ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 26 за 2017 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Сорокин В.Н.

Слабая асимптотика совместных многочленов Полачека

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Сорокин В.Н. Слабая асимптотика совместных многочленов Полачека // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2017. № 26. 20 с. doi:10.20948/prepr-2017-26
URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2017-26

О р д е н а Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М. В. КЕЛДЫША
Р о с с и й с к о й а к а д е м и и н а у к

В. Н. Сорокин

Слабая асимптотика совместных многочленов Полачека

Москва – 2017

УДК 517.53
В. Н. Сорокин

Слабая асимптотика совместных многочленов Полачека

Изучаются многочлены, определенные двухдиагональным несимметричным оператором специального вида. Получена слабая асимптотика масштабированных многочленов. Дана ее теоретико потенциальная интерпретация.

Ключевые слова: спектральная теория, многочлены Полачека, системы Никишина, задачи равновесия теории логарифмического потенциала, метод перевала, римановы поверхности, алгебраические функции.

V. N. Sorokin

Weak asymptotics of multiple Pollaczek polynomials

The polynomials defined by a special two-diagonal non-symmetric operator are considered. The weak asymptotics of the scaled polynomials is obtained. The potential theory interpretation is given.

Key words: spectral theory, Pollaczek polynomials, Nikishin system, equilibrium problems of the logarithmic potential theory, saddle point method, Riemann surfaces, algebraic functions.

Исследование выполнено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант №17-01-00614) и Программы государственной поддержки ведущих научных школ РФ (грант НШ-9110.2016.1).

1 Введение

В конце прошлого века наблюдалась высокая активность в изучении вполне интегрируемых дискретных бесконечномерных динамических систем методом прямой-обратной спектральной задачи [1], в частности, цепочек Богоявленского [2], образующих иерархию над классическими цепочками Ленгмюра [3], [4], [5] и связанных с векторными непрерывными дробями Стилтьеса [6]. Термин «вполне интегрируемые» применительно к бесконечномерным системам, конечно, имеет некоторое условное значение. В работе [7] 1997 года мной был рассмотрен один частный пример, связанный с этими исследованиями. А именно, изучалось обобщение многочленов Мейкснера–Полачека [8]. В дальнейшем, как принято в справочной литературе, будем говорить о «многочленах Полачека», хотя эти многочлены впервые появились у Мейкснера (J. Meixner [9]) в 1934 году, а F. Pollaczek [10] и W. Hahn [11] изучали их позже — в 1949–1950 годах. В последствии большее внимание мы уделили другому типу обобщенных многочленов Полачека, связанных с ортогональностью по дискретной мере [12]. В этом случае появляется так называемый констрейн, также имеющий многочисленные приложения в задачах математической физики [13]. Тем не менее, рассмотренный в [7] пример остается одним из немногих примеров, когда можно в явном виде предъявить связь между линейным оператором с одной стороны и его спектральными характеристиками с другой стороны. В настоящей работе я сделаю одно добавление к этому примеру. Мы будем изучать слабую асимптотику масштабированных многочленов, связанную с задачами равновесия теории логарифмического потенциала.

2 Постановка задачи

В гильбертовом пространстве $l_2(\mathbb{Z}_+)$ определим замкнутый линейный неограниченный и в общем случае несимметричный оператор A, заданный на финитных последовательностях матрицей

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2 & & \\ & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 3 & \\ & & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix},$$

где в каждой строке между двумя ненулевыми диагоналями стоит r нулей, r — фиксированное натуральное число. Заметим, что $A = A'^*$, т.е. оператор A совпадает с сопряженным к оператору A', определенному транспонированной матрицей. Это — аналог самосопряженности для несимметричных операторов.

Рассмотрим последовательность многочленов $\{q_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, удовлетворяющих системе рекуррентных соотношений, которую запишем в матричном виде

$$\mathcal{A}' q(x) = xq(x),$$

где $q(x)$ — столбец многочленов. Рассмотрим следующее начальное условие: $q_0(x) = 1$. При $r = 1$ получим многочлены Полачека. В общем случае будем называть эти многочлены *совместными многочленами Полачека.*

Как показал В. А. Калягин [14], резольвента

$$R_z = (zI - A)^{-1}$$

полностью определена системой r резольвентных функций

$$f_j(z) = (R_z e_0, e_j), \quad j = 0, \dots, r-1.$$

Основной результат [7] состоит в нахождении этих функций стилтьесовского типа. В основе доказательства лежит поточечная асимптотика многочленов $q_n(x)$ при $n \to \infty$. В настоящей работе мы изучаем слабую асимптотику масштабированных многочленов

$$q_n^*(x) = c_n q_n((r+1)nx), \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

где нормировочная постоянная c_n выбрана так, чтобы старший коэффициент многочлена $q_n^*(x)$ был равен единице.

