^{(i)} = \frac{\tilde{\omega}_k^{(i)}}{\sum_{l=1}^3 \tilde{\omega}_l^{(i)}}, \quad \tilde{\omega}_k^{(i)} = \frac{\gamma_k^{(i)}}{(\varepsilon + \beta_k)^2}, \quad (19)$$

$$\beta_k = \sum_{l=1}^m h^{2l-1} \int_{I_j} \left(\frac{d^l}{dx^l} p_k(x) \right)^2 dx. \quad (20)$$

Здесь $\omega_k^{(i)}$ — нелинейные веса, учитывающие гладкость интерполянтов при составлении комбинации; β_k — показатели гладкости интерполяционных полиномов. Малая величина ε носит «технический» характер и введена во избежание деления на ноль (в расчетах принималось $\varepsilon = 10^{-6}$).

С использованием полученных значений моменты решения могут быть реконструированы по формуле

$$\bar{q}_j^{(s)} = \frac{2s+1}{h} \sum_{i=1}^4 \frac{h}{2} \omega_i^G \bar{q}_j(x_i^G) \varphi_j^{(s)}(x_i^G), \quad s = \overline{1, m},$$

где ω_i^G — веса квадратурной формулы Гаусса.

3.6.2. WENO_S

«A simple WENO limiter», или лимитер WENO_S [14], предусматривает реконструкцию решения в «проблемной» ячейке с помощью выпуклой линейной комбинации полиномов q_{j+k} , $k = -1, 0, 1$, задающих приближенное решение на самой «проблемной» ячейке, а также на соседних с ней ячейках. Хотя при использовании столь компактного шаблона нельзя говорить об аппроксимации высокого порядка, достоинство лимитера заключается в использовании наиболее полной информации о решении на ячейках I_{j-1} , I_j и I_{j+1} .

Рассмотрим смещенные полиномы

$$p_{k+2}(x) = q_{j+k}(x) - q_{j+k}^{(0)} + q_j^{(0)}, \quad k = -1, 0, 1. \quad (21)$$

Здесь верхний индекс (0) означает нулевой момент соответствующей функции — среднее значение этой функции или ее экстраполяции на j -й ячейке.

Заметим, что $p_2(x) = q_j(x)$, и все построенные полиномы имеют то же среднее значение, что и приближенное решение, а следовательно, и реконструируемый полином на «проблемной» ячейке. Запишем скорректированный полином на «проблемной» ячейке как WENO-реконструкцию с использованием введенных полиномов

$$\tilde{q}_j(x) = \sum_{k=1}^3 \omega_k p_k(x). \quad (22)$$

Поскольку линейные веса больше не могут быть получены из условий интерполяции, следуя рекомендациям [14], возьмем их равными

$$\gamma_1 = 0.001, \quad \gamma_2 = 0.998, \quad \gamma_3 = 0.001 \quad (23)$$

для всех квадратурных точек. Такой подход хотя и не позволяет сохранить требуемый порядок аппроксимации, дает простой и эффективный способ сглаживания решения в местах возникновения немонотонности.

Нелинейные веса определяются по формуле (19), индикаторы гладкости вычисляются по определению (20).

Как и прежде, полином $\tilde{q}_j(x)$ необходимо спроецировать на базис «проблемной» ячейки.

3.6.3. HWENO_SC

В рассмотренном выше лимитере WENO_S от полинома $\tilde{q}_j(x)$, реконструирующего решение, не требуется равенства исходному приближенному решению $p_j(x)$ ни в одной точке, т.е. он не обеспечивает интерполирование решения. Развивая этот подход, можно предложить сохраняющий консервативность (среднее значение) алгоритм реконструкции решения на «проблемной» ячейке с использованием метода наименьших квадратов (МНК) [16].

В этом случае вычислительный алгоритм определяется формулами (22), (19), (20) и (23), но вместо полиномов, определяемых соотношениями (21), используются полиномы $p_{k+2}(x)$, получаемые из решения задач минимизации

$$\min_{\phi \in P^m(I_{j+k})} \left\{ \int_{I_{j+k}} (\phi(x) - q_{j+k}(x))^2 dx \mid \frac{1}{h} \int_{I_j} \phi(x) dx = q_j^{(0)} \right\}, \quad k = -1, 1,$$

и, как и раньше, $p_2(x) = q_j(x)$.

3.6.4. HWENO

Для случая линейных базисных функций рассмотрим также 2 метода построения лимитеров, представляющие собой непосредственное обобщение технологии WENO с использованием эрмитовых интерполяционных полиномов [15]. Такое обобщение возможно при учете первых моментов (производных) решения и позволяет сократить шаблон интерполяции до непосредственных соседей «проблемной» ячейки. В этом случае для реконструкции полинома $q_j(x)$ на ячейке I_j могут быть построены три квадратичных полинома по следующим правилам:

$$\begin{aligned} p_1(x): \quad & p_1(x_{j-1}) = q_{j-1}(x_{j-1}), \quad p'_1(x_{j-1}) = q'_{j-1}(x_{j-1}), \quad p_1(x_j) = q_j(x_j); \\ p_2(x): \quad & p_2(x_{j-1}) = q_{j-1}(x_{j-1}), \quad p_2(x_j) = q_j(x_j), \quad p_2(x_{j+1}) = q_{j+1}(x_{j+1}); \\ p_3(x): \quad & p_3(x_j) = q_j(x_j), \quad p_3(x_{j+1}) = q_{j+1}(x_{j+1}), \quad p'_3(x_{j+1}) = q'_{j+1}(x_{j+1}). \end{aligned}$$

Обозначим через q_{-1} , q_0 и q_{+1} значения приближенного решения в серединах ячеек I_{j-1} , I_j и I_{j+1} соответственно, а через q'_{-1} , q'_0 , q'_{+1} — значения производных в тех же точках. Расчет момента первого порядка (производной) $\tilde{q}_j^{(1)}$ скорректированного решения производится с использованием нелинейных весов (19), но вместо численного интегрирования получаемых полиномов, вычисление первого момента $\tilde{q}_j^{(1)}$ (отличающегося от производной на коэффициент $2/h$) можно производить с использованием формулы центральной разностной производной:

$$\tilde{q}_j^{(1)} = \frac{1}{2} (\tilde{q}_j(x_{j+1/2}) - \tilde{q}_j(x_{j-1/2})).$$

Согласно методике WENO, значения $\tilde{q}_j(x_{j\pm 1/2})$ вычисляются с использованием значений построенных выше полиномов $p_k(x_{j\pm 1/2})$, $k = 1, 2, 3$. Эти значения можно вычислить следующим образом:

$$\begin{aligned} p_1(x_{j+1/2}) &= -\frac{3}{4}q'_{-1}h - \frac{5}{4}q_{-1} + \frac{9}{4}q_0; & p_1(x_{j-1/2}) &= \frac{1}{4}q'_{-1}h + \frac{3}{4}q_{-1} + \frac{1}{4}q_0; \\ p_2(x_{j+1/2}) &= -\frac{1}{8}q_{-1} + \frac{6}{8}q_0 + \frac{3}{8}q_{+1}; & p_2(x_{j-1/2}) &= \frac{3}{8}q_{-1} + \frac{6}{8}q_0 - \frac{1}{8}q_{+1}; \\ p_3(x_{j+1/2}) &= -\frac{1}{4}q'_{+1}h + \frac{3}{4}q_{+1} + \frac{1}{4}q_0; & p_3(x_{j-1/2}) &= \frac{3}{4}q'_{+1}h - \frac{5}{4}q_{+1} + \frac{9}{4}q_0. \end{aligned}$$

Линейные веса и показатели гладкости вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned}\gamma_1^+ &= \frac{1}{16}, & \gamma_2^+ &= \frac{6}{16}, & \gamma_3^+ &= \frac{9}{16}, & \gamma_k^- &= \gamma_{4-k}^+, & k &= 1, 2, 3; \\ \beta_1 &= \frac{1}{3} (16(q'_{-1}h)^2 - 38q'_{-1}h(q_0 - q_{-1}) + 25(q_0 - q_{-1})^2); \\ \beta_2 &= \frac{1}{3} (4q_{-1}^2 - 13q_0(q_{-1} - q_0 + q_{+1}) + 5q_{-1}q_{+1} + 4q_{+1}^2); \\ \beta_3 &= \frac{1}{3} (16(q'_{+1}h)^2 - 38q'_{+1}h(q_0 - q_{+1}) + 25(q_0 - q_{+1})^2).\end{aligned}$$

В полученных формулах значения интерполянтов вычислены из условия равенства значений полиномов $p_k(x)$ и их производных соответствующим характеристикам приближенного решения в центрах соответствующих ячеек.

