



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 143 за 2017 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Семенов И.В., [Меньшов И.С.](#),
Немцев М.Ю.

Математическое
моделирование
осесимметричных
внутрибаллистических
процессов

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Семенов И.В., Меньшов И.С., Немцев М.Ю. Математическое моделирование осесимметричных внутрибаллистических процессов // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2017. № 143. 20 с. doi:[10.20948/prepr-2017-143](https://doi.org/10.20948/prepr-2017-143)
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2017-143>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Российской академии наук**

И.В.Семёнов, И.С.Меньшов, М.Ю.Немцев

**Математическое моделирование
осесимметричных
внутрибаллистических процессов**

Москва — 2017

*Семёнов И.В.*¹, *Меньшов И.С.*², *Немцев М.Ю.*¹

**Математическое моделирование осесимметричных
внутрибаллистических процессов**

Описаны математическая модель и численный метод для исследования внутрибаллистического процесса в двумерной осесимметричной постановке. Газопороховая смесь моделируется двухфазной неравновесной гетерогенной средой, состоящей из многокомпонентной газовой фазы продуктов горения и полидисперсной конденсированной фазы элементов заряда. Предложен численный метод Годуновского типа для решения неконсервативной системы уравнений Эйлера. Для расчета перемещения метаемого тела используется метод свободной границы для системы уравнений двухфазной гидродинамики. Представлены результаты исследования волнового внутрибаллистического процесса при горении модульного заряда.

Ключевые слова: модель двухфазной неравновесной гетерогенной смеси, внутренняя баллистика, горение модульных метательных зарядов

Ilya Vitalievich Semenov, Igor Stanislavovich Menshov, Maksim Yurievich Nemtsev

Mathematical modeling of the axisymmetric internal ballistics processes

Mathematical model and numerical method for investigating the internal ballistics process in a two-dimensional axisymmetric formulation are described. The gas-powder mixture is modeled by a two-phase nonequilibrium heterogeneous medium consisting of a multicomponent gas phase of the combustion products and a polydisperse condensed phase of the charge elements. A numerical method of the Godunov's type is proposed for solving the non-conservative system of Euler equations. To calculate the displacement of the body being thrown, the free boundary method is used for the system of equations of two-phase hydrodynamics. The results of an investigation of the wave interior ballistics process during the combustion of a modular charge are presented.

Key words: mathematical model of the two-phase nonequilibrium heterogeneous mixture, internal ballistics, burning of modular propellant charges

¹ Институт автоматизации проектирования РАН, 123056 Москва, 2-ая Брестская ул., 19/18

² ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 125047 Москва, Миусская пл., 4

Введение

В настоящее время для моделирования внутрибаллистических процессов широко применяется термодинамическая модель [1]. Однако при проектировании перспективных систем, использующих комбинированные или модульные заряды, возможности термодинамического подхода сильно ограничены и не позволяют разрешить сложные течения гетерогенной среды с учётом процессов горения. Проектирование таких зарядов приводит к необходимости исследования фундаментальных проблем, связанных с протеканием внутрибаллистического процесса. Одной из таких проблем, например, является интенсивный волновой процесс, возникающий при горении модульного метательного заряда, который может приводить к значительным колебаниям давления внутри баллистической установки. Экспериментальные исследования внутрибаллистических процессов при использовании модульных метательных зарядов сильно ограничены и позволяют получить лишь фрагментарные данные, такие как скорость снаряда на выходе из ствола, временные зависимости давления в некоторых точках наблюдения, а также ограниченный набор данных о температуре ствола. В то же время, математическое моделирование дает значительно больше возможностей для исследования и понимания основных закономерностей и механизмов возникновения внутрибаллистических волновых процессов. Даже при использовании упрощенных квазиодномерных моделей в работах [2 – 5] удалось качественно описать внутрикамерный волновой процесс и получить оценки основных его параметров. Более детальный анализ требует более сложные модели, которые учитывают реальную пространственную геометрию заряда, правильно учитывают горение воспламенителей, а также неравновесные тепловые и силовые процессы между несгоревшей твердой компонентой пороховых элементов и газообразными продуктами горения.

Таким образом, для описания внутрибаллистического процесса в модульных и комбинированных зарядах необходимо использовать двумерную осесимметричную модель неравновесной гетерогенной смеси реагирующей твердой компоненты и газовой компоненты продуктов реакции горения. В настоящей работе представлены основные положения этой модели и численный метод решения системы определяющих уравнений осесимметричного внутрибаллистического процесса. Полученная система уравнений относится к так называемым в литературе неконсервативным уравнениям Эйлера [6, 7]. Неконсервативные члены в уравнениях возникают из-за соплового эффекта, связанного с неравномерным распределением по пространству объемной доли твердой компоненты. Неконсервативная часть в системе определяющих уравнений привносит определенные трудности в математическое исследование решений и в построение адекватных дискретных моделей. Так, например, разрывные решения требуют разработки специальных математических

подходов для их исследований, так как стандартная теория на основе соотношений Рэнкина-Гюгонио не работает [6, 8]. Для дискретизации неконсервативной части уравнений мы применяем подход, предложенный в работах [8, 9]. Он основан на модифицированной схеме В.В. Русанова, которая обеспечивает выполнение свойства однородности для неконсервативных уравнений Эйлера. Возможности численного метода продемонстрированы на решении задачи о возникновении и развитии волнового процесса при горении модульного заряда. Исследовано влияние на волновой процесс начального расположения заряда и положения источника воспламенения.

1 Математическая модель

Рассматривается гетерогенная смесь дисперсной фазы пороховых элементов и газовой фазы продуктов горения, которая моделируется двумя взаимопроникающими континуумами [10 – 13]. Газовая фаза состоит из гетерогенной смеси N компонентов продуктов горения N пороховых элементов (пороховые газы, которые нумеруются от 1 до N) и одной инертной компоненты – воздуха (индекс $N + 1$). Дисперсная фаза состоит из N сортов пороха, которые могут отличаться друг от друга законом горения, характером механического и теплового взаимодействия с газовой фазой и другими параметрами. Давление, температура и скорость газовых компонентов считаются одинаковыми. Движение дисперсной фазы также описывается одним межгранулярным давлением и одной скоростью.

Обозначим объемную долю j -го компонента дисперсной фазы β_j , суммарную объемную долю дисперсной фазы β . Тогда объемная доля газовой фазы или пористость среды определяется как $\varphi = 1 - \beta$. Материал пороха предполагается жестким и недеформируемым и характеризуется постоянной плотностью δ_j .

