



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 41 за 2017 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Белоусов С.В., [Ивашкин В.В.](#)

Траектории перелета на
геостационарную орбиту при
использовании
гравитационного поля Луны

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Белоусов С.В., Ивашкин В.В. Траектории перелета на геостационарную орбиту при использовании гравитационного поля Луны // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2017. № 41. 36 с. doi:[10.20948/prepr-2017-41](https://doi.org/10.20948/prepr-2017-41)
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2017-41>



**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Российской академии наук**

С.В. Белоусов, В.В. Ивашкин

**ТРАЕКТОРИИ ПЕРЕЛЕТА
НА ГЕОСТАЦИОНАРНУЮ ОРБИТУ
ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ
ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ ЛУНЫ**

Москва - 2017

Белоусов С.В., Ивашкин В.В.

Траектории перелета на геостационарную орбиту при использовании гравитационного поля Луны

Аннотация

Лунный гравитационный маневр (ЛГМ) позволяет изменить орбиту космического аппарата (КА), используя гравитацию Луны и уменьшая за счет этого расход топлива. При начальном наклоне орбиты более $\sim 30^\circ$ выведение КА на геостационарную орбиту (ГСО) с использованием ЛГМ экономичнее обычной схемы выведения. В работе исследуются особенности построения траекторий выведения КА на ГСО с облетом Луны при учете возмущений от Луны, Солнца и от сжатия Земли. Определение таких траекторий включает начальное построение траектории в рамках модели точечной сферы действия Луны и последующее ее итерационное уточнение. В работе приводятся характеристики нескольких семейств траекторий КА при отлете с разных космодромов, при облете Луны в восходящем и нисходящем узлах ее орбиты относительно экватора Земли, для разных энергетик орбиты отлета.

Ключевые слова: космический аппарат, траектория КА, геостационарная орбита, Лунный гравитационный маневр.

Belousov S.V., Ivashkin V.V.

Space Trajectories for Flight to Geostationary Orbit Using Gravitational Field of the Moon

Abstract

Lunar Gravity Assist (LGA) allows us to change a spacecraft (SC) orbit using the Moon's gravity during the SC fly by the Moon and reduction of the fuel mass consumption. When the SC orbit initial inclination is more than $\sim 30^\circ$, the SC transfer into a geostationary orbit (GSO) using the LGA is more effective from energy point of view than conventional transfer scheme. We study the trajectories determination algorithm taking into account the gravitational perturbations by the Moon and Sun as well as by the Earth non-sphericity. The method developed is based on the initial designing the SC trajectory in an approximate model of the Moon point sphere of influence and on the subsequent iterative construction of the trajectory in the exact formulation. The characteristics of the SC trajectories for the launch to GSO using LGA are given for several families of SC trajectories with a start from various Cosmodromes, for flyby of the Moon in ascending and descending nodes of the Moon orbit, as well as for various energy values of the space orbit.

Keywords: spacecraft, spacecraft trajectory, geostationary orbit, lunar gravity assist.

Оглавление

Введение.....	3
1 Определение траекторий перелета от Земли на ГСО	3
2 Семейства построенных траекторий.....	13
3 Характеристики траекторий.....	17
4 Выводы.....	25
5 Библиографический список.....	25
6 Приложение.....	27

Введение

Геостационарная орбита (ГСО), т.е. круговая геоэкваториальная орбита радиуса $R \approx 42164$ км, имеющая суточный период обращения, важна для практики космонавтики. При запуске с территории России ракета-носитель (РН) выводит КА на опорную орбиту с наклоном более 50° . При переходе с опорной орбиты на ГСО двигательная установка должна сообщить импульсы скорости, так чтобы орбита КА изменила наклонение до нуля и радиус орбиты. Эти маневры требуют значительного расхода топлива [1-3]. Использование гравитационных полей других небесных тел для изменения кинематических параметров орбиты является сейчас перспективным направлением (см., например, [1-13]). Идея использования гравитационного поля тяготения Луны [1] для перелета на ГСО состоит в том, чтобы при облете Луны за счет ее притяжения изменить наклонение и расстояние в перицентре орбиты КА, не расходуя при этом топлива. Затраты топлива при таком способе будут определяться переходом КА с опорной орбиты на траекторию облета Луны и переходом КА на ГСО с вытянутой эллиптической орбиты после облета Луны. В настоящей работе рассматривается построение и характеристики таких траекторий облета и выхода КА на орбиту, касающуюся ГСО. Рассматриваемая методика основана на работах [1-3], где кратко описано построение траекторий выведения КА на ГСО с облетом Луны. Рассматриваются вычислительные особенности построения траекторий облета и перехода на ГСО. Сначала определяется траектория в рамках модели точечной сферы действия Луны. Затем выполняется итерационный расчет точной траектории с учетом гравитационных возмущений от Луны, Солнца и сжатия Земли. С использованием предлагаемой методики разработан программно-вычислительный комплекс построения траекторий облета Луны и перехода на ГСО. Этот комплекс разработан на языке C++ в операционной системе (ОС) linux-ubuntu. Программы для построения рисунков траекторий, приведенных в работе, разработаны авторами в пакете gnuplot 4.1 с привлечением аппарата аналитической геометрии, также в ОС linux-ubuntu. С помощью данного комплекса выполнены расчеты и построено несколько семейств этих траекторий выведения КА на ГСО для различных космодромов, различных дат отлета, различных узлов Лунной орбиты при ее облете и разной энергетики траекторий полета к Луне [11-13]. Приведены их характеристики. Отметим, что другой подход к построению таких траекторий развит в [5]. В [6] отмечен интерес к реализации данной схемы полета для выведения КА AsiaSat 3 на ГСО.

1. Определение траекторий перелета от Земли на ГСО

В соответствии с указанным методом [1-3], построение траекторий выведения на ГСО выполняется в три этапа:

а) построение траектории полета к Луне в рамках модели точечной сферы действия Луны (ТСДЛ);

б) определение требуемого вектора прицельной дальности при подлете к Луне и итерационное уточнение вектора прицельной дальности и траектории полета до Луны с учетом гравитационных возмущений;

в) итерационное определение параметров точной траектории выведения на ГСО при учете гравитационных возмущений Луны, Солнца и сжатия Земли на всей траектории полета.

Ниже в разделах 1а – 1е приводится алгоритм построения траектории для указанных этапов а), б), в).

1а. Построение траектории полета к Луне в рамках модели ТСДЛ (первый этап построения траектории)

В модели точечной сферы действия Луны (ТСДЛ) геоцентрическая траектория КА представляется двумя дугами кеплеровских орбит T_1 и T_3 , соединенных между собой, с изломом скорости, в центре Луны M в момент времени t_p наибольшего сближения с ней КА, рис. 1. Первая дуга P_1P_2 - от точки P_1 начала пассивного полета к Луне до точки $P_2=M$, она обозначена через T_1 .

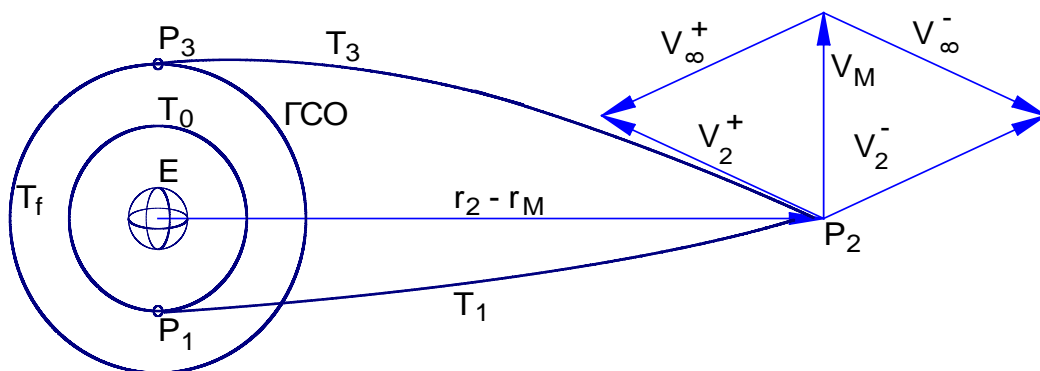


Рис. 1. Геоцентрическая траектория перелета от Земли на ГСО в модели точечной сферы действия Луны.

Вторая дуга P_2P_3 – от Луны, точки P_2 , до точки P_3 подлета к ГСО, она обозначена через T_3 . В точке M радиус-векторы КА r_2 и Луны r_M равны, $r_2=r_M=(x_M, y_M, z_M)^*$, а вектор геоцентрической скорости КА меняется с V_2^- на V_2^+ . При этом вектор скорости Луны $V_M=(V_{x_M}, V_{y_M}, V_{z_M})^*$ задан.

На рис 2 ниже показаны используемая инерциальная геоэкуаториальная геоцентрическая система координат (СК) $OXYZ$ и геометрия орбит на сфере единичного радиуса с центром в центре масс Земли. Ось OZ направлена по оси вращения Земли, ось OX направлена в точку весеннего равноденствия Υ . Ось OY дополняет СК до правой. На сфере рис. 2: дуга S_1S_2 - проекция дуги P_1P_2 в плоскости орбиты КА, OS'_2 –направлена по проекции OS_2 на плоскость

экватора; радиус-вектор Луны r_M ($= \{r_x, r_y, r_z\}^*$) проведен в точку М, он проходит через точку S_2 , $\Omega_S S_2 = u_M = u_2$ – аргумент широты КА в точке P_2 , $\alpha_M = \Gamma S_2'$ и $\delta_M = S_2' S_2$ – прямое восхождение и склонение Луны, $S_2 \Omega_H = \Delta u = \pi - u_M$, $\Delta \Omega = S_2' \Omega_H$. Заданы: μ_E ($=398600,4481 \text{ км}^3/\text{с}^2$), μ_M ($=4902,79914 \text{ км}^3/\text{с}^2$) – гравитационные параметры Земли и Луны, i , r_π , a – наклонение, перигейное расстояние, большая полуось орбиты T_1 перелета КА от Земли к Луне. В момент t_M Луна имеет известные радиус-вектор r_M и углы α_M , δ_M . Тогда

$$\sin \Delta u = \sin \delta_M / \sin i; \sin \Delta \Omega = \text{tg } \delta_M / \text{tg } i; \cos \Delta \Omega = \cos \Delta u / \cos \delta_M. \quad (1)$$

Долгота восходящего узла Ω орбиты КА T_1 и аргумент широты u_M точки М:

$$\Omega = \alpha_M + \Delta \Omega + \pi; u_M = \pi - \Delta u \quad (2)$$

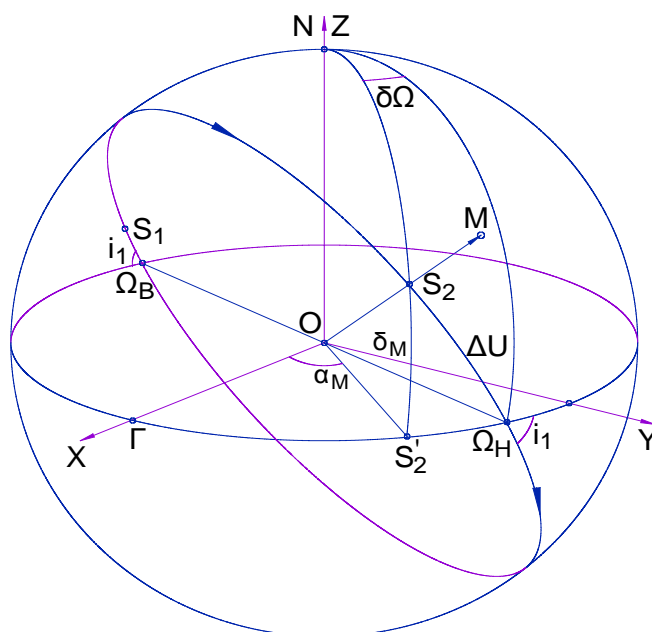


Рис. 2. Геометрия орбиты перелета к Луне на единичной сфере.