Для нахождения значений реконструированного решения на границах ячейки используются формулы, аналогичные (19) и (20).

Качество монотонизации решения может быть повышено, если вместо интерполяции использовать условие совпадения средних значений интерполянтов и приближенного решения, а также их производных на соответствующих ячейках. В этом случае получаем лимитер HWENOave (от «average») и следующие расчетные формулы:

$$\begin{aligned}p_1(x_{j+1/2}) &= -\frac{4}{6}q'_{-1}h - \frac{7}{6}q_{-1} + \frac{13}{6}q_0; & p_1(x_{j-1/2}) &= \frac{2}{6}q'_{-1}h + \frac{5}{6}q_{-1} + \frac{1}{6}q_0; \\ p_2(x_{j+1/2}) &= -\frac{1}{6}q_{-1} + \frac{5}{6}q_0 + \frac{2}{6}q_{+1}; & p_2(x_{j-1/2}) &= \frac{2}{6}q_{-1} + \frac{5}{6}q_0 - \frac{1}{6}q_{+1}; \\ p_3(x_{j+1/2}) &= -\frac{2}{6}q'_{+1}h + \frac{5}{6}q_{+1} + \frac{1}{6}q_0; & p_3(x_{j-1/2}) &= \frac{4}{6}q'_{+1}h - \frac{7}{6}q_{+1} + \frac{13}{6}q_0;\end{aligned}$$

линейные веса принимают значения

$$\gamma_1^+ = \frac{9}{80}, \quad \gamma_2^+ = \frac{42}{80}, \quad \gamma_3^+ = \frac{14}{80}, \quad \gamma_k^- = \gamma_{4-k}^+, \quad k = 1, 2, 3.$$

4. Программная реализация

Для тестирования рассмотренных вариантов метода, индикаторов немонотонности и лимитеров решения разработана программа на языке C++ для решения линейного и квазилинейного уравнений переноса, а также одномерной системы уравнений газовой динамики (1)–(2). Исходный код программы доступен по адресу <https://github.com/vortexmethods/RKDG-1D>.

Начальные условия и параметры расчета задаются непосредственно в исходном коде программы. Зависимости, задающие начальное распределение решения, оформляются в виде отдельных функций с заданным прототипом (принимают действительный аргумент — пространственную координату; возвращают действительное число).

Программа построена на основе парадигмы объектно-ориентированного программирования; в ней реализованы следующие базовые классы.

- **Params** — содержит информацию о постановке задачи и параметрах расчета, включая указатели на функции, задающие начальные условия.
- **Mesh** — содержит указатели на сеточную функцию, представляющую собой решение в ячейках, а также на сеточную функцию, содержащую приращение решения на текущем шаге; кроме того, хранит указатель на текстовый файл для сохранения результатов расчета.
- **Problem** — абстрактный класс, содержащий сведения о физических свойствах задачи, а также размерность вектора решения; реализованы классы, соответствующие следующим задачам:
 - **ProblemGas1D** — задача одномерной газовой динамики на основе уравнений Эйлера;
 - **ProblemTransfer1D** — одномерное уравнение переноса.
- **Boundary** — абстрактный класс, содержащий сведения о значениях на границах расчетной области; в качестве производных классов рассмотрены следующие типы граничных условий:
 - **BoundaryPeriodic** — периодические граничные условия;
 - **BoundarySoft** — граничные условия типа «свободного вытекания»;
 - **BoundaryWall** — граничные условия отражения.
- **Flux** — абстрактный класс, содержащий общие методы и поля, необходимые для вычисления численных потоков и, тем самым, выполнения шага по времени; реализованы специальные классы для следующих схем:
 - **FluxGodunovType** — для решения уравнений переноса; реализованы противопоточная схема (upwind), схема с центральными разностями (немонотонная), схема ван-Лиры;
 - **FluxLaxFriedrichs** — поток Лакса — Фридрихса;
 - **FluxKIR** — поток Куранта — Изаксона — Риса (КИР);
 - **FluxHLL** — поток Хартена — Лакса — ван-Лиры (HLL);
 - **FluxHLLC** — модифицированный поток HLL с выделением «средней волны», соответствующей контактному разрыву (HLLC).
 - **FluxHLLER** — поток Хартена — Лакса — ван-Лиры — Энфильда (HLLER);

- `Indicator` — абстрактный класс, содержащий общие методы и поля, необходимые для работы индикаторов:
 - `IndicatorKrivodonova` — индикатор KXRCF;
 - `IndicatorHarten` — индикатор Хартена;
 - `IndicatorEverywhere` — индикатор, «срабатывающий» на всех ячейках сетки; с его помощью совместно с лимитером `LimiterFinDiff` можно реализовать метод типа Годунова с кусочно-постоянной аппроксимацией решения на всех ячейках;
 - `IndicatorNowhere` — индикатор, исключаяющий работу лимитеров.
- `Limiter` — абстрактный класс, содержащий общие методы и поля, необходимые для работы лимитеров; в качестве производных классов реализованы следующие лимитеры:
 - `LimiterFinDiff` — лимитер, обнуляющий старшие моменты решения на ячейках;
 - `LimiterWENO`, `LimiterWENO_S` — лимитеры, основанные на принципах построения схем типа WENO;
 - `LimiterHWENO_SC`, `LimiterHWENO`, `LimiterHWENOave` — лимитеры на основе Hermite WENO подхода.
- `Timestep` — абстрактный класс, содержащий численный метод решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений на каждой ячейке; в качестве производных классов реализованы следующие явные методы:
 - `TimestepEuler` — метод Эйлера 1-го порядка;
 - `TimestepRK2` — метод Рунге — Кутты 2-го порядка;
 - `TimestepRK2TVD` — TVD-метод Рунге — Кутты 2-го порядка;
 - `TimestepRK3TVD` — TVD-метод Рунге — Кутты 3-го порядка.

Помимо перечисленных в структуру программы входит модуль `defs`, содержащий описание пользовательских типов и определения некоторых функций.

Результаты расчетов сохраняются в текстовый файл, который устроен следующим образом:

- сначала указаны: количество узлов (N_x), шаг по пространству (h), шаг по времени (τ), периодичность сохранения данных в файл (в шагах по времени, deltacnt), а также количество базисных функций (n_{shape});
- координаты узлов пространственной сетки;
- полученные результаты на соответствующих шагах по времени для каждой компоненты решения — записываются в зависимости от значения n_{shape} два либо три числа, соответствующие коэффициентам $U_j^{(0)}(t_k)$, $U_j^{(1)}(t_k)$ и, если необходимо, $U_j^{(2)}(t_k)$.

Такое модульное построение программы позволяет сделать ее легко расширяемой в смысле возможности добавления новых методов и алгоритмов. Кроме того, код основных процедур становится достаточно наглядным и хорошо структурированным, что обеспечивает его хорошую читаемость и возможность модификации.

5. Результаты тестовых расчетов

С помощью разработанного программного комплекса были решены 2 тестовые задачи:

- задача с гладким решением типа бегущей волны, в качестве которой была рассмотрена задача о распространении малых возмущений;
- задача с разрывным решением, представляющую собой частный случай задачи Римана о распаде разрыва — задачу Сода [8], решение которой содержит ударную волну, волну разрежения и контактный разрыв.