Компонент газовой смеси характеризуется средней по пористости плотностью

$$\rho_j = \frac{\varphi_j \rho_{0j}}{\varphi},$$

где ρ_{0j} – его истинная плотность, а φ_j – объемная доля так, что

$$\sum_{i=1}^{N+1} \varphi_i = \varphi.$$

Предполагается, что каждая компонента газовой фазы описывается УРС Дюпре [11] со своими параметрами. Тогда смесь можно считать эффективной газовой средой также с УРС Дюпре с приведенными параметрами – показателем адиабаты γ , коволюмом b и молекулярным весом M , зависящими от массового состава смеси:

$$p(1-b\rho) = \frac{\rho RT}{M}, \quad \varepsilon = \frac{p(1-b\rho)}{(\gamma-1)\rho},$$

$$\rho = \sum_{j=1}^{N+1} \rho_j, \quad \frac{1}{M} = \frac{1}{\rho} \sum_{j=1}^{N+1} \frac{\rho_j}{M_j}, \quad b = \frac{1}{\rho} \sum_{j=1}^{N+1} \rho_j b_j, \quad \gamma = 1 + \frac{\sum_{j=1}^{N+1} \rho_j / M_j}{\sum_{j=1}^{N+1} \rho_j / [M_j (\gamma_j - 1)]},$$

где R – универсальная газовая постоянная, ε – удельная внутренняя энергия газовой фазы.

Течение в канале рассматривается в двумерном осесимметричном приближении и предполагается, что все параметры зависят от двух пространственных переменных (z, r) , а скорость имеет две соответствующие компоненты.

Система уравнений двумерного осесимметричного течения газопороховой смеси выражает в дифференциальной форме фундаментальные законы сохранения массы, импульса и энергии для газовой и дисперсной фазы, соответственно. Обозначив через $E = 0.5(u_1^2 + u_2^2) + e$ удельную полную энергию газа, u_1 и u_2 – компоненты скорости газа, v_1 и v_2 – компоненты скорости дисперсной фазы, $J = E + p/\rho$ – удельную полную энтальпию газовой фазы, \dot{m}_j , $\dot{\Pi}_j$ и \dot{Q}_j , $j=1, \dots, N$, соответственно скорости изменения массы, импульса и энергии в единице объема газовой фазы в результате горения пороховых элементов и межфазного взаимодействия, получим следующую систему уравнений для газовой фазы:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \varphi \rho_j}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial r \varphi \rho_j u_2}{\partial r} + \frac{\partial \varphi \rho_j u_1}{\partial z} = \dot{m}_j, \quad j=1, \dots, N \\ \frac{\partial \varphi \rho_{N+1}}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial r \varphi \rho_{N+1} u_2}{\partial r} + \frac{\partial \varphi \rho_{N+1} u_1}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \varphi \rho u_1}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r \varphi \rho u_2 u_1)}{\partial r} + \frac{\partial (\varphi (\rho u_1 u_1 + P))}{\partial z} = P \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \sum_{j=1}^{N+1} (\dot{\Pi}_j)_z \\ \frac{\partial \varphi \rho u_2}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r \varphi (\rho u_2 u_2 + P))}{\partial r} + \frac{\partial (\varphi \rho u_2 u_1)}{\partial z} = \frac{P}{r} \frac{\partial r \varphi}{\partial r} + \sum_{j=1}^{N+1} (\dot{\Pi}_j)_r \\ \frac{\partial}{\partial t} (\varphi \rho E) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \varphi \rho J u_2) + \frac{\partial}{\partial z} (\varphi \rho J u_1) = -P \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \beta v_2) + \frac{\partial}{\partial z} (\beta v_1) \right) + \sum_{j=1}^{N+1} \dot{Q}_j \end{array} \right. \quad (1)$$

Уравнения сохранения массы и импульса для дисперсной фазы имеют следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \beta_j \delta_j^0}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r \beta_j \delta_j^0 v_2)}{\partial r} + \frac{\partial (\beta_j \delta_j^0 v_1)}{\partial z} = -\dot{m}_j, j = 1, \dots, N \\ \frac{\partial \beta \delta^0 v_1}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r \beta \delta^0 v_2 v_1)}{\partial r} + \frac{\partial (\beta (\delta^0 v_1 v_1 + \sigma))}{\partial z} = -\beta \frac{\partial P}{\partial z} - \sum_{j=1}^{N+1} (\dot{\Pi}_j)_z \\ \frac{\partial \beta \delta^0 v_2}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r \beta (\delta^0 v_2 v_2 + \sigma))}{\partial r} + \frac{\partial (\beta \delta^0 v_1 v_2)}{\partial z} = -\beta \frac{\partial P}{\partial r} - \sum_{j=1}^{N+1} (\dot{\Pi}_j)_r + \frac{\beta \sigma}{r} \end{array} \right. \quad (2)$$

где $\delta^0 = \sum \delta_j^0 \beta_j / \beta$ – средняя истинная плотность дисперсной фазы, σ – межгранулярное давление, которое вводится для препятствования чрезмерному уплотнению дисперсной фазы. Этот механизм включается, когда объемная доля дисперсной фазы достигает критического значения плотной упаковки. Межгранулярное давление зависит от объемной доли β и аппроксимируется следующей зависимостью:

$$\sigma(\beta) = H[\beta - \beta_0] B \left[\left(\frac{1 - \beta_0}{1 - \beta} \right)^k - 1 \right],$$

где β_0 – объемная доля, соответствующая плотной упаковке, а параметры B и k – эмпирические константы, определяемые на основе экспериментальных данных. Ввиду использования Эйлера подхода, в модель требуется ввести также уравнения переноса Лагранжевых переменных – относительной толщины сгоревшего свода порохового элемента z , которая характеризует процесс горения [10], а также параметров температурного профиля внутри порохового элемента для описания процесса прогрева пороха.

Систему уравнений (1) – (2) можно записать в консервативном виде:

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial r} + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial z} = \mathbf{S}_p + \mathbf{S}_m + \mathbf{S}_r, \quad (3)$$

где \mathbf{q} – вектор консервативных переменных, \mathbf{f} и \mathbf{g} потоковые векторы, \mathbf{S}_p , \mathbf{S}_m и \mathbf{S}_r – векторы правых частей, отвечающие членам с давлением (сопловые члены), межфазному обмену массой, импульсом и энергией и источниковым членам из-за осевой симметрии соответственно.

Величины $\dot{\Pi}_j$ и \dot{Q}_j в (1) и (2), которые определяют скорость приращения импульса и энергии в единице объема газовой фазы за счет горения пороховых элементов и межфазного взаимодействия, имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{P}}_j = \dot{m}_j \mathbf{v} - \boldsymbol{\tau}_j, j = 1, \dots, N, \\ \dot{\mathbf{P}}_{N+1} = -\boldsymbol{\tau}_{N+1} \\ \dot{Q}_j = \dot{m}_j \left[\frac{f_j}{\gamma_j - 1} + 0.5(v_1^2 + v_2^2) \right] - (\boldsymbol{\tau}_j, \mathbf{v}) - q_j, j = 1, \dots, N, \\ \dot{Q}_{N+1} = -(\boldsymbol{\tau}_{N+1}, \mathbf{v}) - q_{N+1} \end{cases}$$

где f_j – сила j -го пороха, q_j – тепловой поток между газовой и дисперсной фазами, $\boldsymbol{\tau}_j$ – сила межфазного трения, которые будут определены ниже.