Эксцентриситет, параметр орбиты перелета T_1 , истинная аномалия КА при подлете к Луне (полагаем, что подлет к Луне - на восходящей ветви орбиты):

$$e = 1 - \frac{r_\pi}{a}; p = a(1 - e^2); \vartheta_M = \arccos\left[\frac{(p/r_M - 1)}{e}\right], 0 < \vartheta_M < \pi. \quad (3)$$

Из (2), (3) определяем аргумент широты перигея орбиты КА полета к Луне T_1 :

$$\omega = u_M - \vartheta_M. \quad (4)$$

Радиальная и трансверсальная составляющие скорости КА при истинной аномалии ϑ :

$$V_r = \sqrt{\mu/p} e \sin \vartheta; V_n = \sqrt{\mu/p} (1 + e \cos \vartheta), \quad (5)$$

для T_1, T_2 : $\mu=\mu_E$. Используя (5), находим V_{r1}, V_{n1} . При этом полагаем, что разгон и торможение импульсные, в перицентрах орбит, $\mathcal{G}_1=\mathcal{G}_f=0$, $r_1=r_\pi=R_1$ (радиус опорной орбиты высотой 200 км). Тогда величина импульса скорости разгона:

$$\Delta V_1=(-\mu_E/a+2\mu_E/R_1)^{1/2}-(\mu_E/R_1)^{1/2} \quad (5a)$$

Орт радиус-вектора $\mathbf{r}^0 = \{r_x^0, r_y^0, r_z^0\}^*$:

$$\begin{cases} r_x^0 = \cos \Omega \cos u - \sin \Omega \cos i \sin u; \\ r_y^0 = \sin \Omega \cos u + \cos \Omega \cos i \sin u; \\ r_z^0 = \sin i \sin u; \end{cases} \quad (6)$$

Орт трансверсали $\mathbf{n}^0 = \{n_x^0, n_y^0, n_z^0\}^*$:

$$\begin{cases} n_x^0 = -\cos \Omega \sin u - \sin \Omega \cos i \cos u; \\ n_y^0 = -\sin \Omega \sin u + \cos \Omega \cos i \cos u; \\ n_z^0 = \sin i \cos u; \end{cases} \quad (7)$$

Радиус-вектор и вектор скорости в точке с истинной аномалией \mathcal{G} :

$$\mathbf{r} = r(\mathcal{G})\mathbf{r}^0(u); \mathbf{V} = V_r\mathbf{r}^0(u) + V_n\mathbf{n}^0(u); u=\omega+\mathcal{G}. \quad (8)$$

Тогда радиус-вектор и вектор скорости КА при отлете к Луне (точка P_1 , рис 1):

$$\mathbf{r}_1 = r_1\mathbf{r}^0(u_1); \mathbf{V}_1 = V_{r1}\mathbf{r}^0(u_1) + V_{n1}\mathbf{n}^0(u_1); u_1=\omega+\mathcal{G}_1. \quad (8a)$$

Зная r_1, V_{r1}, V_{n1} , находим по (6-8a) начальный вектор состояния $\mathbf{r}_1, \mathbf{V}_1$ (пока только без времени t_1).

Для определения начального времени и времени перелета КА до Луны используем связь истинной аномалии \mathcal{G} с эксцентрисической аномалией E :

$$tg(E/2) = \sqrt{(1-e)/(1+e)}tg(\mathcal{G}/2), \quad \cos E=(e+\cos \mathcal{G})/(1+e\cos \mathcal{G}). \quad (9)$$

По углу \mathcal{G}_M определяется аномалия E для точки P_2 . Связь эксцентрисической аномалии и времени перелета к Луне:

$$M = E - e \sin(E) = \sqrt{\mu_E}(t - \tau)/a^2 = n(t - \tau); n=\sqrt{\mu_E}/a^2; \quad (10)$$

где M -средняя аномалия, τ - момент прохождения перицентра орбиты полета КА к Луне; t – текущее время на орбите перелета КА к Луне. Применяя это уравнение для момента t_M подлета КА к Луне по орбите T_1 (когда Луна находится в узле своей орбиты, $\delta_M=0$), определяем элемент τ :

$$\tau = t_M - M(\mathcal{G}_M)/n. \quad (11)$$

Момент t_1 отлета к Луне с опорной орбиты, т.е. начала интегрирования системы уравнений движения (24):

$$t_1 = \tau + M(\mathcal{G}_1)/n. \quad (12)$$

Тем самым полностью определены элементы орбиты T_1 ($a, e, i, \Omega, \omega, \tau$), а также полный начальный вектор состояния ($t_1, \mathbf{r}_1, \mathbf{V}_1$).

16. Определение требуемого вектора прицельной дальности

В рамках модели ТСДЛ траектория выхода КА на ГСО состоит из двух орбит T_1, T_3 – движения от Земли к Луне и от Луны к ГСО (рис 1). Орбита T_1 , определенная выше (8а, 12), соответствует попаданию КА в центр Луны. Для определения орбиты облета Луны T_2 и орбиты T_3 после облета Луны надо определить еще вектор прицельной дальности при подлете к Луне.

Для этого найдем в СК OXYZ скорость КА относительно Луны и приравняем ее скорости «на бесконечности» подлета к Луне по орбите T_2 :

$$\mathbf{V}_\infty^- = \mathbf{V}_{КА}^- - \mathbf{V}_M. \quad (13)$$

В выражении (13) $\mathbf{V}_{КА}^-$ - геоекваториальная скорость КА при подлете к Луне. Она определяется по (5-8) при $\vartheta = \vartheta_M$ (3), $u = u_M$ (2), $r = r_M$. Можно также найти эту скорость иначе [14]:

$$\begin{aligned} V_{КАx} &= \frac{c}{p} \left[-\frac{f_x}{f} \sin \vartheta + \frac{c_y f_z - c_z f_y}{c f} (e + \cos \vartheta) \right]; \\ V_{КАy} &= \frac{c}{p} \left[-\frac{f_y}{f} \sin \vartheta + \frac{c_z f_x - c_x f_z}{c f} (e + \cos \vartheta) \right]; \\ V_{КАz} &= \frac{c}{p} \left[-\frac{f_z}{f} \sin \vartheta + \frac{c_y f_x - c_x f_y}{c f} (e + \cos \vartheta) \right]. \end{aligned} \quad (14)$$

В выражении (14): $\vartheta = \vartheta_M$ (3), $\mathbf{f} (f_x, f_y, f_z)$, $\mathbf{c} (c_x, c_y, c_z)$ – вектор Лапласа и интеграл площадей в геоекваториальной системе координат ($\mathbf{c} = \mathbf{r} \times \mathbf{V}$, $\mathbf{f} = \mathbf{V} \times \mathbf{c} - \mu \mathbf{r}/r$). Скорость Луны $\mathbf{V}_M (V_{Mx}, V_{My}, V_{Mz})$ в (13) определяется по DE405 для момента t_M прохождения узла.

Определяется итерационно геоекваториальная скорость КА $\mathbf{V}_3 (V_{r3}, V_{n3}, 0)$ после облета Луны, лежащая в плоскости экватора Земли, $V_{3z} = 0$ [3]. Для этого определяются ее составляющие V_{n3}, V_{r3} , учитывая параметры орбиты после облета Луны и радиальную, полярную компоненты скорости Луны V_{Mr}, V_{Mz} :

$$V_{Mn} = \sqrt{V_M^2 - V_{Mr}^2 - V_{Mz}^2}. \quad V_{\pi(0)} = \sqrt{2\mu/R}; \quad (15)$$

$$V_{n(i)} = R V_{\pi(i-1)} / r_M; \quad V_{r(i)} = V_{Mr} - \left[V_\infty^2 - V_{Mz}^2 - (V_{n(i)} - V_{Mn})^2 \right]^{\frac{1}{2}}; \quad (16)$$

$$h_{(i)} = V_{r(i)}^2 + V_{n(i)}^2 - 2\mu E / r_M; \quad V_{\pi(i)} = \left[2\mu/R + h_{(i)} \right]^{\frac{1}{2}}; \quad (17)$$

$$p_{(i)} = (r_M V_{n(i)})^2 / \mu E; \quad e_{(i)} = \left[1 + p_{(i)} h_{(i)} / \mu E \right]^{\frac{1}{2}}; \quad r_{\pi(i)} = p_{(i)} / (1 + e_{(i)}). \quad (18)$$

Итерационный цикл завершается при $|r_{\pi(i)} - R| < \varepsilon$ ($=0.1$ м), тогда полагаем

$$V_{n3} = V_{n(i)}; \quad V_{r3} = V_{r(i)}.$$

В противном случае итерационный цикл повторяется. Обычно бывает 5-6 итераций. Геоцентрическая скорость КА после облета Луны в СК OXYZ:

$$\mathbf{V}_{KA}^+ = V_{r3} \mathbf{r}^0(u_M) + V_{n3} \mathbf{n}^0(u_M), \mathbf{n}^0 = \mathbf{z}^0 \times \mathbf{r}^0, \mathbf{r}^0(u_M) = \mathbf{r}_M / r_M. \quad (19)$$

Здесь $\mathbf{r}^0(u_M)$ – орт по радиус-вектору Луны, когда Луна находится в узле своей орбиты, \mathbf{z}^0 – орт по оси OZ; $\mathbf{n}^0(u_M)$ – единичный вектор по экваториальной трансверсали. На рис. 3 показан облет Луны по селеноцентрической гиперболической орбите T_2 . Здесь $t_{\rho\pi}$ – момент прохождения периселения.

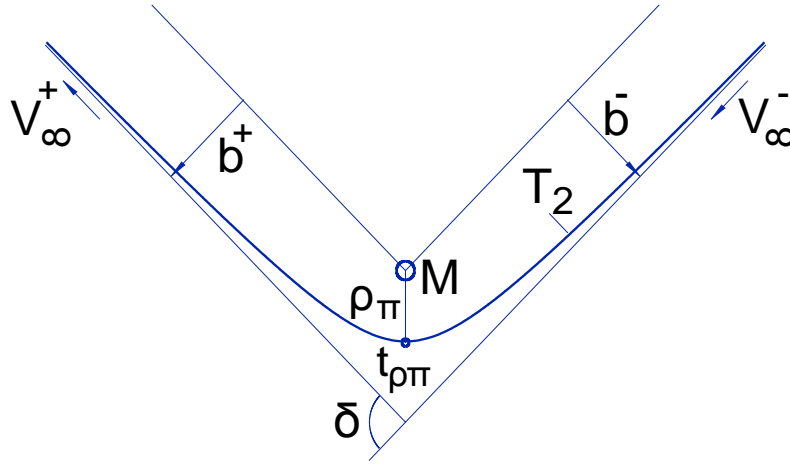


Рис. 3. Облет Луны по селеноцентрической гиперболической орбите T_2 .

Скорость КА «на бесконечности» после облета Луны в данной модели:

$$\mathbf{V}_{\infty}^+ = \mathbf{V}_{KA}^+ - \mathbf{V}_M. \quad (20)$$

Угол разворота траектории при облете Луны δ , действительная полуось α , эксцентриситет, расстояние в периселении селеноцентрической орбиты:

$$\cos \delta = \mathbf{V}_{\infty}^+ \mathbf{V}_{\infty}^- / V_{\infty}^2; \alpha = \mu_M / V_{\infty}^2; e = 1 / \sin(\delta/2); \rho_{\pi} = \alpha(e-1). \quad (21)$$

Время прохождения периселения $t_{\rho\pi}$ в данной модели полагаем равным моменту прохождения Луной узла t_M : $t_{\rho\pi} = t_M$. Величина прицельной дальности:

$$b = \alpha \operatorname{ctg}(\delta/2); \quad (22)$$

Модельная прицельная дальность селеноцентрической орбиты подлета к Луне:

$$\mathbf{b}_m = b(\mathbf{V}_{\infty}^- \cos \delta - \mathbf{V}_{\infty}^+) / (V_{\infty} \sin \delta). \quad (23)$$

1в. Уравнения движения КА с учетом притяжения Луны и Солнца

Движение КА в СК OXYZ без коррекции описывается уравнением:

$$d^2 \mathbf{r} / dt^2 = -(\mu / r^3) \mathbf{r} + \sum_{i=1}^2 \mu_i ((\mathbf{r}_i - \mathbf{r}) / (r_i - r)^3 - \mathbf{r}_i / |r_i|^3) + \mathbf{a}_E; \quad (24)$$

$$\mathbf{a}_E = (3\mu J_2 R_e^2 / 2r^5) [5(\mathbf{r}\mathbf{z}^0)^2 \mathbf{r} / r^2 - 2(\mathbf{r}\mathbf{z}^0)\mathbf{z}^0 - \mathbf{r}]; \quad (25)$$

где $\mathbf{r} = \{x, y, z\}^*$ - геоцентрический радиус-вектор КА; \mathbf{r}_i , μ_i - радиус-векторы (по DE-405) и гравитационные параметры Луны ($i=1$) и Солнца ($i=2$); \mathbf{a}_E - ускорение от сжатия Земли; R_e ($=6378,136$ км), J_2 ($=0.0010826348$) - экваториальный радиус и коэффициент 2-ой зональной гармоники геопотенциала Земли. Интегрирование делалось методом Рунге-Кутты 4-го порядка.

