ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 30 за 2017 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Попков К.А.

Единичные проверяющие тесты для схем из функциональных элементов в базисе «конъюнкция-отрицание»

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Попков К.А. Единичные проверяющие тесты для схем из функциональных элементов в базисе «конъюнкция-отрицание» // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2017. № 30. 31 с. doi:10.20948/prepr-2017-30
URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2017-30

О р д е н а Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Р о с с и й с к о й а к а д е м и и н а у к

К. А. Попков

Единичные проверяющие тесты для схем из функциональных элементов в базисе «конъюнкция-отрицание»

Москва — 2017

Попков К. А.

Единичные проверяющие тесты для схем из функциональных элементов в базисе «конъюнкция-отрицание»

Рассматривается задача синтеза неизбыточных схем из функциональных элементов, реализующих булевы функции от n переменных и допускающих короткие единичные проверяющие тесты относительно однотипных константных неисправностей на выходах элементов, в базисе $\{\&, \neg\}$ и схожих базисах. Для каждой булевой функции, допускающей реализацию неизбыточной схемой, найдено минимально возможное значение длины такого теста. В частности, доказано, что оно не превосходит трёх.

Ключевые слова: схема из функциональных элементов, константная неисправность, единичный проверяющий тест

Kirill Andreevich Popkov

Single fault detection tests for logic networks in the basis “conjunction-negation”

We consider a problem of synthesis of irredundant logic networks in the basis $\{\&, \neg\}$ and similar bases which implement Boolean functions on n variables and allow short single fault detection tests regarding stuck-at-1 or stuck-at-0 faults on outputs of gates. For each Boolean function permitting implementation by an irredundant circuit, the minimal possible length value of such a test is found. In particular, it is proved that this value does not exceed three.

Key words: logic network, stuck-at fault, single fault detection test

Работа выполнена при поддержке программы фундаментальных исследований ОМН РАН «Алгебраические и комбинаторные методы математической кибернетики и информационные системы нового поколения» (проект «Задачи оптимального синтеза управляющих систем»).

Оглавление

Введение

В работе рассматривается задача синтеза легкотестируемых схем, реализующих заданные булевы функции. Логический подход к тестированию электрических схем предложен С. В. Яблонским и И. А. Чегис в [1]; этот подход также применим к тестированию схем из функциональных элементов (см. [2, 3, 4]). Пусть имеется схема из функциональных элементов S с одним выходом, реализующая булеву функцию $f(\tilde{x}^n)$, где $\tilde{x}^n = (x_1, \ldots, x_n)$. Под воздействием некоторого источника неисправностей один или несколько элементов схемы S могут перейти в неисправное состояние. В результате схема S вместо исходной функции $f(\tilde{x}^n)$ будет реализовывать некоторую булеву функцию $g(\tilde{x}^n)$, вообще говоря, отличную от f. Все такие функции $g(\tilde{x}^n)$, получающиеся при всевозможных допустимых для рассматриваемой задачи неисправностях элементов схемы S, называются *функциями неисправности* данной схемы.

Введём следующие определения [2, 3, 4]. *Проверяющим тестом* для схемы S называется такое множество T наборов значений переменных $x_1, \ldots, x_n$, что для любой отличной от $f(\tilde{x}^n)$ функции неисправности схемы S в T найдётся набор $\tilde{\sigma}$, на котором $f(\tilde{\sigma}) \neq g(\tilde{\sigma})$. *Диагностическим тестом* для схемы S называется такое множество T наборов значений переменных $x_1, \ldots, x_n$, что T является проверяющим тестом и, кроме того, для любых двух различных функций неисправности $g_1(\tilde{x}^n)$ и $g_2(\tilde{x}^n)$ схемы S в T найдётся набор $\tilde{\sigma}$, на котором $g_1(\tilde{\sigma}) \neq g_2(\tilde{\sigma})$. Число наборов в T называется *длиной* теста. В качестве тривиального диагностического (и проверяющего) теста длины 2^n для схемы S всегда можно взять множество, состоящее из всех двоичных наборов длины n. Тест называется *полным*, если в схеме могут быть неисправны сколько угодно элементов, и *единичным*, если в схеме может быть неисправен только один элемент. Единичные тесты обычно рассматривают для неизбыточных схем [4], т.е. для таких схем, в которых любая допустимая неисправность любого одного элемента приводит к функции неисправности, отличной от исходной функции, реализуемой данной схемой.

Любое множество булевых функций будем называть *базисом*.

Пусть зафиксирован вид неисправностей элементов, B — произвольный функционально полный базис и T — единичный проверяющий тест (ЕПТ) для некоторой схемы S в базисе B. Введём следующие обозначения: $D^B_{s,detect}(T)$ — длина теста T; $D^B_{s,detect}(S) = \min D^B_{s,detect}(T)$, где минимум берётся по всем ЕПТ T для схемы S; $D^B_{s,detect}(f) = \min D^B_{s,detect}(S)$, где минимум берётся по всем неизбыточным схемам S в базисе B, реализующим функцию f; $D^B_{s,detect}(n) = \max D^B_{s,detect}(f)$, где максимум берётся по всем булевым функциям f от n переменных, для которых определено значение $D^B_{s,detect}(f)$. Функция $D^B_{s,detect}(n)$ называется *функцией Шеннона* длины ЕПТ. По аналогии с функциями $D^B_{s,detect}$ можно ввести функции $D^B_{s,diagn}$, $D^B_{c,detect}$ и $D^B_{c,diagn}$ для соответственно единичного диагностического теста, полного проверяющего и полного диагностического тестов, зависящие от T, от S, от f и от n (в определениях функций $D^B_{c,detect}(f)$ и $D^B_{c,diagn}(f)$ не требуется предполагать неизбыточность схем). Так, например, $D^B_{c,diagn}(n)$ — функция Шеннона длины полного диагностического теста.

Перечислим основные результаты, касающиеся тестирования схем из функциональных элементов. Класс допустимых неисправностей функциональных элементов ограничим константными неисправностями на выходах элементов, при которых значение на выходе любого неисправного элемента становится равно некоторой булевой константе. Неисправности на выходах элементов называются однотипными константными типа p, если эта константа одна и та же для каждого неисправного элемента и равна p, и произвольными константными, если эта константа может быть равна как 0, так и 1 для каждого неисправного элемента независимо от неисправностей других элементов. Для удобства над буквой D после символов, обозначающих базис, через точку с запятой будем ставить символы «$0, 1$», «0» или «1» в случаях, когда в схемах допускаются соответственно произвольные константные неисправности, однотипные константные неисправности типа 0 или типа 1 на выходах элементов. Вполне разумно предполагать, что если в базисе содержится булева константа α, то у элемента, её реализующего, не может быть неисправности типа α.

В работе С. М. Редди [5] для базиса Жегалкина $B_1 = \{\&, \oplus, 1, 0\}$ была получена оценка $D^{B_1;\,0,1}_{s,detect}(n) \leqslant n+3$. В дальнейшем результат работы [5] был обобщён С. С. Колядой в [6] на случай произвольного функционально полного конечного базиса. Последний результат, в свою очередь, был впоследствии усилен Д. С. Романовым, который в [7] для любого функционально полного базиса B получил оценку $D^{B;\,0,1}_{s,detect}(n) \leqslant 4$ (правда, в указанной работе использовалось несколько другое определение неизбыточных схем). Для полных проверяющих тестов Н. П. Редькин в [8, 9] для любого полного конечного базиса B_2 получил оценку $D^{B_2;\,0,1}_{c,detect}(n) \leqslant \leqslant 2\left(2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + 2^{\lceil \frac{n}{2} \rceil} + n\right)$; Д. С. Романов в [10] доказал, что существует базис B_3, содержащий функциональные элементы с числом входов от одного до семи, в котором $2 \leqslant D^{B_3;\,0,1}_{c,detect}(n) \leqslant 4$. В [4, с. 113, теорема 9] с использованием идей С. В. Яблонского установлено, что для любого полного базиса B функция $D^{B;\,0,1}_{s,diagn}(n)$ асимптотически не превосходит $\frac{2^{n+1}}{n}$;

аналогично можно показать, что $D^{B;\,p}_{s,diagn}(n) \lesssim \frac{2^n}{n}$, $p = 0, 1$. Для базиса $B_4 = \{\&, \vee, \neg\}$ Н. П. Редькин в [11, 12] получил оценки $D^{B_4;\,p}_{c,detect}(n) \leqslant n$ и $D^{B_4;\,p}_{s,diagn}(n) \leqslant 2n + 1$ для $p = 0, 1$. Первая из этих двух оценок впоследствии была улучшена Ю. В. Бородиной, которая в [13] установила, что $D^{B_4;\,p}_{c,detect}(n) = 2$; вторая оценка улучшена в [14], где, в частности, доказано, что $D^{B_4;\,p}_{s,diagn}(n) = 2$. Ю. В. Бородина в базисе $B_5 = \{|\}$ (штрих Шеффера) получила оценку $D^{B_5;\,1}_{c,detect}(n) \leqslant n+1$ [15]. Ей же в базисе Жегалкина B_1 удалось найти точное значение функций Шеннона $D^{B_1;\,1}_{s,detect}(n) = 1$ [16] и $D^{B_1;\,0}_{c,detect}(n) = 1$ [17] (совместно с П. А. Бородиным). В работе [18], в частности, установлено равенство $D^{B_1;\,0}_{s,diagn}(n) = 2$.

Определим множество булевых функций $\hat{B}_0 = \{\overline{x_1}, x_1\& \ldots \& x_m \mid m \geqslant 2\}$. В данной работе будут рассматриваться только единичные проверяющие тесты, в качестве неисправностей функциональных элементов — однотипные константные неисправности типа p $(p \in \{0,\ 1\})$ на выходах элементов, а в качестве базиса — произвольное функционально полное подмножество B_0 множества $\hat{B}_0$, например, множество $\{\overline{x_1}, x_1\&x_2\}$. Для краткости вместо $D^{B_0;\,p}_{s,detect}(f)$ и $D^{B_0;\,p}_{s,detect}(n)$ будем писать соответственно $D_p(f)$ и $D_p(n)$.

Любой элемент, реализующий функцию вида $x_1\& \ldots \& x_n$, где $n \geqslant 2$ (функцию $\overline{x_1}$), будем называть *конъюнктором* (соответственно *инвертором*).

Введём обозначения $\tilde{0}^r = \underbrace{0, \ldots, 0}_{r}$, $\tilde{1}^r = \underbrace{1, \ldots, 1}_{r}$, где $r \in \mathbb{Z}^+$.

Вместо «вход схемы S, отвечающий переменной x_i» для краткости будем писать «вход „x_i“схемы S».

Будем говорить, что функциональный элемент E' расположен в схеме S *выше* (*ниже*) функционального элемента E, если в ней существует ориентированный путь от E' к E (соответственно от E к E').

Ограничимся рассмотрением только таких схем из функциональных элементов, в которых выход каждого элемента, не являющегося выходным, соединён хотя бы с одним входом хотя бы одного элемента, т.е. нет «висячих» элементов. В противном случае все «висячие» элементы схемы можно было бы удалить и это никак не сказалось бы на функции, реализуемой схемой, множестве функций неисправности данной схемы и её неизбыточности, если исходная схема была неизбыточна. Кроме того, будем считать, что каждый функциональный элемент, реализующий некоторую булеву функцию (от значений, подаваемых на его входы) из базиса B_0, имеет столько входов, сколько существенных переменных у этой функции. Это предположение также не ограничивает общности по похожим соображениям.

Формулировки и доказательства основных результатов

Пусть S — произвольная схема из функциональных элементов. Произвольный элемент E этой схемы будем называть *разделяющим*, если любая цепочка, соединяющая любой элемент, расположенный в этой схеме выше элемента E, с выходом схемы S, проходит через элемент E.

Лемма 1. *Пусть S — произвольная схема из функциональных элементов, неизбыточная относительно однотипных константных неисправностей типа 0 или 1 на выходах элементов; T — произвольный ЕПТ для этой схемы; E произвольный разделяющий элемент схемы S; S' — подсхема схемы S, получающаяся из неё удалением всех элементов, расположенных в схеме S не выше элемента E, кроме него самого, и переносом выхода схемы на выход элемента E. Тогда схема S' неизбыточна относительно неисправностей такого же типа и множество T является для неё ЕПТ.*

Доказательство. Пусть E' — произвольный элемент, содержащийся в схеме S', тогда он содержится и в схеме S. Так как T — ЕПТ для неизбыточной схемы S, то в T найдётся набор $\tilde{\sigma}$, на котором значение на выходе схемы S при неисправности элемента E' изменится. Тогда на этом наборе при указанной неисправности изменится и значение на выходе элемента E. Действительно, в противном случае переход элемента E' в неисправное состояние никак не отразился бы на значении, выдаваемой схемой S на наборе $\tilde{\sigma}$, что невозможно. Таким образом, при указанной неисправности изменится значение на выходе схемы S', откуда следует, что эта схема неизбыточна и множество T является для неё ЕПТ. Лемма 1 доказана. □

В лемме 2 и теореме 1 в качестве неисправностей функциональных элементов рассматриваются однотипные константные неисправности типа 1 на выходах элементов.