Учет межфазного теплообмена происходит либо в результате решения задачи о прогреве порохового элемента на основе одномерного уравнения теплопроводности, либо на основе приближенного аналитического подхода.

Задача теплопроводности для расчета прогрева порохового элемента записывается в следующем виде:

$$\frac{\partial T_j}{\partial t} = \frac{\lambda_j}{c_j \delta_j} \frac{\partial^2 T_j}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial T_j}{\partial y} \Big|_{y=e_j} = \alpha_j (T - T_j); \quad T_j \Big|_{y=0} = T_{0j}; \quad T_j(y, 0) = T_{0j}, \quad (4)$$

где T_j , λ_j , c_j – температура, коэффициент теплопроводности и теплоемкость j -го сорта пороха, T_{0j} – его начальная температура, e_j – половина толщины свода горения порохового элемента, y – координата, которая отсчитывается от центра порохового свода к его поверхности. Воспламенение порохового элемента происходит в результате его прогрева через время t_j , когда температура на его поверхности достигает значения, соответствующего априорно заданной температуре воспламенения. После того, как температура поверхности порохового элемента достигает температуры воспламенения, температурный профиль внутри свода горения «замораживается» и может учитываться в дальнейшем для коррекции скорости горения прогретого свода [11]. Коэффициент α_j определяется как:

$$\alpha_j = \frac{\lambda}{\lambda_j} \text{Nu}_j \frac{s_j}{6}, \quad (5)$$

где $s_j = \chi_j / e_j$ – площадь межфазной поверхности единицы объема дисперсной фазы для зерненных порохов, χ_j – безразмерный коэффициент формы порохового элемента [10]. В литературе [11 – 15] приводятся различные представления числа Нуссельта Nu_j для учета конвективного теплообмена в дисперсных средах, далее в расчетах использовалось следующее соотношение:

$$\text{Nu}_j = \begin{cases} 2.0 + 0.106(\varphi \text{Re}_j) \text{Pr}^{1/3} & \text{при } \text{Re}_j \leq 200, \\ 2.27 + 0.6(\varphi \text{Re}_j)^{2/3} \text{Pr}^{1/3} & \text{при } \text{Re}_j > 200. \end{cases}$$

Число Рейнольдса Re_j для зерненого пороха и число Прандтля Pr определяются по формулам:

$$\text{Re}_j = \frac{6e_j \rho |\mathbf{u} - \mathbf{v}|}{\mu \chi_j}, \quad \text{Pr} = \frac{\mu c_p}{\lambda},$$

где $\mu(T)$ – динамическая вязкость пороховых газов, а c_p – теплоемкость пороховых газов при постоянном давлении.

Приближенный аналитический подход для нахождения температуры на поверхности порохового элемента основан на аппроксимации профиля температуры внутри температурного слоя толщиной $h_j(t)$, на который прогревается пороховой элемент, полиномиальной зависимостью третьей степени [12].

Тепловой поток между газовой и дисперсной фазами, который рассчитывается после решения уравнения теплопроводности или нахождения температуры на поверхности порохового элемента с помощью приближенного аналитического подхода, вычисляется в соответствии с законом Ньютона:

$$q_j = \frac{1}{6} \beta_j s_j^2 \lambda \text{Nu}_j (T - T_{sj}) H[t_j - t],$$

где T_{sj} – температура поверхности пороха, T – окружающего газа, $H[.]$ – функция Хевисайда, t_j – время до воспламенения j -го сорта пороха.

Сила сопротивления τ_j , действующая на газ со стороны j -го компонента дисперсной фазы, определяется соотношением:

$$\tau_j = \frac{1}{8} \beta_j s_j C_j \rho |\mathbf{u} - \mathbf{v}| (\mathbf{u} - \mathbf{v}), \quad j = 1, \dots, N,$$

где C_j – коэффициент сопротивления, для которого мы использовали формулу Эргана [16] в диапазоне пористости от 0.4 до 0.75. Вне этого диапазона использовались полуэмпирические зависимости [11].

Газоприток \dot{m}_j , который начинается по окончании воспламенительного периода, определяется степенным законом горения

$$\dot{m}_j = A_j p^{\nu_j} H[t - t_j], \quad j = 1, \dots, N,$$

где A_j – множитель, зависящий от геометрической формы порохового зерна, его начальной температуры, температуры внутри прогретого свода, параметров обдувающего потока (эрозионные эффекты) и химического состава пороха [11, 17], ν_j – постоянный показатель степени в законе горения.

2 Численный метод

Расчет течения газопороховой реагирующей смеси основывается на интегральном представлении определяющей системы уравнений (3) и методе конечных объемов [18]. Предполагая, что Ω – некоторая двумерная замкнутая область в плоскости (r, z) , ограниченная границей Γ , уравнения (3) сводятся к следующим интегральным соотношениям:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\int_{\Omega} \mathbf{q} d\Omega \right] + \int_{\Gamma} (\mathbf{f}n_r + \mathbf{g}n_z) ds = \int_{\Omega} \mathbf{S}_p d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{S}_m d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{S}_r d\Omega, \quad (6)$$

где $\mathbf{n} = (n_r, n_z)$ – локальный вектор внешней нормали к границе Γ . Применяя это интегральное соотношение последовательно к каждой ячейке расчетной сетки Ω_i , приходим к системе дискретных алгебраических уравнений для определения средних по ячейке значений консервативного вектора на временном слое t^{n+1} – \mathbf{q}_i^{n+1} по соответствующим значениям \mathbf{q}_i^n с предыдущего слоя t^n :

$$\mathbf{q}_i^{n+1} = \mathbf{q}_i^n - \frac{1}{\omega_i} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left[\sum_i (\mathbf{f}n_r + \mathbf{g}n_z)_i s_i \right] dt + \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left[(\mathbf{S}_p)_i + (\mathbf{S}_m)_i + (\mathbf{S}_r)_i \right] dt, \quad (7)$$

где ω_i – площадь контрольного объема Ω_i , s_i – длина бокового ребра, суммирование в правой части ведется по всем ребрам ячейки. Основным элементом расчетной схемы является аппроксимация потоковых членов через ребра ячеек (второе слагаемое в правой части уравнения (7)).

