ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 27 за 2017 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Сорокин В.Н.

Многочлены Анжелеско-Мейкснера

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Сорокин В.Н. Многочлены Анжелеско-Мейкснера // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2017. № 27. 16 с. doi:**10.20948/prepr-2017-27**
URL: **http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2017-27**

О р д е н а Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М. В. КЕЛДЫША
Р о с с и й с к о й а к а д е м и и н а у к

В. Н. Сорокин

Многочлены Анжелеско–Мейкснера

Москва – 2017

УДК 517.53
В. Н. Сорокин

Многочлены Анжелеско–Мейкснера

Изучаются многочлены совместной ортогональности для двух дискретных мер Мейкснера на непересекающихся промежутках вещественной оси. Найдено предельное распределение нулей масштабированных многочленов. Ответ получен как в терминах задачи равновесия теории логарифмического потенциала, так и в терминах мероморфных функций на компактных римановых поверхностях.

Ключевые слова: многочлены Мейкснера, логарифмический потенциал, метод перевала, алгебраические функции, римановы поверхности.

V. N. Sorokin

Angelesco–Meixner polynomials

The polynomials of multiple orthogonality with respect to two discrete Meixner measures on the non-overlapping segments of the real line are considered. The limiting distribution of the zeros of the scaled polynomials is found. The result is obtained in terms of the equilibrium problem of logarithmic potential and in terms of the meromorphic functions on compact Riemann surfaces.

Key words: Meixner polynomials, logarithmic potential, saddle point method, algebraic functions, Riemann surfaces.

Исследование выполнено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант №17-01-00614) и Программы государственной поддержки ведущих научных школ РФ (грант НШ-9110.2016.1).

1 Постановка задачи

На множестве целых неотрицательных чисел $\mathbb{Z}_+$ определим дискретную меру $\mu(x) = \mu(c, \beta; x)$. А именно, в точку $m \in \mathbb{Z}_+$ поместим массу $c^m(\beta)_m/m!$, где $(\beta)_m = \beta(\beta+1)\cdots(\beta+m-1)$ — символ Похгаммера. Мера зависит от двух параметров: $0 < c < 1$ и $\beta > 0$.

Через $P_n(x)$, где $n \in \mathbb{Z}_+$, обозначим многочлены, ортогональные по мере μ, т.е. P_n — ненулевой многочлен степени не выше n, удовлетворяющий соотношениям ортогональности

$$\int P_n(x)x^k d\mu(x) = 0, \quad k = 0, \ldots, n-1.$$

Этими соотношениями многочлен P_n определен единственным образом (с точностью до нормировки). Он имеет степень n. Все его нули простые, принадлежат промежутку $[0, +\infty)$ и по теореме Чебышева–Маркова–Стилтьеса (см. [1]) разделены целыми точками. Это означает, что на любом отрезке $[m, m+1]$, где $m \in \mathbb{Z}$, лежит не более одного нуля многочлена.

Такие многочлены впервые изучал J. Meixner в 1934 г. (ссылки см. в работе [2]). В дальнейшем, без ограничения общности, считаем, что $\beta = 1$. Нормируем многочлены Мейкснера условием $P_n(0) = 1$.

Следуя результатам Е. А. Рахманова [3], сделаем масштабирование

$$P_n^*(x) = \tilde{C}_n P_n(nx), \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

где $\tilde{C}_n$ — нормировочная постоянная, такая, что старший коэффициент многочлена P_n^* равен единице. Слабой асимптотикой этих многочленов называется следующий предел (если он конечно существует):

$$V_P(x) = \lim_{n\to\infty} \left(-\frac{1}{n}\right) \log |P_n^*(x)| .$$

В случае существования этот предел равен логарифмическому потенциалу некоторой вероятностной меры λ_0:

$$V_P(x) = V^{\lambda_0}(x), \quad x \in \mathbb{C} \setminus \mathsf{S}(\lambda_0),$$

где $\mathsf{S}(\lambda_0)$ — носитель меры λ_0 и

$$V^{\lambda_0}(x) = \int \log \frac{1}{|x-t|}\, d\lambda_0(t), \quad x \in \mathbb{C},$$

— ее логарифмический потенциал [4]. Мера λ_0 является предельным распределением нулей многочленов P_n^*. А именно, пусть

$$\lambda(P_n^*) = \sum_{P_n^*(x)=0} \delta_x$$

— мера, считающая нули. Здесь δ_x — дельта–функция Дирака в точке x. Тогда имеет место сходимость

$$\frac{1}{n}\,\lambda(P_n^*) \longrightarrow \lambda_0, \quad n \to \infty,$$

в $*-$ слабой топологии сопряженного пространства.

В работе [5] мы, в частности, доказали существование предельной меры λ_0 и нашли ее явный вид. В работах [5], [6], [7] изучались различные примеры многочленов совместной ортогональности типа Мейкснера. В настоящей работе мы рассмотрим еще один пример, существенно отличающийся от предыдущих.