На задаче с гладким решением исследовался порядок точности использованных модификаций метода RKDG в отсутствие лимитеров; на задаче Сода производилось сравнительное тестирование описанных выше лимитеров.

5.1. Порядок точности

Для оценки порядка точности RKDG-метода рассмотрена задача о распространении бегущей волны, постановка которой предусматривает наличие малых возмущений плотности, распространяющихся на фоне стационарного движения среды. Такие возмущения фактически соответствуют акустическому приближению уравнений газовой динамики и при решении полной системы уравнений газовой динамики переносятся без изменений. Выбранное для тестирования метода гладкое решение имеет вид:

$$\begin{aligned}\rho(x, t) &= 1 + 10^{-6} \sin(2\pi(x + t)), \\ \rho(x, t)u(x, t) &= -(1 + 10^{-6} \sin(2\pi(x + t))).\end{aligned}$$

Задача рассматривалась на отрезке $[0, 1]$ с граничными условиями периодичности с использованием базисных функций первого и второго порядка; поиск «проблемных» ячеек и реконструкция решения на них не производились, поскольку решение является гладким и численная немонотонность в ходе расчета не развивается. В таблицах 2 и 3 для линейных и квадратичных базисных функций соответственно приведены ошибки приближенного решения в нормах C , L_1 и L_2 на сгущающихся сетках, а также отношения ошибок для двух сеток, размер ячеек которых отличается в 2 раза. Для обеспечения устойчивости счета шаг по времени выбирался из условия $Co = \tau/h = 0.1$.

Таблица 2. Нормы ошибки при кусочно-линейной аппроксимации решения

i	Число ячеек n_i	$\ \Delta_i\ _C \cdot 10^6$	$\frac{\ \Delta_{i-1}\ _C}{\ \Delta_i\ _C}$	$\ \Delta_i\ _{L_1} \cdot 10^6$	$\frac{\ \Delta_{i-1}\ _{L_1}}{\ \Delta_i\ _{L_1}}$	$\ \Delta_i\ _{L_2} \cdot 10^6$	$\frac{\ \Delta_{i-1}\ _{L_2}}{\ \Delta_i\ _{L_2}}$
1	8	70203.5	—	30578.4	—	36944.8	—
2	16	19532.3	3.59	6164.8	4.96	7469.4	4.95
3	32	4417.8	4.42	1367.2	4.51	1715.8	4.35
4	64	1476.2	2.99	321.6	4.25	418.4	4.10

Таблица 3. Нормы ошибки при кусочно-квадратичной аппроксимации решения

i	Число ячеек n_i	$\ \Delta_i\ _C \cdot 10^6$	$\frac{\ \Delta_{i-1}\ _C}{\ \Delta_i\ _C}$	$\ \Delta_i\ _{L_1} \cdot 10^6$	$\frac{\ \Delta_{i-1}\ _{L_1}}{\ \Delta_i\ _{L_1}}$	$\ \Delta_i\ _{L_2} \cdot 10^6$	$\frac{\ \Delta_{i-1}\ _{L_2}}{\ \Delta_i\ _{L_2}}$
1	8	7217.6	—	1288.7	—	1687.6	—
2	16	981.7	7.35	154.2	8.36	209.5	8.06
3	32	125.3	7.83	19.1	8.07	26.2	8.00
4	64	15.7	7.98	2.4	7.96	3.3	7.94

Из табл. 2 видно, что для линейных базисных функций уменьшение шага сетки в 2 раза приводит к уменьшению нормы погрешности примерно в 4 раза, что соответствует 2-му порядку точности метода (величина погрешности $\|\Delta\| = O(h^2)$). Из табл. 3 ясно, что при квадратичных базисных функциях уменьшение шага сетки в 2 раза ведет к уменьшению ошибки примерно в 8 раз, что соответствует 3-му порядку точности по пространству ($\|\Delta\| = O(h^3)$).

Помимо порядка точности данная тестовая задача позволяет оценить влияние количества используемых базисных функций на диссипативные свойства схемы. Для этого приведем графики приближенных решений на момент времени $t = 100.0$ для линейных (рис. 3) и квадратичных (рис. 4) базисных функций.

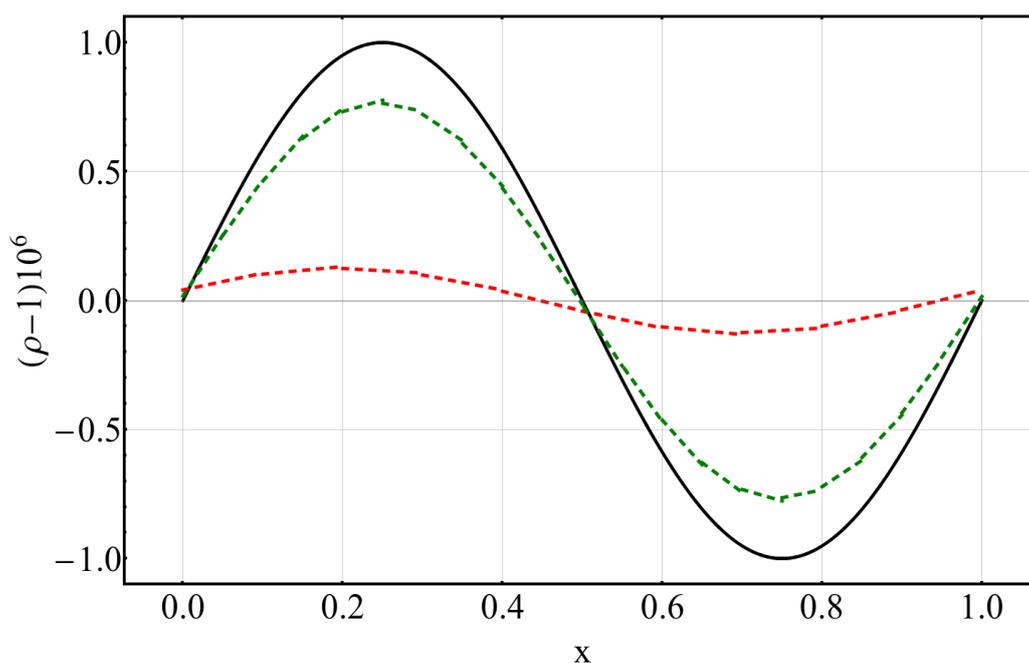


Рис. 3. Распределение плотности в задаче о бегущей волне в момент времени $t = 100.0$: точное (черная кривая) и численное решение с линейными базисными функциями для $n = 10$ (красная кривая) и $n = 20$ (зеленая кривая)

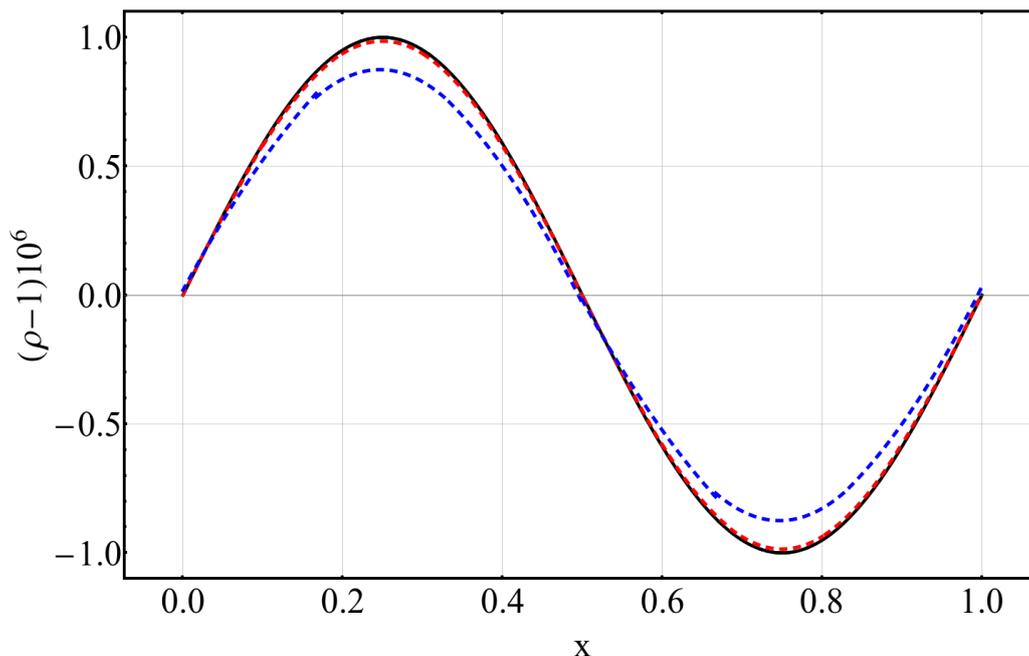


Рис. 4. Распределение плотности в задаче о бегущей волне в момент времени $t = 100.0$: точное (черная кривая) и численное решение с квадратичными базисными функциями для $n = 6$ (синяя кривая) и $n = 10$ (красная кривая)