Дальнейшая дискретизация уравнений (7) строится на принципе разделения по физическим процессам. Процесс перехода с временного слоя t^n на временной слой t^{n+1} разделяется на три составляющие:

- динамика газовой фазы, описываемая системой уравнений:

$$\mathbf{q}_{gi}^{n+1} = \mathbf{q}_{gi}^n - \frac{1}{\omega_i} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left[\sum_i (\mathbf{f}_g n_r + \mathbf{g}_g n_z)_i s_i \right] dt + \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left[(\mathbf{S}_{pg})_i + (\mathbf{S}_{rg})_i \right] dt; \quad (8)$$

- динамика дисперсной фазы, описываемая системой уравнений:

$$\mathbf{q}_{si}^{n+1} = \mathbf{q}_{si}^n - \frac{1}{\omega_i} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left[\sum_i (\mathbf{f}_s n_r + \mathbf{g}_s n_z)_i s_i \right] dt + \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left[(\mathbf{S}_{ps})_i + (\mathbf{S}_{rs})_i \right] dt; \quad (9)$$

- изменение состояния газовой и дисперсной фаз из-за процессов межфазных взаимодействий, включающих массообмен в результате горения

пороховых элементов, обмен импульсом и энергией вследствие релаксационных процессов, а также прогрев элементов дисперсной фазы:

$$\mathbf{q}_i^{n+1} = \mathbf{q}_i^n + \int_{t^n}^{t^{n+1}} (\mathbf{S}_m)_i dt. \quad (10)$$

При решении уравнений (8) на временном интервале $[t^n, t^{n+1}]$ параметры дисперсной фазы \mathbf{q}_s предполагаются неизменными («замороженными» во времени), а уравнений (9), напротив, неизменными являются параметры газовой фазы \mathbf{q}_g .

Дискретизация уравнений (8) и (9) проводится в единой манере с использованием интерполяционной предиктор-корректор схемы второго порядка точности по времени и пространственным переменным. Это – явная двухстадийная схема, на первом этапе которой считаются промежуточные величины на половинном шаге $t^{n+1/2}$:

$$\mathbf{q}_i^* = \mathbf{q}_i^n - 0.5 \frac{\Delta t}{\omega_i} \sum_{\sigma} (\mathbf{f}(\mathbf{q}_{\sigma}) n_r + \mathbf{g}(\mathbf{q}_{\sigma}) n_z)_{\sigma} s_{\sigma} + 0.5 [(\mathbf{S}_p)_i + (\mathbf{S}_r)_i] \Delta t, \quad (11)$$

где \mathbf{q}_{σ} – значения компонентов вектора \mathbf{q} , полученные интерполяцией значений из центра ячейки с использованием градиента $\nabla \mathbf{q}_i^n$. Вектор градиента здесь рассчитывается по локальному шаблону методом наименьших квадратов [19]. Интерполяция основывается на MUSCL-подходе с использованием противопоточной схемы третьего порядка точности (на равномерной сетке) [20].

На втором этапе производится расчет значений компонент определяющего вектора консервативных переменных на новом временном слое t^{n+1} :

$$\mathbf{q}_i^{n+1} = \mathbf{q}_i^n - \frac{\Delta t}{\omega_i} \sum_{\sigma} T_{\sigma}^{-1} \mathbf{F}_{\sigma}^* s_{\sigma} + [(\mathbf{S}_p^*)_i + (\mathbf{S}_r^*)_i] \Delta t,$$

где \mathbf{F}_{σ} – вектор численного потока в направлении внешней нормали к ребру счетной ячейки. Верхний индекс «*» означает, что значения вычисляются по значениям соответствующих величин с промежуточного временного слоя (уравнение (11)).

Аппроксимация численного потока \mathbf{F}_{σ} в случае непрерывной пористости выполняется по методу С.К. Годунова [21]. На ребрах с разрывом пористости используется модифицированный поток Русанова. Соответственно, в двухволновом приближении решаются задачи Римана о распаде произвольного разрыва для газовой и дисперсной фазы с начальными данными, полученными интерполяцией величин промежуточного слоя из центров ячеек на их ребра:

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}_{g\sigma}^{*R} &= \mathbf{Q}_{g\sigma}^{*R}(\lambda, \mathbf{Q}_{g\sigma}^{*-}, \mathbf{Q}_{g\sigma}^{*+}), \\ \mathbf{Q}_{s\sigma}^{*R} &= \mathbf{Q}_{s\sigma}^{*R}(\lambda, \mathbf{Q}_{s\sigma}^{*-}, \mathbf{Q}_{s\sigma}^{*+}),\end{aligned}$$

где λ – автомодельная переменная в локальном базисе ребра ячейки, верхние индексы «-» и «+» обозначают экстраполированные на ребро значения из текущей и соседней ячейки соответственно. Детали аппроксимации численного потока с использованием модифицированной схемы Русанова можно найти в работах [9, 22].

Решение уравнений (10) третьего этапа выполняется с помощью формул дифференцирования назад, что завершает вычислительный алгоритм перехода с временного слоя t^n на слой t^{n+1} .

При моделировании внутрибаллистического процесса в двумерной осесимметричной постановке необходимо рассчитывать взаимодействие пороховых газов с подвижным снарядом. Для этого предлагается использовать метод свободной границы [23]. Кратко опишем модификацию этого метода для уравнений двухфазной гидродинамики.

Рассмотрим некоторую область $\Omega \subset R^2$, ограниченную замкнутой гладкой кривой S . Пусть \mathbf{n} – внешняя нормаль к S . Пусть также $\Gamma \in R^2$ представляет собой поверхность твердого тела, находящегося в контакте со средой. Учесть влияние твердого объекта на течение среды можно с помощью введения в правую часть уравнений эффективного вектора \mathbf{F}_w . Система уравнений (6) тогда модифицируется следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\int_{\Omega} \mathbf{q} d\Omega \right] + \int_S (\mathbf{f}n_r + \mathbf{g}n_z) ds = \int_{\Omega} \mathbf{S}_p d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{S}_m d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{S}_r d\Omega - \int_{\gamma(\Omega)} \mathbf{F}_w dS, \quad (12)$$

где $\gamma(\Omega) = \Omega \cap \Gamma$. Эффективный поток \mathbf{F}_w должен препятствовать потерям массы, импульса и энергии на границе $\gamma(\Omega)$ из-за протекания газа и генерировать импульс давления, эквивалентный импульсу, порождаемому в результате взаимодействия среды с поверхностью тела:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{gw} &= \begin{bmatrix} \alpha \rho_i (\mathbf{u} - \mathbf{U}_s, \mathbf{n}) \\ \alpha \rho (\mathbf{u} - \mathbf{U}_s, \mathbf{n}) \mathbf{u} + \alpha (p - p_w) \mathbf{n} \\ \alpha \rho (\mathbf{u} - \mathbf{U}_s, \mathbf{n}) E + \alpha (p \mathbf{u} - p_w \mathbf{U}_s, \mathbf{n}) \end{bmatrix}, \\ \mathbf{F}_{sw} &= \begin{bmatrix} \delta_i \beta_i z_i (\mathbf{v} - \mathbf{U}_s, \mathbf{n}) \\ \delta_i \beta_i (\mathbf{v} - \mathbf{U}_s, \mathbf{n}) \\ \delta^0 \beta (\mathbf{v} - \mathbf{U}_s, \mathbf{n}) \mathbf{v} + \beta (\sigma - \sigma_w) \mathbf{n} \end{bmatrix}.\end{aligned} \quad (13)$$

Здесь p_w – давление, возникающее на поверхности Γ в результате взаимодействия газовой фазы с поверхностью тела, σ_w – межгранулярное псевдодавление, возникающее на поверхности Γ в результате взаимодействия

дисперсной фазы с поверхностью тела, \mathbf{U}_s – вектор локальной скорости поверхности тела.