Определим две дискретные меры. Одна была введена выше. Это — мера $\mu_+(x) = \mu(c_+, 1; x)$, где $0 < c_+ < 1$. Другая мера $\mu_-(x)$ определена на множестве целых неположительных чисел. А именно, в точку $(-m)$, где $m \in \mathbb{Z}_+$, помещается масса c_-^m, где $0 < c_- < 1$. Выпуклыми оболочками носителей мер μ_+ и μ_- будут промежутки $\Delta_+ = [0, +\infty)$ и $\Delta_- = (-\infty, 0]$ соответственно. Они не перекрываются. Таким образом, пара мер (μ_+, μ_-) образует систему Анжелеско [8].

Через $Q_n(x)$, где $n \in \mathbb{Z}_+$, обозначим ненулевой многочлен степени не выше $2n$, удовлетворяющий следующим соотношениям совместной ортогональности:

$$\int Q_n(x) x^k \, d\mu_\pm(x) = 0, \quad k = 0, \ldots, n-1.$$

Из свойств систем Анжелеско следует, что этими соотношениями многочлен Q_n определен единственным образом (с точностью до нормировки). Он имеет степень $2n$. Все его нули простые. При этом n нулей лежат на промежутке Δ_+, и n — на Δ_-. Нули разделены целыми точками.

Через λ_* обозначим предельную меру распределения нулей масштабированных многочленов Анжелеско–Мейкснера

$$Q_n^*(x) = C_n Q_n(nx) = x^{2n} + \ldots, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Цель настоящей работы состоит в доказательстве существования предельной меры и нахождении ее явного вида.

Поставим следующую задачу равновесия теории логарифмического потенциала.

Задача (E). *Требуется найти две положительные борелевские меры* λ_+ *и* λ_-*, такие, что*

1) $\mathsf{S}(\lambda_\pm) \subset \Delta_\pm$, $\|\lambda_\pm\| = 1$, $\lambda_\pm \leqslant \chi$, *где* χ *— классическая мера Лебега на вещественной оси;*

2) *с некоторыми постоянными* w_+ *и* w_- *справедливы следующие условия равновесия:*

$$W_+ = 2V^{\lambda_+} + V^{\lambda_-} + \phi_+ \begin{cases} \leqslant w_+ & \text{на} \quad \mathsf{S}(\lambda_+), \\ \geqslant w_+ & \text{на} \quad \Delta_+ \setminus (\mathsf{S}(\lambda_+) \setminus \mathsf{S}(\chi - \lambda_+)), \end{cases}$$

$$W_- = 2V^{\lambda_-} + V^{\lambda_+} + \phi_- \begin{cases} \leqslant w_- & \text{на} \quad \mathsf{S}(\lambda_-), \\ \geqslant w_- & \text{на} \quad \Delta_- \setminus (\mathsf{S}(\lambda_-) \setminus \mathsf{S}(\chi - \lambda_-)), \end{cases}$$

где внешние поля определены формулами

$$\phi_\pm(x) = \pm x \log \frac{1}{c_\pm}, \quad x \in \Delta_\pm.$$

Из результатов А. А. Гончара и Е. А. Рахманова [8], [9], [10] следует, что задача (E) имеет единственное решение. Внешние поля появляются в результате масштабирования и предельного перехода. Они учитывают экспоненциальный характер убывания мер $\mu_\pm$ на бесконечности. Аналогичным образом из теоремы о разделении нулей появляются ограничения (констрейны) $\lambda_\pm \leqslant \chi$. Множества $\mathsf{S}(\lambda_\pm) \setminus \mathsf{S}(\chi - \lambda_\pm)$, на которых достигаются ограничители, называются зонами насыщения.

Задача (E) допускает наглядную электростатическую интерпретацию. Поместим на проводники $\Delta_\pm$ единичные положительные заряды, которые не могут покидать эти проводники и взаимодействуют с логарифмическим потенциалом. На заряды также действуют внешние поля и ограничения. Тогда функция $W_\pm$ представляет собой полный потенциал этой системы зарядов на проводнике $\Delta_\pm$. Он складывается из внешнего поля $\phi_\pm$, потенциала взаимодействия зарядов между собой $2V^{\lambda_\pm}$ и внешнего поля $V^{\lambda_\mp}$, создаваемого зарядами, находящимися на другом проводнике. На том множестве, где полный потенциал $W_\pm$ постоянен и, следовательно, его производная, т.е. сила, действующая на заряды, равна нулю, заряды находятся в положении электростатического равновесия, которое соответствует минимуму энергии системы.

2 Основные результаты

Сформулируем один из основных результатов работы.

