



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 38 за 2017 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Бахвалов П.А.

Реализация метода
коррекции потоков на
гибридных
неструктурированных сетках

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Бахвалов П.А. Реализация метода коррекции потоков на гибридных неструктурированных сетках // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2017. № 38. 28 с. doi:[10.20948/prepr-2017-38](https://doi.org/10.20948/prepr-2017-38)
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2017-38>

О р д е н а Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.КЕЛДЫША
Р о с с и й с к о й а к а д е м и и н а у к

П. А. Бахвалов

**Реализация метода коррекции потоков
на гибридных неструктурированных сетках**

Москва — 2017

Бахвалов П. А.

Реализация метода коррекции потоков на гибридных неструктурированных сетках

Метод коррекции потоков и его нестационарная модификация, предложенные ранее для решения уравнений Эйлера на треугольных и тетраэдральных сетках, обобщаются на случай гибридных неструктурированных сеток. Обобщение использует полупрозрачные контрольные объёмы и конечно-элементный метод для определения градиентов. Предлагаемая модификация сохраняет основные свойства схем на симплицальных сетках, что демонстрируется на тестовых задачах.

Ключевые слова: уравнения Эйлера, рёберно-ориентированная схема, неструктурированная сетка, метод коррекции потоков

Pavel Alexeevich Bakhvalov

Implementation of the Flux Correction method on hybrid unstructured meshes

Flux Correction method and its unsteady modification are the schemes originally proposed for solving Euler equations on simplicial meshes. In this paper we generalize these schemes for hybrid unstructured meshes using semitransparent control volumes and finite-element approach for gradient calculations. This modification preserves main properties of the original method, which is verified on test problems.

Key words: Euler equations, edge-based scheme, unstructured mesh, flux correction method

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 16-31-60072.

Оглавление

Введение	3
Решаемые уравнения	4
Схемы FC и UFC на симплицальной сетке	5
Полупрозрачные контрольные объёмы	7
Вычисление градиентов на гибридной сетке	9
Определение матрицы U на гибридной сетке	12
Анализ аппроксимационной ошибки на декартовой сетке	15
Тестирование	19
Замечания	26
Заключение	27
Список литературы	27

Введение

Рёберно-ориентированные схемы являются особым классом конечно-объёмных схем для решения гиперболических систем уравнений на неструктурированных сетках. Их спецификой является определение переменных в узлах как точечных значений, при этом потоки вычисляются в серединах рёбер. Преимуществом большинства рёберно-ориентированных схем является их сравнительно низкая вычислительная стоимость. Однако такой подход не позволяет естественным образом построить схему наперёд заданного порядка аппроксимации, как это происходит в конечно-объёмных схемах с полиномиальной реконструкцией переменных [1].

Одной из рёберно-ориентированных схем для решения гиперболических систем уравнений на неструктурированных сетках является метод коррекции потоков (Flux Correction method, FC), предложенный для симплицальных сеток в [2]. В этой схеме вычисление потока в центре ребра осуществляется посредством линейной реконструкции переменных с использованием градиентов, вычисляемых в сеточных узлах с повышенной точностью. Стационарный метод коррекции потоков (то есть схема FC с точечной аппроксимацией временной производной) обладает вторым порядком аппроксимации на произвольной треугольной или тетраэдральной сетке. Однако на стационарных задачах наблюдается эффект сверхсходимости: схема на тестовых задачах показывает третий порядок точности.

Для обеспечения третьего порядка точности на нестационарных задачах в [3] [4] [5] была предложена модификация, в которой перед производной по времени дописывалась матрица специального вида. Такая модификация привела к потере консервативности и существенному увеличению вычислительной стоимости численного метода. Этот подход мы в настоящей работе рассматривать не будем, хотя предлагаемая методика обобщения на гибридные неструктурированные сетки применима и к нему.

Другой способ повышения точности на нестационарных задачах лежит в основе схемы UFC [6] [7]. Он заключается в том, что уже готовый вектор дивергенции потоков в узлах, посчитанный при помощи стационарного метода коррекции потоков, домножается слева на матрицу U , имеющую более простой вид, чем в предыдущем методе. Домножение на матрицу U приводит к потере точности на квадратичных полиномах на произвольной неструктурированной сетке, однако на равномерной решётчатой (трансляционно-симметрической, ТС) сетке обеспечивается третий порядок точности. Стационарное решение при этом не меняется по сравнению со стационарной схемой FC. Таким образом, в стационарном случае на практике схема UFC показывает третий порядок точности, а в нестационарном – близкий ко второму порядок на неструктурированной сетке и третий порядок на ТС-сетке. В [6] [7] показано, что схема UFC

действительно позволяет на одной сетке получить решение с большей точностью, чем стационарный метод коррекции потоков.

В настоящей работе предлагается обобщение метода коррекции потоков и его нестационарной модификации на гибридные неструктурированные сетки. Под гибридными мы понимаем сетки, состоящие из треугольников и четырёхугольников в двумерном случае и из тетраэдров, четырёхугольных пирамид, треугольных призм и гексаэдров в трёхмерном случае. Для этого мы применяем следующие методы:

- 1) для записи рёберно-ориентированной схемы на гибридных неструктурированных сетках – полупрозрачные контрольные объёмы [8];
- 2) для вычисления градиентов – спектральные элементы и обычные интерполянты на них, построенные методом конечных элементов;
- 3) для записи матрицы U – метод локальных разбиений, аналогичный тому, который использовался для определения полупрозрачных контрольных объёмов.

Решаемые уравнения

В настоящей работе будем рассматривать уравнения Эйлера, которые запишем в виде

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{Q}}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathcal{F}_{EE}(\tilde{\mathbf{Q}}) = 0, \quad (1)$$

где векторы консервативных переменных и потоков имеют вид

$$\tilde{\mathbf{Q}} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho \mathbf{u} \\ E \end{pmatrix}, \quad \mathcal{F}_{EE} = \begin{pmatrix} \rho \mathbf{u} \\ \rho \mathbf{u} \mathbf{u} + p \mathbf{I} \\ (E + p) \mathbf{u} \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Здесь $E = \rho \mathbf{u}^2 / 2 + p / (\gamma - 1)$, γ – показатель адиабаты, \mathbf{I} – единичная матрица.

Также будем рассматривать уравнения Эйлера, линеаризованные на постоянном во времени, но, быть может, не однородном по пространству фоновом поле $\bar{\mathbf{Q}}(\mathbf{r})$. Они записываются в виде

$$\frac{\partial \mathbf{Q}'}{\partial t} + \nabla \cdot \mathcal{F}_{LEE}(\mathbf{r}, \mathbf{Q}') = 0, \quad (3)$$

$$\mathbf{Q}' = \begin{pmatrix} \rho' \\ (\rho \mathbf{u})' \\ E' \end{pmatrix}, \quad \mathcal{F}_{LEE} = \mathcal{A}(\bar{\mathbf{Q}}(\mathbf{r})) \mathbf{Q}', \quad \mathcal{A}(\bar{\mathbf{Q}}) = \frac{d\mathcal{F}_{EE}}{d\tilde{\mathbf{Q}}}(\bar{\mathbf{Q}}). \quad (4)$$

Наконец, будем рассматривать линейное скалярное уравнение вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\mathbf{v}}(\mathbf{r})u) = 0, \quad (5)$$

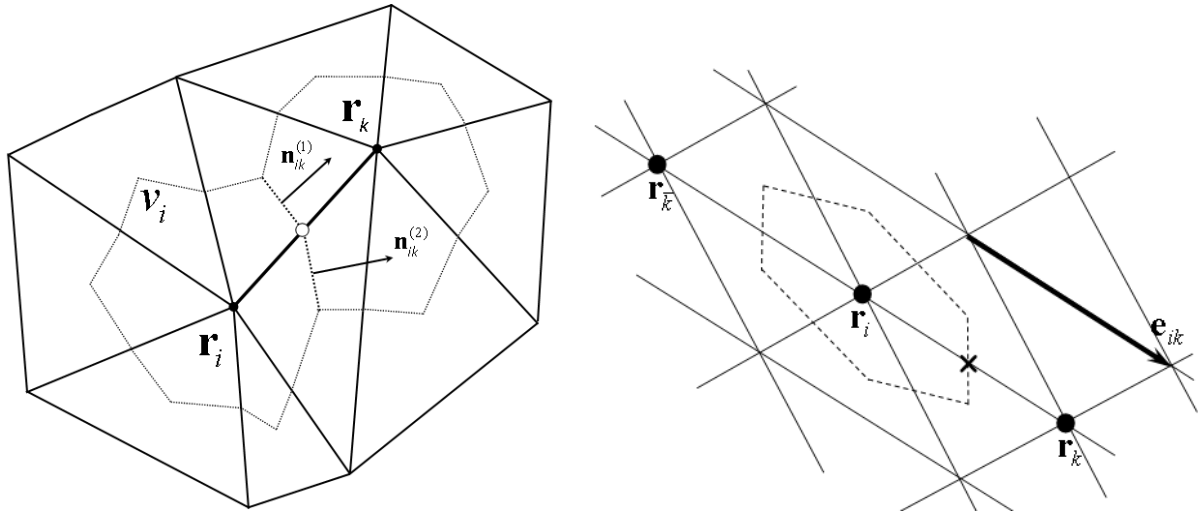


Рис. 1. Барицентрические ячейки, описанные около узлов i и k , и вектора $\mathbf{n}_{ik}^{(1)}$, $\mathbf{n}_{ik}^{(2)}$, составляющие ориентированную площадь $\mathbf{n}_{ik} = \mathbf{n}_{ik}^{(1)} + \mathbf{n}_{ik}^{(2)}$. Слева: неструктурированная сетка, справа: ТС-сетка

которое на бездивергентном поле скоростей \bar{v} вырождается в уравнение переноса с переменной скоростью.

В общем виде уравнения (1), (3) и (5) могут быть записаны в виде

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \nabla \cdot \mathcal{F}(\mathbf{r}, Q) = 0, \quad (6)$$

который мы и будем рассматривать.

Схемы FC и UFC на симплицальной сетке

Рёберно-ориентированные схемы. Рёберно-ориентированные схемы подразумевают разбиение расчётной области на ячейки (контрольные объёмы), каждая из которых содержит ровно один сеточный узел. Значения сеточной функции определяются в узлах сетки. Введём следующие обозначения: v_i – мера контрольного объёма узла i ; $N_1(i)$ – множество узлов, соединённых с i ребром; $\mathbf{n}_{ik} = -\mathbf{n}_{ki}$ – ориентированная площадь пересечения границ контрольных объёмов узлов i и k , направленная внутрь контрольного объёма узла k ; $\tilde{\mathbf{n}}_{ik} = \mathbf{n}_{ik}/|\mathbf{n}_{ik}|$.