Лемма 2. *Пусть S — произвольная неизбыточная схема из функциональных элементов в базисе B_0, в которой содержится хотя бы один элемент и вход любого инвертора соединён с одним из входов схемы; T — произвольный ЕПТ для схемы S; $x_{i_1}, \ldots, x_{i_d}$ — все попарно различные переменные, подаваемые в этой схеме на входы инверторов (если таких переменных нет, полагаем $d = 0$), а $x_{i_{d+1}}, \ldots, x_{i_k}$ — все попарно различные переменные, каждая из которых подаётся в ней на вход хотя бы одного конъюнктора (если таких переменных нет, полагаем $k = d$). Тогда $k \geqslant 1$, на выходе схемы S реализуется функция $\overline{x_{i_1}}\& \ldots \&\overline{x_{i_d}}\&x_{i_{d+1}}\& \ldots \&x_{i_k}$ (в случае $d = 0$ полагаем $\overline{x_{i_1}}\& \ldots \&\overline{x_{i_d}} \equiv 1$; в случае $k = d$ полагаем $x_{i_{d+1}}\& \ldots \&x_{i_k} \equiv 1$) и $|T| \geqslant d$.*

Замечание 1. Множества индексов $\{i_1, \ldots, i_d\}$ и $\{i_{d+1}, \ldots, i_k\}$ в формулировке леммы 2 могут пересекаться.

Доказательство леммы 2. Неравенство $k \geqslant 1$ очевидно, так как хотя бы одна переменная обязана подаваться на входы произвольного «верхнего» элемента схемы S. Все инверторы схемы S и все входы этой схемы, отвечающие переменным $x_{i_{d+1}}, \ldots, x_{i_k}$, соединяются со входами некоторой её подсхемы, состоящей из одних конъюнкторов (эта подсхема содержит все конъюнкторы схемы S). Поэтому на выходе схемы S реализуется функция $f = \overline{x_{i_1}} \& \ldots \& \overline{x_{i_d}} \& x_{i_{d+1}} \& \ldots \& x_{i_k}$.

Докажем неравенство $|T| \geqslant d$. В случае $d = 0$ оно очевидно. Пусть $d \geqslant 1$. Если какая-то из переменных $x_{i_1}, \ldots, x_{i_d}$ подаётся в схеме S на входы хотя бы двух инверторов, то при неисправности любого из них получающаяся функция неисправности этой схемы будет равна $1 \& \overline{x_{i_1}} \& \ldots \& \& \overline{x_{i_d}} \& x_{i_{d+1}} \& \ldots \& x_{i_k} \equiv f$, т.е. схема S избыточна, что невозможно. Поэтому каждая из переменных $x_{i_1}, \ldots, x_{i_d}$ подаётся в схеме S на вход только одного инвертора (и других инверторов в этой схеме нет). Тогда при неисправности инвертора, на вход которого подаётся переменная x_{i_j}, $j \in \{1, \ldots, d\}$, получающаяся функция неисправности схемы S равна $g_j = \overline{x_{i_1}} \& \ldots \& \overline{x_{i_{j-1}}} \& \overline{x_{i_{j+1}}} \& \ldots \& \overline{x_{i_d}} \& x_{i_{d+1}} \& \ldots \& x_{i_k}$. Заметим, что $g_j \not\equiv f$, так как схема S неизбыточна, и функцию g_j можно отличить от функции f только на тех наборах, у которых i_1-я, …, i_{j-1}-я, i_{j+1}-я, …, i_d-я компоненты равны нулю, а i_j-я, i_{d+1}-я, i_{d+2}-я, …, i_k-я компоненты — единице. Очевидно, что при $j = 1, \ldots, d$ множества этих наборов попарно не пересекаются. В тест T должно входить хотя бы по одному набору из каждого из этих d множеств, т.е. хотя бы d наборов, откуда $|T| \geqslant d$. Лемма 2 доказана. $\square$

Выделим три возможных представления функции $f(\tilde{x}^n)$:

$$f(\tilde{x}^n) = x_i, \tag{1}$$

$$f(\tilde{x}^n) = 0,\ \overline{x_i} \text{ или } x_{i_1}^{\sigma_1} \& x_{i_2} \ldots \& x_{i_k}, \tag{2}$$

$$f(\tilde{x}^n) = \overline{x_{i_1}} \& \overline{x_{i_2}} \& x_{i_3} \& \ldots \& x_{i_k} \text{ или } \underbrace{(\ldots((}_{k-1} x_{i_1}^{\sigma_1} \& x_{i_2})^{\sigma_2} \& x_{i_3})^{\sigma_3} \& \ldots \& x_{i_k})^{\sigma_k}, \tag{3}$$

где $2 \leqslant k \leqslant n$; $i, i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}$, индексы $i_1, \ldots, i_k$ попарно различны и $\sigma_1, \ldots, \sigma_k \in \{0, 1\}$, причём в представлении (3) хотя бы одно из чисел $\sigma_2, \ldots, \sigma_k$ равно 0 и если $k = 2$, то полагаем $x_{i_3} \& \ldots \& x_{i_k} \equiv 1$.

Теорема 1. *Для любой булевой функции $f(\tilde{x}^n)$, отличной от тожде-*

ственной единицы, справедливо равенство

$$D_1(f) = \begin{cases} 0, & \textit{если функция } f \textit{ представима в виде } (1), \\ 1, & \textit{если функция } f \textit{ представима в виде } (2), \\ 2, & \textit{если функция } f \textit{ представима в виде } (3), \\ 3, & \textit{если функция } f \textit{ не представима в видах } (1)\text{–}(3). \end{cases}$$

Если же $f \equiv 1$, то значение $D_1(f)$ не определено.

Следствие 1. *Для любого $n \geqslant 2$ справедливо равенство $D_1(n) = 3$.*

Для доказательства следствия 1 достаточно заметить, что функция $x_1 \oplus \ldots \oplus x_n$ при $n \geqslant 2$ не представима в видах (1)–(3).

Доказательство теоремы 1. Вместо $D_1(f)$ для краткости будем писать $D(f)$. Будем считать, что в базисе B_0 содержится функция $x_1 \& x_2$; в противном случае можно отождествить все входы, кроме одного, у произвольного конъюнктора из этого базиса и получить двухвходовой конъюнктор, допускающий те же самые неисправности (а именно, неисправность типа 1 на его выходе), что и исходный конъюнктор. Пусть вначале $f \equiv 1$; S — произвольная схема в базисе B_0, реализующая функцию f. Выход схемы S, очевидно, не может совпадать ни с одним из её входов, поэтому он является выходом некоторого функционального элемента. Тогда при неисправности этого элемента получающаяся схема по-прежнему будет реализовывать тождественную единицу, т.е. схема S избыточна. Получаем, что неизбыточных схем, реализующих функцию f, не существует и, следовательно, значение $D(f)$ не определено. Далее будем считать, что $f \not\equiv 1$. Рассмотрим четыре случая.

1. Функция f представима в виде (1). Тогда её, очевидно, можно реализовать схемой, не содержащей функциональных элементов. У такой схемы нет ни одной функции неисправности, поэтому пустое множество является для неё ЕПТ, откуда следует равенство $D(f) = 0$.

2. Функция f представима в виде (2). Поскольку она не представима в виде (1), выход любой схемы, реализующей функцию f, не может совпадать ни с одним из её входов, поэтому он является выходом некоторого функционального элемента. Тогда при неисправности этого элемента получающаяся схема будет реализовывать тождественную единицу, которую надо отличить от функции f хотя бы на одном наборе, откуда следует, что $D(f) \geqslant 1$. Докажем неравенство $D(f) \leqslant 1$. Рассмотрим три подслучая.

2.1. Пусть $f \equiv 0$. Реализуем функцию f схемой S в базисе B_0, содержащей один инвертор и один двухвходовой конъюнктор. На вход инвертора подадим переменную x_1, его выход соединим с левым входом двухвходового конъюнктора, а на правый вход этого конъюнктора подадим переменную x_1. Очевидно, что указанная схема реализует тождественный нуль и имеет две функции неисправности — тождественную единицу и x_1. Каждую из них можно отличить от функции f на наборе $(\tilde{1}^n)$, поэтому схема S неизбыточна и множество $\{(\tilde{1}^n)\}$ является для неё ЕПТ длины 1, откуда $D(f) \leqslant 1$.

2.2. Пусть $f = \overline{x_i}$, где $i \in \{1, \dots, n\}$. Реализуем функцию f схемой в базисе B_0, содержащей один инвертор. Очевидно, что эта схема имеет только одну функцию неисправности — тождественную единицу, которую можно отличить от функции f на наборе $(\tilde{1}^n)$. Поэтому схема S неизбыточна и $D(f) \leqslant 1$.

2.3. Пусть $f = x_{i_1}^{\sigma_1} \& x_{i_2} \& \dots \& x_{i_k}$, где $2 \leqslant k \leqslant n$; $i_1, \dots, i_k$ — попарно различные индексы от 1 до n и $\sigma_1 \in \{0, 1\}$. Без ограничения общности можно считать, что $i_1 = 1, \dots, i_k = k$, т.е. $f(\tilde{x}^n) = x_1^{\sigma_1} \& x_2 \& \dots \& x_k$. Реализуем функцию f схемой S в базисе B_0, представляющей собой цепочку из одного инвертора (в случае $\sigma_1 = 0$) и $k-1$ двухвходовых конъюнкторов, на правые входы которых подаются последовательно переменные $x_2, \dots, x_k$. Если $\sigma_1 = 0$, то верхний элемент этой цепочки — инвертор, на вход которого подаётся переменная x_1, а его выход соединяется с левым входом верхнего двухвходового конъюнктора; если же $\sigma_1 = 1$, то верхний элемент этой цепочки — двухвходовой конъюнктор, на левый вход которого подаётся переменная x_1.

Очевидно, что построенная схема S реализует функцию f. Докажем, что она неизбыточна и множество $\{\tilde{\pi}\}$ является для неё ЕПТ, где $\tilde{\pi} = (\overline{\sigma_1}, \tilde{1}^{n-1})$. Заметим, что $f(\tilde{\pi}) = 0$, причём на правые входы всех конъюнкторов в схеме S на наборе $\tilde{\pi}$ подаются единицы. Если неисправен некоторый элемент в этой схеме, то на указанном наборе на выходе этого и всех следующих за ним элементов в схеме S, а значит, и на выходе этой схемы, очевидно, возникнут единицы и неисправность будет обнаружена. Поэтому схема S неизбыточна и $D(f) \leqslant 1$.

В итоге для любой функции f вида (2) получаем равенство $D(f) = 1$. Случай 2 разобран.

3. Функция f представима в виде (3). Докажем сначала неравенство $D(f) \leqslant 2$. Рассмотрим два подслучая.

3.1. Пусть $f = \overline{x_{i_1}} \& \overline{x_{i_2}} \& x_{i_3} \& \dots \& x_{i_k}$, где $2 \leqslant k \leqslant n$ и $i_1, \dots, i_k$ — попарно различные индексы от 1 до n. Без ограничения общности можно считать, что $i_1 = 1, \dots, i_k = k$, т.е. $f(\tilde{x}^n) = \overline{x_1} \& \overline{x_2} \& x_3 \& \dots \& x_k$. Реализуем функцию f схемой S в базисе B_0, содержащей два инвертора и $k-1$ двухвходовых конъюнкторов. На входы инверторов подадим переменные x_1 и x_2; затем выходы этих инверторов и входы схемы, отвечающие переменным $x_3, \dots, x_k$, последовательно соединим со входами цепочки из $k-1$ конъюнкторов: входы верхнего конъюнктора из цепочки соединим с выходами двух построенных инверторов; на правые входы остальных $k-2$ конъюнкторов подадим последовательно переменные $x_3, \ldots, x_k$.

Очевидно, что построенная схема S реализует функцию f. Докажем, что она неизбыточна и множество $\{\tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}_2\}$ является для неё ЕПТ, где $\tilde{\pi}_1 = (0, \tilde{1}^{n-1})$, $\tilde{\pi}_2 = (1, 0, \tilde{1}^{n-2})$. Заметим, что $f(\tilde{\pi}_1) = f(\tilde{\pi}_2) = 0$, причём на один из входов верхнего конъюнктора и на правые входы всех остальных конъюнкторов в схеме S на каждом из наборов $\tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}_2$ подаются единицы. Если неисправен некоторый элемент в этой схеме, то по крайней мере на одном из указанных наборов на выходе этого и всех следующих за ним элементов в схеме S, а значит, и на выходе этой схемы, очевидно, возникнут единицы и неисправность будет обнаружена. Поэтому схема S неизбыточна и $D(f) \leqslant 2$.