Теорема 1. *Предельная мера распределения нулей масштабированных многочленов Анжелеско–Мейкснера существует и равна* $\lambda_* = \lambda_+ + \lambda_-$, *где* (λ_+, λ_-) *— решение задачи (E).*

Укажем явный вид предельной меры. Рассмотрим многочлен

$$
\begin{aligned}
\mathsf{Q}(x) = {}&(1-2c_+ + c_+c_-)^2(1-2c_- + c_+c_-)^2 - \\
&-2(c_+ - c_-)[5 - 6c_+ - 6c_- + 3c_+c_- + 4c_+^2c_- + 4c_+c_-^2 + \\
&\qquad +3c_+^2c_-^2 - 6c_+^3c_-^2 - 6c_+^2c_-^3 + 5c_+^3c_-^3]\,x + \\
&+[-2 - 10c_+ - 10c_- + 13c_+^2 + 26c_+c_- + 13c_-^2 + 2c_+^2c_- + 2c_+c_-^2 - \\
&\qquad -22c_+^3c_- - 24c_+^2c_-^2 - 22c_+c_-^3 + 2c_+^3c_-^2 + 2c_+^2c_-^3 + 13c_+^4c_-^2 + \\
&\qquad +26c_+^3c_-^3 + 13c_+^2c_-^4 - 10c_+^4c_-^3 - 10c_+^3c_-^4 - 2c_+^4c_-^4]\,x^2 - \\
&-6(c_+ - c_-)(1-c_+)(1-c_-)(1-c_+c_-)^2\,x^3 + \\
&+(1-c_+)^2(1-c_-)^2(1-c_+c_-)^2\,x^4.
\end{aligned}
$$

Для всех $c_\pm \in (0,1)$ многочлен $\mathsf{Q}(x)$ имеет два положительных и два отрицательных корня. Обозначим их через

$$-\infty < b_- < a_- \leqslant 0 \leqslant a_+ < b_+ < +\infty.$$

Положим $E_+ = [a_+, b_+]$, $E_- = [b_-, a_-]$. Построим риманову поверхность $\mathfrak{R}$ как трехлистное накрытие сферы Римана. Она склеивается из листов

$$\mathfrak{R}_+ = \overline{\mathbb{C}} \setminus E_+, \quad \mathfrak{R}_* = \overline{\mathbb{C}} \setminus (E_+ \cup E_-), \quad \mathfrak{R}_- = \overline{\mathbb{C}} \setminus E_-.$$

Род поверхности равен нулю. На этой поверхности определим мероморфную функцию $\theta : \mathfrak{R} \to \overline{\mathbb{C}}$. Она будет однозначно определена своим дивизором и условием нормировки. Пусть далее, без ограничения общности, $0 < c_- \leqslant c_+ < 1$. Будем различать два случая

$$(C) \quad 1 - 2c_+ + c_+c_- > 0 \qquad \text{и} \qquad (P) \quad 1 - 2c_+ + c_+c_- < 0.$$

Функция θ имеет простой ноль в точке $x = 0$ на листе $\mathfrak{R}_-$. Она имеет простой полюс в точке $x = 0$ на листе $\mathfrak{R}_+$ в случае (C) и на листе $\mathfrak{R}_*$ в случае (P). Условие нормировки следующее: $\theta(\infty) = 1$ на листе $\mathfrak{R}_*$. Через θ_J обозначим однозначную ветвь функции θ — ее ограничение на проекцию листа $\mathfrak{R}_J$, где $J = +, *, -$. Функция θ осуществляет конформное отображение поверхности $\mathfrak{R}$ на сферу Римана.

Задание меры λ_* равносильно заданию ее марковской функции

$$h_{\lambda_*}(x) = \int \frac{d\lambda_*(t)}{x-t}, \quad x \in \overline{\mathbb{C}} \setminus S(\lambda_*).$$

Действительно, если марковская функция известна, то плотность абсолютно непрерывной меры восстанавливается по формуле Ю. В. Сохоцкого

$$\lambda_*'(x) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} h_{\lambda_*}(x - i \cdot 0), \quad -\infty < x < +\infty.$$

Сформулируем второй основной результат работы.

Теорема 2. *Марковская функция предельной меры равна*

$$h_{\lambda_*}(x) = \log \theta_*(x), \quad x \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \mathsf{S}(\lambda_*),$$

где берется главная ветвь логарифма, такая, что $h_{\lambda_*}(x) \sim 2/x$ *при* $x \to \infty$. *При этом носителем меры* $\lambda_- = \lambda_*\big|_{\Delta_-}$ *является отрезок* $[b_-, 0]$, *а ее зоной насыщения — отрезок* $[a_-, 0]$. *В случае (C) носителем меры* $\lambda_+ = \lambda_*\big|_{\Delta_+}$ *является отрезок* $[0, b_+]$, *а ее зоной насыщения — отрезок* $[0, a_+]$. *В случае (P) носителем меры* λ_+ *является отрезок* $[a_+, b_+]$, *а зона насыщения отсутствует.*

Имеет место бифуркация. В случае (C) для меры λ_+ наблюдается эффект достижения констрейна, а в случае (P) — эффект сталкивания зарядов.