Аппроксимация дивергенции потоков по рёберно-ориентированной конечно-объёмной схеме может быть записана в общем виде

$$[\nabla \cdot \mathcal{F}]_i = \frac{1}{v_i} \sum_{k \in N_1(i)} |\mathbf{n}_{ik}| h_{ik}, \quad (7)$$

где h_{ik} – компонента потока вдоль направления $\tilde{\mathbf{n}}_{ik}$, определённая в середине соответствующего ребра. Чтобы обеспечить точность на линейной функции

вычисления дивергенции по формуле (7), используются медианные (барицентрические) контрольные объёмы [9].

Поток h_{ik} определяется по схеме Роу

$$h_{ik} = \frac{\mathbf{F}_{ik}^L + \mathbf{F}_{ik}^R}{2} - \left| \frac{d\mathcal{F} \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{ik}}{d\mathbf{Q}} (\mathbf{Q}_{ik}^{\text{Roe}}) \right| \frac{\mathbf{Q}_{ki} - \mathbf{Q}_{ik}}{2}, \quad (8)$$

где $\mathbf{Q}_{ik}^{\text{Roe}}$ – среднее по Роу, посчитанное по значениям переменных \mathbf{Q}_i и \mathbf{Q}_k (или, в случае линеаризованных уравнений – $\bar{\mathbf{Q}}_i$ и $\bar{\mathbf{Q}}_k$). В (8) подставляются значения реконструированные значения консервативных и потоковых переменных:

$$\mathbf{F}_{ik}^L = \mathcal{R}_{ik}(\{\mathcal{F}(\mathbf{Q}_m) \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{ik}\}), \quad \mathbf{F}_{ik}^R = \mathcal{R}_{ki}(\{\mathcal{F}(\mathbf{Q}_m) \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{ik}\}) = -\mathbf{F}_{ki}^L, \quad (9)$$

$$\mathbf{Q}_{ik} = \mathcal{R}_{ik}(\{\mathbf{Q}_m\}), \quad \mathbf{Q}_{ki} = \mathcal{R}_{ki}(\{\mathbf{Q}_m\}), \quad (10)$$

где $\mathcal{R}(\{f_m\})$ – некоторый оператор, сопоставляющий определённой в узлах сеточной функции f значения в серединах рёбер. Замена (9) на $\mathbf{F}_{ik}^L = \mathcal{F}(\mathbf{Q}_{ik}) \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{ik}$ и $\mathbf{F}_{ik}^R = \mathcal{F}(\mathbf{Q}_{ki}) \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{ik}$ приводит к потере порядка точности на нелинейных задачах, а равно на линейных задачах с переменными коэффициентами.

При решении уравнений Эйлера вместо (10) в настоящей работе используется реконструкция физических переменных $\mathbf{U} = (\rho, \mathbf{u}, p)^T$:

$$\mathbf{Q}_{ik} = \mathbf{Q}(\mathcal{R}_{ik}(\{\mathbf{U}(\mathbf{Q}_m)\})),$$

что не вносит существенного вклада в точность схемы.

Вид оператора реконструкции \mathcal{R} определяет конкретную рёберно-ориентированную схему.

Метод коррекции потоков. Метод коррекции потоков [3] [4] [5] заключается в определении реконструкции \mathcal{R} для некоторой сеточной функции u формулой

$$\mathcal{R}_{ik}(\{u\}) = u_i + \frac{\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i}{2} \cdot (\nabla u)_i. \quad (11)$$

Формула для реконструкции с другой стороны того же ребра получается заменой i и k :

$$\mathcal{R}_{ki}(\{u\}) = u_k - \frac{\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i}{2} \cdot (\nabla u)_k.$$

Эти формулы ничем не отличаются от использованных Т. Barth [10]. Однако, в отличие от схемы Т. Barth, где градиенты вычислялись процедурой Грина-Гаусса, в методе коррекции потоков они должны вычисляться не менее чем со вторым порядком точности. Это может достигаться либо применением метода наименьших квадратов, либо благодаря использованию спектральных элементов. Последний вариант будет рассмотрен ниже.

Нестационарный метод коррекции потоков. Обозначим оператор дивергенции, аппроксимированный при помощи стационарного метода коррекции потоков (7)–(11), через $[\nabla \cdot \mathcal{F}]^{\text{FC}}$.

Нестационарный метод коррекции потоков [6] [7] заключается в том, что уже готовый набор значений в узлах дивергенции потоков, посчитанный стационарным методом коррекции потоков, домножается слева на матрицу U с коэффициентами u_{ik} :

$$[\nabla \cdot \mathcal{F}]_i^{\text{UFC}} = \sum_{k \in N_1(i)} u_{ik} [\nabla \cdot \mathcal{F}]_k^{\text{FC}}. \quad (12)$$

Коэффициенты матрицы U определяются формулой

$$u_{ik} = \begin{cases} \frac{C}{12} \frac{v_i + v_k}{2v_i}, & k \in N_1(i), \quad i, k \in N_I; \\ 1 - \frac{C}{12} \sum_{k \in N_1(i) \cap N_I} \frac{v_i + v_k}{2v_i}, & k = i \in N_I; \\ 1 & k = i \notin N_I; \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (13)$$

Здесь N_I – множество всех внутренних узлов сетки (т. е. всех узлов, кроме лежащих на границе расчётной области), $C = 1$ в одномерном случае, $C = 1/2$ в двумерном и $C = 1/4$ в трёхмерном случае.

Полупрозрачные контрольные объёмы

Перейдём к описанию стационарного метода коррекции потоков на гибридных неструктурированных сетках.

Предположим, что значения потоков в узлах $\mathcal{F}(\mathbf{Q}_i)$ являются линейной функцией координат этих узлов. Тогда, если потоки h_{ik} точны в серединах рёбер, то медианные (барицентрические) ячейки обеспечивают точность вычисления дивергенции по формуле (7). В частности, если положить

$$h_{ik} = \frac{\mathcal{F}(\mathbf{Q}_i) + \mathcal{F}(\mathbf{Q}_k)}{2} \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{ik},$$

то формула (7) будет совпадать с P1-методом Галёркина [11] с диагонализированной матрицей масс.

В этом смысле обобщением барицентрических ячеек на случай гибридной неструктурированной сетки являются полупрозрачные контрольные объёмы [8]. В них потоки определяются не только в серединах рёбер, но и в серединах диагоналей сеточных элементов. Обозначим через $\tilde{N}_1(i)$ множество всех узлов, входящих с узлом i хотя бы в один общий элемент, исключая сам узел i .

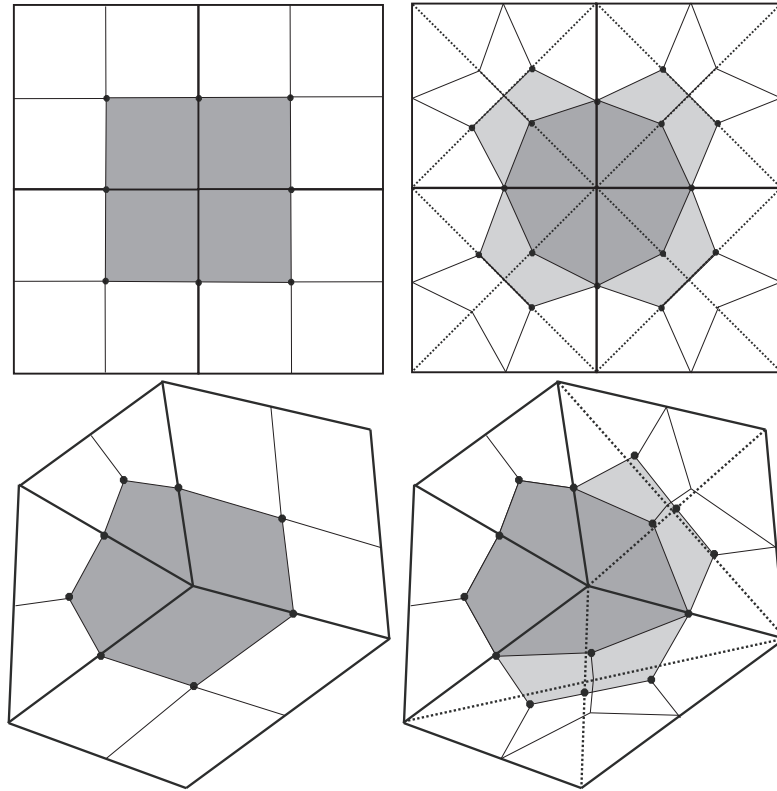


Рис. 2. Обычный и полупрозрачный контрольные объёмы для двумерной сетки. Сверху: декартова сетка, снизу: неструктурированная сетка

По аналогии с (7) определим дивергенцию потоков формулой

$$[\nabla \cdot \mathcal{F}]_i = \frac{1}{v_i} \sum_{k \in \tilde{N}_1(i)} |\mathbf{n}_{ik}| \mathbf{h}_{ik}, \quad (14)$$

где v_i – величина полупрозрачного контрольного объёма узла i , \mathbf{n}_{ik} – ориентированная площадь общей границы двух полупрозрачных контрольных объёмов, а \mathbf{h}_{ik} – численный поток, определённый в середине ребра или диагонали.

Построение полупрозрачных ячеек осуществляется следующим образом. Как и в случае медианных ячеек на симплицальной сетке, объём v_i складывается из фрагментов объёмов $v_{i,E}$, каждый из которых лежит внутри своего сеточного элемента E :

$$v_i = \sum_{i \ni E} v_{i,E}.$$

Аналогично, ориентированная площадь \mathbf{n}_{ik} представляется в виде

$$\mathbf{n}_{ik} = \sum_{i,k \ni E} \mathbf{n}_{ik,E},$$

где $\mathbf{n}_{ik,E}$ – ориентированная площадь пересечения границы контрольного объёма узла i , границы контрольного объёма узла k и сеточного элемента E .