Слабой асимптотикой называется следующий предел

$$V(x) = \lim_{n\to\infty} \left(-\frac{1}{n}\right) \log |q_n^*(x)|,$$

если он конечно существует. В случае существования этого предела (в какой-нибудь области на плоскости) он равен логарифмическому потенциалу некоторой вероятностной меры:

$$V(x) = V^{\lambda_\Delta}(x), \quad x \in \mathbb{C} \setminus \mathsf{S}(\lambda_\Delta),$$

где $\mathsf{S}(\lambda_\Delta)$ — носитель меры λ_Δ. Из свойств многочленов q_n следует, что эта мера инвариантна относительно циклической группы $\mathbb{Z}_{r+1}$, состоящей из следующих вращений плоскости:

$$x \longmapsto \varepsilon^j x, \quad j = 0, \ldots, r, \qquad \varepsilon = \exp\left\{\frac{2\pi i}{r+1}\right\},$$

а носитель меры лежит на *звездочке*

$$\Delta = \bigcup_{j=0}^{r} [0, +\infty \cdot \varepsilon^j).$$

Напомним, что логарифмическим потенциалом конечной положительной борелевской меры λ_Δ называется следующий интеграл Лебега

$$V^{\lambda_\Delta}(x) = \int \log \frac{1}{|x-t|}\, d\lambda_\Delta(t), \quad x \in \mathbb{C},$$

который может равнятся $+\infty$ (см. [15]). Мера λ_Δ является *предельной мерой* распределения нулей масштабированных многочленов q_n^*. А именно, пусть

$$\Lambda_n = \sum_{q_n^*(\xi)=0} \delta_\xi,$$

где δ_ξ — единичная мера Дирака в точке ξ, т.е. Λ_n — мера, считающая нули. Тогда при $n \to \infty$ меры $\frac{1}{n}\Lambda_n$ сходятся к λ_Δ в $*-$слабой топологии сопряженного пространства.

Цель настоящей работы состоит в нахождении предельной меры.

3 Основные результаты работы

Без ограничения общности, сформулируем и докажем основные результаты работы для $r = 2$. Обобщение на случай произвольного r тривиально.

Резольвентная функция оператора A, а именно $f_0(z)$, имеет стилтьесовсий тип, т.е.

$$f_0(z) = \int \frac{d\mu(x)}{z-x}, \quad x \in \mathbb{C} \setminus \Delta.$$

Носителем спектральной меры μ является вся звездочка Δ, ее полная вариация равна единице. Мера μ инвариантна относительно группы $\mathbb{Z}_3$.

Теорема 1. *Спектральная мера μ абсолютно непрерывна относительно классической меры Лебега на звездочке Δ, и ее плотность вычисляется по формуле*

$$p(x) = \frac{1}{2\pi\sqrt{3}} \exp\left\{-\frac{\pi x}{3\sqrt{3}}\right\} \frac{\Gamma\left(\frac{x\eta+1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{x\bar{\eta}+1}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{x+2}{3}\right)}, \quad x > 0,$$

где

$$\eta = \exp\left\{\frac{\pi i}{3}\right\}.$$

Через Γ мы обозначаем гамма–функцию, интеграл Эйлера второго рода.

Замечание 1. Плотность второй спектральной меры получается из $p(x)$ умножением на рациональную функцию.

Определим *внешнее поле*:

$$\phi(x) = \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)\log|p(3nx)|, \quad x \in \Delta.$$

По формуле Стирлинга получим

$$\phi(x) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}|x|, \quad x \in \Delta.$$

Заметим, что все нули функций второго рода

$$r_n(z) = \int \frac{q_n(x)}{z-x}\,d\mu(x), \quad z \in \mathbb{C} \setminus \Delta,$$

лежат на звездочке

$$F = \bigcup_{j=0}^{2} [0, +\infty \cdot \eta \varepsilon^j).$$

Поэтому мы поставим следующую задачу равновесия теории логарифмического потенциала.