Алгебраическая функция θ удовлетворяет уравнению $\mathsf{E} = 0$, где

$$\begin{aligned}\mathsf{E}(\theta, x) = c_+ x \theta^3 + [\,(1 - 2c_+ + c_+c_-) - (1 + c_+ + c_+c_-)\, x\,]\, \theta^2 + \\ + [\,(1 - 2c_- + c_+c_-) + (1 + c_- + c_+c_-)\, x)\,]\, \theta - c_- x.\end{aligned}$$

На рис. 1 и 2 показано сечение графика функции $\theta(x)$ вещественной плоскостью для случаев (C) и (P) соответственно. Далее теоремы 1 и 2 доказываются одновременно.

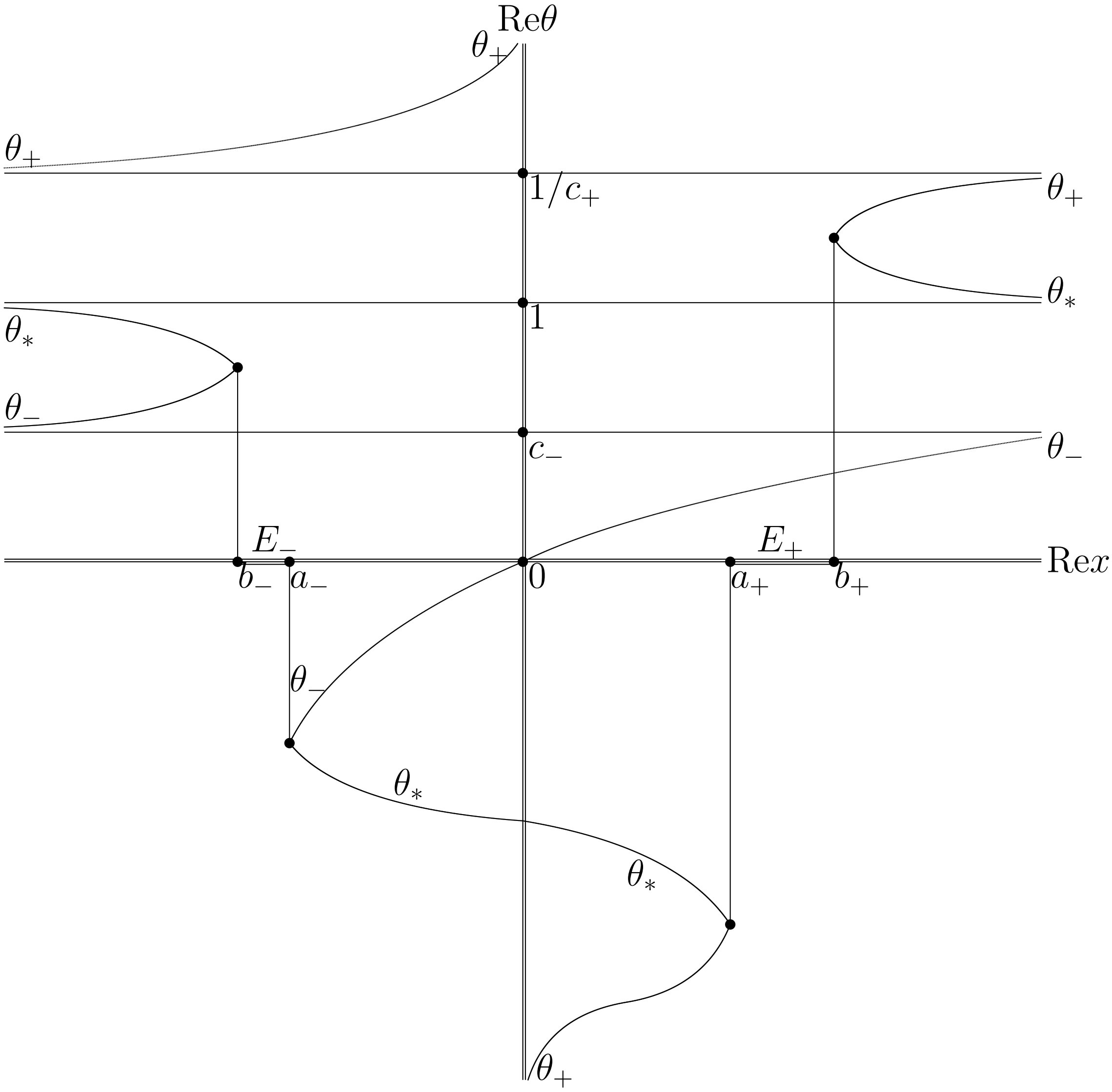

Рис. 1. Случай (C).