1г. Определение параметров траектории селеноцентрического движения

Зная из интегрирования системы (24) текущие геоцентрические параметры движения КА и Луны \mathbf{r} , \mathbf{V} , \mathbf{r}_M , \mathbf{V}_M , находим селеноцентрические радиус-вектор и вектор скорости КА ρ , \mathbf{v} , а также элементы селеноцентрической орбиты: константу энергии, полуось, скорость на бесконечности, интегралы площадей и Лапласа, эксцентриситет, расстояние в периселении:

$$\begin{aligned} \rho &= \mathbf{r} - \mathbf{r}_M, \mathbf{v} = \mathbf{V} - \mathbf{V}_M, h = v^2 - 2\mu_M / \rho, -a_s = \mu_M / h, V_\infty = \sqrt{h}, \\ \mathbf{c}_s &= \rho \times \mathbf{v}, \mathbf{f} = \mathbf{v} \times \mathbf{c}_s - \mu_M \rho / \rho, e = f / \mu_M, \rho_\pi = a_s (1 - e). \end{aligned} \quad (26)$$

Векторы прицельной дальности и скорости на бесконечности при подлете к Луне [15]:

$$\mathbf{b}^- = \{c_s^2 \mathbf{f} - (\mu_M / V_\infty) [\mathbf{c}_s \times \mathbf{f}]\} / f^2, \mathbf{V}_\infty^- = (V_\infty / f^2) \{V_\infty [\mathbf{c}_s \times \mathbf{f}] + \mu_M \mathbf{f}\}. \quad (27)$$

1д. Уточнение траектории перелета КА от Земли до Луны при учете гравитации Луны и Солнца (второй этап)

Второй этап построения траектории облета Луны начинается после построения траектории пролета КА в окрестности Луны по методу ТСДЛ. Начальные условия для траектории первого этапа (8а, 12) определяются по приведенным аналитическим зависимостям метода ТСДЛ. Задача второго этапа - приблизить полученный вектор прицельной дальности (27) к его модельному значению, полученному согласно (23). Для этого итерационно вычисляются поправки к элементам τ , Ω , ω орбиты T_1 . Поправки определяются методом Ньютона. При этом для траектории на следующей итерации фактический вектор прицельной дальности $\mathbf{b}_r = \mathbf{b}^-$ (27) в момент периселения $t_{\rho\pi}$ приближается к модельному вектору \mathbf{b}_m (23), $\mathbf{b}_r \rightarrow \mathbf{b}_m$, причем $t_{\rho\pi} \rightarrow t_{\rho m} = t_M$. На каждой итерации фактическая траектория определяется интегрированием системы (24-25). Эта система интегрируется до момента периселения $t_{\rho\pi}$, где определяются соответствующие векторы $\mathbf{b}_r = \mathbf{b}^-$ и \mathbf{V}_∞^- (26, 27). Пусть матрица частных производных от радиус-вектора по элементам орбиты T_1 :

$$A = \left\{ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \tau}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \Omega}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \omega} \right\}. \quad (28)$$

Тогда если t_{pr}, \mathbf{b}_r - фактические параметры точной траектории, полученные численным интегрированием (24-25), то поправки к элементам

$$\Delta \mathbf{q} = (\Delta \tau, \Delta \Omega_2, \Delta \omega_2)^* \quad (29)$$

($\Delta \tau$ - вариация времени перигея, $\Delta \Omega$ - вариация долготы восходящего узла; $\Delta \omega$ - вариация аргумента перицентра) определяются следующим образом (см [3]):

$$\Delta \mathbf{q} = A^{-1} \Delta \mathbf{r}_2; \quad (30)$$

$$\Delta \mathbf{r}_2 = (\mathbf{b}'_m - \mathbf{b}_r) - \mathbf{V}_\infty^-(t_{pm} - t_{pr}); \quad (31)$$

$$\mathbf{b}'_m = \mathbf{b}_m - (\mathbf{b}_m, \mathbf{V}_\infty^0) \mathbf{V}_\infty^0; \mathbf{V}_\infty^0 = \mathbf{V}_\infty^- / |\mathbf{V}_\infty^-|; \quad (32)$$

Матрица A (28) после преобразований приводится к приближенному виду [3]:

$$A \approx \begin{bmatrix} -V_x & 0 & 0 \\ -V_y & x & x \cos i \\ -V_z & 0 & x \sin i \cos \Omega \end{bmatrix}; \quad (33)$$

где: V_x, V_y, V_z, x - геоэквиаториальные составляющие скорости и компонента радиуса вектора КА в момент времени t_{pr} , соответствующий минимальному селеноцентрическому расстоянию ρ_π . В выражении (31) определяется разность между проекцией модельного вектора \mathbf{b}_m на картинную плоскость и фактическим вектором \mathbf{b}_r прицельной дальности, а также поправка из-за разницы во времени прохождения периселения. Выражение (29) определяет вектор корректирующих поправок $\Delta \mathbf{q}$ к начальным данным при отлете КА к Луне (2, 4, 11). Это позволяет определить элементы для следующей итерации:

$$\tau_{(i+1)} = \tau_{(i)} + \Delta \tau_i, \Omega_{(i+1)} = \Omega_{(i)} + \Delta \Omega_i, \omega_{(i+1)} = \omega_{(i)} + \Delta \omega_i. \quad (34)$$

Затем, учитывая, что три других элемента фиксированы, интегрируем систему (24, 25) с уточненными значениями элементов τ, Ω, ω . Тем самым учитываются возмущения от притяжения Луны, Солнца и от сжатия Земли. При определении траекторий, приведенных в Приложении, итерации завершались при $|\Delta \tau| \leq 1000$ сек [11-13]. Это значение $\Delta \tau = 1000$ сек. было выбрано, исходя из условия хорошей сходимости на этом и следующем этапах решения задачи. Для траекторий с малым значением константы энергии обычно бывает ~7-8 итераций, для больших значений энергии получается ~2-3 итерации. В табл. 1 и табл. 2 приведены численные значения поправок по итерациям для траекторий 1.1 ($a=211.26$ тыс. км.) и 1.5 ($a=230.0$ тыс. км.) семейства 1, см п. 2.

На рисунках (а) Приложения приведены траектории при итерационном изменении условий отлета (34) для этапа 2, а также итоговая траектория этапа 3. На рис. 5а цифрой 1 показана траектория пролета в окрестности Луны, полученная по данным этапа 1 (8а, 12) - до решения задачи этапа 2, а цифрами 2, 3, 4, 5, 6 показаны траектории при уточнении начальных условий. На рис 7а показано уточнение для траектории с другим значением большой полуоси.

Таблица 1

Итерации 2-го этапа при $a=211.26$ т.км

№ итер.	$\Delta\tau$, с	$\Delta\Omega_2$, гр	$\Delta\omega_2$, гр
1	-31765.407	0.03736	-0.04374
2	-8099.6143	0.01223	-0.01082
3	-5367.335	-0.00199	-0.00144
4	-3206.267	-0.00083	-0.00102
5	-2035.551	-0.00048	-0.00067
6	-1348.499	-0.00029	-0.00046
7	-893.792	-0.00018	-0.00031

Таблица 2

Итерации 2-го этапа при $a=230$ т.км

№ итер.	$\Delta\tau$, с	$\Delta\Omega_2$, гр	$\Delta\omega_2$, гр
0	-10658.721	0.03351	-0.03016
1	298.802	0.00584	-0.00312

После выполнения итераций (34) при построении траектории второго этапа выполняется третий этап алгоритма для точного определения параметров траектории перелета КА с опорной орбиты на ГСО.

1е. Определение точной траектории перелета на ГСО с учетом возмущений (третий этап построения траектории)

На втором этапе решения задачи определены начальные кинематические параметры траектории КА: t_1 , $\mathbf{r}_1(x_1, y_1, z_1)$, $\mathbf{V}_1(V_{x1}, V_{y1}, V_{z1})$, обеспечивающие облет Луны и прилет КА в окрестность ГСО. Рассмотрим для примера траектории на рис 5а (этап 2), 5б (этап 3), Приложения 6 (см ниже). Траектория, построенная на втором этапе решения задачи, на рис. 5а отмечена цифрой 6, на рис. 5б - цифрой 1. Решение задачи на третьем этапе заключается в коррекции условий отлета КА к Луне таким образом, чтобы полученная траектория коснулась геостационарной орбиты (ГСО). Отклонение по радиусу для указанной на рис. 5б траектории 1 от траектории ГСО составляет ~ 75 тыс км, отклонение по наклонению $\sim 13^\circ$. Для выхода КА на ГСО мы добиваемся, чтобы расстояние до центра Земли в перигее орбиты КА $R_{\pi f}$ было равно радиусу ГСО R и чтобы орбита КА лежала в плоскости экватора Земли. Опишем кратко применяемый алгоритм. Интегрируются уравнения движения КА (сначала - с полученными на этапе 2 начальными данными), тем самым математически моделируется полет КА до Луны, затем облет Луны и полет к Земле вплоть до перигея, как конечной точки, где кинематические параметры \mathbf{r}_f , \mathbf{V}_f . По этим параметрам определяются элементы орбиты, в частности, перигейная скорость V_f , перигейное расстояние $R_{\pi f}$, вектор-константа площадей $\mathbf{c}_f (c_{xf}, c_{yf}, c_{zf})$ в геоэваториальной геоцентрической СК:

$$R_{\pi f} = p/(1 + e); \quad (35)$$

$$c_{xf} = yV_z - zV_y; c_{yf} = zV_x - xV_z; c_{zf} = xV_y - yV_x; \quad (36)$$

$$c_f = (c_{xf}^2 + c_{yf}^2 + c_{zf}^2)^{1/2}. \quad (37)$$

Выберем на этом этапе следующие конечные корректируемые функции:

$$Y_1 = (R_{\pi f} - R)/R, Y_2 = c_{xf}/c_f, Y_3 = c_{yf}/c_f \quad (38)$$

Если построим траекторию, для которой $Y_i=0$ ($i=1, 2, 3$), то она будет лежать в плоскости экватора Земли и касаться ГСО. После сообщения здесь тормозного импульса скорости:

$$\Delta V_2 = V_{\pi f} - V_{\text{ГСО}}; V_{\text{ГСО}} = \sqrt{\mu_E/R} \quad (39)$$

КА переходит на ГСО. Импульсы скорости ΔV_1 (5а) и ΔV_2 (39) определяют суммарные затраты скорости для перевода КА на орбиту ГСО:

$$\Delta V_{\text{ГСО}} = \Delta V_1 + \Delta V_2. \quad (40)$$

За корректирующие воздействия на итерации принимается вектор поправок к элементам орбиты T_1 :

$$\Delta \mathbf{X} = [\Delta X_1, \Delta X_2, \Delta X_3]^* = [\Delta \tau, \Delta \Omega, \Delta \omega]^*, \quad (41)$$

уточняющий изменяемые элементы орбиты при отлете с опорной орбиты к Луне. Для выхода КА на ГСО должно выполняться условие $\mathbf{Y}=0, c_z > 0$. Полагаем, что на итерациях связь вариаций $\Delta \mathbf{X}$ и $\Delta \mathbf{Y}$ начальных и конечных параметров в линейном приближении описывается матричным уравнением:

$$\Delta \mathbf{Y} = [\partial \mathbf{Y} / \partial \mathbf{X}] \Delta \mathbf{X}. \quad (42)$$

Элементы матрицы производных $[\partial \mathbf{Y} / \partial \mathbf{X}]$ определяются численно с помощью частных вариаций начальных параметров. Принимаем в (42), что $\Delta \mathbf{Y} = -\mathbf{Y}$, тогда корректирующие воздействия для следующей итерации определяются как:

$$\Delta \mathbf{X} = -[\partial \mathbf{Y} / \partial \mathbf{X}]^{-1} \mathbf{Y} \quad (43)$$

На итерациях вектор \mathbf{Y} (38) и элементы матрицы $[\partial \mathbf{Y} / \partial \mathbf{X}]$ (42) определяются на момент достижения нулевого значения истинной аномалии в точке P_3 для орбиты T_3 после облета Луны, рис. 1. Выражения (42, 43) написаны для линейного приближения и обычно не обеспечивают за одну итерацию выход КА на ГСО с требуемыми точностями, $\mathbf{Y}=0$. Точное решение формируется итерационно, полученные на итерации корректирующие воздействия (43) используются для получения элементов орбиты $\{\tau, \Omega, \omega\}$ перед началом интегрирования на следующей итерации. Описанная схема расчета траектории повторяется несколько раз для получения требуемой точности параметров целевой орбиты. Итерации продолжались до выполнения условия: $|\mathbf{Y}| = \sqrt{Y_1^2 + Y_2^2 + Y_3^2} < \varepsilon_y$ ($=10^{-6}$). Обычно получается около 7 итераций. На рисунках (б) Приложения приводятся траектории на итерациях третьего этапа. Построенные итоговые траектории приводятся на рисунках (в) Приложения. После построения траектории перелета определяются ее основные характеристики: временные, энергетические, геометрические: эпоха Э – дата для отсчета времени t_0 отлета к Луне; t_0 -момент отлета (старта) к Луне

с опорной орбиты, отсчитанный от этой даты (сут); r_M (км) - геоцентрическое расстояние до Луны (в периселении); a (км), e , Ω (град), ω (град), τ ($=t_0$) - элементы орбиты отлета к Луне (наклонение i задается по космодрому); (X, Y, Z, V_x, V_y, V_z) - геоцентрические координаты и компоненты скорости КА в момент отлета (км, км/с); $t_{p\pi} = t_{12}$ - момент наибольшего сближения с Луной в периселении, отсчитанный от t_0 ; t_{23} - время перелета от периселения до ГСО; $t_f = t_{12} + t_{23}$; V_∞ , b - скорость «на бесконечности» и прицельная дальность селеноцентрической орбиты T_2 ; ρ_π - минимальное селеноцентрическое расстояние до КА; ΔV_1 - разгонный импульс скорости для отлета с низкой околоземной орбиты ожидания (высотой 200 км) на орбиту полета к Луне; ΔV_2 - тормозной импульс скорости для перехода на ГСО с орбиты полета от Луны; $\Delta V_f = \Delta V_1 + \Delta V_2$ - суммарная характеристическая скорость перелета. Эти характеристики приведены в Табл. 3-10 для построенных траекторий.