3.2. Пусть $f = \underbrace{(\ldots((}_{k-1} x_{i_1}^{\sigma_1} \& x_{i_2})^{\sigma_2} \& x_{i_3})^{\sigma_3} \& \ldots \& x_{i_k})^{\sigma_k}$, где $2 \leqslant k \leqslant n$; $i_1, \ldots, i_k$ — попарно различные индексы от 1 до n и $\sigma_1, \ldots, \sigma_k \in \{0, 1\}$, причём хотя бы одно из чисел $\sigma_2, \ldots, \sigma_k$ равно 0. Без ограничения общности можно считать, что $i_1 = 1, \ldots, i_k = k$, т.е. $f(\tilde{x}^n) = \underbrace{(\ldots((}_{k-1} x_1^{\sigma_1} \& x_2)^{\sigma_2} \& x_3)^{\sigma_3} \& \ldots \& x_k)^{\sigma_k}$. Реализуем функцию f схемой S в базисе B_0, представляющей собой цепочку из инверторов и конъюнкторов, в соответствии с последним равенством. В этой схеме содержатся $k-1$ двухвходовых конъюнкторов и столько инверторов, сколько чисел из $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ равны 0. Если $\sigma_1 = 1$, то верхний элемент схемы S — двухвходовой конъюнктор, на левый вход которого подаётся переменная x_1, а на правый — переменная x_2. Если же $\sigma_1 = 0$, то верхний элемент схемы S — инвертор, на вход которого подаётся переменная x_1; выход этого инвертора соединяется с левым входом двухвходового конъюнктора, на правый вход которого подаётся переменная x_2. Если $\sigma_2 = 0$, то выход указанного конъюнктора соединяется со входом инвертора. Далее, если $k \geqslant 3$, то выход последнего построенного элемента соединяется с левым входом двухвходового конъюнктора, на правый вход которого подаётся переменная x_3, и т.д.

Очевидно, что построенная схема S реализует функцию f. Докажем, что она неизбыточна и множество $T = \{\tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}_2\}$ является для неё ЕПТ, где $\tilde{\pi}_1 = (0, \tilde{1}^{n-1})$, $\tilde{\pi}_2 = (\tilde{1}^n)$. Заметим, что $f(x_1, \tilde{1}^{n-1}) = \underbrace{(\ldots((}_{k-1} x_1^{\sigma_1})^{\sigma_2})^{\sigma_3} \ldots)^{\sigma_k}$, поэтому

$$f(\tilde{\pi}_1) \neq f(\tilde{\pi}_2). \tag{4}$$

Единственная цепь, связывающая вход «x_1» схемы S с её выходом, проходит через каждый её элемент. Поэтому, если в данной схеме какой-то элемент неисправен, то при подаче на её входы вместо переменных $x_2, \ldots, x_n$ константы 1 изменение значения переменной x_1 с 0 на 1, т.е. переход от входного набора $\tilde{\pi}_1$ ко входному набору $\tilde{\pi}_2$, никак не отразится на значении, выдаваемом схемой S. Следовательно, получающаяся функция неисправности g схемы S удовлетворяет условию $g(\tilde{\pi}_1) = g(\tilde{\pi}_2)$. Отсюда и из (4) вытекает, что $g \not\equiv f$, т.е. схема S неизбыточна, и множество T является для неё ЕПТ, поэтому $D(f) \leqslant 2$.

Докажем теперь, что $D(f) \geqslant 2$. Пусть S — произвольная неизбыточная схема, реализующая функцию f вида (3); T —произвольный ЕПТ для этой схемы. Надо доказать, что $|T| \geqslant 2$. Рассмотрим два подслучая.

3.1$'$. В схеме S найдётся хотя бы один инвертор I, вход которого соединён с выходом некоторого функционального элемента E. Пусть на выходе элемента E в схеме S реализуется булева функция φ, тогда на выходе элемента I реализуется функция $\overline{\varphi}$. Чтобы обнаружить неисправность элемента E (I), в тесте T должен содержаться набор $\tilde{\sigma}_1$ ($\tilde{\sigma}_2$), для которого $\varphi(\tilde{\sigma}_1) = 0$ (соответственно $\overline{\varphi}(\tilde{\sigma}_2) = 0$). Из двух последних равенств следует, что $\tilde{\sigma}_1 \neq \tilde{\sigma}_2$, поэтому $|T| \geqslant 2$, что и требовалось доказать.

3.2$'$. Вход любого инвертора схемы S соединён с одним из входов этой схемы. Пусть $x_{i_1}, \ldots, x_{i_d}$ — все попарно различные переменные, подаваемые в этой схеме на входы инверторов (если таких переменных нет, полагаем $d = 0$), а $x_{i_{d+1}}, \ldots, x_{i_k}$ — все попарно различные переменные, каждая из которых подаётся в ней на вход хотя бы одного конъюнктора (если таких переменных нет, полагаем $k = d$). Тогда в силу леммы 2 имеем $k \geqslant 1$, $f = \overline{x_{i_1}} \& \ldots \& \overline{x_{i_d}} \& x_{i_{d+1}} \& \ldots \& x_{i_k}$ (в случае $d = 0$ полагаем $\overline{x_{i_1}} \& \ldots \& \overline{x_{i_d}} \equiv 1$; в случае $k = d$ полагаем $x_{i_{d+1}} \& \ldots \& x_{i_k} \equiv 1$) и $|T| \geqslant d$. Так как функция f не представима в видах (1), (2), то $d \geqslant 2$, следовательно, $|T| \geqslant 2$, что и требовалось доказать.

В итоге для любой функции f вида (3) получаем равенство $D(f) = 2$. Случай 3 разобран.

4. Функция f отлична от тождественной единицы и не представима в видах (1)–(3). Докажем сначала неравенство $D(f) \leqslant 3$. Идеи доказательства сходны с идеями, использованными в работах [6, 7] при получении верхних оценок длин ЕПТ в базисе $\{\&, \neg\}$. Представим функцию f полиномом Жегалкина:

$$f(\tilde{x}^n) = K_1 \oplus \ldots \oplus K_m \oplus c, \tag{5}$$

где $c \in \{0, 1\}$, а K_1 — самая короткая конъюнкция в этом полиноме. Без ограничения общности $K_1 = x_1 \& \ldots \& x_k$. Отметим, что $k < n$, так как в противном случае функция f была бы равна $x_1 \& \ldots \& x_n \oplus c = (x_1 \& \ldots \&$

$\&x_n)^{\overline{c}}$, т.е. имела бы вид (2) или (3). По аналогичной причине $m \geqslant 2$. Если в полиноме Жегалкина для функции f присутствует слагаемое $x_1\& \ldots \& \&x_k\&x_{k+1}$, то будем без ограничения общности считать, что это слагаемое K_m. Представим K_1 в виде $K_1' \oplus K_{m+1}$, где $K_1' = x_1\& \ldots \&x_k\&\overline{x_{k+1}}$, $K_{m+1} = x_1\& \ldots \&x_k\&x_{k+1}$. Тогда

$$f = K_1' \oplus K_2 \oplus \ldots \oplus K_m \oplus K_{m+1} \oplus c = K_1' \oplus K_2 \oplus \ldots \oplus K_q \oplus c, \qquad (6)$$

где $q = m-1$ при $K_m = K_{m+1}$ и $q = m+1$ при $K_m \neq K_{m+1}$. Отметим, что случай $m = 2$, $K_m = K_{m+1}$ невозможен, так как в этом случае функция f была бы равна $K_1' \oplus c = (\overline{x_{k+1}}\&x_1 \ldots \&x_k)^{\overline{c}}$, т.е. была бы представима в виде (2) или (3). Поэтому $q \geqslant 2$.

Так как K_1 — самая короткая конъюнкция в полиноме Жегалкина для функции f, то в каждую конъюнкцию $K_i = x_{j_1(i)}\& \ldots \&x_{j_{t_i}(i)}$, где $i = 2, \ldots, q$, входит хотя бы одна переменная, отличная от переменных $x_1, \ldots, x_k$. Без ограничения общности это переменная $x_{j_1(i)}$. В случае $t_i \geqslant 3$ представим конъюнкцию K_i, $i = 2, \ldots, q$, в виде $(K_i^{(2)} \oplus \ldots \oplus K_i^{(t_i-1)} \oplus K_i^{(t_i)}) \oplus (K_i^{(2)} \oplus \oplus \ldots \oplus K_i^{(t_i-1)})$, где $K_i^{(s)} = x_{j_1(i)}\& \ldots \&x_{j_s(i)}$, $s = 2, \ldots, t_i$ (конъюнкция первых s переменных из K_i). Тогда представление (6) примет вид

$$f = K_1' \oplus \bigoplus_{i=2}^{q} \left(\bigoplus_{s=2}^{t_i} K_i^{(s)} \oplus \bigoplus_{s=2}^{t_i-1} K_i^{(s)} \right) \oplus c \qquad (7)$$

(в случае $t_i \in \{1, 2\}$ полагаем $\bigoplus\limits_{s=2}^{t_i} K_i^{(s)} \oplus \bigoplus\limits_{s=2}^{t_i-1} K_i^{(s)} = K_i$).

Наконец, заменим в представлении (7) все операции $\oplus$ на операции $\oplus'$, где по определению полагаем $x \oplus' y = x \oplus y \oplus 1$ (заметим, что $x \oplus' y = x \sim y$, но это свойство в дальнейшем не понадобится). Указанная замена приведёт к прибавлению к правой части представления (7) некоторого числа единиц (по одному на каждую операцию $\oplus$). Сложив все эти единицы, а также константу c по модулю 2, получим некоторую булеву константу c' такую, что

$$f = K_1' \oplus' {\bigoplus_{i=2}^{q}}' \left({\bigoplus_{s=2}^{t_i}}' K_i^{(s)} \oplus' {\bigoplus_{s=2}^{t_i-1}}' K_i^{(s)} \right) \oplus c'. \qquad (8)$$

Пусть $S_{\oplus'}$ — схема в базисе B_0 с двумя входами и одним выходом, изображённая на рис. 1 (все конъюнкторы двухвходовые). Нетрудно проверить, что на выходе этой схемы реализуется функция $x \oplus' y$, её всевозможными функциями неисправности являются функции $1, 0, x \vee \overline{y}, \overline{x} \vee y$, $\overline{x}, \overline{y}, xy$ (и, следовательно, схема $S_{\oplus'}$ неизбыточна), а в качестве ЕПТ для неё можно взять множество $T_{\oplus'} = \{(0,0),(0,1),(1,0)\}$ (действительно, единственной булевой функцией от двух переменных, которую нельзя отличить от функции $x \oplus' y$ на наборах из множества $T_{\oplus'}$, кроме неё самой, является функция $\overline{x}\,\overline{y}$, но она не входит в число функций неисправности схемы $S_{\oplus'}$).

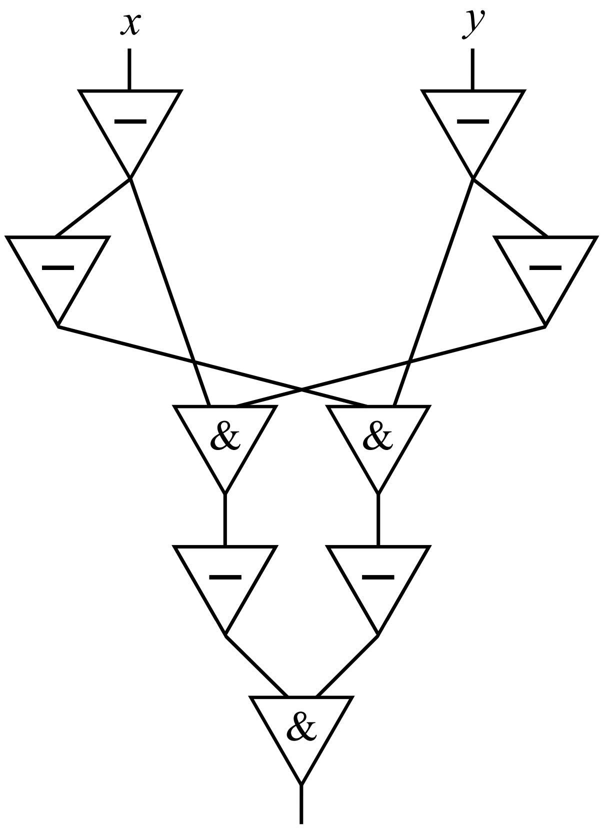

Рис. 1

Реализуем функцию $f(\tilde{x}^n)$ схемой S в базисе B_0 в соответствии с представлением (8) (см. рис. 2). Конъюнкцию K_1' реализуем цепочкой Z_1 из одного инвертора и k двухвходовых конъюнкторов, верхним элементом в которой является инвертор; на вход этого инвертора подадим переменную x_{k+1}, а на правые входы двухвходовых конъюнкторов — последовательно переменные $x_1,\ldots,x_k$. Каждую конъюнкцию K_i, $i = 2,\ldots,q$, реализуем цепочкой Z_i из $t_i - 1$ двухвходовых конъюнкторов, на входы которой последовательно подадим переменные $x_{j_1(i)}, x_{j_2(i)} \ldots, x_{j_{t_i}(i)}$ (в случае $t_i = 1$ в этой цепочке не содержится элементов, а её выход совпадает со входом «$x_{j_1(i)}$» схемы S). Далее, для каждого $i \in \{2,\ldots,q\}$ такого, что $t_i \geqslant 3$, реализуем конъюнкцию $K_i^{(t_i-1)}$ цепочкой $\hat{Z}_i$ из $t_i - 2$ двухвходовых конъюнкторов, на входы которой последовательно подадим переменные $x_{j_1(i)}, x_{j_2(i)} \ldots, x_{j_{t_i-1}(i)}$. Затем выход цепочки Z_1, выходы всех цепочек Z_i, в которых не содержится элементов, и выходы всех конъюнкторов, содержащихся в цепочках $Z_2,\ldots,Z_q$, $\hat{Z}_2,\ldots,\hat{Z}_q$ (а точнее, в тех из них, которые были определены), соединим со входами цепочки $Z_{\oplus'}$, состоящей из блоков $S_{\oplus'}$ и — в случае $c' = 1$ — инвертора, вход которого соединён с выходом нижнего из этих блоков, причём левый верхний вход этой цепочки соединим с выходом цепочки Z_1. Выход нижнего элемента цепочки $Z_{\oplus'}$ объявим выходом схемы S.