Расчетная схема при наличии в потоке среды твердых объектов строится следующим образом. Вначале проводится сквозной счет по базовой схеме, описанной выше. При этом не принимается во внимание присутствие поверхности твердого тела. Полученные значения вектора решения $\tilde{\mathbf{q}}^{n+1}$ модифицируются затем с помощью уравнения:

$$\mathbf{q}_i^{n+1} = \tilde{\mathbf{q}}_i^{n+1} - \frac{\Delta t}{\mathcal{G}_i \omega_i} (\mathbf{F}_w)_\gamma^{n+1} s_\gamma, \quad (14)$$

где s_γ – длина кривой $\gamma(\Omega)$, \mathcal{G}_i – часть объема ω_i , занимаемого средой в пересекаемой ячейке. Уравнение (14) решается итерационным методом.

3 Исследование волнового процесса при горении модульного заряда

Горение модульного заряда рассматривается в трубе круглого сечения, состоящей из двух частей постоянного радиуса, соединенных переходным конусом, левый конец (затвор) которой закрыт, а правый (дульный срез) открыт в атмосферу. Модуль имеет форму цилиндра с цилиндрическим вырезом в центре. В состав модуля входит пластинчатый порох. В цилиндрическом вырезе располагается воспламенитель, в качестве которого используется дымный ружейный порох (ДРП) (см. рис. 1).

В начальный момент времени труба заполнена воздухом при нормальных условиях. Воспламенение ДРП происходит в первом модуле, при этом воспламенение основного заряда и воспламенителей в других модулях происходит при достижении на их поверхности заданной температуры воспламенения. Движение снаряда начинается после достижения на его дне давления форсирования.

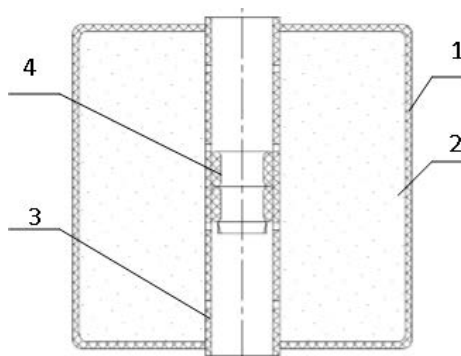


Рис. 1. Схема модуля: 1 – тканевый картуз; 2 – порох; 3 – осевое воспламенительное устройство (ОВУ); 4 – воспламенитель (навеска ДРП в тканевой оболочке).

На рис. 2 представлен пример начальной закладки из 5 модулей у затвора. Пороховой заряд выделен серым цветом, в центре каждого модуля расположен ДРП.

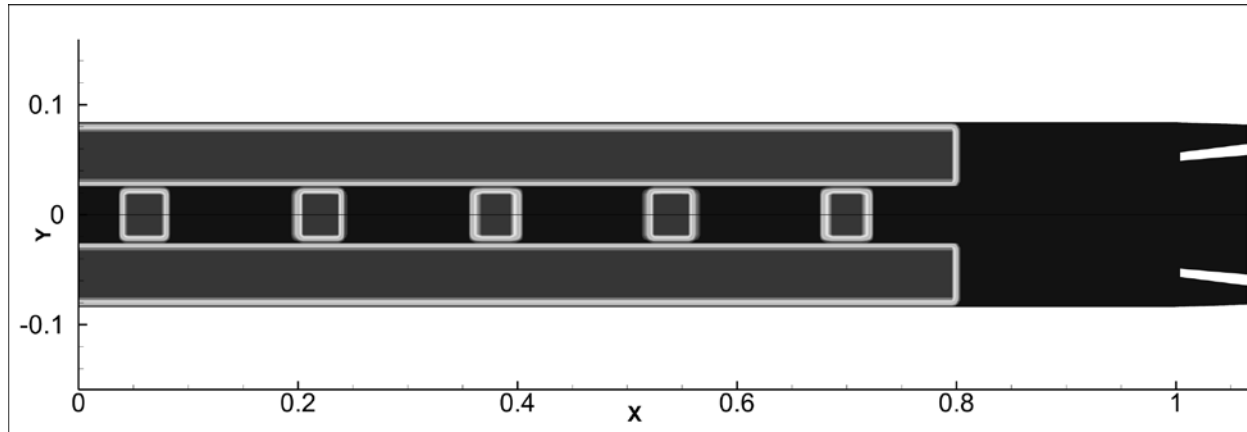
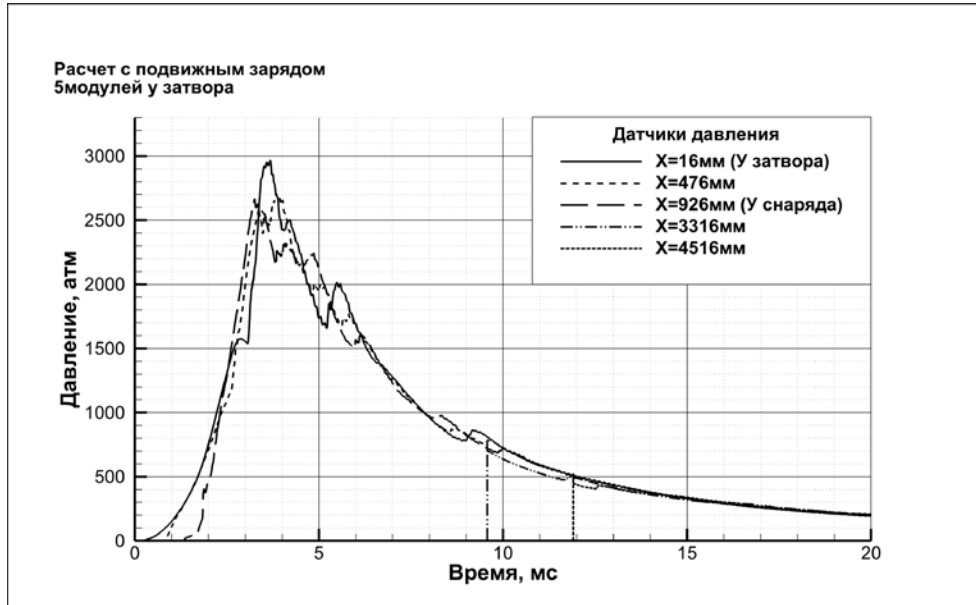
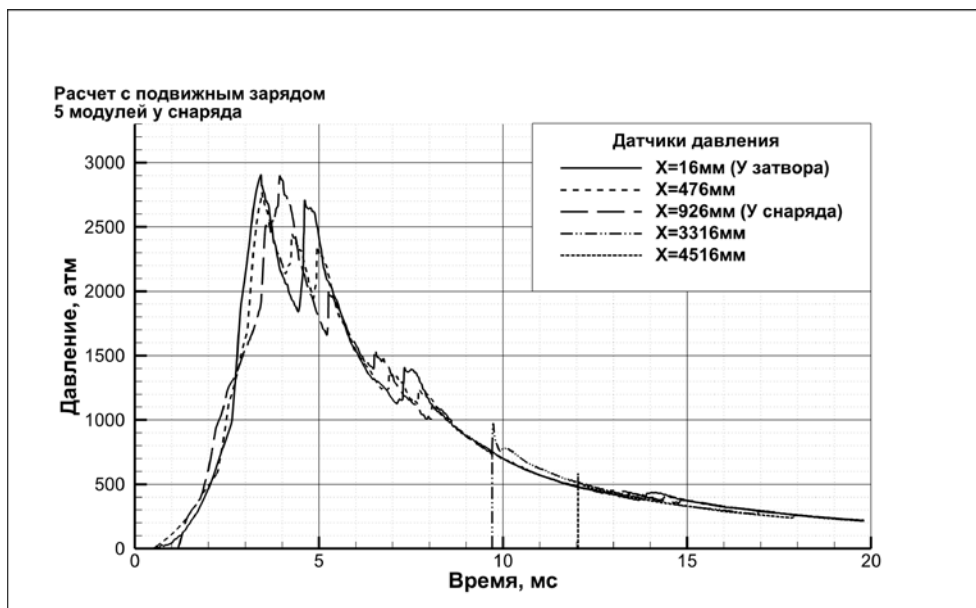