2. Семейства построенных траекторий

На основе приведенных алгоритмов, на языке с++ в операционной системе ubuntu, разработан программно-математический комплекс. С его помощью построены четыре семейства траекторий перелета на ГСО. Допустимые наклонения орбит для космодромов России: Байконур - $i \approx 50 - 99$ град, Плесецк - $i \approx 62.4 - 98$ град, Восточный - $i \approx 51 - 97$ град [16]. Первые два семейства траекторий построены для трех наклонений орбит: $i = 51.6^\circ$, 60.0° (условно будем указывать для этих траекторий Байконур) и 70.0° , облет Луны - в восходящем и нисходящем узлах. Для третьего и четвертого семейств $i = 62.8^\circ$ (условно будем указывать для двух последних наклонений старт с Плесецка), облет Луны в нисходящем и восходящем узлах. В данной работе для определенности рассмотрены случаи полета КА на ГСО в конце 2000 - начале 2001 гг. Для некоторых траекторий в Приложении приведены для наглядности рисунки с графической иллюстрацией каждого этапа построения траектории полета. Облет Луны совершается вблизи прохождения Луной некоторого узла ее орбиты относительно земного экватора. Это возможно дважды в течение месяца, когда Луна в восходящем узле или в нисходящем узле своей орбиты. Аналогично [1], траектории выведения зависят от большой полуоси орбиты отлета КА от Земли к Луне, $a \in [a_{\min}, a_{\max}]$. При изменении большой полуоси орбиты отлета несколько меняется время полета до Луны и, поэтому, даты отлета КА к Луне. Для траектории с минимальной величиной полуоси a (и энергии) получаются максимальные значения времени t_{12} полета от опорной орбиты (t_0) до периселения и суммарного времени t_f полета от t_0 до ГСО, максимальное расстояние ρ_π до Луны в периселении и минимальная сумма величин двух импульсов скорости $\Delta V_f = \Delta V_1 + \Delta V_2$. Для траекторий с максимальной величиной полуоси a (и энергии) получаются минимальные значения времени t_{12} полета до Луны и времени t_f полета до ГСО, минимально

допустимое расстояние ρ_{π} ($=R_M+H_{min}\sim 1840$ км) до Луны в периселении, максимальная сумма величин импульсов скорости ΔV_f .

В таблицах № 3-10 раздела 3 приведены указанные в конце п. 1е характеристики некоторых траекторий из описанных семейств. При описании семейств траекторий используется двузначная нумерация: первая цифра означает номер семейства, вторая – номер траектории в семействе, они разделены точкой. Первые два семейства (табл. 3-8), в соответствии с наклоном, делятся на подсемейства, обозначенные как 1, 1а, 1б, 2, 2а, 2б. Первая траектория каждого семейства близка к траектории с минимальным значением большой полуоси a_{min} орбиты отлета к Луне. Последняя траектория каждого семейства близка к траектории с максимальным значением большой полуоси a_{max} этой орбиты. При описании семейств траекторий момент времени $t_{\rho\pi} = t_{12}$ (см. рис 3) для сокращения обозначен как t_{ρ} . Дата отлета получается прибавлением к эпохе Э момента отлета t_0 , отсчитываемого от этой эпохи.

Опишем кратко данные семейства траекторий.

Семейство траекторий 1 - старт с космодрома Байконур, дата отлета 29-30/12/2000; наклонение $i=51.6^\circ$; облет Луны - в восходящем узле, эпоха Э 20/12/2000. Траектории семейства:

1.1. Большая полуось $a= 211.26$ тыс. км, дата отлета 29/12/2000, момент отлета $t_0 = 9.28586$ сут, момент сближения с Луной $t_{\rho} = 4.847$ сут, $\rho_{\pi}=4913$ км.

1.2. Большая полуось $a = 212.0$ тыс. км, дата отлета 29/12/2000, момент отлета $t_0 = 9.57344$ сут, момент сближения с Луной $t_{\rho} = 4.553$ сут, $\rho_{\pi}=4222$ км.

1.3. Большая полуось $a = 215$ тыс. км, дата отлета 29/12/2000, момент отлета $t_0 = 9.92515$ сут, момент сближения с Луной $t_{\rho} = 4.189$ сут, $\rho_{\pi}=3352$ км.

1.4 Большая полуось $a = 220$ тыс. км. дата отлета 30/12/2000, момент отлета $t_0 = 10.20082$ сут, момент сближения с Луной $t_{\rho} = 3.901$ сут, $\rho_{\pi}=2674$ км.

1.5 Большая полуось $a=230.0$ тыс. км, дата отлета 30/12/2000, момент отлета $t_0 = 10.49683$ сут, момент сближения с Луной $t_{\rho} = 3.587$ сут., $\rho_{\pi}=1981$ км.

1.6. Большая полуось $a=233$ тыс. км, дата отлета 30/12/2000, момент отлета $t_0 = 10.558138$ сут, момент сближения с Луной $t_{\rho} = 3.521$ сут., $\rho_{\pi}=1846$ км.

Семейство траекторий 1а - старт с космодрома Байконур, дата отлета 29-30/12/2000; наклонение $i=60^\circ$, облет Луны - в восходящем узле, эпоха Э=20/12/2000. Траектории семейства:

1а.1. Большая полуось $a=211.26$ тыс. км, дата отлета 29/12/2000, момент отлета $t_0 = 9.327871$ сут, момент сближения с Луной $t_{\rho} = 4.794$ сут, $\rho_{\pi}=4432$ км.

1а.2. Большая полуось $a = 212$ тыс. км, дата отлета 29/12/2000, момент отлета $t_0 = 9.594078$ сут, момент сближения с Луной $t_{\rho} = 4.522$ сут, $\rho_{\pi}=3854$ км.

1а.3. Большая полуось $a = 215$ тыс. км, дата отлета 29/12/2000, момент отлета $t_0 = 9.921063$ сут, момент сближения с Луной $t_{\rho} = 4.184$ сут., $\rho_{\pi}=3123$ км.

1а.4. Большая полуось $a = 220$ тыс. км, дата отлета 30/12/2000, момент отлета $t_0 = 10.191406$ сут, момент сближения с Луной $t_\rho = 3.902$ сут, $\rho_\pi = 3250$ км.

1а.5. Большая полуось $a = 230$ тыс. км, дата отлета 30/12/2000, момент отлета $t_0 = 10.486337$ сут, момент сближения с Луной $t_\rho = 3.591$ сут., $\rho_\pi = 1889$ км.

Семейство траекторий 1б - старт с космодрома Плесецк, дата отлета 29-30/12/2000; наклонение $i = 70^\circ$, облет Луны - в восходящем узле, эпоха $\Theta = 20/12/2000$. Траектории семейства:

1б.1 Большая полуось $a = 211.0$ тыс. км, дата отлета 29/12/2000, момент отлета $t_0 = 9.37436$ сут, момент сближения с Луной $t_\rho = 4.735$ сут, $\rho_\pi = 3946$ км.

1б.2 Большая полуось $a = 211.3$ тыс. км, дата отлета 29/12/2000, момент отлета $t_0 = 9.45944$ сут, момент сближения с Луной $t_\rho = 4.648$ сут., $\rho_\pi = 3783$ км.

1б.3 Большая полуось $a = 212.0$ тыс. км, дата отлета 29/12/2000, момент отлета $t_0 = 9.608876$ сут, момент сближения с Луной $t_\rho = 4.495$ сут., $\rho_\pi = 3492$ км.

1б.4 Большая полуось $a = 215.0$ тыс. км, дата отлета 29/12/2000, момент отлета $t_0 = 9.91503$ сут, момент сближения с Луной $t_\rho = 4.180$ сут, $\rho_\pi = 2883$ км.

1б.5. Большая полуось $a = 220$ тыс. км, дата отлета 30/12/2000, момент отлета $t_0 = 10.18025$ сут, момент сближения с Луной $t_\rho = 3.904$ сут., $\rho_\pi = 2353$ км.

1б.6. Большая полуось $a = 230$ тыс. км, дата отлета 30/12/2000, момент отлета $t_0 = 10.444780$ сут, момент сближения с Луной $t_\rho = 3.626$ сут., $\rho_\pi = 1842$ км.

Семейство траекторий 2: старт - с космодрома Байконур, дата отлета 14-16/12/2000; наклонение $i = 51.6^\circ$; облет Луны - в нисходящем узле, эпоха $\Theta = 01/12/2000$. Траектории семейства:

2.1. Большая полуось $a = 209,9$ тыс. км, дата отлета 14/12/2000, момент отлета $t_0 = 13.59898$ сут, момент сближения с Луной $t_\rho = 4.739$ сут, $\rho_\pi = 8677$ км.

2.2 Большая полуось $a = 211.26$ тыс. км, дата отлета 15/12/2000, момент отлета $t_0 = 14.0804$ сут, момент сближения с Луной $t_\rho = 4.282$ сут, $\rho_\pi = 6805$ км.

2.3 Большая полуось $a = 212.0$ тыс. км, дата отлета 15/12/2000, момент отлета $t_0 = 14.18523$ сут, момент сближения с Луной $t_\rho = 4.181$ сут, $\rho_\pi = 6370$ км.

2.4 Большая полуось $a = 220.0$ тыс. км, дата отлета 15/12/2000, момент отлета $t_0 = 14.70289$ сут, момент сближения с Луной $t_\rho = 3.675$ сут, $\rho_\pi = 4162$ км.

2.5 Дольшая полуось $a = 232.0$ тыс. км, дата отлета 16/12/2000, момент отлета $t_0 = 15.021896$ сут, момент сближения с Луной $t_\rho = 3.349$ сут, $\rho_\pi = 2.858$ км.

2.6 Большая полуось $a = 245.0$ тыс. км, дата отлета 16/12/2000, момент отлета $t_0 = 15.297016$ сут, момент сближения с Луной $t_\rho = 3.058$ сут, $\rho_\pi = 1.872$ км.

2.7 Большая полуось $a = 254.0$ тыс. км, дата отлета 16/12/2000, момент отлета $t_0 = 15.306213$ сут, момент сближения с Луной $t_\rho = 3.048$ сут, $\rho_\pi = 1842$ км.

Семейство траекторий 2а - старт с космодрома Байконур, дата отлета 14-16/12/2000; наклонение $i=60^\circ$, облет Луны - в нисходящем узле, эпоха $\mathcal{E}=01/12/2000$. Траектории семейства:

2а.1. Большая полуось $a=209,9$ тыс. км, дата отлета 14/12/2000, момент отлета $t_0 = 13.8801$ сут, момент сближения с Луной $t_\rho = 4.465$ сут, $\rho_\pi=7020$ км.

2а.2. Большая полуось $a=211.26$ тыс. км, дата отлета 15/12/2000, момент отлета $t_0 = 14.13513$ сут, момент сближения с Луной $t_\rho = 4.221$ сут, $\rho_\pi=6083$ км.

2а.3. Большая полуось $a=212.0$ тыс. км, дата отлета 15/12/2000, момент отлета $t_0 = 14.22339$ сут, момент сближения с Луной $t_\rho = 4.136$ сут, $\rho_\pi=5748$ км.

2а.4. Большая полуось $a= 215$ тыс. км, дата отлета 15/12/2000, момент отлета $t_0 = 14.46463$ сут, момент сближения с Луной $t_\rho = 3.901$ сут, $\rho_\pi=4812$ км.

2а.5. Большая полуось $a= 220$ тыс. км, дата отлета 15/12/2000, момент отлета $t_0 = 14.70339$ сут, момент сближения с Луной $t_\rho = 3.665$ сут, $\rho_\pi=3880$ км.

2а.6. Большая полуось $a= 245$ тыс. км, дата отлета 16/12/2000, момент отлета $t_0 = 15.20645$ сут, момент сближения с Луной $t_\rho = 3.147$ сут, $\rho_\pi=2059$ км.

2а.7. Большая полуось $a= 251.4$ тыс. км, дата отлета 16/12/2000, момент отлета $t_0 = 15.274581$ сут, момент сближения с Луной $t_\rho = 3.074$ сут, $\rho_\pi=1845$ км.

Семейство траекторий 2б: старт с космодрома Плесецк, дата отлета 14-16/12/2000; , наклонение $i=70^\circ$, облет Луны - в нисходящем узле, эпоха $\mathcal{E}=01/12/2000$. Траектории:

2б.1. Большая полуось $a=209,9$ тыс. км, дата отлета 14/12/2000, момент отлета $t_0 = 13.99318$ сут, момент сближения с Луной $t_\rho = 4.465$ сут, $\rho_\pi=5964$ км.