Задача 1. *Требуется найти две положительные борелевские меры* λ_Δ *и* λ_F*, такие, что*

1° *носители мер удовлетворяют условиям*

$$\mathsf{S}(\lambda_\Delta) \subset \Delta, \quad \mathsf{S}(\lambda_F) \subset F;$$

2° *полные вариации мер равны*

$$\|\lambda_\Delta\| = 1, \quad \|\lambda_F\| = \frac{1}{2};$$

3° *с некоторыми постоянными* w_Δ *и* w_F *выполняются условия равновесия*

(Δ) *на звездочке* Δ*:*

$$W_\Delta = 2V^{\lambda_\Delta} - V^{\lambda_F} + \phi \begin{cases} \leqslant w_\Delta \,\big|\, & \mathsf{S}(\lambda_\Delta), \\ \geqslant w_\Delta \,\big|\, & \Delta, \end{cases}$$

(F) *на звездочке* F*:*

$$W_F = 2V^{\lambda_F} - V^{\lambda_\Delta} \begin{cases} \leqslant w_F \,\big|\, & \mathsf{S}(\lambda_F), \\ \geqslant w_F \,\big|\, & F. \end{cases}$$

Из результатов А. А. Гончара и Е. А. Рахманова [16], [17] вытекает следующая теорема.

Теорема 2. *Задача 1 имеет единственное решение.*

Замечание 2. Меры λ_Δ и λ_F инвариантны относительно группы $\mathbb{Z}_3$.

Поставленная нами задача равновесия соответствует так называемым *системам Никишина.* Они появились в работе [18] 1986 года (см. также монографию [19]). Наиболее полное исследование этих систем содержится в работе [20].

Сформулируем один из основных результатов настоящей работы.

Теорема 3. *Предельная мера распределения нулей масштабированных совместных многочленов Полачека существует и является решением задачи 1.*

Замечание 3. Мера λ_F служит предельной мерой распределения нулей масштабированных функций второго рода.

Укажем явный вид предельной меры. Задание меры равносильно заданию ее марковской функции

$$h_{\lambda_\Delta}(x) = \int \frac{d\lambda_\Delta(t)}{x-t}, \quad x \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \mathsf{S}(\lambda_\Delta).$$

По марковской функции плотность абсолютно непрерывной меры восстанавливается с помощью формул Ю. В. Сохоцкого.

Введем обозначения. Через $z(x)$ обозначим трехзначную алгебраическую функцию, обратную к *обобщенной функции Жуковского*

$$x = \frac{z^3+1}{3z}.$$

Ее риманову поверхность $\mathfrak{R}$ как накрытие построим склейкой следующих трех листов:

$$\mathfrak{R}_0 = \overline{\mathbb{C}} \setminus \Delta_*, \quad \mathfrak{R}_+ = \mathbb{C} \setminus (\Delta_* \cup F), \quad \mathfrak{R}_- = \mathbb{C} \setminus F,$$

где

$$\Delta_* = \bigcup_{j=0}^{2} [0, x_j], \qquad x_j = \varkappa^2 \varepsilon^j, \qquad \varkappa = 1/\sqrt[3]{2}.$$

Род поверхности равен нулю. Это — сфера. Мероморфная функция z осуществляет конформное отображение поверхности $\mathfrak{R}$ на сферу Римана. Эта функция имеет следующий дивизор. У нее есть простой полюс в бесконечности (в точке ветвления) и простой нуль тоже в бесконечности. Пусть $z_0,\ z_+,\ z_-$ — соответствующие однозначные ветви функции z. Через

$$H(z) = -\eta \log(1-\bar{\eta} z) + \log(1+z) - \bar{\eta} \log(1-\eta z)$$

обозначим *обобщенный арктангенс*. Это — многозначная аналитическая функция.

Сформулируем второй основной результат настоящей работы.

Теорема 4.

1° Марковская функция меры λ_Δ равна

$$h_{\lambda_\Delta}(x) = H(z_0(x)), \quad x \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \Delta_*,$$

при этом берутся такие ветви логарифмов, что

$$h_{\lambda_\Delta}(x) \sim \frac{1}{x}, \quad x \to \infty.$$

Носителем меры λ_Δ служит вся звездочка Δ_*.

2° Марковская функция меры λ_F равна

$$h_{\lambda_F}(x) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} - H(z_-(x)), \quad x \in \mathbb{C} \setminus F,$$

при этом берутся такие ветви логарифмов, что

$$h_{\lambda_F}(x) \sim \frac{1}{2x}, \quad x \to \infty.$$

Носителем меры λ_F служит вся звездочка F.

Дополнительно отметим следующий результат.

Теорема 5. *Постоянные равновесия равны*

$$w_\Delta = \frac{3\log 3 - 1}{2}, \quad w_F = 0.$$

4 Доказательства основных результатов

Результаты работы доказываются одновременно. Тем не менее, мы выделяем основные фрагменты доказательства каждой из теорем.