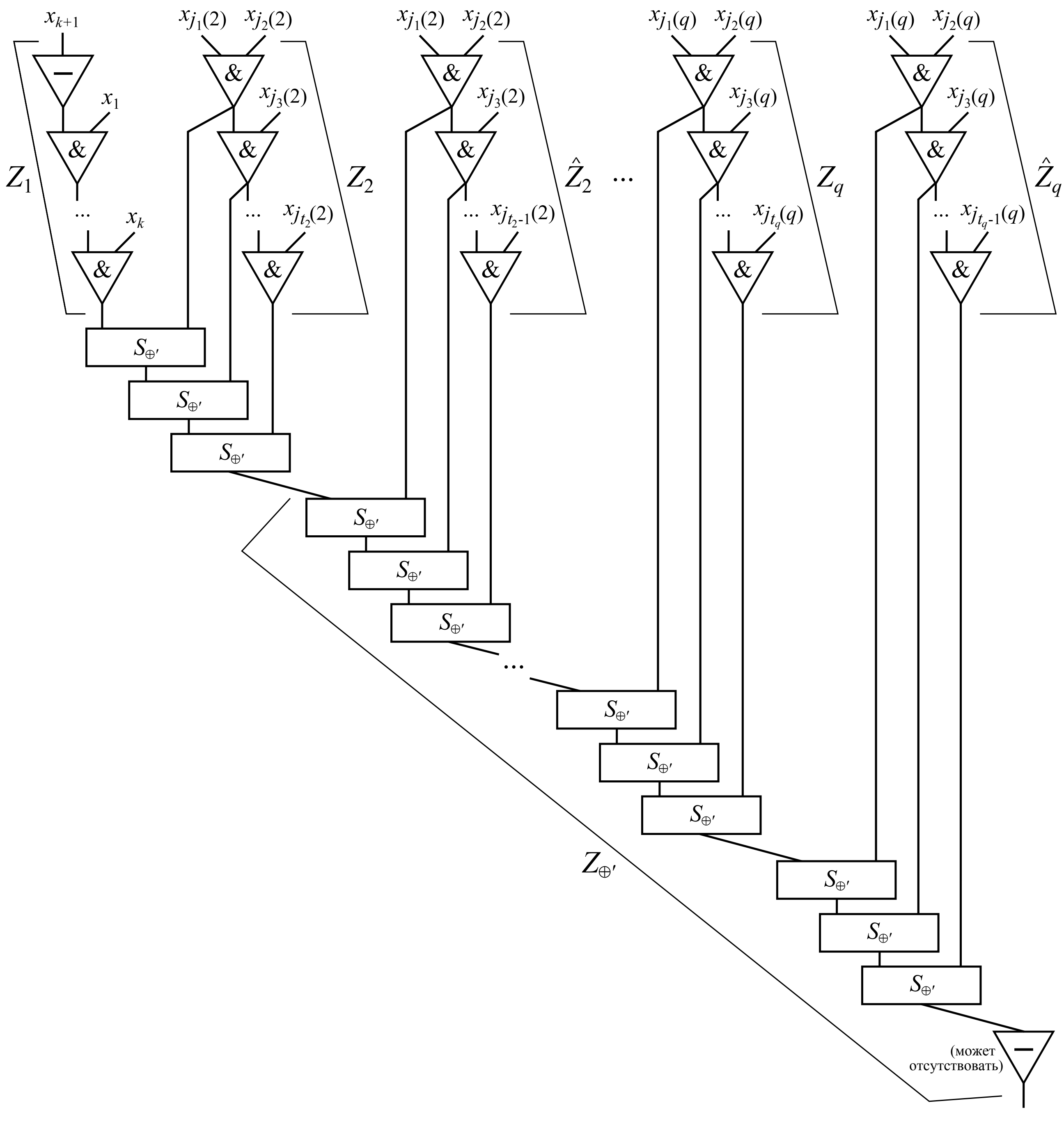

Рис. 2

Нетрудно убедиться, что построенная схема S реализует функцию $f(\tilde{x}^n)$. Для этого достаточно заметить, что на выходах конъюнкторов, содержащихся в цепочке Z_i, $i = 2, \ldots, q$, при движении по этой цепочке «сверху вниз» реализуются функции $K_i^{(2)}, \ldots, K_i^{(t_i)}$ (при $t_i \geqslant 2$), а на выходах конъюнкторов, содержащихся в цепочке $\hat{Z}_i$, $i = 2, \ldots, q$, — функции $K_i^{(2)}, \ldots, K_i^{(t_i-1)}$ (при $t_i \geqslant 3$).

Докажем, что схема S неизбыточна и множество $T = \{\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2, \tilde{\sigma}_3\}$ является для неё ЕПТ, где $\tilde{\sigma}_1 = (\tilde{0}^n)$, $\tilde{\sigma}_2 = (\tilde{1}^k, \tilde{0}^{n-k})$, $\tilde{\sigma}_3 = (\tilde{1}^n)$. В случае исправности всех элементов схемы S на наборе $\tilde{\sigma}_1$ на выходах всех конъюнкторов, содержащихся в цепочках $Z_i, \hat{Z}_i$, где $i = 2, \ldots, q$, возникнут нули. Если неисправен некоторый конъюнктор в одной из этих цепочек, то на наборе $\tilde{\sigma}_1$ на выходе этого конъюнктора возникнет единица, а на выходах всех остальных конъюнкторов из указанных цепочек по-прежнему будут нули. Учитывая, что выход неисправного конъюнктора соединяется ровно с одним входом цепочки $Z_{\oplus'}$, реализующей линейную функцию от своих входов, значение на выходе данной цепочки, т.е. на выходе всей схемы S, изменится, поэтому рассматриваемая неисправность будет обнаружена на наборе $\tilde{\sigma}_1$.

Далее, в случае исправности всех элементов схемы S на наборе $\tilde{\sigma}_3$ на выходах всех элементов, содержащихся в цепочке Z_1, возникнут нули, причём на правые входы всех конъюнкторов в этой цепочке подаются единицы. Если неисправен некоторый элемент в указанной цепочке, то на наборе $\tilde{\sigma}_3$ на выходе этого и всех следующих за ним элементов в цепочке Z_1, т.е. на выходе этой цепочки, очевидно, возникнут единицы. Учитывая, что выход цепочки Z_1 соединяется ровно с одним входом цепочки $Z_{\oplus'}$, реализующей линейную функцию от своих входов, значение на выходе данной цепочки, т.е. на выходе всей схемы S, изменится, поэтому рассматриваемая неисправность будет обнаружена на наборе $\tilde{\sigma}_3$.

Осталось рассмотреть случай неисправности некоторого элемента в цепочке $Z_{\oplus'}$. В случае исправности всех элементов схемы S на наборах $\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2, \tilde{\sigma}_3$ на выходе цепочки Z_1 возникают значения соответственно $0, 1$, 0, а на выходах всех цепочек Z_i, в которых не содержится элементов, и выходах всех конъюнкторов, содержащихся в цепочках $Z_i, \hat{Z}_i$, где $i = 2$, $\ldots, q$, — соответственно $0, 0, 1$ (здесь используется то свойство, что каждая переменная $x_{j_1(i)}$ отлична от переменных $x_1, \ldots, x_k$). В таком случае на входы верхнего блока $S_{\oplus'}$ цепочки $Z_{\oplus'}$ подаются наборы $(0,0), (1,0)$, $(0,1)$, а на его выходе реализуются значения $0 \oplus' 0, 1 \oplus' 0, 0 \oplus' 1$, т.е. $1, 0, 0$. Тогда на входы второго сверху блока $S_{\oplus'}$ цепочки $Z_{\oplus'}$ (если он существует) подаются наборы $(1,0), (0,0), (0,1)$, а на его выходе реализуются значения $1 \oplus' 0, 0 \oplus' 0, 0 \oplus' 1$, т.е. $0, 1, 0$. Далее, на входы третьего сверху блока $S_{\oplus'}$ цепочки $Z_{\oplus'}$ (если он существует) подаются наборы $(0,0), (1,0)$, $(0,1)$, а на его выходе реализуются значения $0 \oplus' 0, 1 \oplus' 0, 0 \oplus' 1$, т.е. $1, 0, 0$, и т.д. Таким образом, на входах каждого блока $S_{\oplus'}$ цепочки $Z_{\oplus'}$ при подаче на входы схемы S наборов $\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2, \tilde{\sigma}_3$ возникают все наборы из множества $T_{\oplus'}$. Так как это множество является ЕПТ для неизбыточной схемы $S_{\oplus'}$, то при неисправности любого элемента в любом блоке $S_{\oplus'}$ цепочки $Z_{\oplus'}$ хотя бы на одном из наборов $\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2, \tilde{\sigma}_3$ значение на выходе этого блока изменится. Учитывая, что выход указанного блока либо совпадает с выходом схемы S, либо соединяется ровно с одним входом некоторой нижней части цепочки $Z_{\oplus'}$, реализующей линейную функцию от своих входов, значение на выходе схемы S изменится, поэтому рассматриваемая неисправность будет обнаружена на одном из наборов $\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2$, $\tilde{\sigma}_3$.

Наконец, если неисправен выходной инвертор цепочки $Z_{\oplus'}$ (в случае $c' = 1$), то функция неисправности схемы S равна тождественной единице, которую можно отличить от функции f на одном из наборов $\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2$ (поскольку $f(\tilde{\sigma}_1) = c$, $f(\tilde{\sigma}_2) = \bar{c}$ — это следует из представления (5)).

В итоге получаем, что любую функцию неисправности схемы S можно отличить от функции $f(\tilde{x}^n)$ хотя бы на одном наборе из множества T. Это означает, что схема S неизбыточна и множество T является для неё ЕПТ. Его длина равна 3, откуда следует неравенство $D(f) \leqslant 3$.

Докажем теперь, что $D(f) \geqslant 3$. Пусть S — произвольная неизбыточная схема, реализующая функцию f, отличную от тождественной единицы и не представимую в видах (1)–(3); T —произвольный ЕПТ для этой схемы. Надо доказать, что $|T| \geqslant 3$. Рассмотрим два подслучая.

4.1. В схеме S найдётся элемент, входы которого соединены с выходами по крайней мере двух различных функциональных элементов. Среди всех элементов с таким свойством выберем произвольный «нижний» элемент E, ниже которого в схеме S не существует элемента с указанным свойством (это можно сделать, так как данная схема конечна и не содержит ориентированных циклов). Очевидно, что элемент E — конъюнктор, а входы каждого элемента, расположенного в схеме S ниже элемента E, соединены с выходом ровно одного функционального элемента (напомним, что мы рассматриваем только схемы без «висячих» элементов) и, как следствие, E — разделяющий элемент.

Среди всех элементов, выходы которых соединены в схеме S непосредственно со входами элемента E (а таких элементов не меньше двух), выберем произвольный «нижний» элемент E_1, ниже которого в схеме S не существует элемента с указанным свойством, и любой другой элемент E_2. Пусть в случае исправности всех элементов схемы S на выходе элемента E_1 (E_2) этой схемы реализуется булева функция φ_1 (соответственно φ_2). Тогда на выходе элемента E реализуется булева функция $\varphi_1 \& \varphi_2 \& \varphi_3$, где φ_3 — конъюнкция функций, подаваемых на все те входы элемента E, которые не соединены с выходом ни одного из элементов E_1, E_2, либо тождественная единица, если таких входов не существует.

Рассмотрим три подслучая.

4.1.1. В схеме S найдётся хотя бы один инвертор, расположенный ниже элемента E. Пусть I — «верхний» из этих инверторов. Очевидно, что I — разделяющий элемент. По лемме 1 схема S', получающаяся из схемы S удалением всех элементов, расположенных в ней не выше элемента I, кроме него самого, и переносом выхода схемы на выход элемента I, неизбыточна и T — ЕПТ для схемы S'. Все элементы, расположенные в схеме S ниже элемента E, но выше элемента I (если такие есть) — конъюнкторы. Поэтому на вход элемента I подаётся функция $\varphi_1\&\varphi_2\&\varphi_3\&\varphi_4$, где φ_4 — некоторая булева функция. Тогда на выходе элемента I, т.е. на выходе схемы S', реализуется функция $f' = \overline{\varphi_1\&\varphi_2\&\varphi_3\&\varphi_4}$.