2б.2 Большая полуось $a=211.26$ тыс. км, дата отлета 15/12/2000, момент отлета $t_0 = 14.18414$ сут, момент сближения с Луной $t_\rho = 4.221$ сут, $\rho_\pi=5334$ км.

2б.3 Большая полуось $a=212.0$ тыс. км, дата отлета 15/12/2000, момент отлета $t_0 = 14.25930$ сут, момент сближения с Луной $t_\rho = 4.136$ сут, $\rho_\pi=5080$ км.

2б.4 Большая полуось $a= 215$ тыс. км, дата отлета 15/12/2000, момент отлета $t_0 = 14.4769$ сут, момент сближения с Луной $t_\rho = 3.901$ сут, $\rho_\pi=4331$ км.

2б.5 Большая полуось $a= 220$ тыс. км, дата отлета 15/12/2000, момент отлета $t_0 = 14.702786$ сут, момент сближения с Луной $t_\rho = 3.665$ сут, $\rho_\pi=3548$ км.

2б.6 Большая полуось $a= 245$ тыс. км, дата отлета 16/12/2000, момент отлета $t_0 = 15.19699$ сут, момент сближения с Луной $t_\rho = 3.147$ сут, $\rho_\pi=1944$ км.

2б.7 Большая полуось $a= 248.1$ тыс. км, дата отлета 16/12/2000, момент отлета $t_0 = 15.231506$ сут, момент сближения с Луной $t_\rho = 3.111$ сут, $\rho_\pi=1845$ км.

Семейство траекторий 3: старт с космодрома Плесецк, дата отлета 11-12/01/2001; наклонение $i=62.8^\circ$, облет Луны в нисходящем узле; эпоха $\mathcal{E}=20/12/2001$. Траектории семейства:

3.1. Большая полуось $a=207.0$ тыс.км, дата отлета 11/01/2001, момент отлета $t_0 = 22.133037$ сут, момент сближения с Луной $t_\rho = 4.48$ сут, $\rho_\pi=7078$ км.

3.2. Большая полуось $a=210.0$ тыс.км, дата отлета 11/01/2001, момент отлета $t_0 = 22.605719$ сут, момент сближения с Луной $t_\rho = 4.02$ сут, $\rho_\pi=5418$ км.

3.3. Большая полуось $a=220.0$ тыс.км, дата отлета 12/01/2001, момент отлета $t_0 = 23.112094$ сут, момент сближения с Луной $t_\rho = 3.51$ сут, $\rho_\pi=3530$ км.

3.4. Большая полуось $a=230.0$ тыс.км, дата отлета 12/0/2001, момент старта $t_0 = 23.347678$ сут, момент сближения с Луной $t_\rho = 3.28$ сут, $\rho_\pi=2676$ км.

3.5. Большая полуось $a=240.0$ тыс.км, дата отлета 12/01/2001, момент отлета $t_0 = 23.498576$ сут, момент сближения с Луной $t_\rho = 3.12$ сут, $\rho_\pi=2166$ км.

3.6. Большая полуось $a=249.4$ тыс.км, Дата отлета 12/01/2001, момент отлета $t_0 = 23.60157$ сут, момент сближения с Луной $t_\rho = 3.012$ сут, $\rho_\pi=1842$ км.

Семейство траекторий 4: старт с космодрома Плесецк, дата отлета 29-30/12/2000; наклонение $i=62.8^\circ$, облет Луны - в восходящем узле; эпоха $\mathcal{E}=20/12/2000$. Траектории семейства:

4.1. Большая полуось $a=211.0$ тыс.км, дата отлета 29/12/2000, момент отлета $t_0 = 9.298340$ сут, момент сближения с Луной $t_\rho = 4.821$ сут, $\rho_\pi=4375$ км.

4.2. Большая полуось $a=212.0$ тыс.км, дата отлета 29/12/2000, момент отлета $t_0 = 9.599081$ сут, момент сближения с Луной $t_\rho = 4.514$ сут, $\rho_\pi=3745$ км.

4.3. Большая полуось $a=215.0$ тыс.км, дата отлета 29/12/2000, момент отлета $t_0 = 9.930179$ сут, момент сближения с Луной $t_\rho = 4.177$ сут, $\rho_\pi=2985$ км.

4.4. Большая полуось $a=220.0$ тыс.км, дата отлета 30/12/2000, момент отлета $t_0 = 10.188259$ сут, момент сближения с Луной $t_\rho = 3.903$ сут, $\rho_\pi=2471$ км.

4.5 Большая полуось $a = 230.4$ тыс. км, дата отлета 30/12/2000, момент отлета $t_0 = 10.491573$ сут, момент сближения с Луной $t_\rho = 3.583$ сут, $\rho_\pi=1842$ км.

3. Характеристики траекторий

Ниже, в Табл. 3-10, даны численные характеристики построенных траекторий данных семейств: эпоха \mathcal{E} , t_0 , r_M , a , начальные данные (X, Y, Z, V_x, V_y, V_z) (t_0), e , Ω , ω , $t_\rho = t_{12}, t_{23}, t_f (=t_{12}+t_{23})$, V_∞ , b , ρ_π , $\Delta V_1, \Delta V_2, \Delta V_f (= \Delta V_1 + \Delta V_2)$.

Таблица 3

Траектории семейства 1, эпоха $\mathcal{E}=2000/12/20.0$, восходящий узел, $i=51.6^\circ$.

Траектории	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6
t_0 [сут.]	9.285860	9.573444	9.925152	10.200820	10.496830	10.558138
r_M [тыс. км]	391.1210	391.1580	391.2223	391.2920	391.3897	391.4130
a [тыс. км]	211.26	212.00	215.00	220.00	230.00	233.00
X [км.]	-6252.390	-6239.014	-6221.396	-6205.962	-6186.292	-6181.576
Y [км.]	-2038.469	-2083.007	-2136.892	-2178.709	-2224.305	-2234.083
Z [км.]	-156.393	-89.315	10.658	107.008	233.348	263.020
V_x [км/с]	1.910	2.039	2.217	2.380	2.584	2.632
V_y [км/с]	-6.515	-6.473	-6.413	-6.358	-6.290	-6.274

V_z [км/с]	8.556	8.559	8.561	8.561	8.557	8.555
e	0.96886	0.96897	0.96940	0.97010	0.97140	0.97177
Ω [град]	-160.8743	-160.9327	-161.1292	-161.4062	-161.8478	-161.9591
ω [град]	358.2880	359.0338	0.1185	1.1895	2.5945	2.9247
t_{12} [сут.]	4.847	4.553	4.189	3.901	3.587	3.521
t_{23} [сут.]	3.072	3.046	2.994	2.935	2.840	2.825
t_f [сут.]	7.919	7.598	7.184	6.836	6.427	6.347
V_∞ [км/с]	0.951	0.962	0.983	1.012	1.059	1.073
b [тыс. км.]	8.796	7.909	6.726	5.723	4.611	4.375
ρ_π [тыс. км.]	4.913	4.222	3.352	2.674	1.981	1.846
ΔV_1 [км/с]	3.138	3.139	3.140	3.142	3.145	3.146
ΔV_2 [км/с]	1.147	1.149	1.154	1.161	1.171	1.176
ΔV_f [км/с]	4.285	4.288	4.294	4.303	4.316	4.323

Таблица 4

Траектории семейства 1а, эпоха 2000/12/20, восходящий узел, $i=60.0^\circ$

Траектории	1а.1	1а.2	1а.3	1а.4	1а.5	1а.6
t_0 [сут.]	9.327871	9.594078	9.921063	10.191406	10.486337	10.507740
r_M [т.км]	391.1787	391.2132	391.2711	391.3357	391.4265	391.4340
a [т.км]	211.10	212.00	215.00	220.00	230.00	231.00
X [км.]	-6260.927	-6251.346	-6238.664	-6226.818	-6211.098	-6209.780
Y [км.]	-2014.320	-2046.931	-2085.396	-2115.638	-2147.526	-2149.839
Z [км.]	-124.459	-54.168	48.806	151.652	287.373	298.341
V_x [км/с]	1.503	1.626	1.798	1.964	2.178	2.195
V_y [км/с]	-5.255	-5.215	-5.158	-5.104	-5.035	-5.029
V_z [км/с]	9.457	9.459	9.460	9.459	9.453	9.453
e	0.96884	0.96897	0.96940	0.97010	0.97140	0.97152
Ω [град]	-161.5514	-161.6091	-161.7741	-162.0089	-162.3855	-162.4160
ω [град]	358.7746	359.4817	0.4909	1.5255	2.8917	3.0021
t_{12} [сут]	4.794	4.522	4.184	3.902	3.591	3.568
t_{23} [сут]	3.012	2.988	2.942	2.888	2.806	2.799
t_f [сут]	7.806	7.510	7.127	6.790	6.396	6.367
V_∞ [км/с]	0.980	0.989	1.011	1.039	1.084	1.088
b [т. км.]	8.057	7.313	6.303	5.408	4.395	4.322
ρ_π [т. км.]	4.432	3.854	3.123	2.520	1.889	1.845
ΔV_1 [км/с]	3.138	3.139	3.140	3.142	3.145	3.146
ΔV_2 [км/с]	1.154	1.156	1.161	1.168	1.180	1.181
ΔV_f [км/с]	4.292	4.295	4.301	4.310	4.325	4.327

Таблица 5

Траектории семейства 1б, эпоха 2000/12/20, восходящий узел, $i=70.0^\circ$

Траектории	16.1	16.2	16.3	16.4	16.5	16.6
t_0 [сут.]	9.37436	9.459441	9.608876	9.915033	10.180245	10.444780
r_M [т.км]	391.2486	391.2585	391.2781	391.3290	391.3873	391.4609
a [т.км]	211.00	211.26	212.00	215.00	220.00	228.70
X [км.]	-6272.912	-6271.009	-6267.593	-6260.113	-6252.623	-6243.210
Y [км.]	-1978.694	-1985.618	-1997.283	-2018.821	-2034.438	-2047.030
Z [км.]	-86.794	-62.863	-18.030	86.787	194.840	322.775
V_x [км/с]	0.995	1.034	1.107	1.276	1.446	1.645
V_y [км/с]	-3.604	-3.591	-3.568	-3.515	-3.461	-3.399
V_z [км/с]	10.263	10.263	10.264	10.264	10.262	10.256
e	0.96882	0.968862	0.96897	0.96940	0.97010	0.97124
Ω [град]	-162.2304	-162.2431	-162.2792	-162.4132	-162.6067	-162.8835
ω [град]	359.2219	359.4438	359.8594	0.8045	1.8064	2.9934
t_{12} [сут]	4.735	4.648	4.495	4.180	3.904	3.626
t_{23} [сут]	2.945	2.938	2.924	2.884	2.834	2.767
t_f [сут]	7.680	7.586	7.419	7.064	6.738	6.393
V_∞ [км/с]	1.013	1.016	1.022	1.043	1.068	1.107
b [т. км.]	7.298	7.089	6.706	5.858	5.076	4.257
ρ_π [т. км.]	3.946	3.783	3.492	2.883	2.353	1.842
ΔV_1 [км/с]	3.138	3.138	3.139	3.140	3.142	3.145
ΔV_2 [км/с]	1.162	1.163	1.164	1.169	1.176	1.186
ΔV_f [км/с]	4.300	4.301	4.303	4.309	4.318	4.331

Таблица 6

Траектории семейства 2, эпоха 2000/12/01, нисходящий узел, $i=51.6^\circ$

Траектории	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7
t_0 [сут.]	13.598975	14.080467	14.185225	14.702886	15.021896	15.297016	15.306213
r_M [т.км]	382.3179	382.4271	382.4463	382.4945	382.46594	382.3931	382.3899
a [т.км]	209.90	211.26	212.00	220.00	232.00	253.00	254.00
X [км.]	6275.761	6225.051	6213.618	6156.936	6122.550	6091.475	6090.359
Y [км.]	1946.773	2084.444	2113.172	2242.367	2307.908	2357.172	2358.782
Z [км.]	311.584	419.548	444.569	579.759	678.324	780.938	784.772
V_x [км/с]	-2.399	-2.676	-2.736	-3.039	-3.231	-3.414	-3.420
V_y [км/с]	6.367	6.273	6.252	6.144	6.076	6.015	6.013
V_z [км/с]	8.544	8.532	8.528	8.508	8.492	8.472	8.471
e	0.96872	0.96894	0.96897	0.97010	0.97165	0.97404	0.97413
Ω [град]	15.0813	15.6107	15.7061	15.9916	15.9420	15.7180	15.7075
ω [град]	3.4653	4.6684	4.9475	6.4576	7.5614	8.7136	8.7567

t_{12} [сут.]	4.739	4.282	4.181	3.675	3.349	3.058	3.048
t_{23} [сут.]	3.576	3.541	3.525	3.393	3.251	-0.003	3.074
t_f [сут.]	8.315	7.823	7.707	7.067	6.600	3.054	6.122
V_∞ [км/с]	0.838	0.844	0.847	0.885	0.933	1.004	1.007
b [Т. км.]	14.017	11.829	11.302	8.334	6.351	4.660	4.606
ρ_π [Т. км.]	8.677	6.805	6.370	4.162	2.858	1.872	1.842
ΔV_1 [км/с]	3.138	3.138	3.139	3.142	3.146	3.153	3.153
ΔV_2 [км/с]	1.095	1.096	1.096	1.102	1.111	-1.640	1.127
ΔV_f [км/с]	4.233	4.234	4.235	4.244	4.257	4.792	4.280