4.1 Доказательство теоремы 4

Через

$$\Phi(x,z)=\sum_{n=0}^{\infty} q_n(x)z^n, \qquad |z|<1, \qquad x\in\mathbb{C},$$

обозначим производящую функцию многочленов q_n. В [7] получен ее явный вид:

$$\Phi(x,z)=\frac{1}{\sqrt[3]{z^3+1}}(1-\eta z)^{-\frac{\bar\eta x}{3}}(1+z)^{\frac{x}{3}}(1-\bar\eta z)^{-\frac{\eta x}{3}},$$

где при $|z|<1$ берутся главные ветви степеней, такие, что $\Phi(x,0)=1$.

По формуле Коши

$$q_n(3nx)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{(0)}\Phi(3nx,z)\,\frac{dz}{z^{n+1}}=\frac{1}{2\pi i}\oint_{(0)}\frac{\exp\{nS(z,x)\}}{\sqrt[3]{z^3+1}}\,\frac{dz}{z},$$

где

$$S(z,x)=xH(z)-\log z.$$

Исследование асимптотики этого интеграла методом перевала сводится к изучению критических точек функции S. Имеем

$$\frac{\partial S}{\partial z}=\frac{3x}{z^3+1}-\frac{1}{z}.$$

Таким образом, уравнение на критические точки примет вид

$$z^3-3xz+1=0.$$

Корни дискриминанта этого уравнения равны x_0, x_1, x_2. Это — точки ветвления 2-го порядка алгебраической функции $z(x)$. При $x\to\infty$ два корня уравнения ведут себя как $\sqrt{3x}$. Таким образом, в бесконечности также есть точка ветвления 2-го порядка. Третий корень ведет себя следующим образом:

$$z_0(x)\sim\frac{1}{3x}, \quad x\to\infty.$$

Эта ветвь голоморфна вне звездочки Δ_*. Род римановой поверхности $\mathfrak{R}$ алгебраической функции $z(x)$, вычисленный по формуле Римана–Гурвица, равен $\mathfrak{g} = 0$. Это – сфера. Мероморфная функция $z : \mathfrak{R} \to \overline{\mathbb{C}}$ имеет следующий дивизор. У нее есть один простой полюс в бесконечности (в точке ветвления) и один простой нуль — тоже в бесконечности (на голоморфном листе). Эта функция осуществляет конформное отображение римановой поверхности $\mathfrak{R}$ на сферу Римана.

Построим поверхность $\mathfrak{R}$ как накрытие склейкой трех листов $\mathfrak{R}_0$, $\mathfrak{R}_+$, $\mathfrak{R}_-$. Найдем образы листов. Пусть $z = \rho e^{i\varphi}$. Тогда $\operatorname{Arg} x = \psi - \varphi$, где

$$\psi = \operatorname{Arg}(z^3 + 1).$$

По теореме синусов

$$\frac{\rho^3}{\sin\psi} = \frac{1}{\sin(3\varphi - \psi)},$$

см. рис. 1.

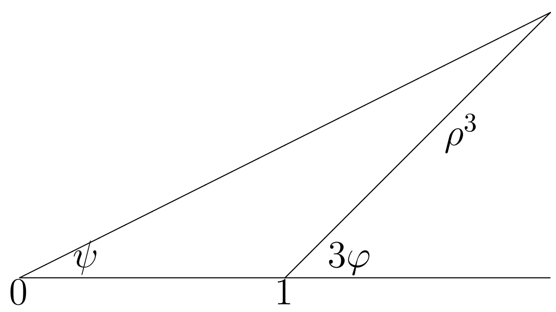

Рис. 1.

Пусть $\operatorname{Arg} x = 0$. Тогда $\psi = \varphi$, и

$$\rho = \sqrt[3]{\frac{1}{2\cos\varphi}}, \quad -\frac{\pi}{2} < \varphi < +\frac{\pi}{2}.$$

К этой кривой, заданной уравнением в полярных координатах, применим вращения группы $\mathbb{Z}_3$. Получим рис. 2.