При неисправности инвертора I на выходе схемы S' возникнет функция неисправности $g_1 \equiv 1$. При неисправности элемента E_1 на его выходе вместо функции φ_1 возникнет тождественная единица, а функции на выходах всех остальных элементов, соединяющихся со входами элемента E, не изменятся, поскольку все эти элементы расположены в схеме S' не ниже элемента E_1 в силу его выбора. Поэтому на выходе схемы S' возникнет функция неисправности $g_2 = \overline{1\&\varphi_2\&\varphi_3\&\varphi_4} = \overline{\varphi_2\&\varphi_3\&\varphi_4}$.

Так как схема S' неизбыточна, то каждая из функций g_1, g_2 отлична от функции f'. Чтобы отличить функцию f' от функции g_1, во множестве T должен содержаться хотя бы один набор $\tilde{\sigma}_1$, для которого $f'(\tilde{\sigma}_1) = 0$, т.е. $\varphi_1(\tilde{\sigma}_1) = \varphi_2(\tilde{\sigma}_1) = \varphi_3(\tilde{\sigma}_1) = \varphi_4(\tilde{\sigma}_1) = 1$. Чтобы отличить функцию f' от функции g_2, во множестве T должен содержаться хотя бы один набор $\tilde{\sigma}_2$, для которого $\varphi_1(\tilde{\sigma}_2) = 0$, $\varphi_2(\tilde{\sigma}_2) = \varphi_3(\tilde{\sigma}_2) = \varphi_4(\tilde{\sigma}_2) = 1$. Из равенств $\varphi_1(\tilde{\sigma}_1) = 1$, $\varphi_1(\tilde{\sigma}_2) = 0$ следует, что $\tilde{\sigma}_1 \neq \tilde{\sigma}_2$, а из равенств $\varphi_2(\tilde{\sigma}_1) = \varphi_2(\tilde{\sigma}_2) = 1$ — что неисправность элемента E_2, на выходе которого в случае исправности всех элементов схемы S' реализуется функция φ_2, нельзя обнаружить на наборах $\tilde{\sigma}_1$, $\tilde{\sigma}_2$. Поэтому в тесте T должен содержаться ещё какой-то набор, отличный от указанных двух наборов. Таким образом, $|T| \geqslant 3$, что и требовалось доказать.

4.1.2. Условие случая 4.1.1 не выполнено, но при этом в схеме S найдётся хотя бы один инвертор, расположенный выше элемента E и вход которого соединён с выходом некоторого функционального элемента. Среди всех инверторов с такими свойствами выберем произвольный «нижний» инвертор I, ниже которого в схеме S не существует инвертора с указанными свойствами. Пусть Z — произвольная цепочка, соединяющая элемент I с элементом E. Будем считать, что сам элемент I в неё не входит. Очевидно тогда, что все элементы в цепочке Z — конъюнкторы. По лемме 1 схема S', получающаяся из схемы S удалением всех элементов, расположенных в ней не выше элемента E, кроме него самого, и переносом выхода схемы на выход элемента E, неизбыточна и

T — ЕПТ для схемы S'. На выходе элемента E, т.е. на выходе схемы S', как было показано выше, реализуется функция $f' = \varphi_1 \& \varphi_2 \& \varphi_3$.

При неисправности того элемента, выход которого соединён в схеме S (и, следовательно, в схеме S') со входом инвертора I, на вход этого инвертора будет подаваться тождественная единица, а на его выходе возникнет тождественный нуль. Он будет подаваться на один из входов цепочки Z из конъюнкторов, поэтому на её выходе, т.е. на выходе элемента E, а значит, и схемы S', возникнет функция неисправности $g_1 \equiv 0$. Далее, при неисправности элемента E_1 на его выходе вместо функции φ_1 возникнет тождественная единица, а функции на выходах всех остальных элементов, соединяющихся со входами элемента E, не изменятся, поскольку все эти элементы расположены в схеме S' не ниже элемента E_1 в силу его выбора. Поэтому на выходе схемы S' возникнет функция неисправности $g_2 = 1 \& \varphi_2 \& \varphi_3 = \varphi_2 \& \varphi_3$.

Так как схема S' неизбыточна, то каждая из функций g_1, g_2 отлична от функции f'. Чтобы отличить функцию f' от функции g_1, во множестве T должен содержаться хотя бы один набор $\tilde{\sigma}_1$, для которого $f'(\tilde{\sigma}_1) = 1$, т.е. $\varphi_1(\tilde{\sigma}_1) = \varphi_2(\tilde{\sigma}_1) = \varphi_3(\tilde{\sigma}_1) = 1$. Чтобы отличить функцию f' от функции g_2, во множестве T должен содержаться хотя бы один набор $\tilde{\sigma}_2$, для которого $\varphi_1(\tilde{\sigma}_2) = 0$, $\varphi_2(\tilde{\sigma}_2) = \varphi_3(\tilde{\sigma}_2) = 1$. Из равенств $\varphi_1(\tilde{\sigma}_1) = 1$, $\varphi_1(\tilde{\sigma}_2) = 0$ следует, что $\tilde{\sigma}_1 \neq \tilde{\sigma}_2$, а из равенств $\varphi_2(\tilde{\sigma}_1) = \varphi_2(\tilde{\sigma}_2) = 1$ — что неисправность элемента E_2, на выходе которого в случае исправности всех элементов схемы S' реализуется функция φ_2, нельзя обнаружить на наборах $\tilde{\sigma}_1$, $\tilde{\sigma}_2$. Поэтому в тесте T должен содержаться ещё какой-то набор, отличный от указанных двух наборов. Таким образом, $|T| \geqslant 3$, что и требовалось доказать.

4.1.3. Отрицание объединения случаев 4.1.1 и 4.1.2: в схеме S ниже элемента E не расположено ни одного инвертора, а вход любого инвертора этой схемы, расположенного выше элемента E, соединён с одним из входов схемы. В таком случае вход любого инвертора схемы S соединён с одним из входов этой схемы. Пусть $x_{i_1}, \ldots, x_{i_d}$ — все попарно различные переменные, подаваемые в этой схеме на входы инверторов (если таких переменных нет, полагаем $d = 0$), а $x_{i_{d+1}}, \ldots, x_{i_k}$ — все попарно различные переменные, каждая из которых подаётся в ней на вход хотя бы одного конъюнктора (если таких переменных нет, полагаем $k = d$). Тогда в силу леммы 2 имеем $k \geqslant 1$, $f = \overline{x_{i_1}} \& \ldots \& \overline{x_{i_d}} \& x_{i_{d+1}} \& \ldots \& x_{i_k}$ (в случае $d = 0$ полагаем $\overline{x_{i_1}} \& \ldots \& \overline{x_{i_d}} \equiv 1$; в случае $k = d$ полагаем $x_{i_{d+1}} \& \ldots \& \& x_{i_k} \equiv 1$) и $|T| \geqslant d$. Так как функция f не представима в видах (1)–(3), то $d \geqslant 3$, следовательно, $|T| \geqslant 3$, что и требовалось доказать. Случай 4.1 разобран.

4.2. Входы каждого элемента схемы S соединены с выходом не более чем одного функционального элемента. Очевидно, что в таком случае схема S представляет собой цепочку из элементов, причём в ней содержится хотя бы один элемент, так как функция f не представима в виде (1). Пусть в этой цепочке при движении сверху вниз расположены элементы $E_1, \ldots, E_r$, где r — общее число элементов в схеме S.

Докажем по индукции, что на выходе каждого из этих элементов реализуется функция вида

$$0, 1 \text{ или } \underbrace{(\ldots((}_{k-1} x_{i_1}^{\sigma_1} \& x_{i_2})^{\sigma_2} \& x_{i_3})^{\sigma_3} \& \ldots \& x_{i_k})^{\sigma_k}, \tag{9}$$

где $1 \leqslant k \leqslant n$; $i_1, \ldots, i_k$ — попарно различные индексы от 1 до n и $\sigma_1, \ldots, \sigma_k \in \{0, 1\}$ (при $k = 1$ этот вид превращается в $x_{i_1}^{\sigma_1}$). Легко видеть, что вне зависимости от того, является элемент E_1 инвертором или конъюнктором, на его выходе будет реализована функция указанного вида. В случае $r = 1$ утверждение доказано. Далее будем считать, что $r \geqslant 2$. Пусть требуемое утверждение доказано для элемента E_j, где $j \in \{1, \ldots, r-1\}$; докажем его для элемента E_{j+1}. На выходе элемента E_j по предположению индукции реализуется функция f_j вида 0, 1 или $\underbrace{(\ldots((}_{k-1} x_{i_1}^{\sigma_1} \& \& x_{i_2})^{\sigma_2} \& x_{i_3})^{\sigma_3} \& \ldots \& x_{i_k})^{\sigma_k}$; этот выход соединяется в схеме S с одним или несколькими входами элемента E_{j+1}, на все остальные входы которого подаются переменные. Если элемент E_{j+1} — инвертор, то утверждение очевидно, так как отрицание любой функции вида (9) является функцией того же вида. Пусть этот элемент — конъюнктор и все попарно различные переменные, которые подаются на его входы, не соединённые с выходом элемента E_j, — это переменные $x_{i_{k+1}}, \ldots, x_{i_l}$, где $l \geqslant k$ и $i_{k+1}, \ldots, i_l$ — попарно различные индексы от 1 до n (если таких переменных нет, полагаем $l = k$). Тогда на его выходе реализуется функция $f_j \& x_{i_{k+1}} \& \ldots \& x_{i_l}$ (в случае $l = k$ полагаем $x_{i_{k+1}} \& \ldots \& x_{i_l} \equiv 1$). Справедливо тождество

$$f_j \& x_{i_{k+1}} \& \ldots \& x_{i_l} \equiv h_j \& x_{i_{k+1}} \& \ldots \& x_{i_l}, \tag{10}$$

где h_j — булева функция, получающаяся подстановкой в функцию f_j вместо всех переменных из множества $\{x_{i_{k+1}}, \ldots, x_{i_l}\}$ константы 1 (в случае $l = k$ полагаем $\{x_{i_{k+1}}, \ldots, x_{i_l}\} = \varnothing$). Для доказательства тождества (10) достаточно рассмотреть случай, когда хотя бы одна из переменных $x_{i_{k+1}}, \ldots, x_{i_l}$ равна 0, и противоположный случай. Но функция $h_j \& x_{i_{k+1}} \& \ldots \& \& x_{i_l}$, как нетрудно видеть, представима в виде (9) при указанных в начале этого абзаца условиях на индексы. Индуктивный переход доказан.

Получаем, что на выходе элемента E_r, т.е. на выходе всей схемы S, реализуется функция f вида (9), где $1 \leqslant k \leqslant n$; $i_1, \ldots, i_k$ — попарно различные индексы от 1 до n и $\sigma_1, \ldots, \sigma_k \in \{0,1\}$. Но тогда эта функция имеет один из видов (1)–(3) в смысле условий теоремы 1 или равна тождественной единице, что невозможно по предположению случая 4. Противоречие.

В итоге для любой булевой функции f, отличной от тождественной единицы и не представимой в видах (1)–(3), получаем равенство $D(f) = 3$. Теорема 1 доказана. $\square$

Рассмотрим теперь в качестве неисправностей функциональных элементов однотипные константные неисправности типа 0 на выходах элементов. Выделим ещё два возможных представления функции $f(\tilde{x}^n)$:

$$f(\tilde{x}^n) = x_{i_1}^{\sigma_1} \& \ldots \& x_{i_k}^{\sigma_k}, \tag{11}$$

$$f(\tilde{x}^n) = \underbrace{(\ldots((}_{k-1} x_{i_1}^{\sigma_1} \& x_{i_2}^{\sigma_2})^{\delta_1} \& x_{i_3}^{\sigma_3})^{\delta_2} \& \ldots \& x_{i_k}^{\sigma_k})^{\delta_{k-1}}, \tag{12}$$

где $1 \leqslant k \leqslant n$ в представлении (11) и $2 \leqslant k \leqslant n$ в представлении (12); $i_1, \ldots, i_k$ — попарно различные индексы от 1 до n и $\sigma_1, \ldots, \sigma_k, \delta_1, \ldots, \delta_{k-1} \in \{0,1\}$, причём хотя бы одно из чисел $\delta_1, \ldots, \delta_{k-1}$ (в представлении (12)) равно 0.

Теорема 2. *Для любой булевой функции $f(\tilde{x}^n)$, отличной от констант, справедливо равенство*

$$D_0(f) = \begin{cases} 0, & \text{если функция } f \text{ представима в виде } (1), \\ 1, & \text{если функция } f \text{ представима в виде } (11), \text{ но не в виде } (1), \\ 2, & \text{если функция } f \text{ представима в виде } (12), \\ 3, & \text{если функция } f \text{ не представима в видах } (1), (11), (12). \end{cases}$$

Если же $f \equiv 0$ или $f \equiv 1$, то значение $D_0(f)$ не определено.