Рассмотрим вначале случай, когда элемент E является симплексом. В двумерном случае, когда E – треугольник, $\mathbf{n}_{ik,E}$ есть вектор, перпендикулярный и равный по длине отрезку, соединяющему середину ребра ik с центром масс треугольника E . При этом $v_{i,E}$ есть треугольник, основанием которого является этот отрезок, а третьей вершиной – узел i . В трёхмерном случае, когда элемент E есть тетраэдр, $\mathbf{n}_{ik,E}$ есть векторная сумма ориентированных площадей двух треугольников, вершинами которых являются середина ребра ik , центр масс тетраэдра E и центр масс одной из двух граней тетраэдра E , содержащих ребро ik . $v_{i,E}$ является суммой объёмов двух тетраэдров, в основании которых лежат указанные треугольники и вершиной которых является узел i .

В общем случае для вычисления каждого «куска» объёма $v_{i,E}$ или поверхности $\mathbf{n}_{ik,E}$ перебираются разбиения сеточного элемента E на симплексы без добавления внутренних узлов. Перебор разбиений должен проводиться таким образом, чтобы получившийся набор разбиений не имел дополнительных выделенных направлений по сравнению с исходной сеткой. В частности, каждая четырёхугольная грань должна разбиваться каждой из двух диагоналей ровно в половине случаев. Для каждого такого разбиения вычисляются и суммируются объёмы $v_{i,T}$ и ориентированные площади $\mathbf{n}_{ik,T}$ по всем симплексам T , входящим в элемент E . Полученные суммы усредняются по всем разбиениям.

Геометрическая интерпретация контрольных объёмов изображена на рис. 2. Подробнее о построении полупрозрачных контрольных объёмов см. в [8].

Вычисление градиентов на гибридной сетке

Определение потоков h_{ik} в серединах рёбер в методе коррекции потоков выполняется по формулам (7)–(11). Эти формулы остаются справедливыми и в случае гибридной сетки. Градиенты, входящие в формулу (11), как было сказано выше, должны вычисляться не менее чем со вторым порядком точности. Этого можно добиться, как минимум, двумя способами.

Первым способом является построение интерполяционного полинома методом наименьших квадратов. Недостатком этого метода является возможность вырождения матрицы для определения интерполяционного полинома. Чтобы этот эффект не проявлялся, обычно увеличивают число узлов, входящее в шаблон для определения полинома. Однако простое увеличение числа узлов не гарантирует корректности задачи интерполяции. Например, ни использование соседей 1-го порядка, ни использование соседей 2-го порядка по рёбрам не гарантирует возможности определения квадратичного интерполяционного полинома. Пример набора из 13 узлов, на котором невозможно определить квадратичный полином (содержащий 10 одночленов), поскольку 11 из них лежат в одной плоскости, изображён на рис. 3; таким же образом можно пример с лю-

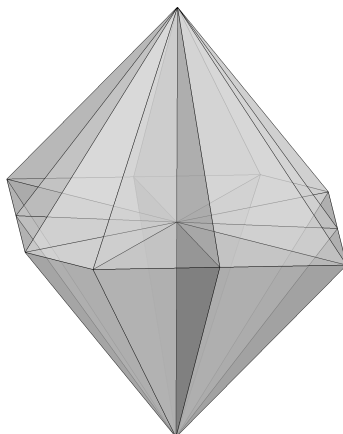


Рис. 3. Набор из 13 узлов, на котором невозможно определить квадратичный интерполяционный полином

бым числом узлов. Кроме того, построение полинома может быть некорректным и на криволинейных анизотропных сетках. Таким образом, метод наименьших квадратов, несмотря на свою кажущуюся простоту и универсальность, требует достаточно тонкой настройки.

Альтернативным подходом является вычисление градиентов с использованием спектральных элементов. В этом случае предполагается, что расчётная сетка получается посредством измельчения определённым образом некоторой исходной сетки, элементы которой называются спектральными. В этом случае на каждом спектральном элементе по значениям в его узлах (то есть в узлах уже расчётной сетки, входящих в этот спектральный элемент) можно построить единый интерполяционный полином. Задача его построения гарантированно является невырожденной.

Если спектральный элемент является треугольником или тетраэдром, то при разбиении его на 4 части (для треугольника) или 8 частей (для тетраэдра) спектральный элемент будет содержать, соответственно, 6 или 10 узлов. На основании значений функции в них интерполяционный полином второго порядка строится однозначно.

В общем случае для построения интерполяционного полинома на спектральном элементе удобно отобразить его в собственную систему координат: (ξ, η) в 2D или (ξ, η, ζ) в 3D.

Упорядочим вершины элемента таким образом, как в neutral формате сеточного генератора Gambit: в двумерном случае – по контуру, а в трёхмерном – так, как изображено на рис. 4. Тогда для треугольника преобразование координат имеет вид

$$\mathbf{r} = (1 - \xi - \eta)\mathbf{r}_A + \xi\mathbf{r}_B + \eta\mathbf{r}_C.$$

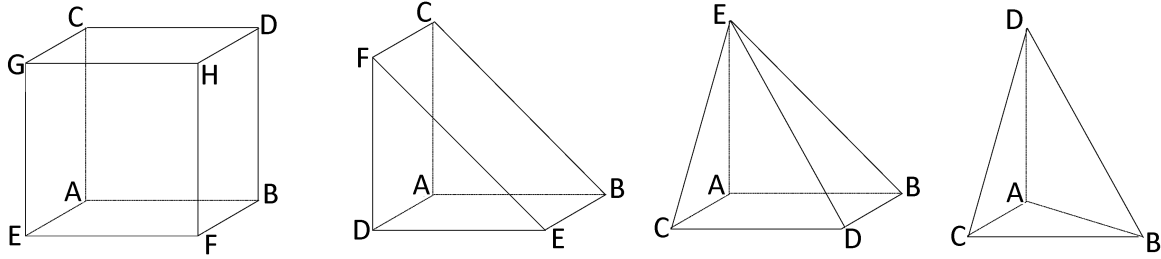


Рис. 4. Порядок узлов в элементах трёхмерной гибридной сетки

Для четырёхугольника –

$$\mathbf{r} = (1 - \xi)(1 - \eta)\mathbf{r}_A + \xi(1 - \eta)\mathbf{r}_B + \xi\eta\mathbf{r}_C + (1 - \xi)\eta\mathbf{r}_D.$$

Для тетраэдра –

$$\mathbf{r} = (1 - \xi - \eta - \zeta)\mathbf{r}_A + \xi\mathbf{r}_B + \eta\mathbf{r}_C + \zeta\mathbf{r}_D.$$

Для четырёхугольной пирамиды –

$$\mathbf{r} = ((1 - \xi)(1 - \eta) - \zeta/4)\mathbf{r}_A + (\xi(1 - \eta) - \zeta/4)\mathbf{r}_B + ((1 - \xi)\eta - \zeta/4)\mathbf{r}_C + (\xi\eta - \zeta/4)\mathbf{r}_D + \zeta\mathbf{r}_E.$$

Для треугольной призмы –

$$\mathbf{r} = (1 - \xi - \eta)(1 - \zeta)\mathbf{r}_A + \xi(1 - \zeta)\mathbf{r}_B + \eta(1 - \zeta)\mathbf{r}_C + (1 - \xi - \eta)\zeta\mathbf{r}_D + \xi\zeta\mathbf{r}_E + \eta\zeta\mathbf{r}_F.$$

Для гексаэдра –

$$\mathbf{r} = (1 - \xi)(1 - \eta)(1 - \zeta)\mathbf{r}_A + \xi(1 - \eta)(1 - \zeta)\mathbf{r}_B + (1 - \xi)\eta(1 - \zeta)\mathbf{r}_C + \xi\eta(1 - \zeta)\mathbf{r}_D + (1 - \xi)(1 - \eta)\zeta\mathbf{r}_E + \xi(1 - \eta)\zeta\mathbf{r}_F + (1 - \xi)\eta\zeta\mathbf{r}_G + \xi\eta\zeta\mathbf{r}_H.$$

В своей собственной системе координат на каждом элементе строится интерполяционный полином. Выбор одночленов осуществляется таким образом, чтобы функции, квадратичные в системе координат (x, y) или (x, y, z) , точно восстанавливались интерполянтном. Поэтому для треугольников и четырёхугольников интерполяционный полином ищется в виде

$$f|_{triangle}(\xi, \eta) = \sum_{0 \leq a \leq 2} \sum_{0 \leq b \leq 2-a} f_{ab} \xi^a \eta^b,$$

$$f|_{quadrangle}(\xi, \eta) = \sum_{0 \leq a \leq 2} \sum_{0 \leq b \leq 2} f_{ab} \xi^a \eta^b.$$

В трехмерном случае на тетраэдральных, пирамидальных, призматических и гексаэдральных спектральных элементах функция приближается интерполяционными полиномами следующего вида:

$$f|_{tetrahedron}(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{0 \leq a \leq 2} \sum_{0 \leq b \leq 2-a} \sum_{0 \leq c \leq 2-a-b} f_{abc} \xi^a \eta^b \zeta^c,$$

$$f|_{pyramid}(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{0 \leq a \leq 2} \sum_{0 \leq b \leq 2} \sum_{0 \leq c \leq 2 - \max\{a, b\}} f_{abc} \xi^a \eta^b \zeta^c$$

$$f|_{prism}(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{0 \leq a \leq 2} \sum_{0 \leq b \leq 2-a} \sum_{0 \leq c \leq 2} f_{abc} \xi^a \eta^b \zeta^c$$

$$f|_{hexahedron}(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{0 \leq a \leq 2} \sum_{0 \leq b \leq 2} \sum_{0 \leq c \leq 2} f_{abc} \xi^a \eta^b \zeta^c.$$

Поскольку число одночленов в точности совпадает с числом узлов в соответствующем спектральном элементе, интерполяционный полином находится однозначно.

Для вычисления градиента в физическом пространстве используется формула

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = \left(\frac{\partial f}{\partial \xi}, \frac{\partial f}{\partial \eta}, \frac{\partial f}{\partial \zeta} \right) \begin{pmatrix} \partial x / \partial \xi & \partial y / \partial \xi & \partial z / \partial \xi \\ \partial x / \partial \eta & \partial y / \partial \eta & \partial z / \partial \eta \\ \partial x / \partial \zeta & \partial y / \partial \zeta & \partial z / \partial \zeta \end{pmatrix}^{-1}.$$

Отметим, что узлы спектральных элементов по построению имеют фиксированное положение в системе координат ξ, η, ζ , не зависящее от положения элемента в пространстве и его деформации.