Видно, что при кусочно-линейной аппроксимации решения на достаточно грубых сетках накопленные ошибки достигают величины порядка самого решения и требуется по крайней мере 10 ячеек на полупериод волны для сохранения уровня ошибки в пределах 20%. В свою очередь, кусочно-квадратичная аппроксимация решения обеспечивает сравнительно низкий уровень численной диссипации даже при 6 ячейках сетки (3 ячейки на полупериод волны).

Данные результаты подкрепляют сделанные выше выводы о порядках точности схем.

5.2. Разрешающая способность и монотонность

В случае, когда решение задачи содержит разрывы, говорить о порядке точности метода не вполне корректно, поскольку обычно теоретические результаты с оценками скорости сходимости относятся лишь к аппроксимации на гладких решениях. Для разрывных решений более важной качественной характеристикой метода оказывается его разрешающая способность, под которой будем понимать количество ячеек, на которых воспроизводится тот или иной разрыв. При этом разные типы разрывов одним и тем же методом разрешаются по-разному: ударные волны, как правило, «размазываются» на меньшее количество ячеек по сравнению с контактными разрывами.

Разрешающая способность является качественным показателем величины численной диссипации метода, на величину которой существенное влияние оказывает выбранная техника монотонизации решения.

Для исследования разрешающей способности RKDG-метода и монотонности получаемого численного решения при использовании разных лимитеров рассмотрена тестовая задача Сода [8], содержащая в своем решении три типа разрывов — ударную волну, волну разрежения и контактный разрыв. Задача решалась на отрезке $[0, 1]$ с начальным положением разрыва в точке $x_* = 0.5$ до момента времени $T = 0.2$ с начальными условиями

$$(\rho, u, v, \omega, p) = \begin{cases} (1, 0, 0, 0, 1), & x \leq 0.5; \\ (0.125, 0, 0, 0, 0.1), & x > 0.5. \end{cases}$$

На рис. 5 приведено сравнение приближенных решений, полученных с использованием численных потоков Лакса — Фридрикса (LF) и HLLC. Расчеты выполнены на сетке с числом ячеек $n = 100$ с соотношением шагов по времени и пространству $Co = 0.1$ при использовании индикатора немонотонности KXRCF и лимитеров WENO и HWENO_SC. Несмотря на бóльшую диссипативность потока LF, численный метод на его основе не препятствует развитию немонотонности, что особенно заметно на участке между контактным разрывом и волной разрежения. Бóльшая точность и меньшая численная диссипация потока HLLC позволяют получать более точный и «более монотонный» результат. Разрешающая способность данных методов оказывается схожей: фронт ударной волны разрешается на 2 ячейках, фронт контактного разрыва — на 4 ячейках. Отметим, что разрешающая способность определяется прежде всего используемой реконструкцией функций на ячейках.

Отметим также характерные «бугры» перед фронтом волны разрежения, полученные во всех расчетах на рис. 5. Они вызваны срабатыванием в этом месте индикатора KXRCF и характерной для лимитеров семейства WENO реконструкцией приближенного решения — предпринимается попытка реконструировать функцию, имеющую слабый разрыв, с помощью полинома, что и приводит к проявлению отмеченного эффекта.

Использование индикатора Хартена позволяет избежать данной проблемы, поскольку данный индикатор не помечает ячейки вблизи фронта волны разрежения как «проблемные». На рис. 6 приведены результаты расчетов с использованием этого индикатора совместно с лимитерами WENO и HWENO_SC. «Бугров» в решении перед волной разрежения и после контактного разрыва, как и «впадин» на заднем фронте волны разрежения в этом случае не наблюдается.

В целом использование лимитера HWENO_SC позволяет получать «более монотонное» решение на участках между разрывами, что вместе с компактностью шаблона является его очевидным преимуществом перед стандартным WENO-лимитером. В то же время HWENO_SC является, пожалуй, наиболее сложным для реализации из-за необходимости двукратного решения задачи минимизации для каждой ячейки. Простая в случае линейных базисных функций, эта задача существенно усложняется при повышении порядка аппроксимации по пространству, а соответствующий алгоритм может стать неустойчивым.