Следствие 2. *Для любого $n \geqslant 2$ справедливо равенство $D_0(n) = 3$.*

Для доказательства следствия 2 достаточно заметить, что функция $x_1 \oplus \ldots \oplus x_n$ при $n \geqslant 2$ не представима в видах (1), (11), (12).

Доказательство теоремы 2. Вместо $D_0(f)$ для краткости будем писать $D(f)$. Можно считать, что в базисе B_0 содержится функция $x_1 \& x_2$ (см. начало доказательства теоремы 1). Пусть вначале $f \equiv 0$ или $f \equiv 1$. Рассуждая аналогично доказательству теоремы 5 из работы [7], получаем, что неизбыточных схем, реализующих функцию f, не существует и, следовательно, значение $D(f)$ не определено. Далее будем считать, что $f \not\equiv 0$ и $f \not\equiv 1$. Рассмотрим четыре случая.

1. Функция f представима в виде (1). Тогда её, очевидно, можно реализовать схемой, не содержащей функциональных элементов. У такой

схемы нет ни одной функции неисправности, поэтому пустое множество для неё является ЕПТ, откуда следует равенство $D(f) = 0$.

2. Функция f представима в виде (11), но не в виде (1). Выход любой схемы, реализующей функцию f, не может совпадать ни с одним из её входов, поэтому он является выходом некоторого функционального элемента. Тогда при неисправности этого элемента получающаяся схема будет реализовывать тождественный нуль, которую надо отличить от функции f хотя бы на одном наборе, откуда следует, что $D(f) \geqslant 1$.

Докажем неравенство $D(f) \leqslant 1$. Имеем $f = x_{i_1}^{\sigma_1} \& \ldots \& x_{i_k}^{\sigma_k}$, где $1 \leqslant k \leqslant n$; $i_1, \ldots, i_k$ — попарно различные индексы от 1 до n и $\sigma_1, \ldots, \sigma_k \in \{0, 1\}$. Реализуем функцию f схемой S в базисе B_0 в соответствии с последним равенством. В этой схеме содержатся $k-1$ двухвходовых конъюнкторов и столько инверторов, сколько чисел из $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ равны 0. Каждый множитель вида $\overline{x_{i_j}}$ реализуем с использованием одного инвертора. Затем все построенные инверторы и все входы «x_{i_j}», отвечающие множителям вида x_{i_j}, соединим цепочкой из конъюнкторов. Очевидно, что полученная схема реализует функцию f, а единственной её функцией неисправности является тождественный нуль. Отсюда следует, что схема S неизбыточна и множество, состоящее из любого одного набора, на котором функция f принимает значение 1, является для этой схемы ЕПТ длины 1. Поэтому $D(f) \leqslant 1$.

В итоге получаем равенство $D(f) = 1$. Случай 2 разобран.

3. Функция f представима в виде (12). Докажем сначала неравенство $D(f) \leqslant 2$. Без ограничения общности можно считать, что $i_1 = 1, \ldots, i_k = k$, т.е. $f(\tilde{x}^n) = \underbrace{(\ldots((}_{k-1} x_1^{\sigma_1} \& x_2^{\sigma_2})^{\delta_1} \& x_3^{\sigma_3})^{\delta_2} \& \ldots \& x_k^{\sigma_k})^{\delta_{k-1}}$. Реализуем функцию f схемой S в базисе B_0 в соответствии с последним равенством. В этой схеме содержатся $k-1$ двухвходовых конъюнкторов и столько инверторов, сколько чисел из $\sigma_1, \ldots, \sigma_k, \delta_1, \ldots, \delta_{k-1}$ равны 0. Для каждого $i \in \{1, \ldots, k\}$ такого, что $\sigma_i = 0$, подадим входную переменную x_i на вход инвертора. Затем подадим функции $x_1^{\sigma_1}$ и $x_2^{\sigma_2}$ (каждая из которых берётся либо со входа схемы, либо с выхода одного из построенных инверторов) соответственно на левый и правый входы двухвходового конъюнктора. Если $\delta_1 = 0$, то выход указанного конъюнктора соединим со входом инвертора. Далее, если $k \geqslant 3$, то выход последнего построенного элемента соединим с левым входом двухвходового конъюнктора, на правый вход которого подадим функцию $x_3^{\sigma_3}$ (взятую либо со входа схемы, либо с выхода одного из построенных инверторов). Если $\delta_2 = 0$, то выход указанного конъюнктора соединим со входом инвертора, и т.д.

Очевидно, что построенная схема S реализует функцию f. Докажем, что она неизбыточна и множество $T = \{\tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}_2\}$ является для неё ЕПТ, где

$\tilde{\pi}_1 = (0, \sigma_2, \ldots, \sigma_k, \tilde{1}^{n-k})$, $\tilde{\pi}_2 = (1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k, \tilde{1}^{n-k})$. Заметим, что $f(x_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k, \tilde{1}^{n-k}) = \underbrace{(\ldots((}_{k-1} x_1^{\sigma_1})^{\delta_1})^{\delta_2} \ldots)^{\delta_{k-1}}$, поэтому верно соотношение (4): $f(\tilde{\pi}_1) \neq \neq f(\tilde{\pi}_2)$. Заметим, что неисправность каждого инвертора в схеме S, кроме выходного (если выходной элемент этой схемы — инвертор), приводит к той же функции неисправности схемы S, что и неисправность следующего за ним конъюнктора. Поэтому достаточно рассмотреть неисправности конъюнкторов и, быть может, выходного инвертора. Единственная цепь, связывающая вход «x_1» схемы S с её выходом, проходит через каждый из этих элементов. Поэтому, если какой-то из них неисправен, то при подаче на входы схемы S вместо переменных $x_2, \ldots, x_n$ констант соответственно $\sigma_2, \ldots, \sigma_k, \tilde{1}^{n-k}$ изменение значения переменной x_1 с 0 на 1, т.е. переход от входного набора $\tilde{\pi}_1$ ко входному набору $\tilde{\pi}_2$, никак не отразится на значении, выдаваемом данной схемой. Следовательно, получающаяся функция неисправности g схемы S удовлетворяет условию $g(\tilde{\pi}_1) = g(\tilde{\pi}_2)$. Отсюда и из (4) вытекает, что $g \not\equiv f$, т.е. схема S неизбыточна, и множество T является для неё ЕПТ, поэтому $D(f) \leqslant 2$.

Докажем теперь, что $D(f) \geqslant 2$. Пусть S — произвольная неизбыточная схема, реализующая функцию f вида (12); T —произвольный ЕПТ для этой схемы. Надо доказать, что $|T| \geqslant 2$. Рассмотрим два подслучая.

3.1. В схеме S найдётся хотя бы один инвертор I, вход которого соединён с выходом некоторого функционального элемента E. Пусть на выходе элемента E в схеме S реализуется булева функция φ, тогда на выходе элемента I реализуется функция $\overline{\varphi}$. Чтобы обнаружить неисправность элемента E (I), в тесте T должен содержаться набор $\tilde{\sigma}_1$ ($\tilde{\sigma}_2$), для которого $\varphi(\tilde{\sigma}_1) = 1$ (соответственно $\overline{\varphi}(\tilde{\sigma}_2) = 1$). Из двух последних равенств следует, что $\tilde{\sigma}_1 \neq \tilde{\sigma}_2$, поэтому $|T| \geqslant 2$, что и требовалось доказать.

3.2. Вход любого инвертора схемы S соединён с одним из входов этой схемы. Рассуждая аналогично первому абзацу из доказательства леммы 2 и учитывая соотношение $f \not\equiv 0$, получаем, что функция f представима в одном из видов (1), (11). Однако это невозможно, так как она представима в виде (12). Противоречие.

В итоге для любой функции f вида (12) получаем равенство $D(f) = 2$. Случай 3 разобран.

4. Функция f отлична от булевых констант и не представима в видах (1), (11), (12). Докажем сначала неравенство $D(f) \leqslant 3$. Идеи доказательства сходны с идеями, использованными при получении аналогичного неравенства в случае 4 из доказательства теоремы 1. Представим её полиномом Жегалкина (5), где $c \in \{0, 1\}$, а K_1 — самая короткая конъюнкция в этом полиноме. Пусть $K_i = x_{j_1(i)} \& \ldots \& x_{j_{t_i}(i)}$, $i = 1, \ldots, m$. Без ограничения общности $K_1 = x_1 \& \ldots \& x_k$. Отметим, что $k < n$, так как в

противном случае функция f была бы равна $x_1\& \ldots \& x_n \oplus c = (x_1\& \ldots \& \& x_n)^{\overline{c}}$, т.е. имела бы вид (11) или (12). По аналогичной причине $m \geqslant 2$.

Так как K_1 — самая короткая конъюнкция в полиноме Жегалкина для функции f, то в каждую конъюнкцию K_i, где $i = 2, \ldots, m$, входит хотя бы одна переменная, отличная от переменных $x_1, \ldots, x_k$. Без ограничения общности это переменная $x_{j_1(i)}$.

Заменим в представлении (5) все операции $\oplus$ на операции $\oplus'$. Указанная замена приведёт к прибавлению к правой части представления (5) некоторого числа единиц (по одному на каждую операцию $\oplus$). Сложив все эти единицы, а также константу c по модулю 2, получим некоторую булеву константу c' такую, что

$$f = K_1 \oplus' \ldots \oplus' K_m \oplus c'. \tag{13}$$

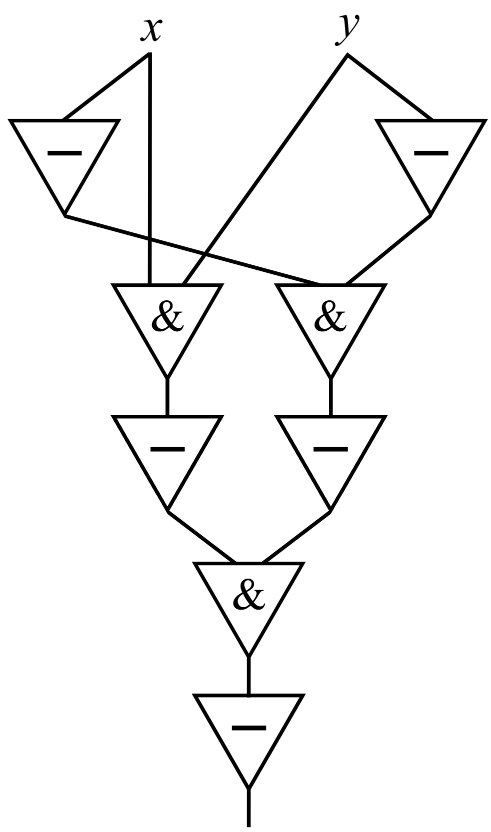

Рис. 3

Пусть $S_{\oplus'}$ — схема в базисе B_0 с двумя входами и одним выходом, изображённая на рис. 3 (все конъюнкторы двухвходовые). Нетрудно проверить, что на выходе этой схемы реализуется функция $x \oplus' y$, её всевозможными функциями неисправности являются функции $0, 1, xy, \overline{x}\,\overline{y}$ (и, следовательно, схема $S_{\oplus'}$ неизбыточна), а в качестве ЕПТ для неё можно взять множество $T_{\oplus'} = \{(0,0), (1,0), (1,1)\}$ (действительно, единственной булевой функцией от двух переменных, которую нельзя отличить от функции $x \oplus' y$ на наборах из множества $T_{\oplus'}$, кроме неё самой, является функция $\overline{x} \vee y$, но она не входит в число функций неисправности схемы $S_{\oplus'}$).

Реализуем функцию $f(\tilde{x}^n)$ схемой S в базисе B_0 в соответствии с представлением (13) (см. рис. 4). Каждую конъюнкцию K_i, $i = 1, \ldots, m$, реализуем цепочкой Z_i из конъюнкторов, причём, если $i \geqslant 2$ и ранг конъюнкции K_i не менее 2, то на левый вход верхнего элемента этой цепочки подадим переменную $x_{j_1(i)}$, а если ранг конъюнкции K_i равен 1, то в цепочке Z_i не содержится элементов, а её выход совпадает со входом «$x_{j_1(i)}$» схемы S. Затем выходы всех построенных цепочек $Z_1, \ldots, Z_m$ соединим со входами цепочки $Z_{\oplus'}$, состоящей из блоков $S_{\oplus'}$ и — в случае $c' = 1$ — инвертора, вход которого соединён с выходом нижнего из этих блоков, причём левый верхний вход этой цепочки соединим с выходом цепочки Z_1. Выход нижнего элемента цепочки $Z_{\oplus'}$ объявим выходом схемы S.