Рис. 2. Начальное расположение заряда из 5 модулей у затвора. Снаряд расположен справа.

Численное исследование влияния расположения заряда и источника воспламенения в камере на интенсивность волнового процесса провели для заряда из 5 модулей. На рис. 3 представлены зависимости давления от времени в пяти положениях внутри трубы для заряда из 5 модулей, расположенного у затвора (а) и у снаряда (б). Воспламенение в обоих случаях происходило в первом со стороны затвора модуле. В случае расположения заряда у затвора наблюдается волновой процесс малой амплитуды, тогда как для заряда, расположенного у снаряда, колебания давления в максимуме достигают 1000 атм. Динамика движения заряда и его локализация в обоих случаях различна. Когда заряд расположен у снаряда, в камере присутствуют две свободные от заряда области: между затвором и первым модулем, а также между 5 модулем и снарядом. Объем данных областей различен, со стороны затвора он больше, что приводит к более низкому темпу роста давления в области затвора. Наличие свободной области со стороны первого воспламеняемого модуля приводит также к затягиванию процесса воспламенения, большей неоднородности и снижению скорости горения заряда. Перемещение части заряда из области 4-го и 5-го модулей в свободную область за снарядом и его горение также приводит к более сильному градиенту давления в отошедшей от снаряда волне сжатия, а её приход и отражение от затвора сопровождается значительным ростом давления, обусловленным догоранием большей массы оставшихся у затвора пороховых элементов, чем для случая расположения заряда у затвора. Динамика развития волнового процесса для различного положения 5 модульного заряда приведена на рисунках 4, 5.

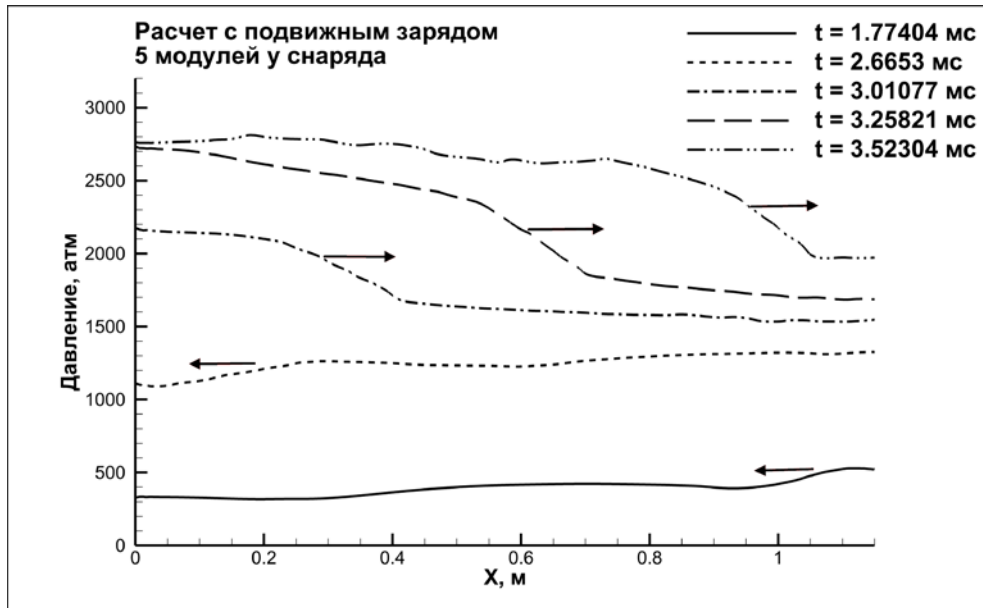


а)

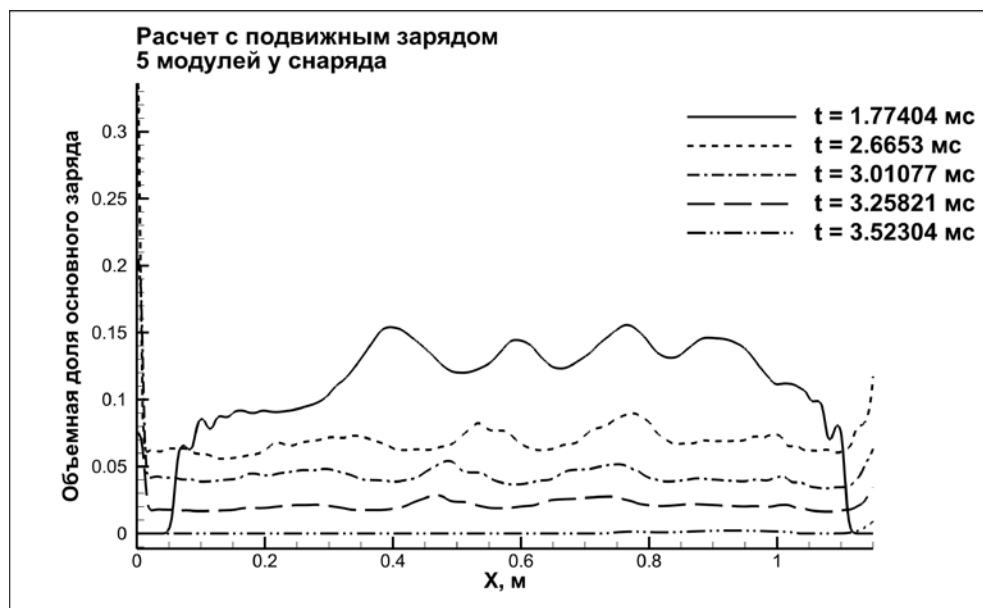


б)

Рис. 3. Динамика давления в 5 различных положениях внутри трубы для заряда из 5 модулей: а) заряд у затвора, б) заряд у снаряда. Воспламенение начинается с первого модуля со стороны затвора.