3 Доказательство

Будем искать многочлен $Q_n(x)$ в виде

$$Q_n(x) = p_{n,0}P_n^+(x) + p_{n,1}P_{n+1}^+(x) + \cdots + p_{n,n}P_{2n}^+(x),$$

где $P_n^+ = P_n$ — многочлены Мейкснера, ортогональные по мере μ_+ и нормированные условием $P_n^+(0) = 1$. Соотношения ортогональности для многочлена Q_n по мере μ_- будем проверять на многочленах Мейкснера P_n^-, ортогональных по мере μ_- и нормированных аналогичным условием. Получим систему n линейных однородных уравнений относительно $n+1$

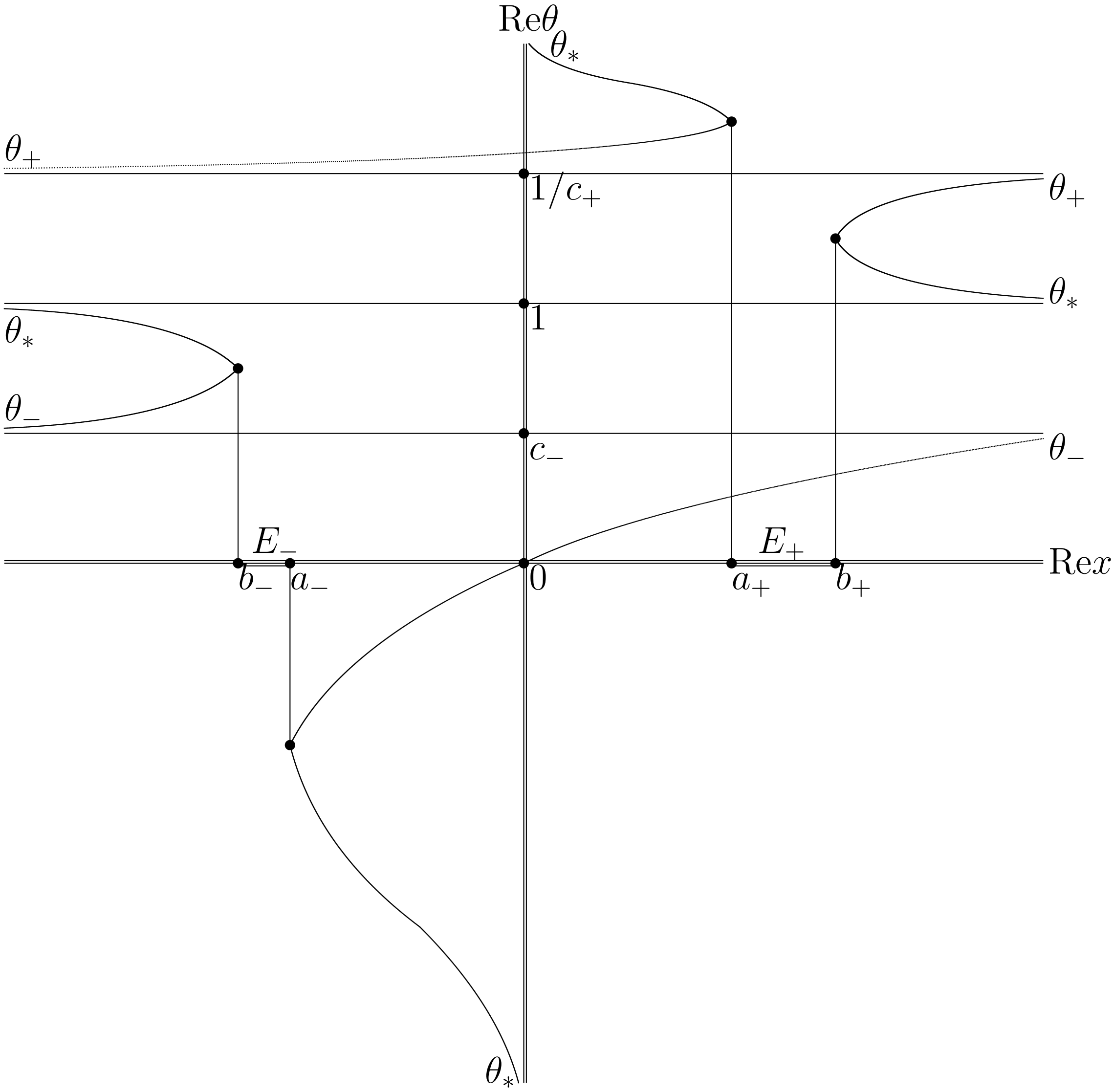

Рис. 2. Случай (P).