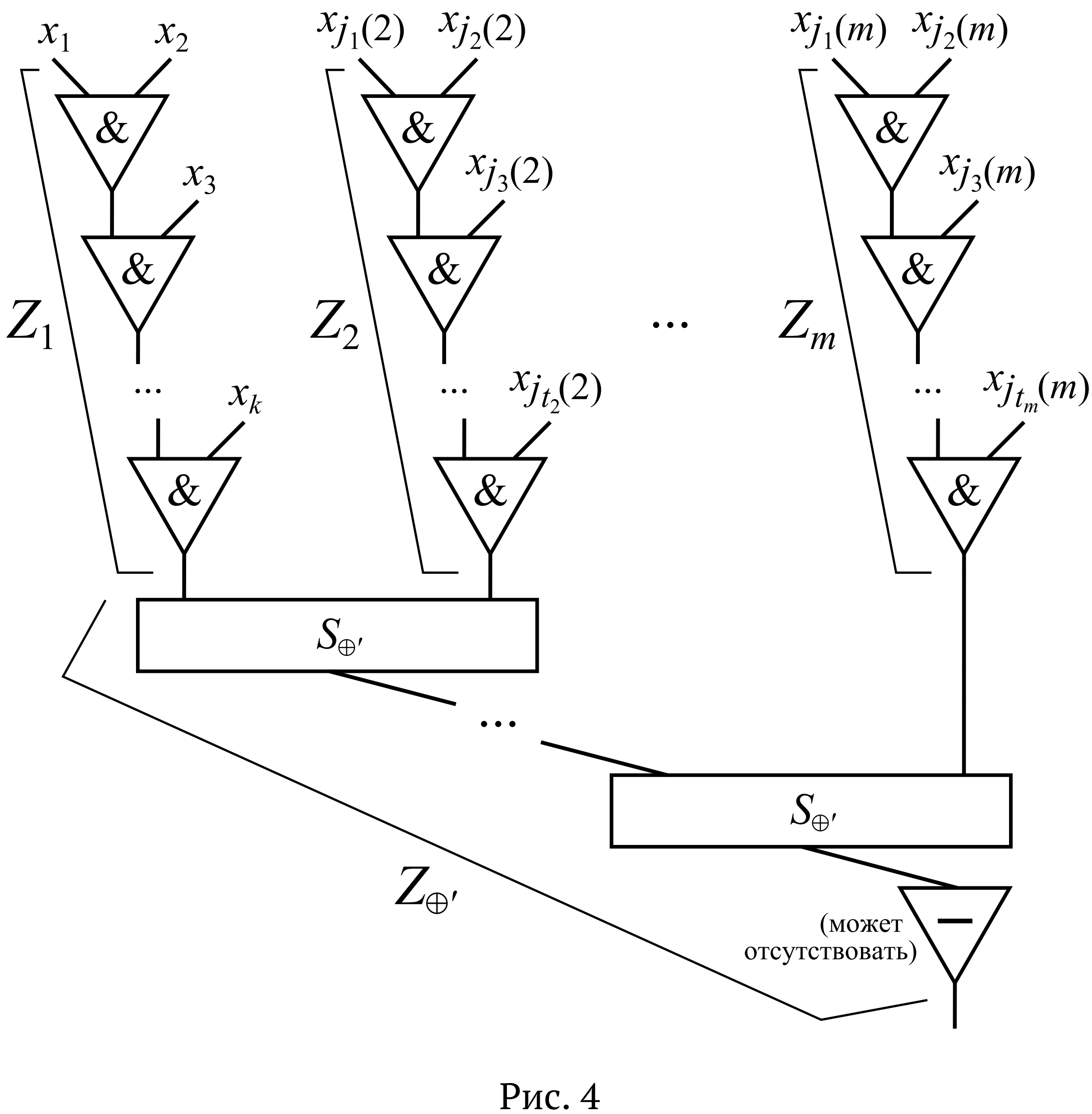

Рис. 4

Легко видеть, что построенная схема S реализует функцию $f(\tilde{x}^n)$. Докажем, что она неизбыточна и множество $T = \{\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2, \tilde{\sigma}_3\}$ является для неё ЕПТ, где $\tilde{\sigma}_1 = (\tilde{0}^n)$, $\tilde{\sigma}_2 = (\tilde{1}^k, \tilde{0}^{n-k})$, $\tilde{\sigma}_3 = (\tilde{1}^n)$. В случае исправности всех элементов схемы S на наборе $\tilde{\sigma}_3$ на выходах всех конъюнкторов, содержащихся в цепочках $Z_1, \ldots, Z_m$, возникнут единицы. Если неисправен некоторый конъюнктор в цепочке Z_i, $i \in \{1, \ldots, m\}$, то на наборе $\tilde{\sigma}_3$ на выходе этого конъюнктора и всех следующих за ним конъюнкторов в указанной цепочке, а значит, и на выходе цепочки Z_i, возникнут нули, а на выходах всех остальных конъюнкторов из указанных цепочек попрежнему будут единицы. Учитывая, что выход цепочки Z_i соединяется ровно с одним входом цепочки $Z_{\oplus'}$, реализующей линейную функцию от своих входов, значение на выходе данной цепочки, т.е. на выходе всей схемы S, изменится, поэтому рассматриваемая неисправность будет обнаружена на наборе $\tilde{\sigma}_3$.

Далее, в случае исправности всех элементов схемы S на наборах $\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2, \tilde{\sigma}_3$ на выходе цепочки Z_1 возникают значения соответственно $0, 1, 1$, а на выходе каждой из цепочек $Z_2, \ldots, Z_m$ — соответственно $0, 0, 1$ (здесь используется то свойство, что каждая из переменных $x_{j_1(2)}, \ldots, x_{j_1(m)}$ отлична от переменных $x_1, \ldots, x_k$). В таком случае на входы верхнего блока $S_{\oplus'}$ цепочки $Z_{\oplus'}$ подаются наборы $(0, 0), (1, 0), (1, 1)$, а на его выходе реализуются значения $0 \oplus' 0, 1 \oplus' 0, 1 \oplus' 1$, т.е. $1, 0, 1$. Тогда на входы второго сверху блока $S_{\oplus'}$ цепочки $Z_{\oplus'}$ (если он существует) подаются наборы $(1, 0), (0, 0), (1, 1)$, а на его выходе реализуются значения $1 \oplus' 0, 0 \oplus' 0, 1 \oplus' 1$, т.е. $0, 1, 1$. Далее, на входы третьего сверху блока $S_{\oplus'}$ цепочки $Z_{\oplus'}$ (если он существует) подаются наборы $(0, 0), (1, 0), (1, 1)$, а на его выходе реализуются значения $0 \oplus' 0, 1 \oplus' 0, 1 \oplus' 1$, т.е. $1, 0, 1$, и т.д. Таким образом, на входах каждого блока $S_{\oplus'}$ цепочки $Z_{\oplus'}$ при подаче на входы схемы S наборов $\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2, \tilde{\sigma}_3$ возникают все наборы из множества $T_{\oplus'}$. Так как это множество является ЕПТ для неизбыточной схемы $S_{\oplus'}$, то при неисправности любого элемента в любом блоке $S_{\oplus'}$ цепочки $Z_{\oplus'}$ хотя бы на одном из наборов $\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2, \tilde{\sigma}_3$ значение на выходе этого блока изменится. Учитывая, что выход указанного блока либо совпадает с выходом схемы S, либо соединяется ровно с одним входом некоторой нижней части цепочки $Z_{\oplus'}$, реализующей линейную функцию от своих входов, значение на выходе схемы S изменится, поэтому рассматриваемая неисправность будет обнаружена на одном из наборов $\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2, \tilde{\sigma}_3$.

Наконец, если неисправен выходной инвертор цепочки $Z_{\oplus'}$ (в случае $c' = 1$), то функция неисправности схемы S равна тождественному нулю, которую можно отличить от функции f на одном из наборов $\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2$ (поскольку $f(\tilde{\sigma}_1) = c$, $f(\tilde{\sigma}_2) = \bar{c}$ — это следует из представления (5)).

В итоге получаем, что любую функцию неисправности схемы S можно отличить от функции $f(\tilde{x}^n)$ хотя бы на одном наборе из множества T. Это означает, что схема S неизбыточна и множество T является для неё ЕПТ. Его длина равна 3, откуда следует неравенство $D(f) \leqslant 3$.

Докажем теперь, что $D(f) \geqslant 3$. Пусть S — произвольная неизбыточная схема, реализующая функцию f, отличную от констант и не представимую в видах (1), (11), (12); T —произвольный ЕПТ для этой схемы. Надо доказать, что $|T| \geqslant 3$.

Пусть E — произвольный конъюнктор, содержащийся в схеме S. Через $A_1(E)$ будем обозначать множество всех таких конъюнкторов схемы S, каждый из которых является верхним элементом хотя бы одной цепочки из конъюнкторов, у которой нижний элемент — E. Очевидно, что $E \in A_1(E)$. Через $A_2(E)$ обозначим множество всех таких элементов схемы S, не принадлежащих множеству $A_1(E)$, выход каждого из которых соединён хотя бы с одним входом хотя бы одного элемента из множества $A_1(E)$. Легко видеть, что все элементы во множестве $A_2(E)$ (если такие есть) — инверторы. Через $A_3(E)$ обозначим множество всех таких элементов схемы S, выход каждого из которых соединён со входом хотя бы одного инвертора из множества $A_2(E)$. Рассмотрим два подслучая.

4.1. В схеме S найдётся разделяющий конъюнктор E, для которого $|A_3(E)| \geqslant 2$. Среди всех элементов из множества $A_3(E)$ выберем произвольный «нижний» элемент E_1, ниже которого в схеме S не существует элемента из этого множества, и любой другой элемент E_2. Пусть I_1 (I_2) — произвольный инвертор из множества $A_2(E)$, вход которого соединён с выходом элемента E_1 (соответственно E_2); E'_1 (E'_2) — произвольный конъюнктор из множества $A_1(E)$, хотя бы один вход которого соединён с выходом элемента I_1 (соответственно I_2; элементы E'_1 и E'_2 могут совпадать). Пусть в случае исправности всех элементов схемы S на выходе элемента E_1 (E_2) этой схемы реализуется булева функция φ_1 (соответственно φ_2). Тогда на выходе элемента I_1 (I_2) реализуется функция $\overline{\varphi_1}$ (соответственно $\overline{\varphi_2}$), на выходе элемента E'_1 (E'_2) — функция, меньшая либо равная $\overline{\varphi_1}$ (соответственно $\overline{\varphi_2}$), а на выходе элемента E — функция, меньшая либо равная как $\overline{\varphi_1}$, так и $\overline{\varphi_2}$, т.е. функция вида $\overline{\varphi_1}\&\overline{\varphi_2}\&\varphi_3$, где φ_3 — некоторая булева функция.

По лемме 1 схема S', получающаяся из схемы S удалением всех элементов, расположенных в ней не выше элемента E, кроме него самого, и переносом выхода схемы на выход элемента E, неизбыточна и T — ЕПТ для схемы S'. На выходе элемента E, т.е. на выходе схемы S', как было показано выше, реализуется функция $f' = \overline{\varphi_1}\&\overline{\varphi_2}\&\varphi_3$. При неисправности элемента E на выходе схемы S' возникнет функция неисправности $g_1 \equiv 0$. При неисправности элемента E_1 в силу его выбора на выходе элемента E_2 в схеме S (а значит, и в схеме S') по-прежнему будет реализована функция φ_2, а на выходе элемента I_2 — функция $\overline{\varphi_2}$. Тогда на выходе элемента E_2' и, как следствие, элемента E будет реализована функция, меньшая либо равная $\overline{\varphi_2}$. Поэтому получающаяся функция неисправности g_2 схемы S' представима в виде $\overline{\varphi_2}\&\varphi_3'$, где φ_3' — некоторая булева функция.

Так как схема S' неизбыточна, то каждая из функций g_1, g_2 отлична от функции f'. Чтобы отличить функцию f' от функции g_1, во множестве T должен содержаться хотя бы один набор $\tilde{\sigma}_1$, для которого $f'(\tilde{\sigma}_1) = 1$, т.е. $\varphi_1(\tilde{\sigma}_1) = \varphi_2(\tilde{\sigma}_1) = 0$, $\varphi_3(\tilde{\sigma}_1) = 1$. Чтобы отличить функцию f' от функции g_2, во множестве T должен содержаться хотя бы один набор $\tilde{\sigma}_2$, для которого $\varphi_2(\tilde{\sigma}_2) = 0$ (это следует из выражений для функций f', g_2) и $\varphi_1(\tilde{\sigma}_2) = 1$ (чтобы можно было обнаружить появление на выходе элемента E_1 вместо функции φ_1 константы 0). Из равенств $\varphi_1(\tilde{\sigma}_1) = 0$, $\varphi_1(\tilde{\sigma}_2) = 1$ следует, что $\tilde{\sigma}_1 \neq \tilde{\sigma}_2$, а из равенств $\varphi_2(\tilde{\sigma}_1) = \varphi_2(\tilde{\sigma}_2) = 0$ — что неисправность элемента E_2, на выходе которого в случае исправности всех элементов схемы S' реализуется функция φ_2, нельзя обнаружить на наборах $\tilde{\sigma}_1$, $\tilde{\sigma}_2$. Поэтому в тесте T должен содержаться ещё какой-то набор, отличный от указанных двух наборов. Таким образом, $|T| \geqslant 3$, что и требовалось доказать.