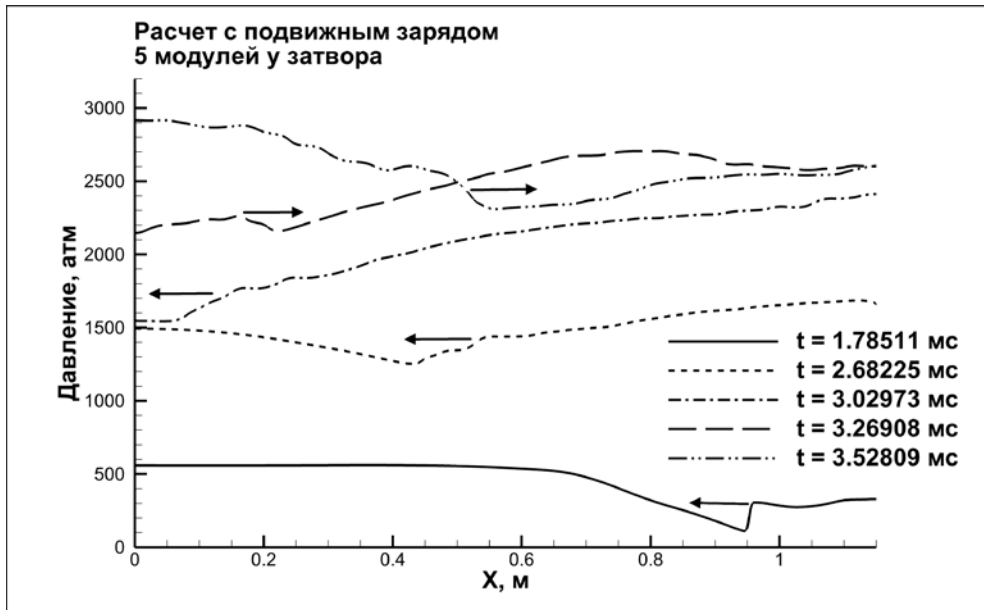


а)

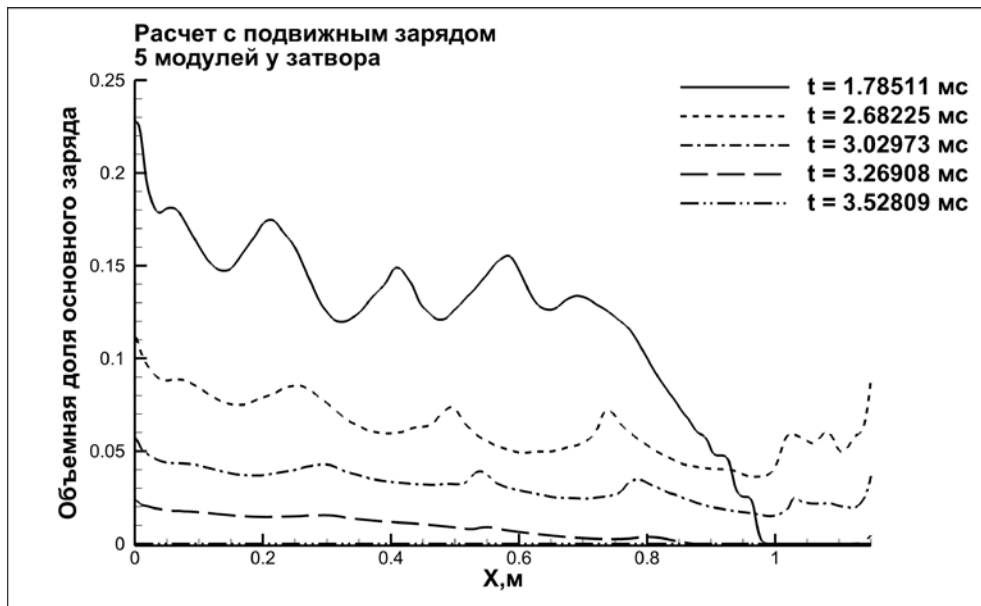


б)

Рис. 4. Распределения вдоль линии $R = 80$ мм для нескольких моментов времени, заряд из 5 модулей у снаряда. а) давление, б) объемная доля заряда.



а)



б)

Рис. 5. Распределения вдоль линии $R = 80$ мм для нескольких моментов времени, заряд из 5 модулей у затвора. а) давление, б) объемная доля заряда.

Рис. 6 иллюстрирует динамику внутрибаллистического процесса для заряда из 5 модулей, расположенного у снаряда. Ось симметрии соответствует $Y = 0$. В верхней полуплоскости представлена динамика поля давления (шкала в 1000 атм), в нижней полуплоскости – динамика объёмной доли основного заряда.

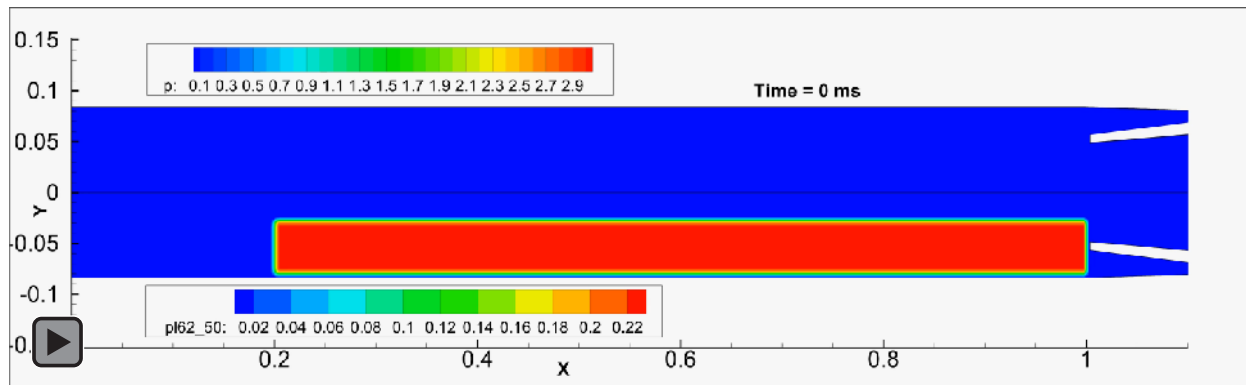


Рис. 6. Динамика волнового внутрибаллистического процесса при горении заряда из 5 модулей у снаряда. Сверху – поле давления, снизу – объёмная доля заряда.