Таблица 7

Траектории семейства 2а, эпоха 2000/12/01, нисходящий узел, $i=60.0^\circ$

Траектории	2а.1	2а.2	2а.3	2а.4	2а.5	2а.6	2а.7
t_0 [сут.]	13.880104	14.135127	14.223387	14.464632	14.703387	15.206453	15.274581
r_M [Т.км]	382.34872	382.39834	382.41283	382.44260	382.4532	382.3875	382.36774
a [Т.км]	209.90	211.26	212.00	215.00	220.00	245.00	251.40
X [км.]	6257.086	6232.826	6224.330	6201.088	6178.354	6130.707	6123.764
Y [км.]	1994.454	2055.847	2076.176	2128.416	2174.012	2245.967	2253.558
Z [км.]	378.443	444.479	468.396	537.158	611.397	801.404	832.578
V_x [км/с]	-2.179	-2.321	-2.371	-2.509	-2.650	-2.975	-3.026
V_y [км/с]	5.047	4.998	4.981	4.933	4.884	4.776	4.760
V_z [км/с]	9.438	9.430	9.427	9.418	9.408	9.375	9.369
e	0.96866	0.96886	0.96897	0.96940	0.97010	0.97315	0.97383
Ω [град]	15.7745	16.0150	16.0856	16.2338	16.2975	16.0577	15.9803
ω [град]	3.8093	4.4752	4.7165	5.4109	6.1614	8.0875	8.4043
t_{12} [сут.]	4.465	4.221	4.136	3.901	3.665	3.147	3.074
t_{23} [сут.]	3.499	3.472	3.459	3.410	3.340	3.101	3.057
t_f [сут.]	7.964	7.693	7.595	7.311	7.004	6.248	6.132
V_∞ [км/с]	0.858	0.863	0.867	0.881	0.902	0.995	1.016
b [Т. км.]	11.953	10.822	10.396	9.160	7.862	4.963	4.573
ρ_π [Т. км.]	7.020	6.083	5.748	4.812	3.880	2.059	1.845
ΔV_1 [км/с]	3.138	3.138	3.139	3.140	3.142	3.150	3.152
ΔV_2 [км/с]	1.098	1.099	1.099	1.102	1.106	1.125	1.129
ΔV_f [км/с]	4.236	4.237	4.238	4.241	4.247	4.275	4.281

Таблица 8

Траектории семейства 2б, эпоха 2000/12/01, нисходящий узел, $i=70.0^\circ$

Траектории	2б.1	2б.2	2б.3	2б.4	2б.5	2б.6	2б.7
t_0 [сут.]	13.993180	14.184139	14.259301	14.476872	14.702786	15.196988	15.231506
r_M [Т.км]	382.3339	382.3650	382.3755	382.3980	382.40630	382.3485	382.33986

a [Т.км]	209.90	211.26	212.00	215.00	220.00	245.00	248.10
X [км.]	6261.806	6246.895	6241.014	6224.093	6206.870	6169.638	6166.858
Y [км.]	1973.133	2007.709	2020.520	2054.387	2083.311	2118.768	2119.807
Z [км.]	410.751	466.467	489.312	558.880	637.782	847.688	865.138
V_x [км/с]	-1.736	-1.839	-1.880	-2.003	-2.138	-2.476	-2.503
V_y [км/с]	3.377	3.343	3.329	3.288	3.243	3.137	3.129
V_z [км/с]	10.241	10.235	10.232	10.223	10.212	10.178	10.175
e	0.96866	0.96886	0.96897	0.96940	0.97010	0.97315	0.97349
Ω [град]	16.1863	16.3356	16.3848	16.4893	16.5235	16.2437	16.2034
ω [град]	3.8103	4.3281	4.5405	5.1877	5.9227	7.8826	8.0460
t_{12} [сут.]	4.348	4.164	4.091	3.879	3.655	3.148	3.111
t_{23} [сут.]	3.407	3.386	3.374	3.332	3.270	3.051	3.031
t_f [сут.]	7.756	7.550	7.466	7.211	6.924	6.199	6.142
V_∞ [км/с]	0.885	0.891	0.893	0.907	0.929	1.019	1.029
b [Т. км.]	10.502	9.711	9.395	8.391	7.276	4.704	4.528
ρ_π [Т. км.]	5.964	5.334	5.080	4.331	3.548	1.944	1.845
ΔV_1 [км/с]	3.138	3.138	3.139	3.140	3.142	3.150	3.151
ΔV_2 [км/с]	1.103	1.104	1.104	1.107	1.111	1.130	1.132
ΔV_f [км/с]	4.241	4.242	4.243	4.247	4.253	4.280	4.283

Таблица 9

Траектории семейства 3, эпоха 2000/12/20, нисходящий узел, $i=62.8^\circ$

Траектории	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6
t_0 [сут.]	22.123037	22.605719	23.112094	23.347678	23.498576	23.601571
r_M [Т.км]	377.5301	377.6491	377.6990	377.6758	377.6406	377.6070
a [Т.км]	207.0	210.0	220.0	230.0	240.0	249.40
X [км.]	6267.870	6223.131	6175.216	6153.178	6138.727	6128.349
Y [км.]	1964.667	2075.079	2170.663	2203.687	2220.694	2230.759
Z [км.]	355.077	488.752	653.544	744.552	810.394	859.793
V_x [км/с]	-1.995	-2.268	-2.574	-2.729	-2.837	-2.916
V_y [км/с]	4.614	4.521	4.415	4.363	4.329	4.304
V_z [км/с]	9.695	9.680	9.657	9.642	9.630	9.621
e	0.96822	0.96868	0.97010	0.97140	0.97259	0.97362
Ω [град]	15.8132	16.2481	16.4274	16.3491	16.2318	16.1180
ω [град]	3.4796	4.7922	6.4139	7.3117	7.9624	8.4511
t_{12} [сут.]	4.478	4.015	3.514	3.278	3.121	3.012
t_{23} [сут.]	3.433	3.391	3.265	3.166	3.085	-0.004
t_f [сут.]	7.910	7.406	6.782	6.444	6.206	3.009
V_∞ [км/с]	0.877	0.887	0.927	0.964	1.000	1.028
b [Т. км.]	11.845	9.839	7.261	5.948	5.093	4.527

ρ_{π} [т. км.]	7.078	5.418	3.530	2.676	2.166	1.842
ΔV_1 [км/с]	3.137	3.138	3.142	3.145	3.149	3.152
ΔV_2 [км/с]	1.097	1.098	1.105	1.112	1.119	-1.637
ΔV_f [км/с]	4.234	4.236	4.247	4.258	4.268	4.788

Таблица 10

Траектории семейства 4, эпоха 2000/12/20, восходящий узел, $i=62.8^\circ$

Траектории	4.1	4.2	4.3	4.4	4.5
t_0 [сут.]	9.298340	9.599081	9.930179	10.188259	10.491573
r_M [т.км]	391.1937	391.2315	391.2632	391.3503	391.44175
a [т.км]	211.0	212.0	215.00	220.0	230.4
X [км.]	-6265.454	-6255.766	-6242.530	-6233.967	-6219.142
Y [км.]	-2000.192	-2033.641	-2073.531	-2093.479	-2121.264
Z [км.]	-124.534	-43.354	58.967	164.918	307.732
V_x [км/с]	1.343	1.483	1.657	1.821	2.045
V_y [км/с]	-4.813	-4.768	-4.712	-4.658	-4.587
V_z [км/с]	9.712	9.715	9.716	9.714	9.708
e	0.96885	0.96903	0.96940	0.97016	0.97145
Ω [град]	-161.7493	-161.8095	-161.9014	-162.1874	-162.5573
ω [град]	358.8068	359.6019	0.5775	1.6154	3.0152
t_{12} [сут.]	4.821	4.514	4.177	3.903	3.583
t_{23} [сут.]	2.995	2.969	2.927	2.872	2.789
t_f [сут.]	7.816	7.483	7.104	6.775	6.372
V_∞ [км/с]	0.987	1.000	1.020	1.047	1.094
b [т. км.]	7.946	7.126	6.086	5.311	4.299
ρ_{π} [т. км.]	4.375	3.745	2.985	2.471	1.842
ΔV_1 [км/с]	3.138	3.139	3.140	3.142	3.145
ΔV_2 [км/с]	1.156	1.158	1.059	1.170	1.182
ΔV_f [км/с]	4.294	4.297	4.199	4.312	4.328

В Приложении на рис. 5-14 даны некоторые из этих траекторий. На всех рисунках даны итоговые траектории. На рис. 5а, 5б, 7а, 7б у концов траекторий, выделенных кружками, указан номер итерации при решении краевой задачи для этапов 2 и 3. Для остальных рисунков номера итераций аналогичны и числами не отмечены. На рисунках приведены некоторые данные, описанные в пп. 1б, 1е и 2: Θ - эпоха для отсчета времени t_0 отлета с опорной орбиты; элементы орбиты T_1 отлета к Луне: a (км), i (гр.); время отлета t_0 (сут.); время полета от t_0 до периселения t_p (сут.), общее время полета t_f (сут.).

Анализ результатов. Выведение КА на ГСО с использованием гравитационного маневра у Луны эффективнее, чем выведение КА с

использованием обычного квазигомановского перехода. Затраты характеристической скорости с использованием обычной схемы для $i \approx 50^\circ$ составляют $\Delta V_f \approx 4,8$ км/с [1]. При облете Луны (без учета затрат на коррекцию) затраты скорости $\Delta V_f \sim 4.23-4.33$ км/с, что экономит ~ 500 м/с по ΔV_f .

Суммарная характеристическая скорость ΔV_f немного уменьшается с уменьшением большой полуоси орбиты отлета к Луне a . Для одного семейства разность значений скорости ΔV_f при минимальной и максимальной допустимых значениях большой полуоси a составляет $\sim 30-40$ м/с. Характеристическая скорость ΔV_f при облете Луны в нисходящем узле меньше характеристической скорости при облете Луны в восходящем узле на $\sim 40-50$ м/с.

Разность максимальной и минимальной больших полуосей орбит при облете Луны в восходящем узле ~ 20 тыс. км, а для траекторий при облете в нисходящем узле ~ 40 тыс. км.

Ниже в таблицах 11-14 для семейств траекторий 1, 1а, 1б, 2, 2а, 2б (для облета Луны в восходящем и нисходящем узлах орбиты) даны в зависимости от наклона орбиты отлета энергетические, временные и геометрические характеристики ΔV_f , V_∞ , t_{12} , t_f , ρ_π , b , r_M (с добавлением данных для наклонов 55° и 65°), для траекторий минимальной и максимальной энергии.

Таблица 11

Зависимости от наклона характеристик траекторий минимальной энергии для семейств 1, 1а, 1б при облете Луны в восходящем узле

i°	ρ_π [т. км.]	V_∞ [км/с]	t_{12} [сут]	ΔV_f [км/с]	t_f [сут]	b [т. км.]	r_M [т. км.]
51.6	4.913	0.951	4.847	4.285	8.796	8.796	391.121
55.0	4.583	0.965	4.768	4.288	8.322	8.322	391.150
60.0	4.432	0.980	4.794	4.292	8.057	8.057	391.179
65.0	4.002	1.000	4.676	4.297	7.646	7.433	391.224
70.0	3.783	1.016	4.648	4.301	7.586	7.298	391.258

Таблица 12

Зависимости от наклона характеристик траекторий минимальной энергии для семейств 2, 2а, 2б при облете Луны в нисходящем узле

i°	ρ_π [т. км.]	V_∞ [км/с]	t_{12} [сут]	ΔV_f [км/с]	t_f [сут]	b [т. км.]	r_M [т. км.]
51.6	8.677	0.838	4.739	4.233	8.315	14.017	382.318
55.0	7.747	0.846	4.564	4.234	8.108	12.894	382.347
60.0	7.020	0.858	4.465	4.236	7.964	11.953	382.349
65.0	6.449	0.871	4.399	4.238	7.852	11.181	382.343
70.0	5.964	0.885	4.348	4.241	7.756	10.502	382.334

Таблица 13

Зависимости от наклона характеристик траекторий максимальной энергии для семейств 1, 1а, 1б при облете Луны в восходящем узле

i°	ρ_π [т. км.]	V_∞ [км/с]	t_{12} [сут]	ΔV_f [км/с]	t_f [сут]	b [т. км.]	r_M [т. км.]
51.6	1.846	1.073	3.521	4.323	6.347	4.375	391.413
55.0	1.854	1.078	3.544	4.324	6.360	4.367	391.420
60.0	1.845	1.088	3.568	4.327	6.367	4.322	391.434
65.0	1.837	1.099	3.593	4.329	6.375	4.247	391.448
70.0	1.842	1.107	3.626	4.331	6.393	4.257	391.461

Таблица 14

Зависимости от наклона характеристик траекторий максимальной энергии для семейств 2, 2а, 2б при облете Луны в нисходящем узле

i°	ρ_π [т. км.]	V_∞ [км/с]	t_{12} [сут]	ΔV_f [км/с]	t_f [сут]	b [т. км.]	r_M [т. км.]
51.6	1.842	1.007	3.048	4.280	6.122	4.606	382.390
55.0	1.849	1.009	3.060	4.280	6.129	4.607	382.382
60.0	1.845	1.016	3.074	4.281	6.132	4.573	382.368
65.0	1.839	1.023	3.090	4.282	6.133	4.540	382.353
70.0	1.845	1.029	3.111	4.283	6.142	4.528	382.340

С методической точки зрения интересно сравнить траектории для ТСДЛ и точного расчета. В табл. 15 даны значения прицельной дальности b , расстояния в периселении ρ_π , скорости «на бесконечности» V_∞ для этих двух моделей.