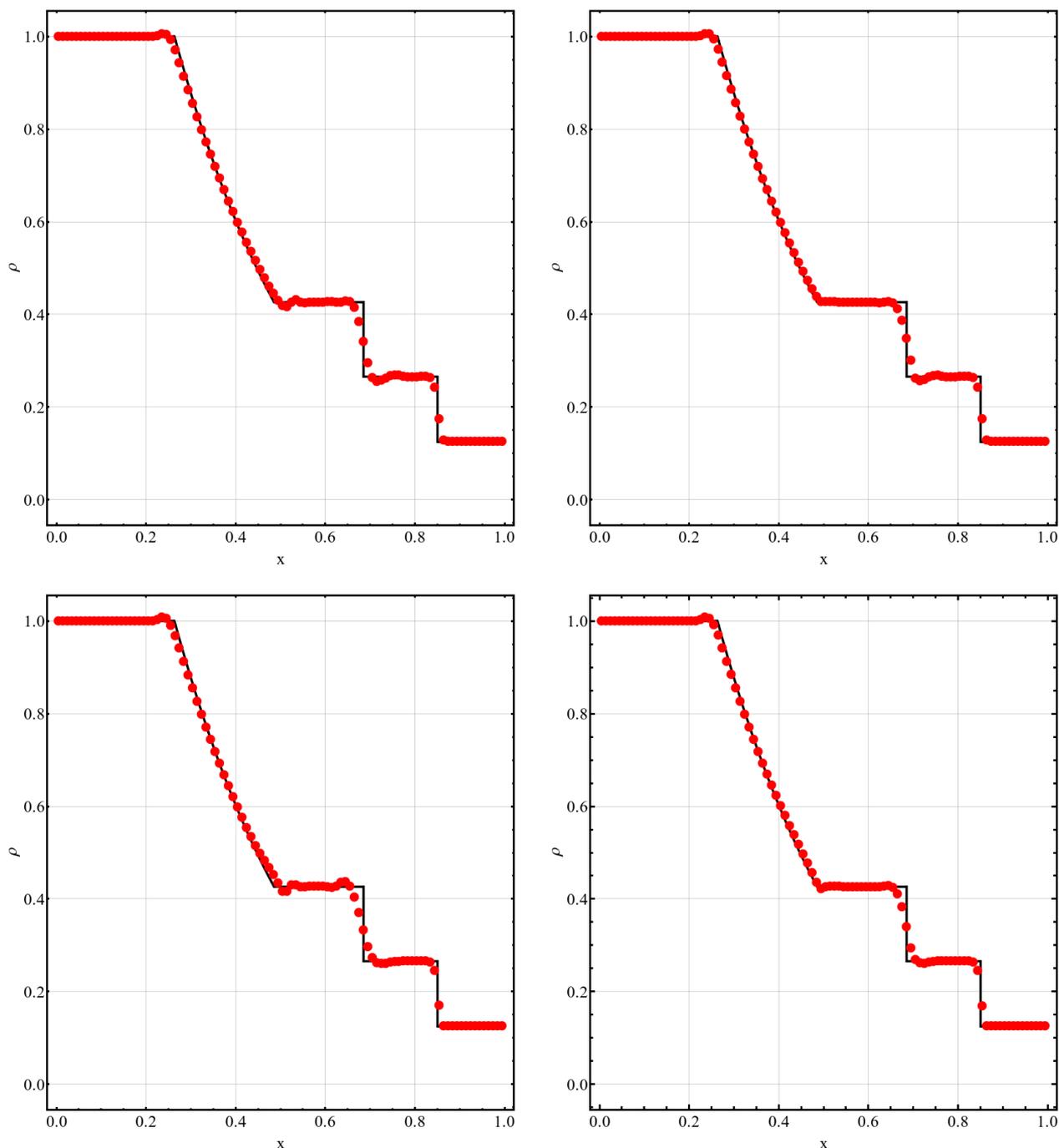


Рис. 5. Задача Сода. Распределение плотности в конечный момент времени, точное (сплошная линия) и приближенное (точки) решения. Расчет с $m = 1$, индикатором KXRCF, лимитерами WENO (верхний ряд) и HWENO_SC (нижний ряд), потоками LF (левая колонка) и HLLC (правая колонка)

«Более монотонное» по сравнению с классическим WENO-лимитером решение дает и лимитер WENO_S, который является наиболее простым для программной реализации. На рис. 7 приведены результаты расчетов с использованием этого лимитера с индикаторами KXRCF и Хартена. В то же время он является более диссипативным, т.е. имеет пониженную разрешающую способность: на фронт ударной волны в этом случае приходится 3 ячейки, а на фронт контактного разрыва 5–6 ячеек.

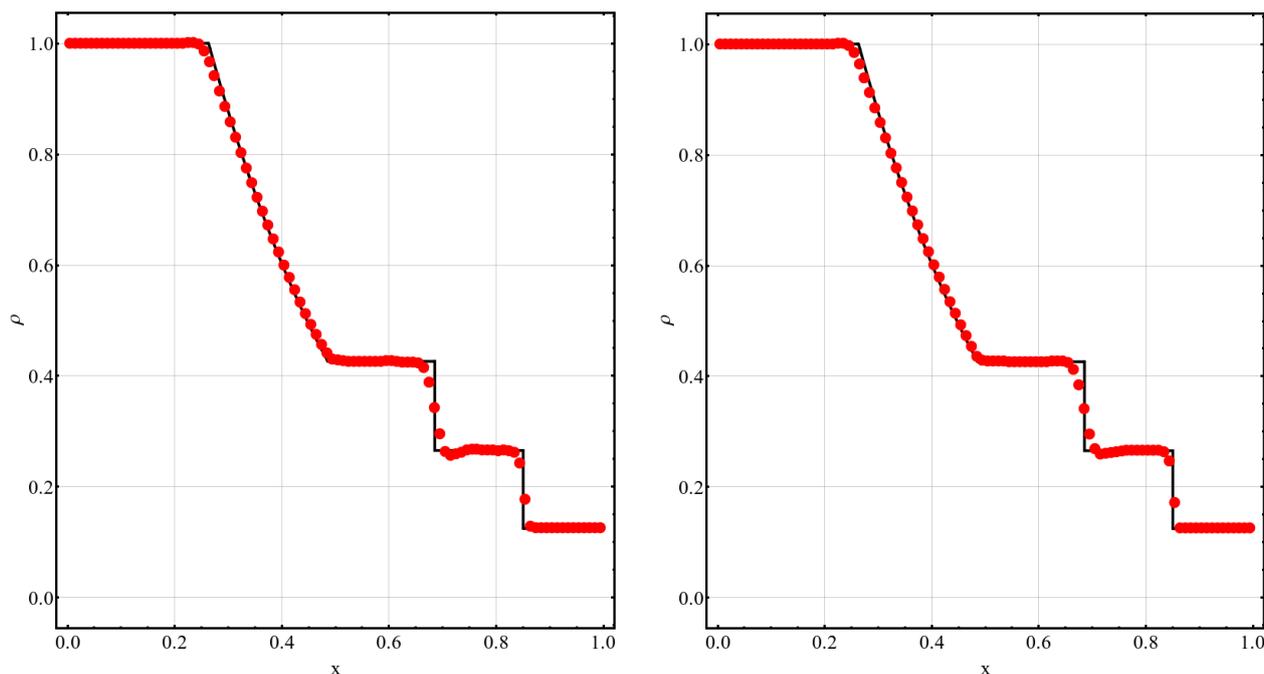


Рис. 6. Задача Сода. Распределение плотности в конечный момент времени, точное (сплошная линия) и приближенное (точки) решения. Расчет с $m = 1$, индикатором Хартена, лимитерами WENO (слева) и HWENO_SC (справа)

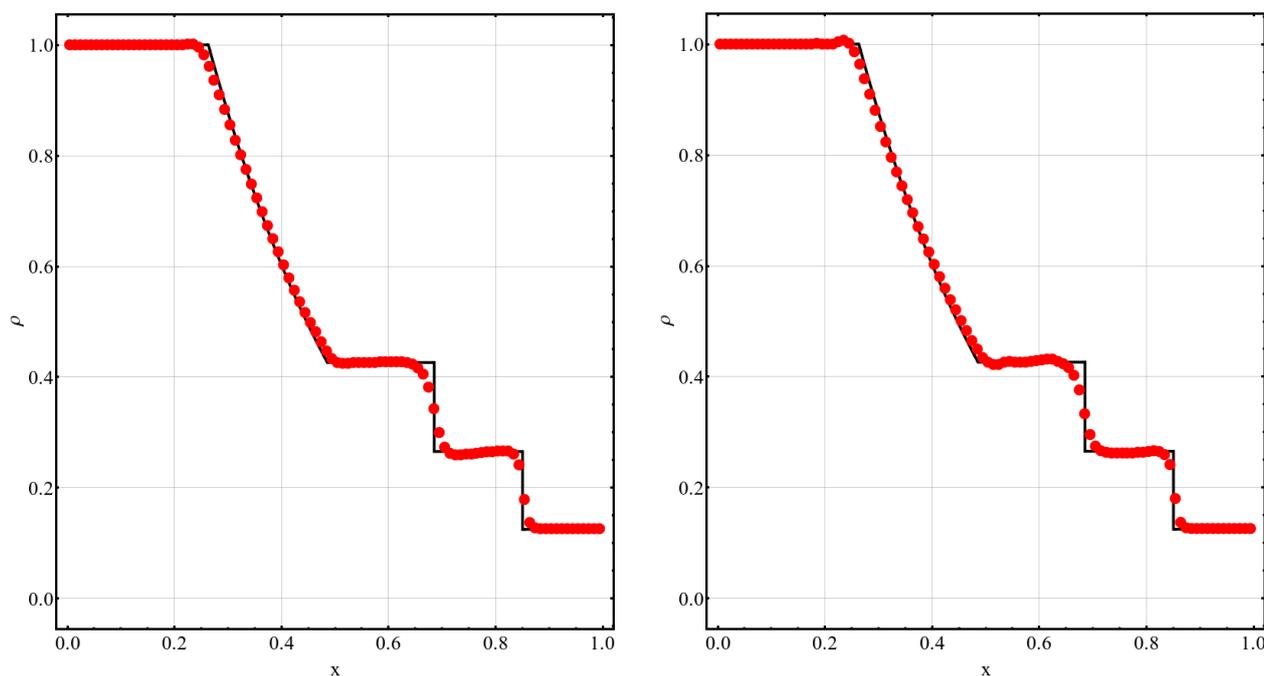


Рис. 7. Задача Сода. Распределение плотности в конечный момент времени, точное (сплошная линия) и приближенное (точки) решения. Расчет с $m = 1$, лимитером WENO_S и индикатором Хартена (слева) и KXRCF (справа)

К недостаткам лимитера WENO_S кроме диссипативности можно отнести сомнительные перспективы при увеличении числа базисных функций.