В области $\mathbb{C} \setminus \Delta_*$ критическая точка $z_0(x)$ дает основной вклад в асимптотику интеграла. Соответствующее критическое значение обозначим

$$S_0(x) = S(z_0(x), x).$$

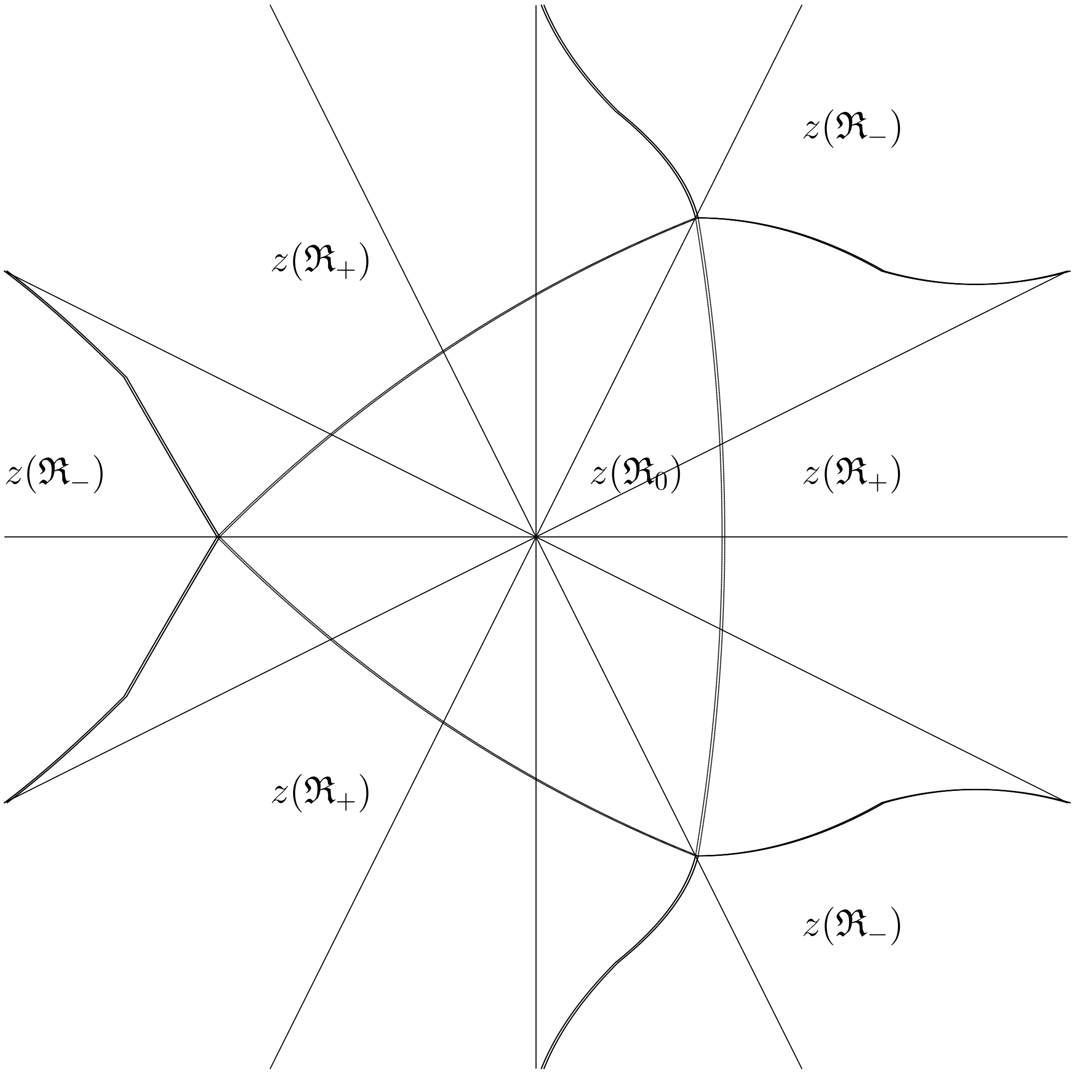

Рис. 2.

При этом, мы берем главные ветви логарифмов, когда $x \to \infty$. Из анализа метода перевала (с учетом нормировки многочленов q_n) следует, что предельная мера λ_Δ существует и ее логарифмический потенциал равен

$$V^{\lambda_\Delta} = 1 + \log 3 - \operatorname{Re} S_0.$$

Далее,

$$h_{\lambda_\Delta}(x) = -\frac{\partial}{\partial x} V^{\lambda_\Delta}(x), \quad x \in \mathbb{C} \setminus \Delta_*,$$

где берется формальная комплексная производная. Следовательно,

$$h_{\lambda_\Delta}(x) = H_0(x), \quad H_0(x) = H(z_0(x)).$$

Определим функции $H_\pm(x) = H(z_\pm(x))$, кусочно аналитические соответственно на листах $\mathfrak{R}_\pm$, такие, что

$$H_\pm(x) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2x} + O(x^{-5/2}), \quad x \to \infty.$$

Функция

$$h_{\lambda_F} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} - H_-$$

является марковской функцией некоторой положительной борелевской меры λ_F, носителем которой служит вся звездочка F, а ее полная вариация равна $\|\lambda_F\| = 1/2$. Эта мера инвариантна относительно группы $\mathbb{Z}_3$. Как следствие,

$$\frac{2\pi}{\sqrt{3}} - H_+ = h_{\lambda_\Delta} - h_{\lambda_F}$$

— марковская функция разности двух мер.