Отметим также, что в пределах спектрального элемента можно вычислять градиенты и методом наименьших квадратов. В этом случае он свободен от недостатков, упомянутых выше. Сравнивая между собой вычисление градиентов на спектральном элементе путём отображения в собственную систему координат элемента или методом наименьших квадратов, можно отметить, что метод наименьших квадратов проще в реализации, однако требует большего числа операций перед началом счёта, что затрудняет его использование на деформируемых сетках, и хранения коэффициентов для выражения градиентов через значения в узлах.

Определение матрицы U на гибридной сетке

Оператор дивергенции, аппроксимированный схемой UFC, получается умножением матрицы U на оператор дивергенции, аппроксимированный схемой FC, см. (12). Симметрическая матрица U находится из условия 3-го порядка аппроксимации (точности на кубических многочленах) на трансляционно-симметрических сетках в предположении, что вспомогательные градиенты, входящие в (11), вычисляются одинаковым образом во всех сеточных узлах. На симплицальной сетке это условие приводит к формуле (13). Рассмотрим вопрос, как эта формула обобщается на случай трансляционно-симметрической сетки, составленной из более сложных элементов.

Как показано в [6] [7], для уравнения переноса $\partial u / \partial t + \mathbf{a} \cdot \nabla u = 0$ метод коррекции потоков на трансляционно-симметрической сетке обладает дифференциальным приближением

$$\frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{r}_i) + [\mathbf{a} \cdot \nabla u]_i^{\text{FC}} + \frac{C}{12} \sum_{k \in N_1(i)/2} (\mathbf{e}_{ik} \cdot \nabla)^2 (\mathbf{a} \cdot \nabla) u = O(h^3), \quad (15)$$

где $\mathbf{e}_{ik} = \mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i$, h – максимальная длина сеточного ребра (предполагается, что минимальный угол элемента отделён от нуля), а $C = 2^{-d}$, где d – размерность пространства. Выражение (15) можно переписать в виде

$$\left(1 - \frac{C}{12} \sum_{k \in N_1(i)/2} (\mathbf{e}_{ik} \cdot \nabla)^2 \right) \frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{r}_i) + [\mathbf{a} \cdot \nabla u]_i^{\text{FC}} = O(h^3). \quad (16)$$

Нестационарный метод коррекции потоков на симплицальных ТС-сетках получается заменой выражения в скобках (16) на матрицу U^{-1} , где $U = \{u_{ik}\}$,

$$u_{ik} = \begin{cases} C/12, & k \in N_1(i); \\ 1 - C |N_1(i)|/12, & k = i; \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (17)$$

В общем случае ТС-сетка может быть без добавления узлов разбита на симплексы таким образом, чтобы получилась симплицальная ТС-сетка. Все такие способы разбиения топологически эквивалентны; пусть их число равно n . На каждой из получившихся симплицальных сеток можно записать стационарную схему FC для вычисления дивергенции. Обозначим такие операторы через $[\mathbf{a} \cdot \nabla u]_i^{\text{FC},k}$, $k = 1..n$. Ввиду использования полупрозрачных контрольных объёмов, предполагая, что вычисление вспомогательных градиентов в узлах не зависит от k (то есть от выбора разбиения), схема FC на исходной ТС-сетке запишется в виде

$$[\mathbf{a} \cdot \nabla u]_i^{\text{FC}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [\mathbf{a} \cdot \nabla u]_i^{\text{FC},k}.$$

Поскольку каждый оператор $[\mathbf{a} \cdot \nabla u]_i^{\text{FC},k}$ обладает дифференциальным приближением вида (15), на исходной сетке метод коррекции потоков будет обладать дифференциальным приближением

$$\frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{r}_i) + [\mathbf{a} \cdot \nabla u]_i^{\text{FC}} + \frac{C}{12} \sum_{k \in \tilde{N}_1(i)/2} \beta_{ik} (\mathbf{e}_{ik} \cdot \nabla)^2 (\mathbf{a} \cdot \nabla) u = O(h^3), \quad (18)$$

где β_{ik} – доля разбиений на симплексы, в которых пара узлов i и k соединены ребром. Если ik является ребром гибридной сетки, то $\beta_{ik} = 1$. Из соображений симметрии можно заключить, что для диагоналей граней $\beta_{ik} = 1/2$, а для противоположных узлов гексаэдров $\beta_{ik} = 1/4$.

Таким образом, по аналогии с симплицальной сеткой можно записать нестационарный метод коррекции потоков на ТС-сетках общего вида в виде (12), где $U = \{u_{ik}\}$,

$$u_{ik} = \begin{cases} \beta_{ik}C/12, & k \in \tilde{N}_1(i); \\ 1 - C/12 \sum_{j \in \tilde{N}_1(i)} \beta_{ij}, & k = i; \\ 0 & otherwise. \end{cases} \quad (19)$$

Наконец, на неструктурированной гибридной сетке определим матрицу U , по аналогии с (13), формулой

$$u_{ik} = \begin{cases} \beta_{ik} \frac{C}{12} \frac{v_i + v_k}{2v_i}, & k \in \tilde{N}_1(i), \quad i, k \in N_I; \\ 1 - \frac{C}{12} \sum_{j \in \tilde{N}_1(i) \cap N_I} \beta_{ij} \frac{v_i + v_j}{2v_i}, & k = i \in N_I; \\ 1 & k = i \notin N_I; \\ 0 & otherwise. \end{cases} \quad (20)$$

Такая матрица обеспечивает сохранение консервативности и точности на линейной функции стационарного метода коррекции потоков, а также вырождение в (19) на ТС-сетке.

Зададимся вопросом, какой может быть двух- и трёхмерная трансляционно-симметрическая сетка. По своему определению (данному нами в [12]) она должна быть инвариантна относительно трансляции на вектор любого своего ребра. В двумерном случае рассмотрим два неколлинеарных ребра, имеющих общую вершину, а в трёхмерном случае – три сеточных ребра, имеющих общую вершину и не лежащих в одной плоскости. Такая пара или тройка рёбер будет обуславливать параллелограмм или параллелепипед, быть может, разбитый на более мелкие элементы. Этот параллелограмм или параллелепипед не может содержать внутри себя других узлов: противное привело бы к наложению друг на друга не соединённых между собой сеток. Очевидно также, что вся сетка будет являться заполнением пространства такими параллелепипедами. Далее, линейным отображением можно преобразовать параллелограмм или параллелепипед в квадрат или куб. Следовательно, вопрос общего вида трансляционно-симметрической сетки сводится к вопросу о разбиении квадрата или куба без

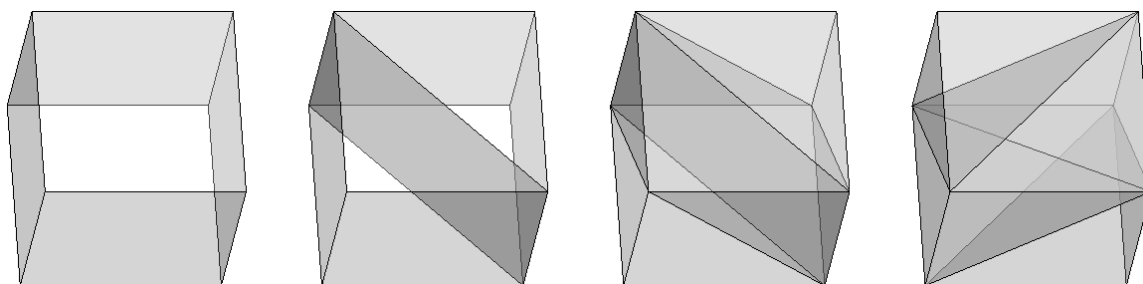


Рис. 5. Блоки гибридной трансляционно-симметрической сетки

добавления дополнительных узлов, причём каждая пара противоположных граней куба должна быть разбита на треугольники одинаковым образом (либо обе противоположные грани не должны быть разбиты).

Двумерная трансляционно-симметрическая сетка может состоять либо из треугольников (2 на узел), либо из четырёхугольников (1 на узел).

Трёхмерная трансляционно-симметрическая сетка может состоять либо из параллелепипедов (1 на узел), либо из треугольных призм (2 на узел), либо из тетраэдров (6 на узел), либо из тетраэдров и четырёхугольных пирамид (по 2 элемента каждого вида на узел), см. рис. 5.

Поскольку все ТС-сетки одной структуры могут быть переведены друг в друга линейным преобразованием, а схема UFC инвариантна относительно линейного преобразования сетки, то в выполнении условия точности на кубических полиномах можно убедиться, рассмотрев одну ТС-сетку каждой структуры. Выполненная программная реализация схемы UFC успешно прошла эти 6 тестов (два двумерных и 4 трёхмерных). При выполнении этих тестов градиенты вычислялись методом наименьших квадратов, поскольку, например, измельчение ТС-сетки из тетраэдров и пирамид уже не будет являться ТС-сеткой и, следовательно, не будет обеспечивать 3-й порядок точности схемы UFC.

Анализ аппроксимационной ошибки на декартовой сетке

Использование спектральных элементов для вычисления вспомогательных градиентов в сеточных узлах приводит к тому, что градиенты, а, следовательно, и получающаяся разностная схема записывается различным образом в чётных и нечётных узлах. Из-за этого аналитически получить дифференциальное приближение для схемы UFC затруднительно. Поэтому мы получим коэффициенты схемы напрямую из программного кода.

Рассмотрим равномерную декартову сетку из квадратов. Пусть рёбра расчётной сетки имеют длину $1/2$, тогда спектральные элементы являются квадратами с единичными рёбрами. Пусть узлы спектрального элемента имеют целые координаты, а оставшиеся сеточные узлы – хотя бы одну полуцелую координату. Приведём коэффициенты для вычисления производной вдоль оси x по схе-

ме UFC. Поскольку коэффициенты выражаются рациональными числами, для удобства представления домножим их на число 1152, являющееся наименьшим общим кратным их знаменателей. Коэффициенты для вычисления производных в точках $(0,0)$ и $(1/2,0)$ представлены на рис. 6, а для вычисления производных в точках $(0,1/2)$ и $(1/2,1/2)$ – на рис. 7.