Преимуществами лимитеров HWENO и HWENO_Ave являются высокая (аналогичная HWENO_SC) разрешающая способность на ударной волне (2 ячейки) и контактном разрыве (4 ячейки). На рис. 8 и 9 приведены результаты расчетов для этих лимитеров и индикаторов Хартена и KXRCF соответственно.

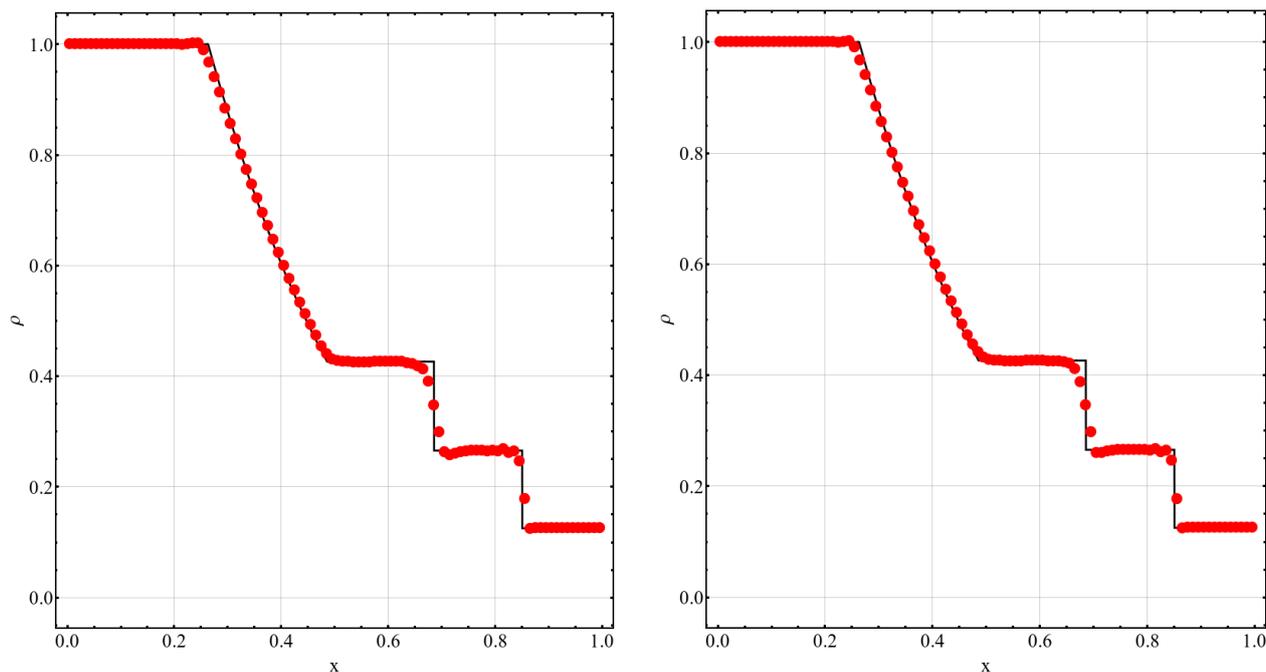


Рис. 8. Задача Сода. Распределение плотности в конечный момент времени, точное (сплошная линия) и приближенное (точки) решения. Расчет с $m = 1$, индикатором Хартена, лимитерами HWENO (слева) и HWENO Ave (справа)

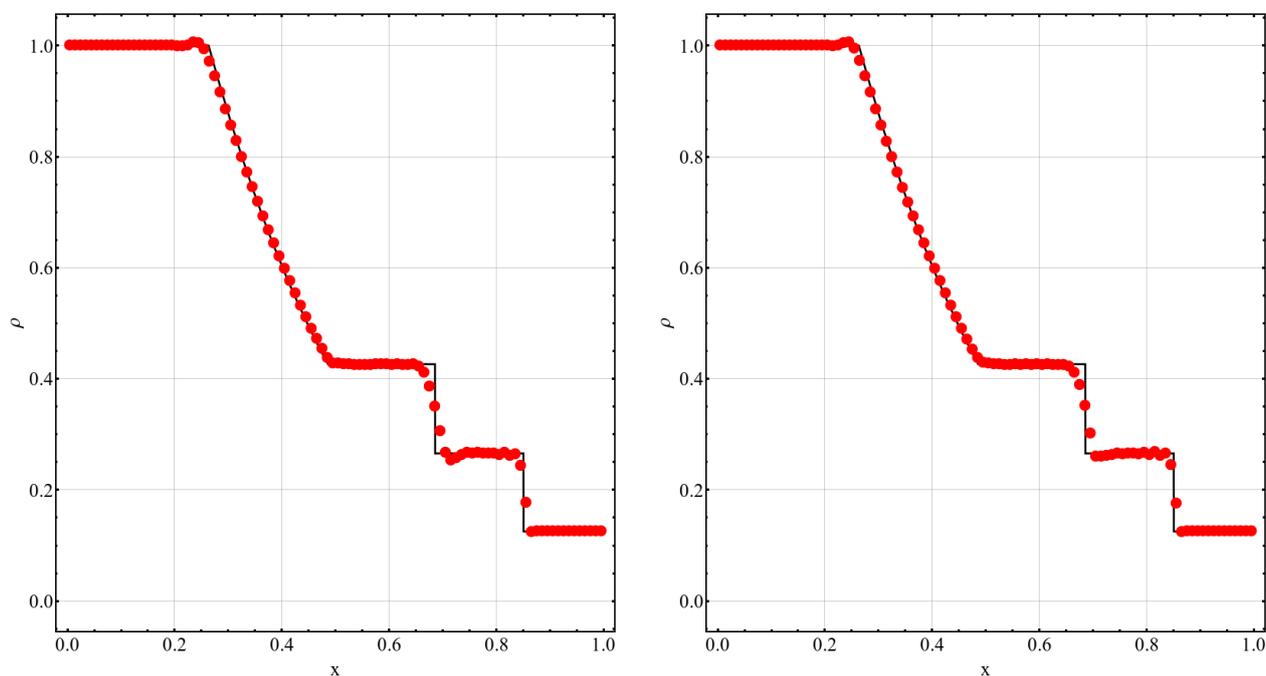


Рис. 9. Задача Сода. Распределение плотности в конечный момент времени, точное (сплошная линия) и приближенное (точки) решения. Расчет с $m = 1$, индикатором KXRCF, лимитерами HWENO (слева) и HWENO Ave (справа)

Видно, что использование обоих лимитеров приводит к заметным осцилляциям численного решения на участке, где оно должно быть постоянным — между контактными разрывом и ударной волной, и чуть меньшим — между волной разрежения и контактными разрывом.

Предотвратить возникновение осцилляций помогает применение лимитера к характеристическим переменным (рис. 10), что, разумеется, приводит к заметному повышению вычислительной сложности алгоритма. Использование характеристического разложения позволяет улучшить и результаты, получаемые при использовании лимитера HWENO_SC (рис. 11).