4.2 Доказательство теоремы 1

Вычислим в явном виде спектральную меру μ оператора A. Рассмотрим секторы

$$\Sigma_\zeta = \{x \in \mathbb{C} \bigm| |\arg(x\bar{\zeta})| < \frac{\pi}{3}\},$$

где ζ пробегает все корни $\sqrt[3]{-1}$. В [7] было показано, что резольвентные функции оператора A определены формулами

$$f_j(x) = \int_0^{\bar{\chi}} \prod_\zeta (1 - t\zeta)^{\frac{x\bar{\zeta}-2}{3}} t^j \, dt, \quad x \in \Sigma_\chi, \quad \chi \in \{\sqrt[3]{-1}\}, \quad j = 0, 1.$$

Как следствие, плотности абсолютно непрерывных спектральных мер равны

$$p_j(x) = \frac{1}{2\pi i} \left\{ f_j(x - i \cdot 0) - f_j(x + i \cdot 0) \right\}, \quad x > 0, \quad j = 0, 1.$$

Для функции $p = p_0$ имеем

$$p(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\bar\eta}^{\eta} \beta(t,x)\,dt, \quad x > 0,$$

где

$$\beta(t,x) = (1-t\eta)^{\frac{x\bar\eta-2}{3}}(1+t)^{-\frac{x+2}{3}}(1-t\bar\eta)^{\frac{x\eta-2}{3}}.$$

Будем интегрировать по отрезку $[\bar\eta,\eta]$. Напишем параметризацию отрезка:

$$t = \bar\eta + (\eta-\bar\eta)s, \quad 0 \leqslant s \leqslant 1.$$

Получим

$$p(x) = \frac{\sqrt3}{2\pi}\int_0^1 (\kappa s)^{\frac{x\bar\eta-2}{3}}(\bar\kappa-\bar\kappa s)^{\frac{x\eta-2}{3}}(\kappa+si\sqrt3)^{-\frac{x+2}{3}}\,ds,$$

где $\kappa = i\sqrt3\,\bar\varepsilon$. Следовательно,

$$p(x) = \frac{1}{2\sqrt3\,\pi}\,\exp\left\{-\frac{\pi x\sqrt3}{18}\right\}\,\exp\left\{\frac{\pi i(x+2)}{18}\right\}\tilde p(x),$$

где

$$\tilde p(x) = \int_0^1 \tilde\beta(s,x)(1+\varepsilon s)^{-\frac{x+2}{3}}\,ds,$$

при этом,

$$\tilde\beta(s,x) = s^{\frac{x\bar\eta-2}{3}}(1-s)^{\frac{x\eta-2}{3}}.$$

Далее,

$$\begin{aligned}\tilde p(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{x+2}{3}}{n}\varepsilon^n\int_0^1 s^{\frac{x\bar\eta-2}{3}+n}(1-s)^{\frac{x\eta-2}{3}}\,ds = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{x+2}{3}}{n}\varepsilon^n\,\mathsf{B}\left(\frac{x\bar\eta+1}{3}+n,\frac{x\eta+1}{3}\right) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{x+2}{3}}{n}\varepsilon^n\,\frac{\Gamma\left(\frac{x\bar\eta+1}{3}+n\right)\Gamma\left(\frac{x\eta+1}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{x+2}{3}+n\right)} = \\ &= \Gamma\left(\frac{x\eta+1}{3}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-a}{n}\varepsilon^n\,\frac{\Gamma(b+n)}{\Gamma(a+n)},\end{aligned}$$

где
$$a = \frac{x+2}{3}, \quad b = \frac{x\bar{\eta}+1}{3}.$$
Через B мы обозначили бета–функцию — интеграл Эйлера первого рода. Имеем
$$\binom{-a}{n}\frac{\Gamma(b+n)}{\Gamma(a+n)} = \binom{-b}{n}\frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)}.$$
Следовательно,
$$\tilde{p}(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{x\eta+1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{x\bar{\eta}+1}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{x+2}{3}\right)}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-b}{n}\varepsilon^n.$$
Последняя сумма равна
$$(1+\varepsilon)^{-b} = \eta^{-\frac{x\bar{\eta}+1}{3}} = \exp\left\{-\frac{\pi x\sqrt{3}}{18}\right\}\exp\left\{-\frac{\pi i(x+2)}{18}\right\}.$$
Теорема 1 доказана.