При масштабировании сетки с коэффициентом h_x вдоль оси x и с коэффициентом h_y вдоль оси y коэффициенты, представленные на рис. 6 и рис. 7, делятся на h_x . Поэтому можно записать следующие дифференциальные приближения:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right]_{(0,0)}^{UFC} &= \frac{\partial u}{\partial x}(0,0) - \frac{1}{24} h_x^2 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(0,0) + \frac{1}{96} h_x^3 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(0,0) + \\ &+ \frac{1}{96} h_x h_y^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2}(0,0) + \frac{1}{288} \frac{h_y^4}{h_x} \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(0,0) + \epsilon_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right]_{(h_x/2,0)}^{UFC} &= \frac{\partial u}{\partial x}(h_x/2,0) + \frac{1}{24} h_x^2 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(h_x/2,0) - \frac{1}{96} h_x^3 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(h_x/2,0) + \\ &+ \frac{1}{96} h_x h_y^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2}(h_x/2,0) + \frac{1}{288} \frac{h_y^4}{h_x} \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(h_x/2,0) + \epsilon_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right]_{(0,h_y/2)}^{UFC} &= \frac{\partial u}{\partial x}(0, h_y/2) - \frac{1}{24} h_x^2 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(0, h_y/2) + \frac{1}{96} h_x^3 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(0, h_y/2) + \\ &+ \frac{1}{96} h_x h_y^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2}(0, h_y/2) - \frac{1}{288} \frac{h_y^4}{h_x} \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(0, h_y/2) + \epsilon_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right]_{(h_x/2,h_y/2)}^{UFC} &= \frac{\partial u}{\partial x}(h_x/2, h_y/2) + \frac{1}{24} h_x^2 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(h_x/2, h_y/2) - \frac{1}{96} h_x^3 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(h_x/2, h_y/2) + \\ &+ \frac{1}{96} h_x h_y^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2}(h_x/2, h_y/2) - \frac{1}{288} \frac{h_y^4}{h_x} \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(h_x/2, h_y/2) + \epsilon_4. \end{aligned}$$

Здесь $\epsilon_k = O((h_x^4 + h_y^4)(1 + h_y/h_x) \max(\mathbf{D}^5 u))$, $k = 1..4$.

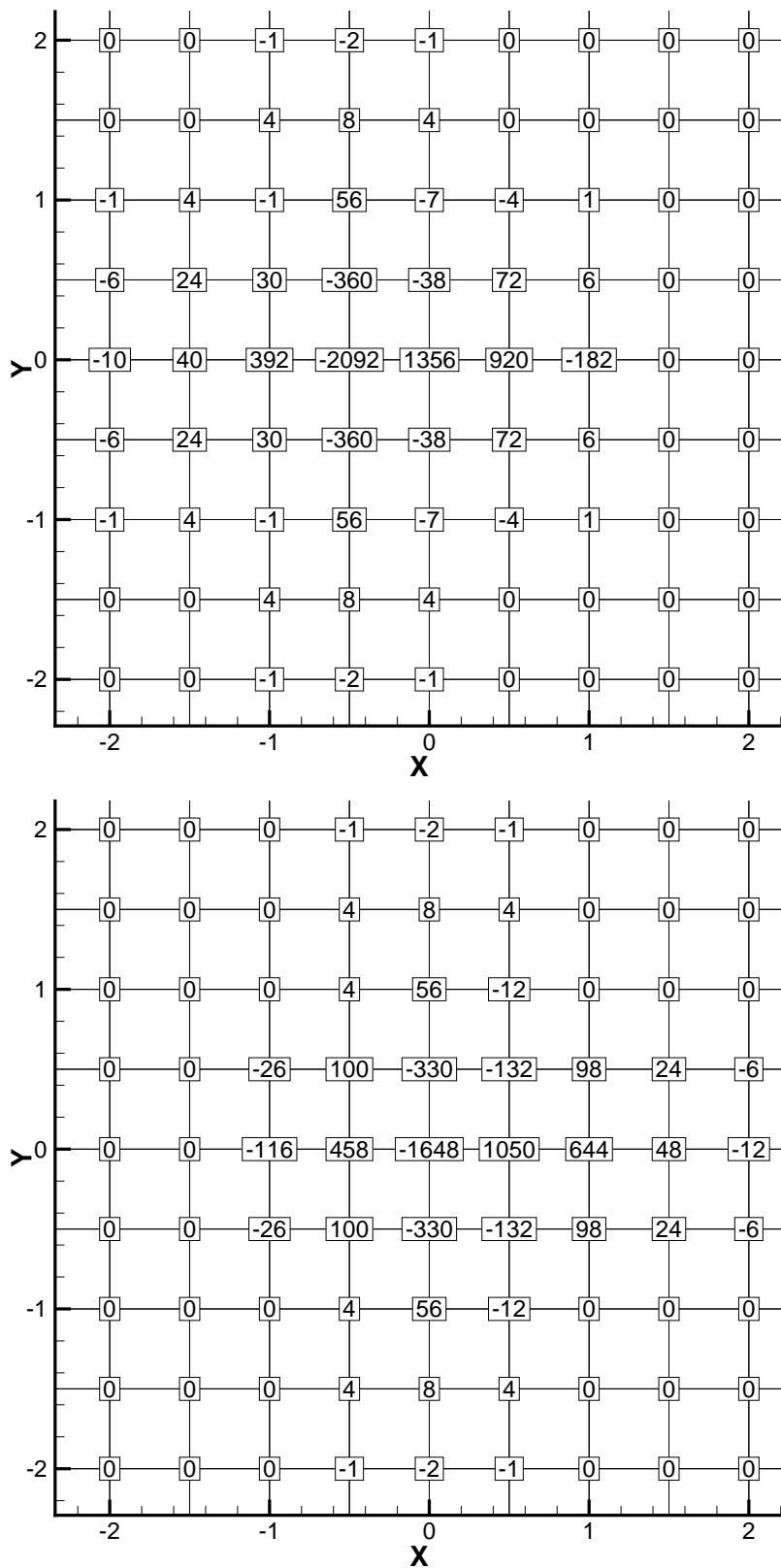


Рис. 6. Коэффициенты схемы UFC для вычисления производной в точках (0, 0) и (1/2, 0), умноженные на 1152

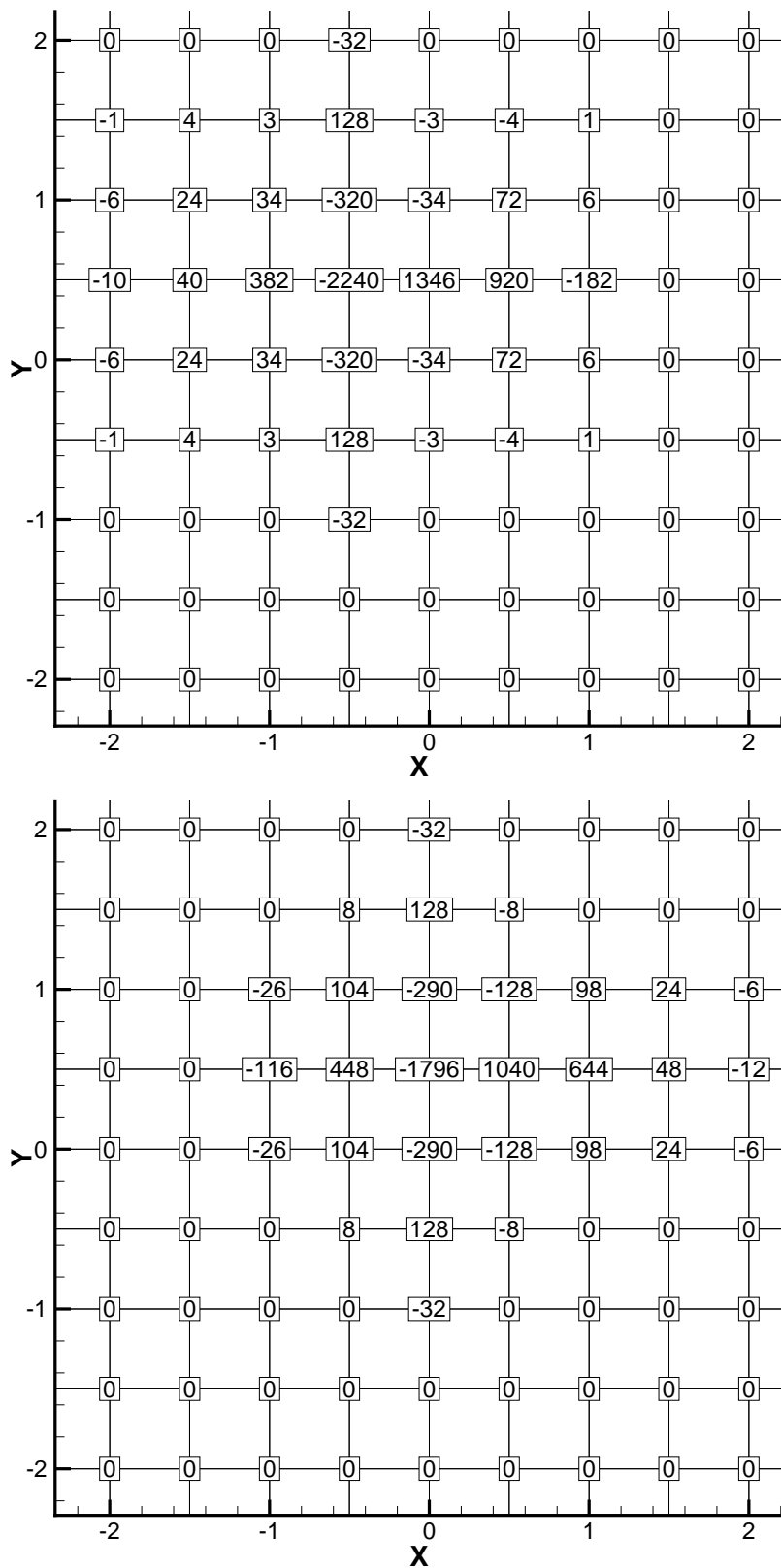


Рис. 7. Коэффициенты схемы UFC для вычисления производной в точках $(0, 1/2)$ и $(1/2, 1/2)$, умноженные на 1152

Если отказаться от использования спектральных элементов и вычислять вспомогательные градиенты одинаковым образом и со вторым порядком аппроксимации во всех сеточных узлах, то схема UFC будет обладать третьим порядком аппроксимации. Равным образом третий порядок аппроксимации будет достигаться, если вспомогательные градиенты будут вычисляться с третьим порядком аппроксимации. Однако из приведённых формул видно, что при использовании спектральных элементов второго порядка схема UFC не является точной на кубических полиномах и в норме L_∞ , равно как и в интегральных нормах, обладает вторым порядком аппроксимации на декартовой сетке.