Таблица 15

Сравнение параметров селеноцентрического движения в двух моделях

Семейство, большая полуось орбиты	Модель ТСД			Интегрирование		
	b [т. км]	ρ_π [т. км]	V_∞ [км/с]	b [т. км]	ρ_π [т. км]	V_∞ [км/с]
1.1 (a=211,260 тыс. км)	5.9244	2.849	1.0400	8.7955	4.913	0.9513
1.4 (a=220,0 тыс. км)	4.8463	2.167	1.0810	5.7219	2.674	1.012
2.1 (a=209,900 тыс. км)	10.8916	5.540	0.9297	14.0125	8.677	0.8383
2.5 (a=220,00 тыс. км)	8.5421	4.008	0.9701	8.3359	4.162	0.8845

Из рассмотрения приведенных данных следует, что наклонение орбиты отлета к Луне влияет мало на энергетику выведения. Суммарная скорость немного (на ~3-16 м/с) возрастает при увеличении наклона от 51,6° до 70°. При этом скорость «на бесконечности» возрастает заметнее, на 22-65 м/с. Минимальное значение скорости ΔV_f получается для наименьшей полуоси a_{\min} (минимальной энергии) и наименьшем наклоне i . Из сравнения затрат ΔV_f

на выведение (по данным таблиц 11-12 или 13-14) следует, что выгоднее использовать облет Луны в нисходящем узле орбиты.

С ростом наклона расстояние в периселении r_p для минимальной полуоси a несколько уменьшается, на 1130-2713 км. При этом расстояние в периселении для максимальной энергии практически постоянно, определяется заданной высотой, ~ 100 км. Время перелета до Луны немного уменьшается, на 0.2-0.4 сут. Суммарное время выведения уменьшается больше, на 0.56-1.21 сут.

Методическая точность модели ТСД Луны заметно возрастает (ошибки в сравнении с интегрированием уменьшаются) при увеличении энергии полета, при переходе от траекторий минимальной большой полуоси к траекториям максимальной полуоси.

4. Выводы

Описана методика определения траекторий перелета КА с опорной низкой орбиты ИСЗ на ГСО с использованием гравитационного маневра у Луны. Методика носит итерационный характер, используя в качестве начального приближения аналитическое решение в модели точечной сферы действия Луны. На последующих итерациях полученное решение уточняется при учете возмущений от притяжения Луны и Солнца, а также сжатия Земли. На основе описанной методики разработан программно-вычислительный комплекс построения данных траекторий перелета КА с орбиты ИСЗ на ГСО. Выполнен комплекс расчетов по определению этих траекторий для разных характерных начальных условий. Построено несколько семейств траекторий перелета на ГСО для различных дат отлета к Луне, наклонов орбит, значений больших полуосей орбиты отлета КА от Земли к Луне, с облетом Луны у восходящего и нисходящего узлов орбиты Луны. Приведены полученные характеристики траекторий. Показано, что использование гравитационного поля Луны существенно сокращает энергетические затраты при выведении КА на орбиту ГСО. В рамках рассмотренных траекторий перелета показано, что использование перелета на ГСО с облетом Луны в нисходящем узле требует меньших затрат топлива на выведение, чем в случае восходящего узла. Показана слабая зависимость энергетических затрат от начального наклона опорной орбиты. Получено, что алгоритм обладает хорошей сходимостью.

Библиографический список

1. Ивашкин В.В., Тупицын Н.Н. Об использовании гравитационного поля Луны для выведения космического аппарата на стационарную орбиту спутника Земли // Препринты Ордена Ленина Института прикладной математики Академии наук СССР. Москва, 1970. 31с.
2. Ивашкин В.В., Тупицын Н.Н. Об использовании гравитационного поля Луны для выведения космического аппарата на стационарную орбиту спутника Земли // Космические исследования. 1971. Т. IX. Вып. 2. С. 163-172.

3. Ивашкин В.В. Оптимизация космических маневров при ограничениях на расстояния до планет – М.: Наука. 1975. - 392 с.
4. Цандер Ф.А. Перелеты на другие планеты (Теория межпланетных путешествий) // В книге «Пионеры ракетной техники. Кибальчич. Циолковский. Цандер. Кондратюк». М.: Наука. 1964. 672 с.
5. Graziani F., Gastronuovo M.M., Teofilatto P. Geostationary orbits from mid-latitude launch sites via lunar gravity assist // American Astronautical Society Publications, Advances in Astronautical Sciences. V.84. 1993. AAS 93-289. P.561-572.
6. Riebe T., and Schweitzer M. Space operations and support. // AEROSPACE AMERICA, Dec. 1998, p. 83.
7. Ивашкин В.В. О траекториях полета точки к Луне с временным захватом ее Луной // Доклады Академии наук. 2002. Т. 387. № 2. С. 196-199.
8. Ивашкин В.В. О траекториях полета точки от Луны к Земле с гравитационным освобождением, от лунного притяжения // Доклады Академии Наук. 2004. Т. 398. № 3. С. 340-342.
9. Ивашкин В.В., Баум Ф.И. Использование гравитационного маневра у Луны для подлета космического аппарата к сближающемуся с землей астероиду // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. 2000. № 67. 32 с.
10. Белбруно Э. Динамика захвата и хаотические движения в небесной механике с приложениями к конструированию малоэнергетических перелетов. Ижевский институт компьютерных исследований, 2011. 264с.
11. Ивашкин В.В., Белоусов С.В. Анализ траекторий перелета КА от Земли на геостационарную орбиту с гравитационным маневром у Луны // XXXVI Академические Чтения по Космонавтике Москва, 24 – 27 января 2012 г. 17 с. <http://keldysh.ru/papers/2012/article/COSMONAUTICS.pdf>.
12. Белоусов С.В. Анализ особенностей алгоритма и численного решения задачи перелета КА на ГСО с помощью гравитационного поля у Луны // Изв. вузов. Физика – 2013. Т. 56. № 6/3. С. 194-196.
13. Ивашкин В.В., Белоусов С.В. Анализ траекторий перелета КА от Земли на геостационарную орбиту с использованием гравитационного поля Луны // Изв. вузов. Физика. – 2013. Т. 56. № 6/3. С 214-216.
14. Дубошин Г.Н. Небесная механика. Основные задачи и методы. М.: Наука. 1968. Издание второе (800 с.). С. 442.
15. Аким Э.Л., Энеев Т.М. Определение параметров движения космических аппаратов по данным траекторных измерений // Космические исследования. 1963. Т. I. Вып 1. С. 5-50.
16. <http://geo.1september.ru/1999/17/geo17.htm>

6 Приложение

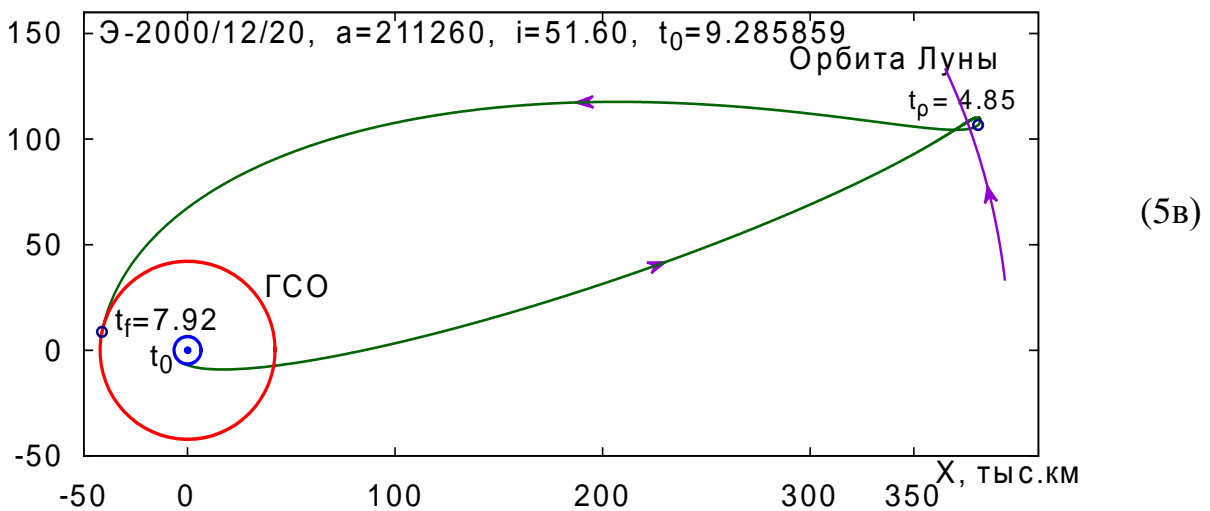
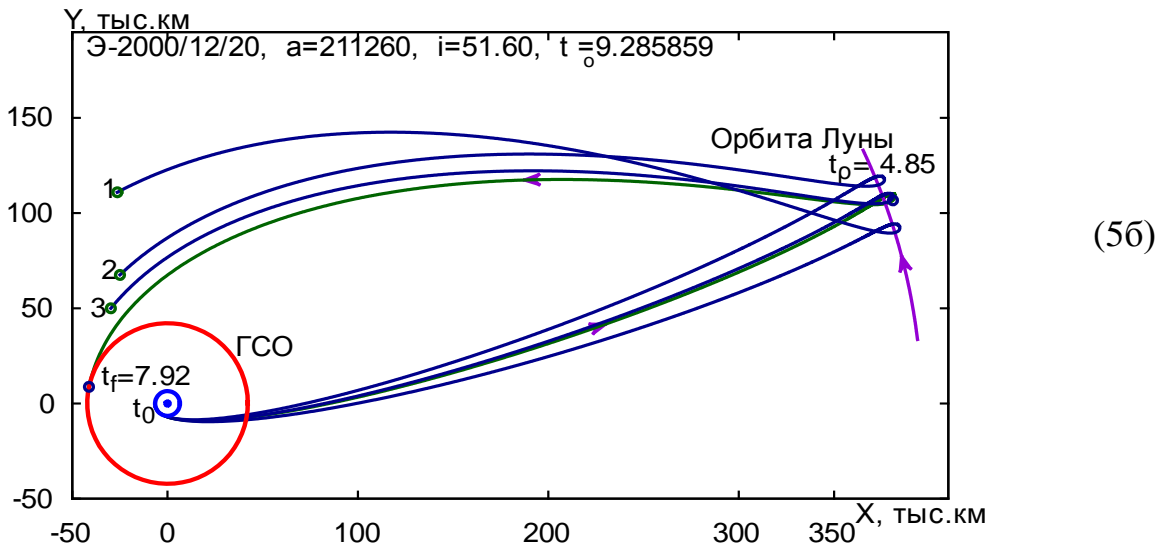
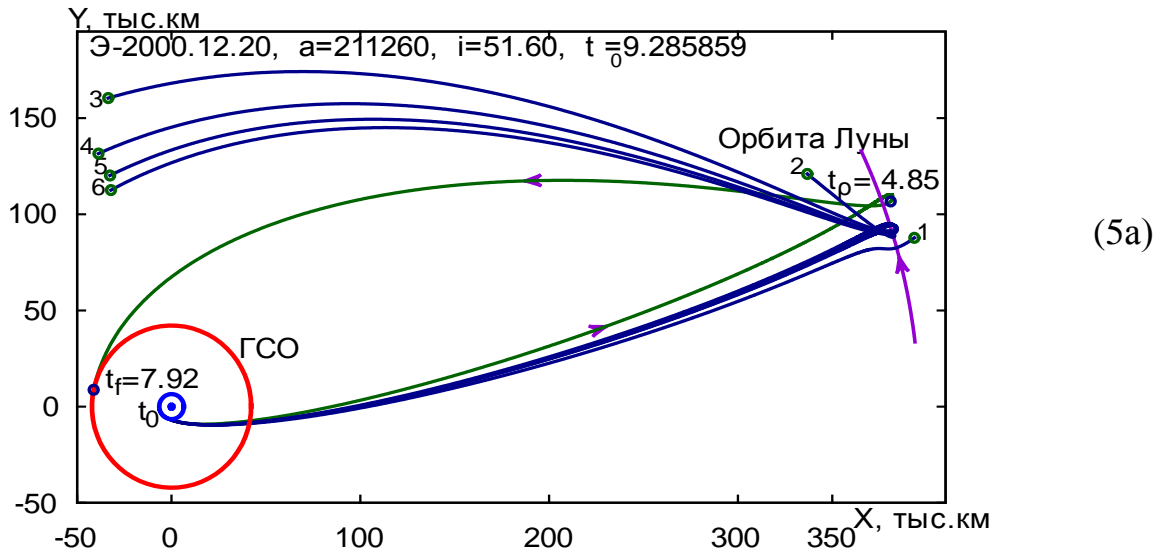
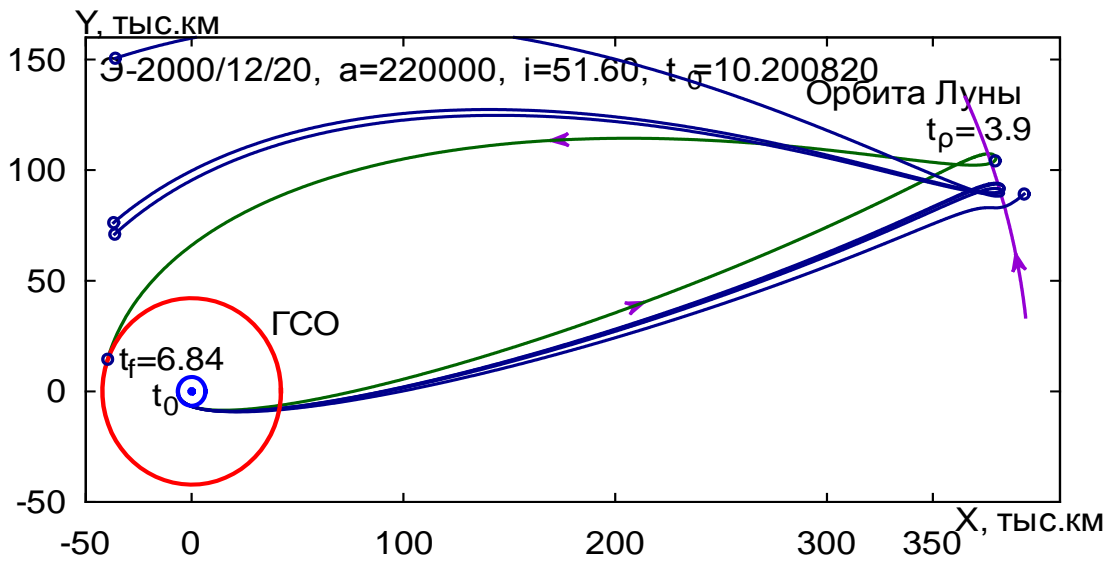
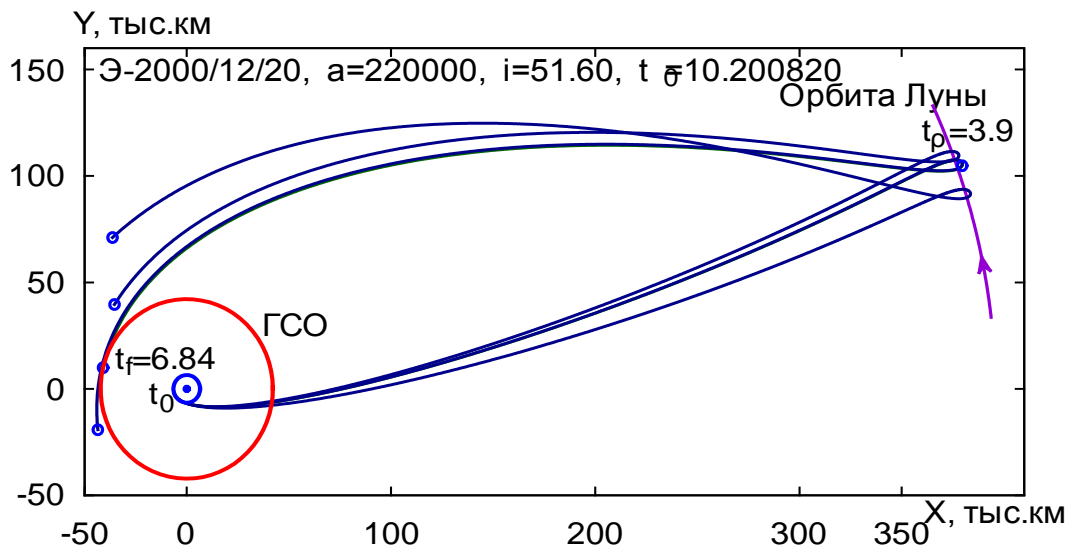