Выводы

Предложены математическая модель и численный метод для моделирования внутрибаллистического процесса в двумерной осесимметричной постановке. Проведено исследование механизмов возникновения и особенностей внутрибаллистического процесса при горении метательного заряда из 5 модулей. Показано, что расположение источника воспламенения, а также расположение самого заряда в трубе играют существенную роль в формировании волнового процесса. Так, расположение заряда из 5 модулей у снаряда с воспламенением первого модуля со стороны затвора приводит к более интенсивному волновому процессу по сравнению с расположением аналогичного заряда у затвора. Описаны механизм формирования волнового процесса и причины его усиления.

Разработанная расчетная методика позволяет использовать математическое моделирование для расчета горения модульных зарядов различного состава с учетом их реальной геометрической компоновки, что значительно повышает точность описания внутрибаллистического процесса.

Список литературы

1. Серебряков М.Е. Внутренняя баллистика ствольных систем и пороховых ракет. – М.: ОБОРОНГИЗ, 1962.
2. Ищенко А.Н., Касимов В.З., Ушакова О.В. // Матер. конференции «Современная баллистика и смежные вопросы механики». Томск, 2009. С. 85.
3. Wang Y.-W., Guo Y.-H., Wang S.-C. The analysis of pressure waves under combining TCM with LCM in bi-modular charge // Proc. 23rd Intern. Symposium on Ballistics. Tarragona, Spain, 2007. P. 401 – 406.
4. Семенов И.В., Меньшов И.С., Уткин П.С., Ахмедьянов И.Ф. БАРС-1МП – программный комплекс для численного исследования внутрибаллистических процессов на многопроцессорных ЭВМ // Известия высших учебных заведений. Физика. 2013, Т. 56, № 6-3, С. 61 – 63.
5. Закаменных Г.И., Чернов В.В., Абдуллин А.К., Семенов И.В., Уткин П.С., Лебедева А.Ю., Ахмедьянов И.Ф. Экспериментальное и численное исследование влияния положения модульного заряда на характеристики выстрела // Сборник материалов Всероссийской научно-технической конференции «Фундаментальные основы баллистического проектирования». Санкт-Петербург, 28 июня – 2 июля 2010 г. Том 1 / Под ред. д.т.н. проф. Кэрта Б.Э. – СПб.: Балт. гос. техн. ун-т, 2010. – С. 119 – 122.
6. Dal Maso G., Le Floch P.G., Murat F. Definition and weak stability of a non-conservative product // J. Math. Pures. Appl., 1995, v. 74 (6), p. 483-548.
7. Clain S., Rochette D. First- and second-order finite volume methods for the one-dimensional nonconservative Euler system // J. Comp. Phys., 2009, v. 228, p.8214-8248. – [doi:10.1016/j.jcp.2009.07.038](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2009.07.038)
8. Gosse L. A well-balanced flux-vector splitting scheme designed for hyperbolic system of conservation laws with source terms // Comput. Math. Appl., 2000, v. 39, p. 135-159. – [doi:10.1016/S0898-1221\(00\)00093-6](https://doi.org/10.1016/S0898-1221(00)00093-6)
9. Menshov I.S. Exact and Approximate Riemann Solvers for Compressible Two-Phase Flows // Mathematical Models and Computer Simulations, 2017, Vol. 9, No. 4, pp. 405–422. – [doi:10.1134/S2070048217040093](https://doi.org/10.1134/S2070048217040093)
10. Русяк И.Г., Ушаков В.М. Внутрикамерные гетерогенные процессы в ствольных системах. – Екатеринбург: УрО РАН, 2001. – 259 С.

11. Хоменко Ю.П., Ищенко А.Н., Касимов В.З. Математическое моделирование внутрибаллистических процессов в ствольных системах. – Новосибирск: Изд-во СО РАН, 1999. – 255 С.
12. Nusca M.J., Conroy P.J. Multiphase CFD Simulations of Solid Propellant Combustion in Gun Systems // Proc. of DoD High Performance Computing Modernization Program 2001 Users Group Conference, Biloxi, MS, 18 – 21 June 2001. – [doi:10.2514/6.2002-1091](https://doi.org/10.2514/6.2002-1091)
13. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред, Т. 1. – М.: Наука, 1987.
14. Кутателадзе С.С., Боришанский В.М. Справочник по теплопередаче. – М.: Госэнергоиздат, 1958.
15. Чудновский А.Ф. Теплообмен в дисперсных средах. – М.: Гостех., 1954.
16. Ergun S. Fluid Flow through Packed Columns // Chemical Engineering Progress. – 1952. – Vol. 48, № 2. – P. 89 – 94.
17. Вилунов В.Н. К теории эрозионного горения порохов // Доклады АН СССР. – 1961. – Т. 136, № 2. – С. 381 – 383.
18. Barth T., Ohlberger M. Finite Volume Methods: Foundation and Analysis // Encyclopedia of Computational Mechanics. – 2004. – Vol. 1. – P. 439 – 470. – [doi:10.1002/0470091355.ecm010](https://doi.org/10.1002/0470091355.ecm010)
19. Gossler A. Moving Least Squares: A Numerical Differentiation Method for Irregularly Spaced Calculation Points // Sandia Report SAND2001-1669. – 2001.
20. Van Leer B. Towards the ultimate conservative difference scheme. V – A second-order sequel to Godunov’s method // Journal of Computational Physics. – 1979. – V. 32. – P. 101 – 136. – [doi:10.1016/0021-9991\(79\)90145-1](https://doi.org/10.1016/0021-9991(79)90145-1)
21. Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я. и др. Численное решение многомерных задач газовой динамики. – М.: Наука, 1976.
22. Menshov I., Serezhkin A. A generalized Rusanov method for the Baer - Nunziato equations with application to DDT processes in condensed porous explosives // Int J Numer Meth Fluids. 2017; pp. 1-19. – [doi:10.1002/fld.4419](https://doi.org/10.1002/fld.4419)
23. Меньшов И.С., Павлухин П.В. Эффективный параллельный метод сквозного счета задач аэродинамики на несвязных декартовых сетках // ЖВМ и МФ, 2016, Т. 56, № 9, с.1677-1691. – [doi:10.7868/S0044466916090143](https://doi.org/10.7868/S0044466916090143)

Оглавление

Введение	3
1 Математическая модель	4
2 Численный метод.	9
3 Исследование волнового процесса при горении модульного заряда	12
Выводы	17
Список литературы.....	18