Для исследования порядка точности на уравнении переноса $\partial u/\partial t + \partial u/\partial x = 0$ в этом случае воспользуемся методом нестационарного корректора, разработанного в [13]. Будем исследовать полудискретную схему, предполагая, что интегрирование по времени проводится по явной схеме не менее чем 3-го порядка точности. Поскольку расчётная сетка периодическая, а один блок состоит из четырёх узлов, например, A, B, C, D с радиус-векторами $\mathbf{r}_A = (0,0)^T$, $\mathbf{r}_B = (h_x/2,0)^T$, $\mathbf{r}_C = (0, h_y/2)^T$, $\mathbf{r}_D = (h_x/2, h_y/2)^T$, то нестационарный корректор, соответствующий каждому мультииндексу, будет представлять из себя набор из четырёх компонент. Подставляя изображённые на рис. 6 и рис. 7 коэффициенты, получим систему уравнений для определения главного корректора

$$\frac{d\hat{\mathbf{C}}^3}{dt} + \hat{L}\hat{\mathbf{C}}^3 = \mathbf{f}^3, \quad (21)$$

где $\mathbf{f}^3 = (f^{xxx}, f^{xyx}, f^{xyy}, f^{yyy})$, и

$$\hat{L} = \frac{1}{h_x} \begin{pmatrix} 4/3 & -8/9 & 0 & -4/9 \\ -8/9 & 4/3 & -4/9 & 0 \\ 0 & -4/9 & 4/3 & -8/9 \\ -4/9 & 0 & -8/9 & 4/3 \end{pmatrix}; \quad f^{xxx} = \frac{h_x^2}{24} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$f^{xyx} = f^{xyy} = f^{yyy} = 0$. Матрица \hat{L} симметрическая и имеет собственные значения $\lambda = 1/h_x \{0, 8/9, 16/9, 24/9\}$. Вектор \mathbf{f}^3 является собственным вектором, соответствующим $\lambda = 24/(9h_x)$. Поэтому для решения уравнения (21) выполняется оценка $\|\hat{\mathbf{C}}^3(t)\| \leq 3/8 h_x \|\mathbf{f}^3\| = O(h_x^3)$. Следовательно, схема UFC на декартовой сетке, по меньшей мере, для уравнения переноса вдоль оси x , обладает третьим порядком точности.

Тестирование

Проведём верификацию разработанной разностной схемы на задачах с аналитическими решениями. Верификация будет проведена на трёх задачах: системе линейных уравнений с постоянными коэффициентами, скалярном линейном уравнении с переменными коэффициентами и уравнениях Эйлера.

Во всех задачах будут использоваться как структурированные сетки (равномерные решётки или деформированные решётки), так и неструктурированные. Для построения неструктурированных сеток, чтобы вычисление градиентов проводить с использованием спектральных элементов, вначале при помощи сеточного генератора (Gmsh для двумерных сеток и Gambit для трёхмерных) строилась вдвое более грубая сетка, а затем она измельчалась. Для построения решётчатых сеток строилась вдвое более грубая сетка, затем, если это было необходимо, она деформировалась, и, наконец, измельчалась. Деформация заключалась в том, что каждый узел, исключая граничные, сдвигался по каждой декартовой оси на случайную величину, равномерно распределённую на отрезке $[-h/5, h/5]$, где h – длина ребра исходной сетки.

Для интегрирования по времени первых двух задач была использована 5-шаговая схема Рунге-Кутты 5-го порядка на линейных задачах, а для последней задачи – стандартная 4-шаговая схема 4-го порядка. Число Куранта было задано равным 0.5 (оценка предела устойчивости не проводилась).

Линеаризованные уравнения Эйлера на однородном фоновом поле. Начнём верификацию разработанного численного метода на системе линейных уравнений с постоянными коэффициентами. Рассмотрим линеаризованные уравнения Эйлера на постоянном фоновом поле $\bar{\rho} = 1$, $\bar{\mathbf{u}} = 0$, $\bar{p} = 1/\gamma$. Начальные данные зададим в виде бесконечной решётки импульсов: $\rho'(\mathbf{r})|_{t=0} = p(\mathbf{r})|_{t=0} = f(\mathbf{r})$, $\mathbf{u}'|_{t=0} = 0$, где

$$f(\mathbf{r}) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} A \exp \left(-\ln 2 \left(\frac{\mathbf{r} - L(i\mathbf{e}_x + j\mathbf{e}_y + k\mathbf{e}_z)}{b} \right)^2 \right),$$

$A = 1/2$, $b = 6$, $L = 26$, а \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y и \mathbf{e}_z – единичные векторы по соответствующим направлениям. Расчёт проводится в кубе с длиной ребра L с периодическими граничными условиями по всем направлениям. Результаты расчёта сравниваются с точным решением на время $T = 20$.

На рис. 8 приведены результаты расчётов на равномерной кубической сетке по схемам EBR3, EBR5 и UFC. В первых двух, как и в схеме UFC, использовались полупрозрачные контрольные объёмы. Для сравнения на график наложены расчёты по обычным конечно-разностным схемам 3-го и 5-го порядка. Схемы EBR3 и UFC показывают сходимость с третьим порядком, тогда как схема EBR5 – с пятым. Этот результат является ожидаемым.

На рис. 9 приведены результаты расчётов по этим же схемам на четырёх видах сеток: 1) равномерных кубических сетках, 2) деформированных гексаэдральных сетках, 3) призматических сетках, полученных экструзией неструктурированной треугольной сетки по третьему направлению с равномерным ша-

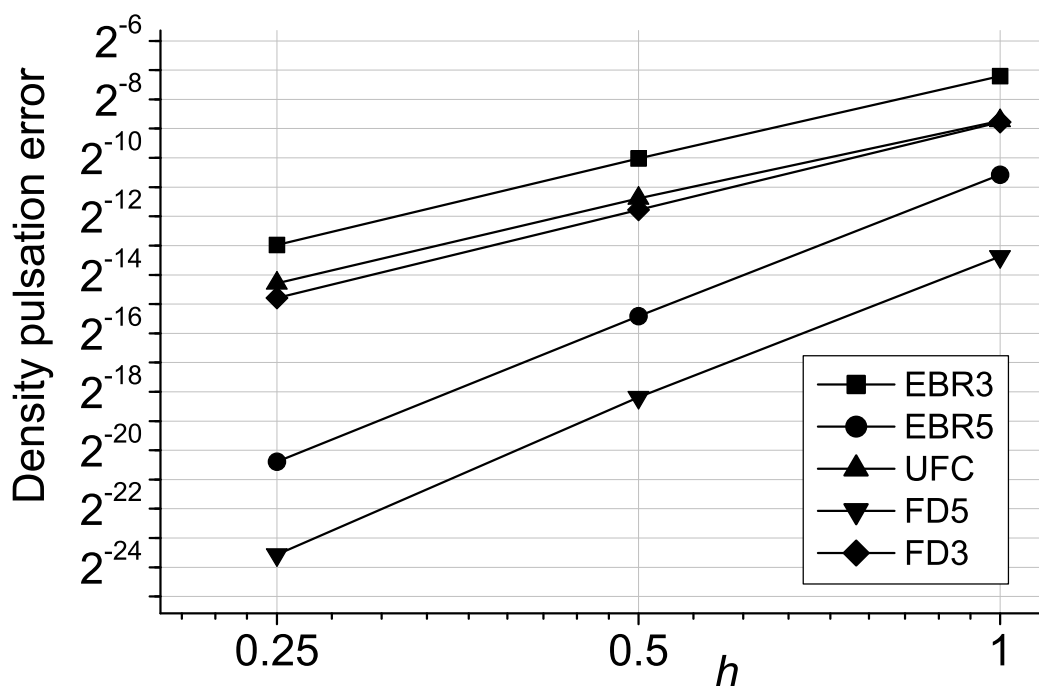


Рис. 8. Сходимость численного решения линейной задачи к точному решению на декартовых сетках для схем EBR3, EBR5 и UFC в сравнении с конечно-разностными схемами 3-го и 5-го порядка

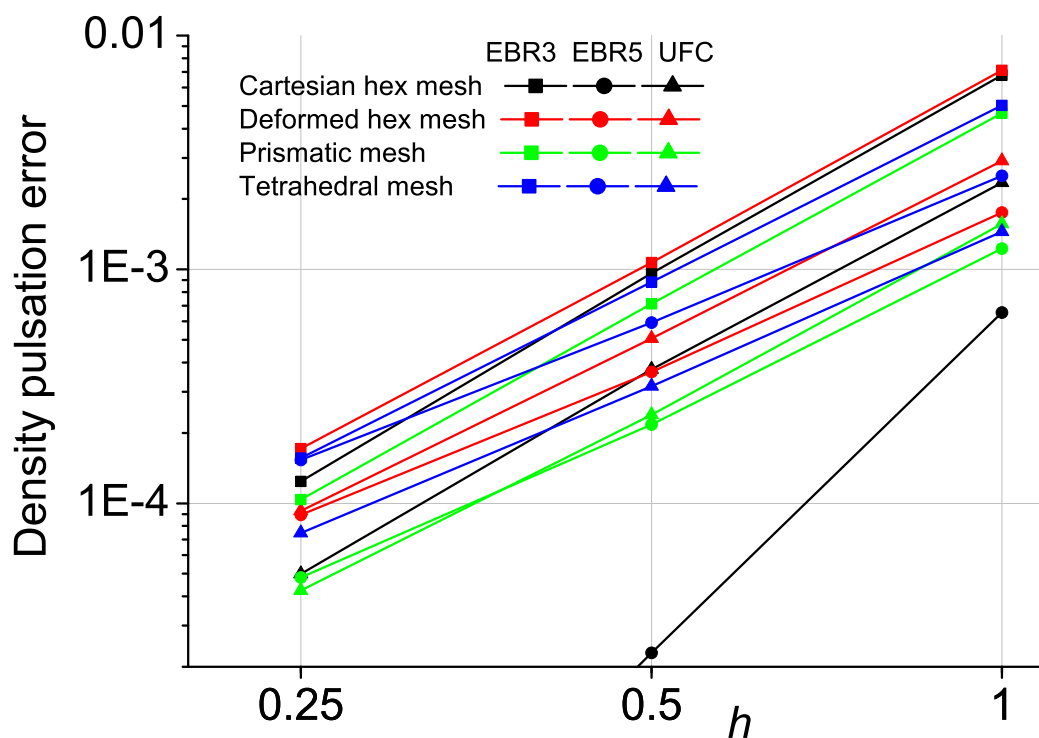


Рис. 9. Сходимость численного решения линейной задачи к точному решению на неструктурированных сетках для схем EBR3, EBR5 и UFC