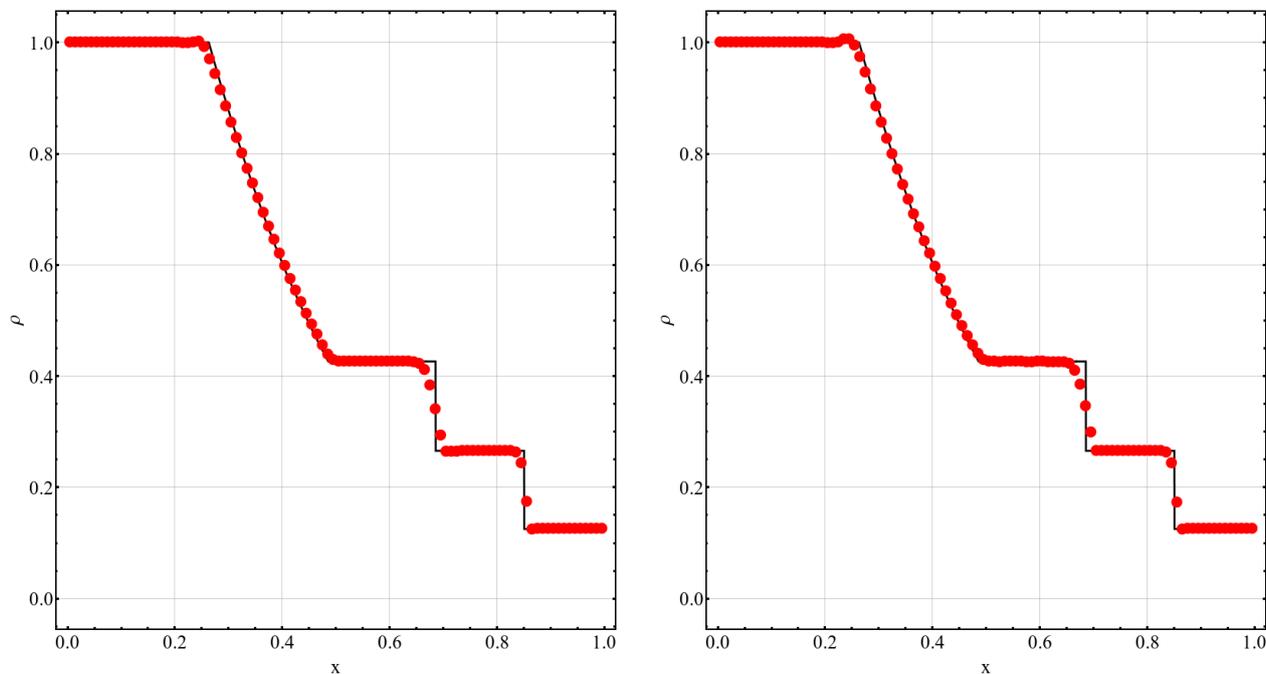


Рис. 10. Задача Сода. Распределение плотности, точное (сплошная линия) и приближенное (точки) решения. Расчет с $m = 1$, лимитером HWENO_Ave с характеристическим разложением, индикаторами Хартена (слева) и KXRCF (справа)

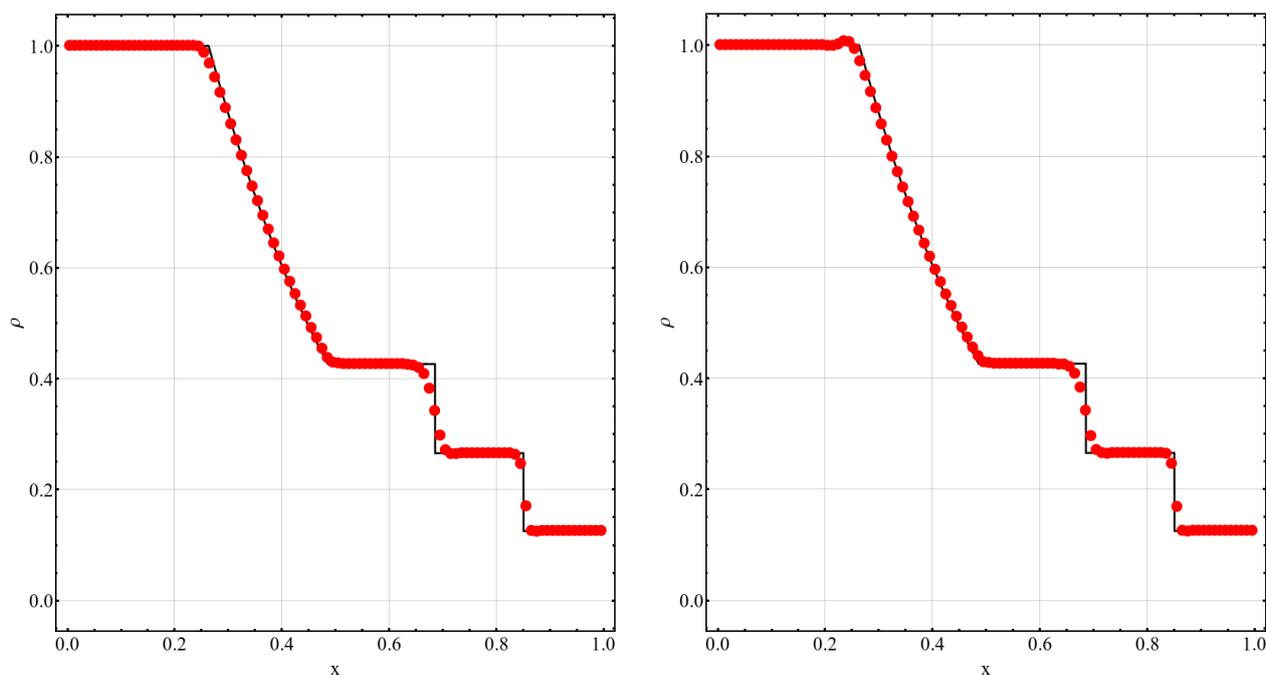


Рис. 11. Задача Сода. Распределение плотности, точное (сплошная линия) и приближенное (точки) решения. Расчет с $m = 1$, лимитером HWENO_SC с характеристическим разложением, индикаторами Хартена (слева) и KXRCF (справа)

Рассмотрим кратко эффект от применения базисных функций второго порядка. Отметим, что реализации большинства рассмотренных процедур в этом случае усложняются в силу того, в частности, что квадратичный полином, точнее, его экстраполяция, имеет существенно более высокую скорость роста вне ячейки определения. Алгоритм индикатора Хартена становится в этом случае существенно более сложным, в то время как алгоритм работы индикатора KXRCF по существу остается тем же, что и в линейном случае. Аналогично изменения не касаются классического лимитера WENO, но использование моментов высоких порядков делает лимитеры семейства HWENO менее устойчивыми.

На рис. 12 показаны результаты расчетов при квадратичной аппроксимации решения на ячейках с использованием индикатора KXRCF и лимитеров WENO и HWENO_SC.

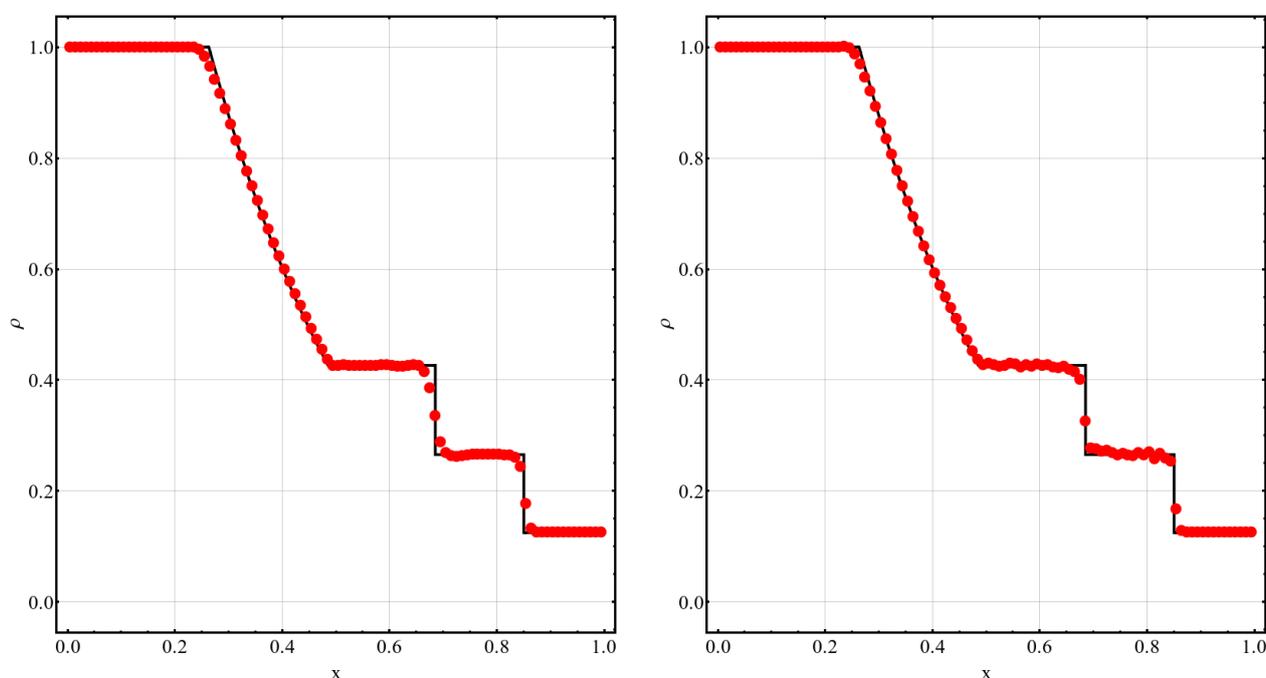


Рис. 12. Задача Сода. Распределение плотности в конечный момент времени, точное (сплошная линия) и приближенное (точки) решения. Расчет с $m = 2$, индикатором KXRCF и лимитерами WENO (слева) и HWENO_SC (справа)