4.2. Для любого разделяющего конъюнктора E в схеме S выполняется неравенство $|A_3(E)| \leqslant 1$. Так как функция f не представима в видах (1), (11), то в схеме S содержится хотя бы один конъюнктор. «Нижний» конъюнктор схемы S, очевидно, является разделяющим (ниже его в схеме S может располагаться только цепочка из инверторов). Обозначим этот конъюнктор через E_1. Если $|A_3(E_1)| = 0$, то вход каждого инвертора, расположенного в схеме S выше элемента E_1, соединён с одним из входов этой схемы. Тогда, рассуждая аналогично первому абзацу из доказательства леммы 2, получаем, что на выходе элемента E_1 и, как следствие, на выходе схемы S реализуется функция одного из видов (1), (11), (12) или булева константа, что невозможно. Поэтому $|A_3(E_1)| = 1$. Пусть E_2' — единственный элемент из множества $A_3(E_1)$; I_1 — произвольный инвертор из множества $A_2(E_1)$, вход которого соединён с выходом элемента E_2'. Входы всех остальных инверторов из множества $A_2(E_1)$ соединены либо с выходом элемента E_2', либо со входами схемы. Входы всех «верхних» конъюнкторов из множества $A_1(E_1)$, очевидно, соединены либо с выходами инверторов из множества $A_2(E_1)$, либо со входами схемы.

Пусть в случае исправности всех элементов схемы S на выходе элемента E_2' этой схемы реализуется булева функция φ_1. Тогда на выходе элемента I_1 реализуется функция $\overline{\varphi_1}$. Заметим, что $E_2' \notin A_1(E_1) \cup A_2(E_1)$, так как в противном случае на выходе элемента E_1 реализовывалась бы функция $\overline{\varphi_1}\&\varphi_1\&\ldots \equiv 0$, что невозможно. В таком случае легко видеть, что функция f, реализуемая на выходе всей схемы, имеет вид $(\overline{\varphi_1}\&K_1)^{\delta_1}$, где $\delta_1 \in \{0,1\}$, а K_1 — либо тождественная единица, либо выражение вида $x_{i_1}^{\sigma_1}\&\ldots\&x_{i_k}^{\sigma_k}$, в котором $k \geqslant 1$; $i_1,\ldots,i_k$ — попарно различные индексы от 1 до n и $\sigma_1,\ldots,\sigma_k \in \{0,1\}$).

Справедливо тождество $\overline{\varphi_1}\&K_1 = h_1\&K_1$, где h_1 — булева функция, получающаяся подстановкой в функцию $\overline{\varphi_1}$ вместо тех переменных, которые входят в конъюнкцию K_1, булевых констант, обращающих эту конъюнкцию в единицу (доказательство аналогично доказательству тождества (10); в случае $K_1 \equiv 1$ полагаем, что таких переменных нет). Тогда $f = (h_1\&K_1)^{\delta_1}$. Функция φ_1 не может иметь вид (1), (11), (12) или равняться константе, так как в противном случае такой же вид имела бы функция $h_1\&K_1$, а значит, и функция $f = (h_1\&K_1)^{\delta_1}$, что невозможно.

Легко видеть, что элемент E_2' в схеме S является разделяющим. Действительно, любая цепочка, соединяющая любой элемент, расположенный в схеме S выше элемента E_2', с выходным элементом этой схемы, обязана проходить через элемент E_2', так как у всех остальных элементов из множества $A_1(E_1) \cup A_2(E_1) \cup A_3(E_1)$ все входы уже «заняты» либо выходами элементов из этого же множества, либо входами схемы (см. рис. 5).

Далее, если элемент E_2' — конъюнктор, положим $E_2 = E_2'$; если же E_2' — инвертор, то пусть E_2 — «нижний» конъюнктор, расположенный в схеме S выше элемента E_2' (если такого конъюнктора нет, то выше элемента E_2' располагается цепочка из инверторов, поэтому функция φ_1, реализуемая на выходе элемента E_2', имеет вид x_i^σ, где $i \in \{1,\ldots,n\}$, $\sigma \in \{0,1\}$, т.е. вид (1) или (11), что невозможно в силу написанного выше); в этом втором случае очевидно, что от элемента E_2 к элементу E_2' ведёт цепочка из инверторов. В любом случае получаем, что на выходе конъюнктора E_2 реализуется булева функция вида $\varphi_1^{\delta_2}$, где $\delta_2 \in \{0,1\}$.

Из того, что элемент E_2' разделяющий, а между элементами E_2 и E_2' в схеме S может располагаться только цепочка из инверторов, вход каждого из которых уже «занят» выходом предыдущего элемента в этой цепочке или выходом элемента E_2, легко следует, что E_2 — разделяющий конъюнктор. По предположению случая 4.2 имеем $|A_3(E_2)| \leqslant 1$. Далее отдельно разбираем случаи $|A_3(E_2)| = 0$ и $|A_3(E_2)| = 1$ по аналогии с разбором случаев $|A_3(E_1)| = 0$ и $|A_3(E_1)| = 1$ (с использованием того факта, что функция $\varphi_1^{\delta_2}$ отлична от констант и не представима в видах (1), (11), (12)). Получаем, что в схеме S выше элемента E_2 должен существовать некоторый разделяющий конъюнктор E_3, на выходе которого реализуется функция, отличная от булевых констант и не представимая в видах (1), (11), (12), и т.д. Поскольку число элементов в схеме S конечно, рано или поздно мы придём к противоречию. Поэтому случай 4.2 невозможен.

В итоге для любой булевой функции f, отличной от констант и не представимой в видах (1), (11), (12), получаем равенство $D(f) = 3$. Теорема 2 доказана. □

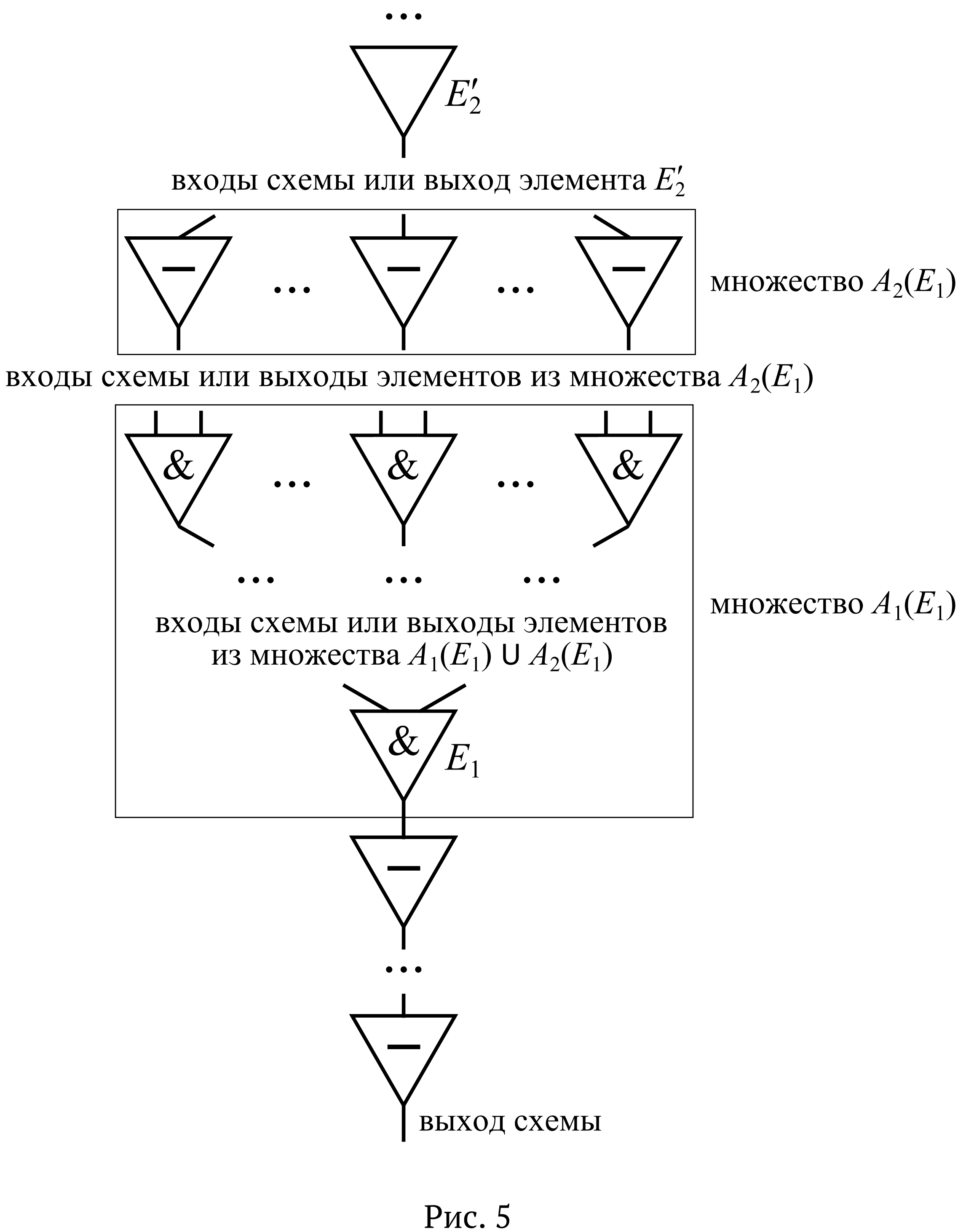

Рис. 5

Используя теоремы 1, 2, следствия 1, 2 и принцип двойственности (см., например, [19, с. 24]), а именно, рассматривая схемы, получающиеся заменой всех элементов в схемах из доказательства теорем 1, 2 на двойственные, нетрудно получить двойственные им результаты для базиса B_0^*, являющегося произвольным функционально полным подмножеством множества $\hat{B}_0^* = \{\overline{x_1}, x_1 \vee \ldots \vee x_m \mid m \geqslant 2\}$ (например, для базиса $\{\overline{x_1}, x_1 \vee x_2\}$). В частности, при $n \geqslant 2$ справедливы равенства $D_{s,detect}^{B_0^*;\,0}(n) = D_{s,detect}^{B_0^*;\,1}(n) = 3$.

Список литературы

1. Чегис И. А., Яблонский С. В. Логические способы контроля работы электрических схем // Труды МИАН. — 1958. — Т. 51. — С. 270–360.

2. Яблонский С. В. Надежность и контроль управляющих систем // Материалы Всесоюзного семинара по дискретной математике и ее приложениям (Москва, 31 января–2 февраля 1984 г.). — М.: МГУ. — 1986. — С. 7–12.

3. Яблонский С. В. Некоторые вопросы надежности и контроля управляющих систем // Математические вопросы кибернетики. Вып. 1. — М.: Наука, 1988. — С. 5–25.

4. Редькин Н. П. Надежность и диагностика схем. — М.: Изд-во МГУ, 1992. — 192 с.

5. Reddy S. M. Easily testable realization for logic functions // IEEE Trans. Comput. — 1972. — Vol. C-21, No. 11. — P. 1183–1188.

6. Коляда С. С. Верхние оценки длины проверяющих тестов для схем из функциональных элементов. — Дисс. на соиск. уч. ст. к.ф.-м.н. — М., 2013. — 77 с.

7. Романов Д. С. Метод синтеза легкотестируемых схем, допускающих единичные проверяющие тесты константной длины // Дискретная математика. — 2014. — Т. 26, вып. 2. — С. 100–130.

8. Редькин Н. П. О полных проверяющих тестах для схем из функциональных элементов // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. — 1986. — №1. — С. 72–74.

9. Редькин Н. П. О полных проверяющих тестах для схем из функциональных элементов // Математические вопросы кибернетики. Вып. 2. — М.: Наука, 1989. — С. 198–222.

10. Романов Д. С. О синтезе схем, допускающих полные проверяющие тесты константной длины относительно произвольных константных неисправностей на выходах элементов // Дискретная математика. — 2013. — Т. 25, вып. 2. — С. 104–120.

11. Редькин Н. П. О схемах, допускающих короткие тесты // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. — 1988. — №2. — С. 17–21.

12. Редькин Н. П. О единичных диагностических тестах для однотипных константных неисправностей на выходах функциональных элементов // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. — 1992. — №5. — С. 43–46.

13. Бородина Ю. В. О синтезе легкотестируемых схем в случае однотипных константных неисправностей на выходах элементов // Вестник Московского университета. Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика. — 2008. — №1. — С. 40–44.

14. Попков К. А. О точном значении длины минимального единичного диагностического теста для одного класса схем // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. — 2015. — №74. — 21 с.

15. Бородина Ю. В. Нижняя оценка длины полного проверяющего теста в базисе $\{x \mid y\}$ // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. — 2015. — №4. — С. 49–51.

16. Бородина Ю. В. О схемах, допускающих единичные тесты длины 1 при константных неисправностях на выходах элементов // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. — 2008. — №5. — С. 49–52.

17. Бородина Ю. В., Бородин П. А. Синтез легкотестируемых схем в базисе Жегалкина при константных неисправностях типа 0 на выходах элементов // Дискретная математика. — 2010. — Т. 22, вып. 3. — С. 127–133.

18. Попков К. А. О единичных диагностических тестах для схем из функциональных элементов в базисе Жегалкина // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. — 2016. — №50. — 16 с.

19. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. — М.: Наука, 1986. — 384 с.