неизвестных величин $p_{n,0}, \dots, p_{n,n}$, а именно:

$$\sum_{k=0}^{n} D_{l,k} p_{n,k} = 0, \quad l = 0, \dots, n-1,$$

где

$$D_{l,k} = \int P^{+}_{n+k}(x) P^{-}_{l}(x) d\mu_{-}(x), \quad l, k \in \mathbb{Z}_+.$$

Пусть

$$\Phi^{\pm}(x; z) = \sum_{n=0}^{\infty} P^{\pm}_{n}(x) z^n$$

— производящие функции многочленов $P_n^{\pm}$. Мейкснером были получены следующие формулы:

$$\begin{array}{rclll} \Phi^+(x;z) & = & (1-z/c_+)^x(1-z)^{-x-1}, & |z|<c_+, & x\in\mathbb{C}, \\ \Phi^-(x;w) & = & (1-w/c_-)^{-x}(1-w)^{x-1}, & |w|<c_-, & x\in\mathbb{C}. \end{array}$$

Вычислим интеграл

$$\Phi_*(z,w)=\int \Phi^+(x;z)\Phi^-(x;w)d\mu_-(x).$$

Он представляет собой сумму геометрической прогрессии

$$\Phi_*(z,w)=\frac{1}{1-z}\frac{1}{1-w}\sum_{m=0}^{\infty}\alpha^m, \qquad \alpha=c_-\cdot\frac{1-z}{1-z/c_+}\cdot\frac{1-w/c_-}{1-w}.$$

Следовательно,

$$\Phi_*(z,w)=\frac{1}{1-c_-}\cdot\frac{1-z/c_+}{1-z}\cdot\frac{1}{1-az+bzw},$$

$$a=\frac{1-c_+c_-}{c_+(1-c_-)}, \qquad b=\frac{1-c_+}{c_+(1-c_-)}.$$

Таким образом, $D_{l,k}=C_{l,n+k}$, где величины $C_{l,k}$ находятся разложением функции двух комплексных переменных Φ_* в кратный ряд Тейлора по формуле суммы геометрической прогрессии. Имеем

$$C_{l,k}=\frac{1}{1-c_-}\left(B_{l,k}-qB_{l,k-1}\right), \quad q=1/c_+, \;\; B_{l,-1}=0, \;\; l,k\in\mathbb{Z}_+.$$

При этом $B_{l,k}=A_{l,0}+\dots+A_{l,k}$, где

$$\begin{array}{rcll} A_{l,k} & = & \binom{k}{k-l}a^{k-l}(-b)^l, & 0\leqslant l\leqslant k<+\infty, \\ A_{l,k} & = & 0, & 0\leqslant k<l<+\infty. \end{array}$$

Окончательно,

$$D_{l,k}=\frac{1}{l!}\left(\frac{d}{d\lambda}\right)^l\left\{\sum_{j=0}^{n+k}\lambda^j-q\sum_{j=0}^{n+k-1}\lambda^j\right\}\Bigg|_{\lambda=a}, \quad l=0,\dots,n-1, \;\; k=0,\dots,n.$$

Таким образом, величины $p_{n,k}$ удовлетворяют системе

$$\frac{1}{l!}\left(\frac{d}{d\lambda}\right)^l f_n(\lambda)\big|_{\lambda=a}=0,\quad l=0,\dots,n-1,$$

где

$$f_n(\lambda)=\frac{\lambda^n(\lambda-q)p_n(\lambda)-\kappa_n}{\lambda-1},$$

$$p_n(\lambda)=p_{n,0}+\dots+p_{n,n}\lambda^n,\qquad \kappa_n=(1-q)p_n(1).$$

Многочлен $f_n(\lambda)$ степени $2n$ имеет в точке a нуль порядка n, то есть $f_n(\lambda)=g_n(\lambda)(\lambda-a)^n$, где $g_n(\lambda)$ — некоторый многочлен степени n. Положим

$$\tilde g_n(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-a)^n g_n(\lambda)+\kappa_n=\lambda^n(\lambda-q)p_n(\lambda).$$

Тогда многочлен $\tilde g_n'(\lambda)$ имеет в точках $\lambda=0$ и $\lambda=a$ нули порядка $n-1$. Следовательно,

$$\tilde g_n'(\lambda)=\lambda^{n-1}(\lambda-a)^{n-1}t_n(\lambda),\ \ \tilde g_n(\lambda)=\int_0^\lambda \tilde g_n'(s)\,ds,\ \ p_n(\lambda)=\frac{\tilde g_n(\lambda)}{\lambda^n(\lambda-q)},$$

где $t_n(\lambda)$ — квадратный трехчлен с единичным старшим коэффициентом, определенный условиями $\tilde g_n(q)=0$ и $\tilde g_n(a)=\tilde g_n(1)$. Методом Лапласа убеждаемся в том, что существует предел многочленов $t_n(\lambda)$ при $n\to\infty$. Следовательно, коэффициенты многочлена $p_n(\lambda)$ асимптотически ведут себя как коэффициенты многочлена $(\lambda-a)^n$. Точнее, пусть $0\leqslant\nu\leqslant1$ и $\lfloor\nu n\rfloor$ — целая часть числа νn. Тогда равномерно по $\nu\in[0,1]$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\left|p_{n,\lfloor\nu n\rfloor}\right|=f(\nu),$$

где

$$f(\nu)=(1-\nu)\log a-\nu\log\nu-(1-\nu)\log(1-\nu).$$

Мы нормировали многочлен $p_n(\lambda)$ так, что его старший коэффициент равен единице.