4.3 Доказательство теоремы 3

Докажем условия равновесия (Δ). Достаточно проверить их на луче $\mathbb{R}_+$. Вычислим производную вдоль вещественной оси W'_Δ обобщенного потенциала W_Δ как вещественную часть комплексной производной от комплексификации этой гармонической функции. Имеем
$$\begin{aligned}
W'_\Delta &= \frac{2\pi}{\sqrt{3}} + \operatorname{Re}\left\{-2h_{\lambda_\Delta} + h_{\lambda_F}\right\} = \\
&= \frac{2\pi}{\sqrt{3}} + \operatorname{Re}\left\{-2H_0 + H_0 + H_+ - \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\right\} = \operatorname{Re}\{H_+ - H_0\} = \\
&= \operatorname{Re}\left\{-\eta\log\frac{1-\bar{\eta}z_+}{1-\bar{\eta}z_0} + \log\frac{1+z_+}{1+z_0} - \bar{\eta}\log\frac{1-\eta z_+}{1-\eta z_0}\right\} = \\
&= -\frac{1}{2}\log\left|\frac{1-\bar{\eta}z_+}{1-\eta z_0}\right| - \frac{1}{2}\log\left|\frac{1-\eta z_+}{1-\bar{\eta}z_0}\right| + \log\left|\frac{1+z_+}{1+z_0}\right| + \\
&\quad + \frac{\sqrt{3}}{2}\arg\{(1-\bar{\eta}z_+)(1-\eta z_0)\} - \frac{\sqrt{3}}{2}\arg\{(1-\eta z_+)(1-\bar{\eta}z_0)\}.
\end{aligned}$$

Функция W_Δ непрерывна на всей комплексной плоскости. Пусть $0 < x < x_0$. Тогда числа z_+ и z_0 комплексно сопряженные. Следовательно, комплексно сопряженными будут следующие пары чисел:

$$1-\bar{\eta}z_+ \ \wedge\ 1-\eta z_0, \quad 1-\eta z_+ \ \wedge\ 1-\bar{\eta}z_0, \quad 1+z_+ \ \wedge\ 1+z_0.$$

Модуль отношения двух комплексно сопряженных чисел равен единице, и логарифм этого модуля равен нулю. Произведение двух комплексно сопряженных чисел положительно, и аргумент этого произведения равен нулю. Итак,

$$W'_\Delta(x)=0, \quad 0<x<x_0,$$

т.е. на отрезке $[0,x_0]$ функция W_Δ постоянна. Из той же формулы для производной нетрудно видеть, что

$$W'_\Delta(x)>0, \quad x_0<x<+\infty,$$

т.е. на промежутке $[x_0,+\infty)$ функция W_Δ возрастает. Условия равновесия (Δ) доказаны.

Проверим условия равновесия (F). Достаточно проверить для луча $[0,+\infty\cdot\eta)$. Через W'_F обозначим производную вдоль этого луча. Как и выше, получим

$$W'_F=\frac{1}{2}\log\left|\frac{1+z_-}{1+\varepsilon z_+}\right|+\frac{1}{2}\log\left|\frac{1+\varepsilon z_-}{1+z_+}\right|-\log\left|\frac{1+\bar{\varepsilon}z_-}{1+\bar{\varepsilon}z_+}\right|+ \\ +\frac{\sqrt{3}}{2}\arg\{(1+\varepsilon z_-)(1+z_+)\}-\frac{\sqrt{3}}{2}\arg\{(1+z_-)(1+\varepsilon z_+)\}.$$

Поскольку на данном луче $\bar{z}_-=\varepsilon z_+$, то следующие пары чисел являются комплексно сопряженными:

$$1+z_- \ \wedge\ 1+\varepsilon z_+, \quad 1+\varepsilon z_- \ \wedge\ 1+z_+, \quad 1+\bar{\varepsilon}z_- \ \wedge\ 1+\bar{\varepsilon}z_+.$$

Следовательно,

$$W'_F=0, \quad 0<x\bar{\eta}<+\infty,$$

т.е. функция W_F постоянна на всем луче.