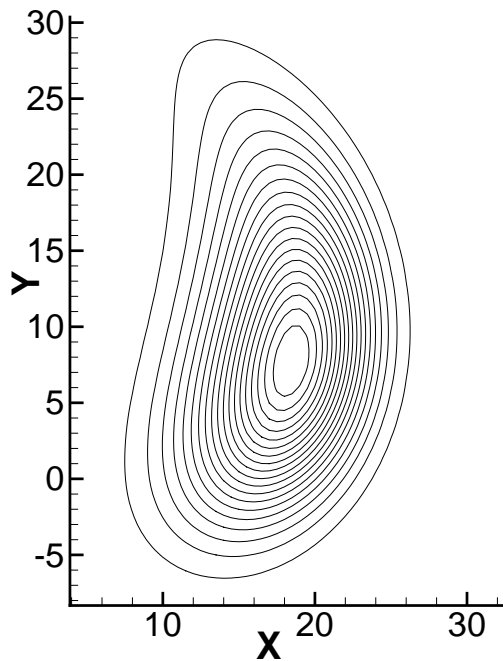


Рис. 10. Изолинии точного решения уравнения переноса с вращающимся полем скоростей

гом, и неструктурированных тетраэдральных сетках. Цвет соответствует типу сетки, а форма маркера – схеме. Видно, что все схемы на всех типах неструктурированных сеток показывают сопоставимые результаты. На деформированных гексаэдральных сетках схема UFC уступает по точности схеме EBR5, на призматических сетках их результаты близки, а на тетраэдральных сетках схема UFC даёт меньшую ошибку, чем схема EBR5.

Уравнение переноса на вращающемся поле скоростей. Рассмотрим уравнение (5) на следующем поле скоростей:

$$v_x = -\omega(r)y, \quad v_y = \omega(r)x, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \omega(r) = 1 - \cos(r/50).$$

Зададим начальные данные $u(\mathbf{r})$ в виде гауссиана

$$u(\mathbf{r})|_{t=0} = A \exp \left(-\ln 2 \left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{b} \right)^2 \right),$$

где $\mathbf{r}_0 = (20, 0)^T$, $A = 1$, $b = 6$. Решение будем сравнивать с точным на момент времени $T = 5$. Изолинии u на конечный момент времени приведены на рис. 10.

Расчёты по схемам EBR3, EBR5, FC (с точечной аппроксимацией нестационарного члена) и UFC на равномерной решётке из квадратов приведены на

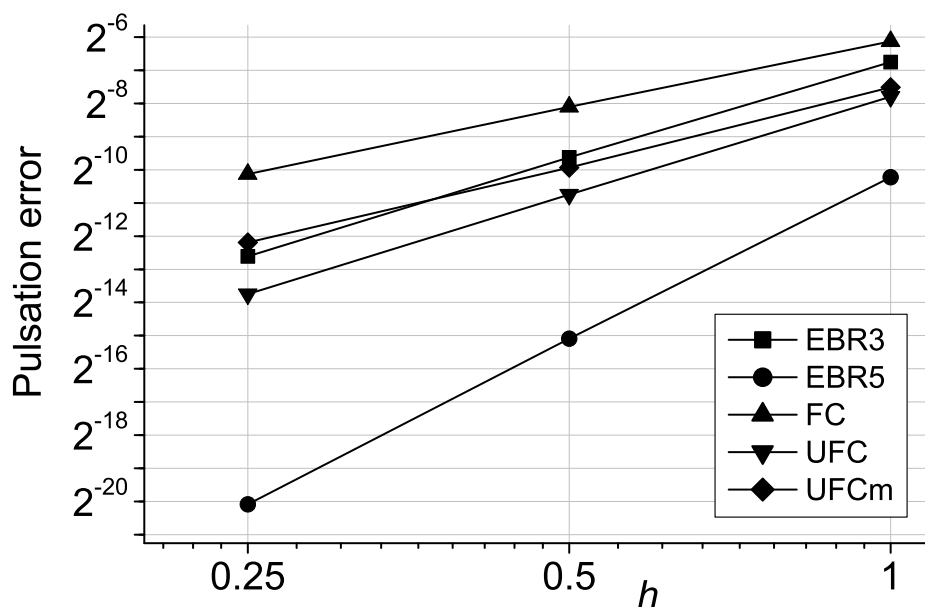


Рис. 11. Сходимость численного решения уравнения переноса с переменной скоростью к точному решению на декартовых сетках для схем EBR3, EBR5, FC и UFC

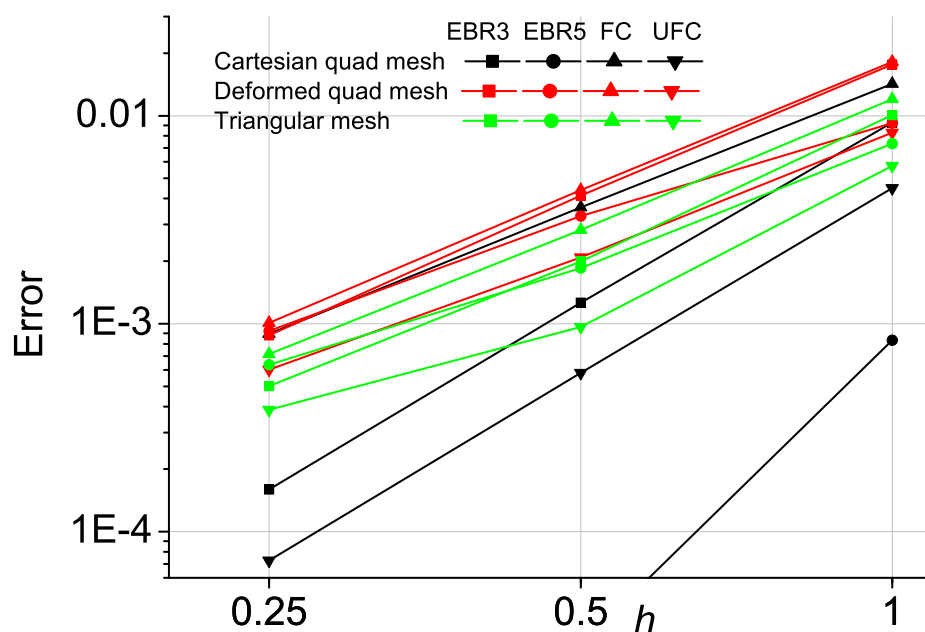


Рис. 12. Сходимость численного решения уравнения переноса с переменной скоростью к точному решению на неструктурированных сетках для схем EBR3, EBR5, FC и UFC

рис. 11. Численные порядки точности соответствуют теоретически ожидаемым и равны, соответственно, 3, 5, 2 и 3. Для сравнения приведены результаты расчётов с реконструкцией только сеточной переменной, но не потоковой, то есть с заменой (9) на $F_{ik}^L = \mathcal{F}(Q_{ik}) \cdot \tilde{n}_{ik}$ и $F_{ik}^R = \mathcal{F}(Q_{ki}) \cdot \tilde{n}_{ik}$ (см. соответствующий раздел). На рис. 11 эта схема обозначена через UFCm. Видно, что такой подход приводит к падению порядка точности на декартовой сетке до второго.

Результаты расчётов этой задачи на равномерной решётке из квадратов, деформированной четырёхугольной сетке и неструктурированной треугольной сетке приведены на рис. 12. Графики показывают, что на этой задаче схема UFC показывает наилучший результат, исключая случай равномерной декартовой сетки, где схема EBR5 обладает 5-м порядком точности.

Расчёт финитного вихря. Рассмотрим двумерную задачу об изоэнтропическом вихре в рамках уравнений Эйлера. Такой вихрь однозначно определяется профилем азимутальной скорости u_ϕ . Зададим её в виде

$$u_\phi = \begin{cases} M(r(2a - r))^n, & r < 2a, \\ 0, & r \geq 2a, \end{cases}$$

где максимальная скорость $M = 0.5$ приходится на окружность радиуса $a = 5$. Показатель степени $n = 4$ введён для того, чтобы решение имело ограниченные четвёртые производные. В [8] мы использовали эту же задачу при $n = 3$. Расчёт будем проводить в инерциальной системе координат, движущейся относительно вихря. Положим скорость центра вихря в ней равной $u_0 = 1$, $v_0 = 0$. Тогда декартовы компоненты скоростей определяются равенствами $u_x = -(y - v_0 t)u_\phi(r)/r + u_0$, $v = (x - u_0 t)u_\phi(r)/r + v_0$, $r = ((x - u_0 t)^2 + (y - v_0 t)^2)^{1/2}$, а плотность и давление находятся из системы уравнений

$$\frac{dp}{dr} = \frac{\rho u_\phi^2}{r}, \quad p = \frac{1}{\gamma} \rho^\gamma, \quad \rho|_{r \geq 2a} = 1.$$

Расчётную область выберем в виде квадрата со стороной 25, на границе зададим периодические условия. Решение будет сравниваться с точным на момент времени $T = 100$.

На рис. 13 приведены результаты расчётов на равномерной сетке из квадратов по схемам EBR3, EBR5, FC, UFC и линейной схеме T. Barth. Во всех схемах использовались полупрозрачные контрольные объёмы. Для сравнения на график наложены расчёты по обычным конечно-разностным схемам 3-го и 5-го порядка. Численные порядки точности наблюдаются точно такие же, как и в линейной задаче.