В работе [5] было доказано, что равномерно по x на компактных подмножествах $\mathbb{C}\setminus[0,2x_+]$, где $x_+=\frac{1+\sqrt{c_+}}{1-\sqrt{c_+}}$, и равномерно по $\nu\in[0,1]$

$$\frac{1}{n}\log\left|P^+_{n+\lfloor\nu n\rfloor}(nx)\right|\longrightarrow(\nu+1)\mathrm{Re}\,\mathcal{V}_P\left(\frac{x}{\nu+1}\right),\quad n\to\infty.$$

При этом, был указан явный вид функции $\mathcal{V}_P$. Ниже нам понадобится функция $\mathcal{V}(x) = \mathcal{V}_P(x) - x\mathcal{V}_P'(x)$, равная

$$\mathcal{V}(x) = \log\left\{\frac{q-1}{2}\left[\,(x-p) + \sqrt{1-2px+x^2}\,\right]\right\}, \quad p = \frac{q+1}{q-1}.$$

Знаки чисел $p_{n,0}, \ldots, p_{n,n}$ чередуются. Если $x > 2x_+$, то знаки величин $P_n^+(nx), \ldots, P_{2n}^+(nx)$ также чередуются. Поэтому $Q_n(nx)$ есть сумма положительных величин. Следовательно, при $x > 2x_+$ слабая асимптотика многочленов $Q_n^*(x)$ совпадает со слабой асимптотикой интегралов

$$J_n(x) = \int_0^1 e^{nS(\nu;x)}\,d\nu,$$

где

$$S(\nu;x) = f(\nu) + (\nu+1)\mathcal{V}_P\left(\frac{x}{\nu+1}\right).$$

В силу принципа компактности это верно во всей комплексной плоскости вне предельного множества нулей многочленов Q_n^*.

К интегралам J_n применим метод перевала. Критические точки функции S найдем из уравнения

$$\frac{\partial S}{\partial \nu} = \log\frac{1-\nu}{\nu a} + \mathcal{V}\left(\frac{x}{\nu+1}\right) = 0,$$

равносильного кубическому уравнению

$$\begin{aligned}(1-c_+)^2c_-\nu^3 + (1-c_+)\left[(1-c_+c_-^2) + (1-c_-)(1-c_+c_-)x\right]\nu^2 + \\ + (1-c_-)\left[(1-c_+^2c_-) - (1-c_+)(1-c_+c_-)x\right]\nu + (1-c_-)^2c_+ = 0.\end{aligned}$$

Дискриминант этого уравнения равен многочлену Q. Римановой поверхностью алгебраической функции $\nu(x)$ является построенная выше поверхность $\mathfrak{R}$. Через $\nu_*(x)$ обозначим соответствующую ветвь этой функции, а через $S_*(x) = S(\nu_*(x);x)$ — соответствующее ей критическое значение. Из метода перевала следует, что предельная мера λ_* существует и ее логарифмический потенциал равен $V^{\lambda_*} = \mathrm{const} - \operatorname{Re} S_*$. Тогда марковская функция этой меры будет равна

$$h_{\lambda_*}(x) = S_*'(x) = \left.\frac{\partial S}{\partial x}\right|_{\nu=\nu_*(x)} = \mathcal{V}_P'\left(\frac{x}{\nu_*(x)+1}\right).$$

В работе [5] было показано, что $\mathcal{V}_P' = \log\vartheta$, где алгебраическая функция ϑ удовлетворяет квадратному уравнению

$$c_+ \, x \, \vartheta^2 + [(1-c_+) - (1+c_+)x] \, \vartheta + x = 0.$$

Тогда $h_{\lambda_*} = \log\theta_*$, где $\theta(x) = \vartheta\left(\frac{x}{\nu+1}\right)$. Исключая переменные ν и ϑ, приходим к уравнению $\mathsf{E}(\theta, x) = 0$. Алгебраическая функция θ имеет ту же риманову поверхность $\mathfrak{R}$, что функция ν. При $x \to \infty$ имеем

$$\theta_-(x) = c_-\left(1 - \frac{1}{x}\right) + O\left(\frac{1}{x^2}\right),$$
$$\theta_+(x) = \frac{1}{c_+}\left(1 - \frac{1}{x}\right) + O\left(\frac{1}{x^2}\right),$$
$$\theta_*(x) = 1 + \frac{2}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

При $x \to 0$ имеем

$$\theta_-(x) \sim \frac{c_-}{1 - 2c_- + c_+c_-} \cdot x,$$
$$\theta_J(x) \sim -\frac{1 - 2c_+ + c_+c_-}{c_+} \cdot \frac{1}{x},$$
$$\theta_K(x) \to -\frac{1 - 2c_- + c_+c_-}{1 - 2c_+ + c_+c_-},$$

где $J = +,\ K = *$ в случае (С), $J = *,\ K = +$ в случае (Р).