4.4 Доказательство теоремы 5

Потенциал предельной меры равен

$$V^{\lambda_\Delta}(x) = -\mathrm{Re} \int h_{\lambda_\Delta}(x)\, dx.$$

Вычислим, например, интеграл

$$V_0(x) = \int \log\left(1 + z_0(x)\right) dx.$$

Обозначим $\theta = 1 + z$. Интегрируя по частям получим

$$V_0 = \int \log\theta\, dx = x\log\theta - \int \frac{x}{\theta}\, d\theta.$$

Имеем

$$x = \frac{z^3+1}{3z} = \frac{\theta(\theta^2 - 3\theta + 3)}{3(\theta-1)} \implies \frac{x}{\theta} = \frac{1}{3}\left(\theta - 2 + \frac{1}{\theta-1}\right).$$

Таким образом,

$$\int \frac{x}{\theta}\, d\theta = \frac{1}{3}\left(\frac{\theta^2}{2} - 2\theta + \log z\right).$$

Проинтегрировав два других логарифма, получим

$$V^{\lambda_\Delta}(x) = -xH_0(x) + \log z_0(x) + \mathrm{const}.$$

Аналогично вычисляется потенциал V^{λ_F}. Окончательно,

$$W_\Delta = x\,\mathrm{Re}\,(H_+ - H_0) + \log\left|\frac{z_0}{z_+}\right| + w_\Delta, \quad x > 0.$$

Постоянная интегрирования w_Δ находится из поведения потенциалов на бесконечности. Она и является постоянной равновесия.

Список литературы

[1] Мозер Ю. *Некоторые аспекты интегрируемых гамильтоновых систем.* УМН. **1981**. Т. 36, вып. 5. С. 109–151.

[2] Богоявленский О. И. *Некоторые конструкции интегрируемых динамических систем.* Изв. АН СССР. Сер. Матем. **1987**. Т. 51. №5. С. 737–766.

[3] Сорокин В. Н. *Вполне интегрируемые нелинейные динамические системы типа цепочек Ленгмюра.* Матем. заметки. **1997**. Т. 62. №4. С. 588–602.

[4] Sorokin V. N., Van Iseghem J. *Matrix Hermite–Pade problem and dynamical systems.* Journal of Comput. and Appl. Math. **2000**. V. 122. P. 275–295.

[5] Aptekarev A., Kaliaguine V., Van Iseghem J. *Genetic sum's representation for the moments of system of Stiltjes functions and its application.* Constr. Approx. **2000**. V. 16. P. 487–524.

[6] Beckermann B., Castro Smirnova M., Kaliaguine V. *A recurrence relation connected to the convergence of vector S-fractions.* East J. Approx. **2001**. V. 7. P. 287–313.

[7] Сорокин В. Н. *Совместные многочлены Полачека.* Вестник Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механ. **1997**. №2. С. 5–9.

[8] Бейтмен Г., Эрдейи А. *Высшие трансцендентные функции. Т. 2.* М. Наука. **1966**.

[9] Meixner J. J. London Math. Soc. **1934**. V. 9. P. 6–13.

[10] Pollaczek F. C. R. Acad. Sci. Paris. **1950**. V. 230. P. 1563–1565.

[11] Hahn W. Math. Nachr. **1949**. V. 2. P. 4–34.

[12] Сорокин В. Н. *Обобщенные многочлены Полачека.* Матем. сб. **2009**. Т. 200. №4. С. 113–130.

[13] Kuijlaars A. B. J.,Martinez-Finkelshtein A., Wielonsky F. *Non-intersecting squared Bessel paths and multiple orthogonal polynomials for modified Bessel weights.* Comm. Math. **2009**. V. 286. №1. P. 217–279.

[14] Калягин В. А. *Аппроксимации Эрмита–Паде и спектральная теория несимметричных разностных операторов.* Матем. сб. **1994**. Т. 185. №6. С. 79–100.

[15] Ландкоф Н. С. *Основы современной теории потенциала.* М. Наука. **1966**.

[16] Гончар А. А., Рахманов Е. А. *Равновесная мера и распределение нулей экстремальных многочленов.* Матем. сб. **1984**. Т. 125(167). С. 117–127.

[17] Гончар А. А., Рахманов Е. А. *О задаче равновесия для векторных потенциалов.* УМН. **1985**. Т. 40. №4. С. 155–156.

[18] Никишин Е. М. *Об асимптотике линейных форм для совместных аппроксимаций Паде.* Изв. вузов. Матем. **1986**. №2. С. 33–41.

[19] Никишин Е. М., Сорокин В. Н. *Рациональные аппроксимации и ортогональность.* М. Наука. **1988**.

[20] Гончар А. А., Рахманов Е. А., Сорокин В. Н. *Об аппроксимациях Эрмита–Паде для систем функций марковского типа.* Матем. сб. **1997**. Т. 188. №5. С. 33–58.

Оглавление