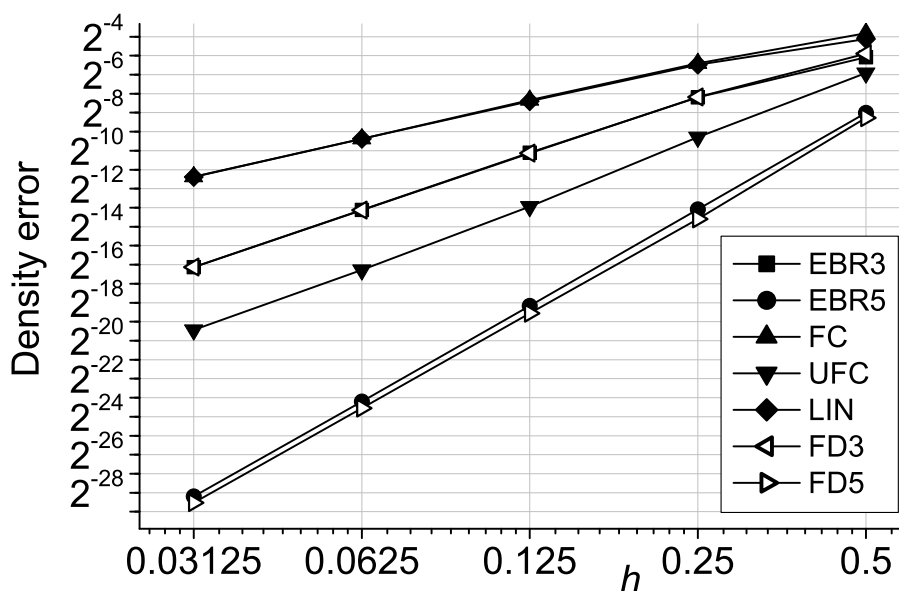


Рис. 13. Сходимость численного решения задачи о переносе вихря к точному решению на декартовых сетках для схем EBR3, EBR5, FC и UFC

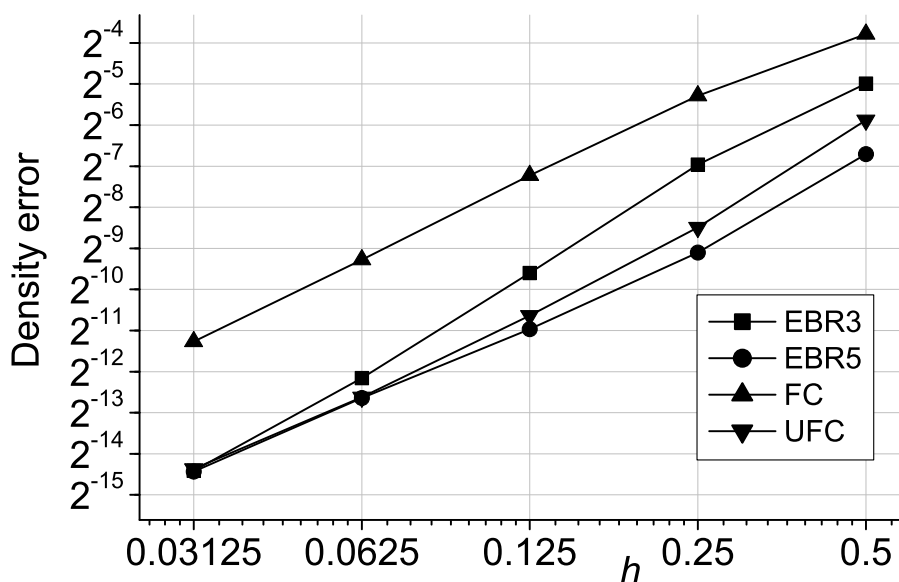


Рис. 14. Сходимость численного решения задачи о переносе вихря к точному решению на деформированных четырёхугольных сетках для схем EBR3, EBR5, FC и UFC

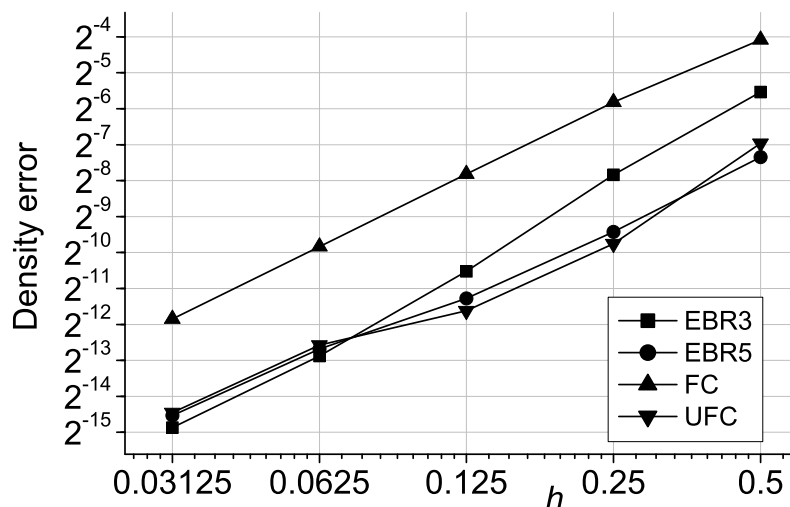


Рис. 15. Сходимость численного решения задачи о переносе вихря к точному решению на неструктурированных треугольных сетках для схем EBR3, EBR5, FC и UFC

Результаты расчётов по схемам EBR3, EBR5, FC и UFC на деформированной четырёхугольной сетке и неструктурированной треугольной сетке приведены, соответственно, на рис. 14 и рис. 15. На деформированной 4-угольной сетке схема EBR5 показывает результаты, незначительно лучшие по сравнению со схемой UFC, а на неструктурированной треугольной сетке небольшое преимущество имеет схема UFC. Отметим, что в отсутствие фонового потока задача была бы стационарной; при этом схемы FC и UFC показывали бы третий порядок точности на неструктурированной сетке, тогда как схема EBR5 – только второй.

Замечания

Производительность. Схемы UFC, EBR3 и EBR5 относятся к классу рёберно-ориентированных схем и в целом близки как по точности, так и по скорости счёта. На одной и той же задаче расчёт по схеме UFC в нашей реализации занимал примерно на 20-50% времени меньше, чем по схеме EBR5, однако мы не можем гарантировать оптимальность реализаций каждой из схем. Наибольшее преимущество схема UFC обладала на гексаэдральной сетке, где для расчёта по схеме EBR5 выполнялась квазиодномерная реконструкция вдоль каждого ребра и каждой из диагоналей. Однако именно на гексаэдральной сетке схема EBR5 показывает наибольшее преимущество по сравнению со схемой UFC.

О расчётах в пограничных слоях. При расчётах задач с пограничными слоями критически важным является то, чтобы аппроксимационная ошибка в используемой разностной схеме не была пропорциональна коэффициенту ани-

зотропии. Обычно разностные схемы на симплициальных сетках для решения гиперболических систем уравнений обладают аппроксимационной ошибкой, обратно пропорциональной синусу минимального (а не максимального) угла симплекса, что не позволяет их использовать в пограничных слоях. Поэтому переход на гибридные сетки нужен, в том числе, и для того, чтобы ликвидировать этот недостаток. Однако использование полупрозрачных ячеек фактически равносильно перебору разбиений гибридной сетки на тетраэдры и поэтому в пограничных слоях наследует проблему анизотропии от схемы на тетраэдральной сетке. Изменения способа вычисления градиентов не устраняет эту проблему. Её решение возможно путём использования расчётных сеток, полученных из поверхностной сетки экструзией вдоль нормали к поверхности. Такая технология описана в [14] [15]. Аналогичный результат может быть достигнут использованием прямых контрольных объёмов [8].

Интерес для практики представляет возможность расчёта на сетке, составленной из двух фрагментов: полуструктурированной анизотропной сетки в пограничных слоях и неструктурированной сетки со слабой анизотропией. Вопрос о проведении расчётов по рёберно-ориентированным схемам на таких сетках без потери точности на сшивках этих фрагментов требует дальнейшего исследования.

Заключение

В настоящей работе было предложено обобщение метода коррекции потоков (FC) и его нестационарной модификации (UFC) на гибридные неструктурированные сетки. Проведённые расчёты показали, что использование гибридных сеток в целом не ухудшает качество расчёта по сравнению с использованием симплициальных сеток.

Список литературы

1. Barth T. J., Frederickson P. O. High order solution of the Euler equations on unstructured grids using quadratic reconstruction // AIAA Paper No. 90-0013. 1990.
2. Katz Aaron, Sankaran Venkateswaran. An Efficient Correction Method to Obtain a Formally Third-Order Accurate Flow Solver for Node-Centered Unstructured Grids // J. Sci. Comput. New York, NY, USA, 2012. may. T. 51, № 2. С. 375–393.
3. Pincock B., Katz A. High-Order Flux Correction for Viscous Flows on Arbitrary Unstructured Grids // J. Sci. Comput. New York, NY, USA, 2014. nov. T. 61, № 2. С. 454–476.

4. Work C. D., Katz A. J. Aspects of the Flux Correction Method for Solving the Navier-Stokes Equations on Unstructured Meshes // AIAA paper No. 2015-0834. 2015.
5. Nishikawa Hiroaki. First, Second, and Third Order Finite-volume Schemes for Advection-diffusion // J. Comput. Phys. San Diego, CA, USA, 2014. sep. Т. 273. С. 287–309. URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.jcp.2014.05.021>.
6. Бахвалов П. А., Козубская Т. К. Модификация схемы Flux Corrector для повышения точности решения нестационарных задач // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2015. № 69. С. 1–24.
7. Bakhvalov P.A., Kozubskaya T.K. Modification of Flux Correction method for accuracy improvement on unsteady problems // Journal of Computational Physics. 2017. Т. 338. С. 199 – 216.
8. Бахвалов П. А., Козубская Т. К. О построении рёберно-ориентированных схем, обеспечивающих точность на линейной функции, для решения уравнений Эйлера на неструктурированных сетках // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2017. Т. 57, № 4. С. 92–111.
9. Barth T. J. Numerical aspects of computing high Reynolds number flows on unstructured meshes // AIAA Paper No. 91-0721. 1991.
10. Barth T. J. A 3-D upwind Euler solver for unstructured meshes // AIAA Paper No. 91-1548. 1991.
11. Roe, P.L. Error estimates for cell-vertex solutions of the compressible Euler equations: Tech. Rep.: : ICASE Report 87-6, 1987.
12. Abalakin I., Bakhvalov P., Kozubskaya T. Edge-based reconstruction schemes for unstructured tetrahedral meshes // International Journal for Numerical Methods in Fluids. 2016. Vol. 81. P. 331–356.
13. Бахвалов П. А. Метод нестационарного корректора для анализа точности линейных разностных схем для уравнения переноса // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2016. № 140. С. 1–32.
14. Katz A., Work D. High-order flux correction/finite difference schemes for strand grids // Journal of computational physics. 2015. Т. 282. С. 360–380.
15. High-Order strand grid methods for shock turbulence interaction / Tong O., Yanagita Y., Schaap R. et al. // AIAA paper No. 2015-2283. 2015.