Из сказанного выше следует, что марковские функции мер $\lambda_\pm$ равны

$$h_{\lambda_+}(x) = -\log\left\{c_+\theta_+(x)\right\}, \quad h_{\lambda_-}(x) = \log\left\{\frac{c_-}{\theta_-(x)}\right\}, \qquad x \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \mathsf{S}(\lambda_\pm),$$

при этом $h_{\lambda_\pm}(x) \sim 1/x$, $x \to \infty$. Если $a_- < x < 0$, то величина $\theta_-(x)$ отрицательна, и в соответствии с выбором ветви логарифма имеем: $\log\theta_-(x) = \pm\pi i$ на верхнем и нижнем берегах разреза $[a_-, 0]$ соответственно. Следовательно, по формуле Сохоцкого $\lambda_-'(x) = 1$, если $a_- < x < 0$. Таким образом, зоной насыщения меры λ_- служит соответствующий отрезок. Аналогичным образом появляется зона насыщения $[0, a_+]$ меры λ_+ в случае (С).

Проверим условия равновесия для обобщенного потенциала W_-. Эта функция непрерывна во всей комплексной плоскости. Вычислим производную W'_- вдоль вещественной оси как вещественную часть комплексной производной от комплексификации этой функции. Получим

$$W'_-(x) = \log\left|\frac{\theta_-(x)}{\theta_*(x)}\right|, \quad x \in \Delta_-.$$

Если $-\infty < x < b_-$, то $0 < \theta_- < \theta_*$, и $W'_- < 0$. Функция W_- убывает на промежутке $(-\infty, b_-]$. Если $b_- < x < a_-$, то числа θ_- и θ_* — комплексно сопряженные и $W'_- = 0$. Функция W_- постоянна на отрезке $[b_-, a_-]$. Если $a_- < x < 0$, то $\theta_* < \theta_- < 0$, и $W'_- < 0$. Функция W_- убывает на отрезке $[a_-, 0]$. Условия равновесия для обобщенного потенциала W_- доказаны. Аналогичным образом проверяются условия равновесия для обобщенного потенциала W_+. Основные результаты работы доказаны.

В качестве дополнения найдем постоянные равновесия. Вычислим неопределенный интеграл

$$V = \int \log\theta\, dx = x\log\theta - \int \frac{x}{\theta}\, d\theta.$$

Из уравнения $\mathsf{E} = 0$ находим

$$\frac{x}{\theta} = \frac{2}{\theta - 1} - \frac{c_+}{c_+\theta - 1} - \frac{1}{\theta - c_-}.$$

Тогда

$$V = x\log\theta - \log\frac{(\theta-1)^2}{(c_+\theta - 1)(\theta - c_-)} + \mathrm{const}.$$

Следовательно,

$$W_\pm = \mathrm{Re}\left\{x\log\frac{\theta_\pm}{\theta_*}\right\} - 2\log\left|\frac{\theta_\pm - 1}{\theta_* - 1}\right| + \log\left|\frac{1 - c_+\theta_\pm}{1 - c_+\theta_*}\right| + \log\left|\frac{\theta_\pm - c_-}{\theta_* - c_-}\right| + w_\pm.$$

При этом постоянные равновесия равны

$$w_\pm = 3 + \log\frac{(1-c_\pm)^3(1-c_\mp)}{4c_\pm(1-c_+c_-)}.$$

Они находятся из поведения потенциалов на бесконечности.

Список литературы

[1] Никишин Е. М., Сорокин В. Н. *Рациональные аппроксимации и ортогональность.* Наука. М. **1988**.

[2] Бейтмен Г., Эрдейи А. *Высшие трансцендентные функции.* Т. 2. Наука. М. **1966**.

[3] Рахманов Е. А. *Об асимптотических свойствах многочленов, ортогональных на вещественной оси.* Матем. сб. **1982**. Т. 161(10). С. 163–203.

[4] Ландкоф Н. С. *Основы современной теории потенциала.* Наука. М. **1966**.

[5] Сорокин В. Н. *О многочленах совместной ортогональности для дискретных мер Мейкснера.* Матем. сб. **2010**. Т. 201(10). С. 137–160.

[6] Сорокин В. Н., Чередникова Е. Н. *Многочлены Мейкснера с переменным весом.* Современные проблемы математики и механики. **2011**. Т. 6. Вып. 1. С. 118–125.

[7] Aptekarev A., Arvesu J. *Asymptotics for multiple Meixner polynomials.* J. Math. Anal. Appl. **2014**. V. 411. P. 485–505.

[8] Гончар А. А., Рахманов Е. А. *О сходимости совместных аппроксимаций Паде для систем функций марковского типа.* Труды Математического института им. В. А. Стеклова. **1981**. Т. 157. С. 31–48.

[9] Гончар А. А., Рахманов Е. А. *О задаче равновесия для векторных потенциалов.* УМН. **1985**. Т. 40(4). С. 155–156.

[10] Рахманов Е. А. *Равновесная мера и распределение нулей экстремальных многочленов дискретной переменной.* Матем. сб. **1996**. Т. 187. С. 109–124.

Оглавление