Повышение порядка аппроксимации позволило подавить «паразитные» осцилляции численного решения на фронтах волн при использовании лимитера WENO, но в силу широкого шаблона лимитера разрешающая способность метода в итоге не возросла — фронт ударной волны по-прежнему воспроизводится на 2 ячейках, контактный разрыв — на 4 ячейках. Лимитер HWENO_SC в этом смысле показывает более высокое (практически предельно возможное) разрешение разрывов — одна ячейка на фронте ударной волны, 2–3 ячейки на контактном разрыве, однако использование данного лимитера приводит к «менее монотонному» решению на участках между разрывами, что может оказаться важным при решении практически значимых задач.

6. Заключение

Рассмотрена схема RKDG-метода для решения одномерной системы уравнений динамики вязкого совершенного сжимаемого нетеплопроводного газа. Проведено сравнение лимитеров семейства (H)WENO путем сопоставления результатов применения RKDG-метода с линейными и квадратичными базисными функциями к решению тестовой задачи Сода о распаде разрыва, решение которой включает в себя ударную волну, волну разрежения и контактный разрыв. Рассмотрены лимитеры, основанные на идеях как лагранжевой, так и эрмитовой интерполяции, а также аппроксимации в смысле метода наименьших квадратов. Основной целью исследования являлся поиск лимитеров, имеющих локальный шаблон (аналогичный шаблону RKDG-метода) и позволяющих при сравнительно низких вычислительных затратах получать приближенное решение с как можно меньшим числом «паразитных» осцилляций.

Представлен программный комплекс, доступный в виде исходного кода и предназначенный для проведения тестирования различных численных потоков, индикаторов немонотонности и лимитеров. Он позволяет воспроизвести представленные в работе результаты и проводить аналогичные методические исследования. Результаты тестовых расчетов показали, что наиболее существенно на качество получаемых результатов влияют выбор индикатора немонотонности, размер шаблона применяемого лимитера и, в некоторых случаях, применение лимитера к характеристическим переменным (инвариантам Римана) вместо исходных консервативных переменных. Повышение порядка аппроксимации и точности используемых формул оказывается важным для снижения диссипативности численной схемы, при этом повышение порядка используемых базисных функций влечет существенный рост вычислительных затрат при менее существенном повышении разрешающей способности метода и качества приближенного решения.

Литература

1. Cockburn B., Shu C.-W. TVB Runge — Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element method for scalar conservation laws II: General framework // *Math. Comp.* 1989. V. 52. Pp. 411–435.
2. Cockburn B., Lin S.-Y, Shu C.-W. TVB Runge — Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws III: One-dimensional systems // *J. Comp. Phys.* 1989. V. 84. Pp. 90–113.
3. Cockburn B. An Introduction to the Discontinuous Galerkin Method for Convection-Dominated Problems // *Lecture Notes in Mathematics.* 1998. V. 1697: Advanced Numerical Approximation of Nonlinear Hyperbolic Equations. Pp. 150–268.
4. Галанин М.П., Савенков Е.Б., Токарева С.А. Решение задач газовой динамики с ударными волнами RKDG-методом // *Матем. моделирование.* 2008. Т. 20, № 11. С. 55–66.
5. Mignone A., Bodo G. Shock-Capturing Schemes in Computational MHD // *Lecture Notes in Physics.* 2008. V. 754. Pp. 71–101.
6. Годунов С.К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // *Мат.сборник.* 1959. Т. 47, № 3. С. 271–306.
7. Галанин М.П., Савенков Е.Б. Методы численного анализа математических моделей. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2010. 591 с.
8. Toro E.F. *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics.* Berlin: Springer, 2009. 724 p.
9. Ладонкина М.Е., Неклюдова О.А., Тишкин В.Ф. Использование усреднений для сглаживания решений в разрывном методе Галеркина // *Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша.* 2017. № 89. 32 с.
10. Qiu J., Shu C.-W. A Comparison of Troubled-Cell Indicators for Runge — Kutta Discontinuous Galerkin Methods Using Weighted Essentially Nonoscillatory Limiters // *SIAM Journal on Scientific Computing.* 2005. V. 27, No. 3. P. 995–1013.
11. Liu X.-D., Osher S., Chan T. Weighted essentially nonoscillatory schemes // *J. Comp. Phys.* 1994. V. 115. Pp. 200–212.
12. Jiang G., Shu C.-W. Efficient implementation of weighted ENO schemes // *J. Comp. Phys.* 1996. V 126. Pp. 202–228.
13. Qiu J., Shu C.-W. Runge — Kutta Discontinuous Galerkin Method Using WENO Limiters // *SIAM J. Sci. Comput.* 2005. 26(3). Pp. 907–929.

14. Zhong X., Shu C.-W. A simple weighted essentially nonoscillatory limiter for Runge — Kutta discontinuous Galerkin methods // J. Comp. Phys. 2013. V. 232. Pp. 397–415.
15. Qiu J.-X., Shu C.-W. Hermite WENO schemes and their application as limiters for Runge-Kutta discontinuous Galerkin method: one-dimensional case // J. Comp. Phys. 2004. V. 193. Pp. 115–135.
16. Zhu J., Zhong X., Shu C.-W., Qiu, J.-X. Runge — Kutta Discontinuous Galerkin Method with a Simple and Compact Hermite WENO limiter // Communications in Computational Physics. 2016. V. 19(4). Pp. 944–969.
17. Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: Физматлит, 2001. 608 с.
18. Галанин М.П., Лукин В.В., Чечеткин В.М. Математическое моделирование струйных выбросов вещества в окрестности аккреционного диска // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2008. № 54. 36 с.
19. Дородницын Л.В. Искусственные граничные условия при численном моделировании дозвуковых течений газа // ЖВМ и МФ. 2005. Т.45, № 7. С. 1251–1278.
20. Harten A. ENO Schemes with Subcell Resolution // J. Comp. Phys. 1989. V. 83. Pp. 148–184.
21. Krivodonova L., Xin J., Remacle J.F., Chevaugeron N., Flaherty J.E. Shock detection and limiting with discontinuous Galerkin methods for hyperbolic conservation laws // Applied Numerical Mathematics. 2004. V. 48 (3-4). Pp. 323–338.

Содержание

1. Введение	3
2. Система уравнений газовой динамики	4
3. Численный метод	5
3.1. Общая схема RKDG метода	5
3.2. Численные потоки	8
3.3. Граничные условия	9
3.4. Монотонизация решения	10
3.5. Индикаторы немонотонности	11
3.6. Лимитеры	12
3.6.1. WENO	13
3.6.2. WENO_S	15
3.6.3. HWENO_SC	15
3.6.4. HWENO	16
4. Программная реализация	17
5. Результаты тестовых расчетов	20
5.1. Порядок точности	20
5.2. Разрешающая способность и монотонность	22
6. Заключение	29
Литература	30