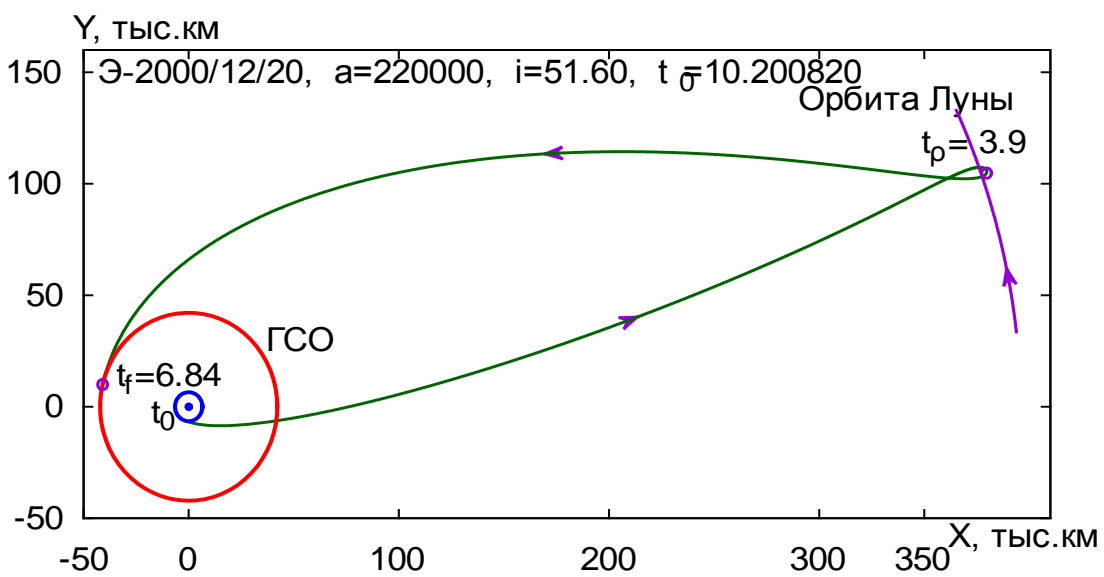
Рис 5. Траектория 1.1: а - этапы 1, 2; б - этап 3; в - итоговая траектория.



(6a)

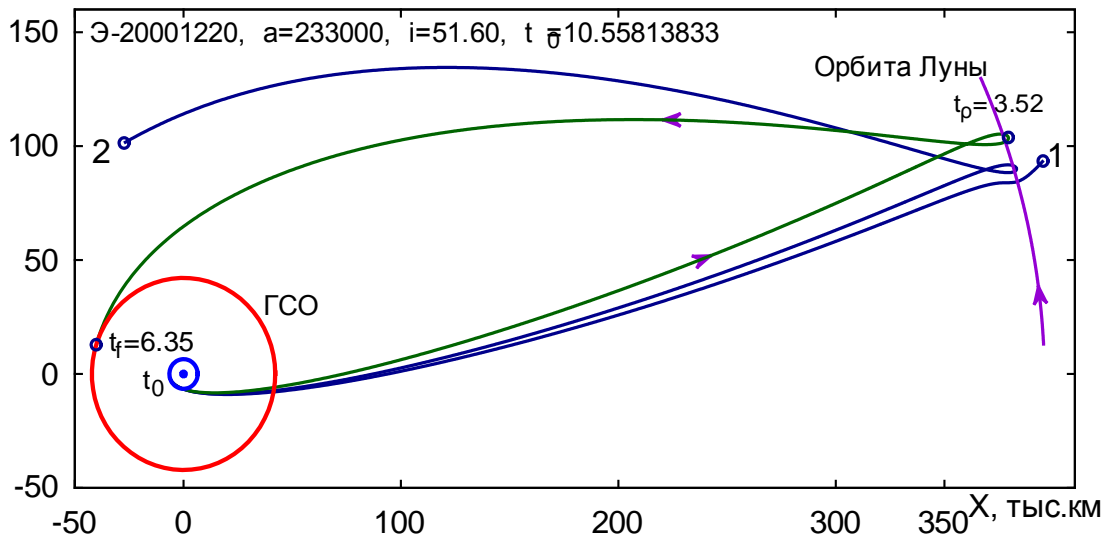


(6б)

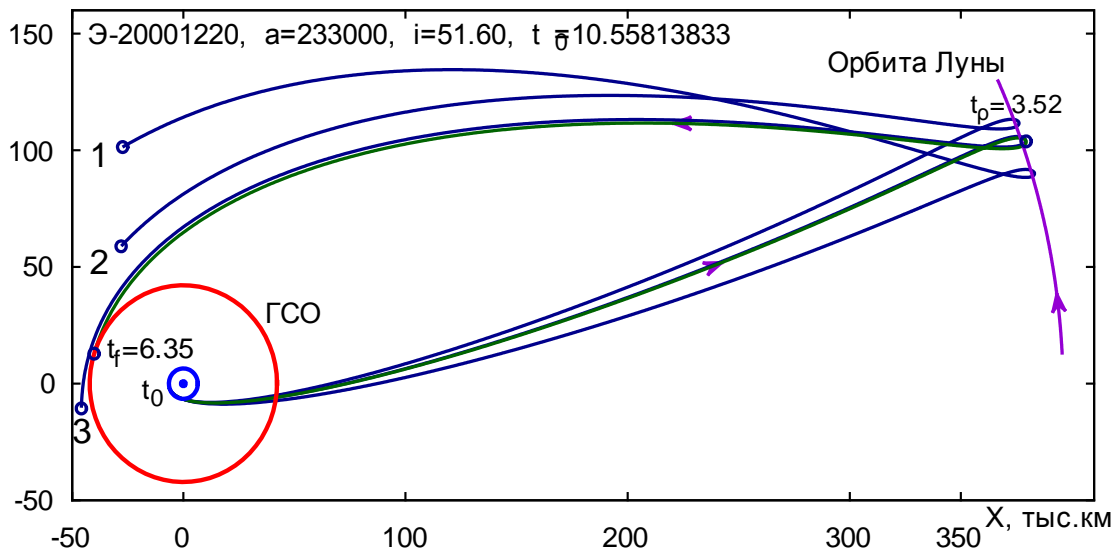


(6в)

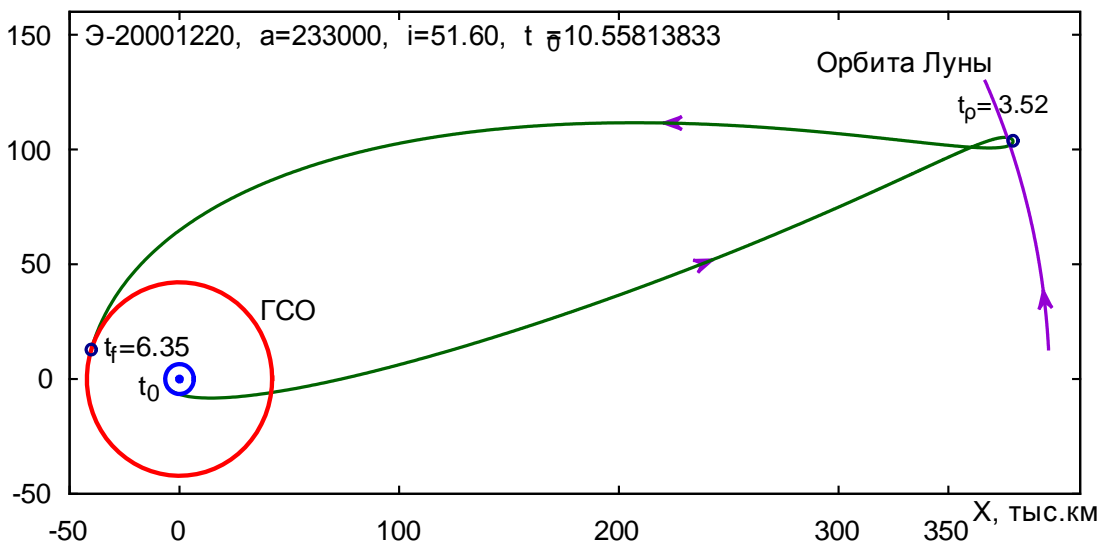
Рис 6. Траектория 1.4: а) этапы 1, 2, б) этап 3, в) итоговая траектория.



(7a)

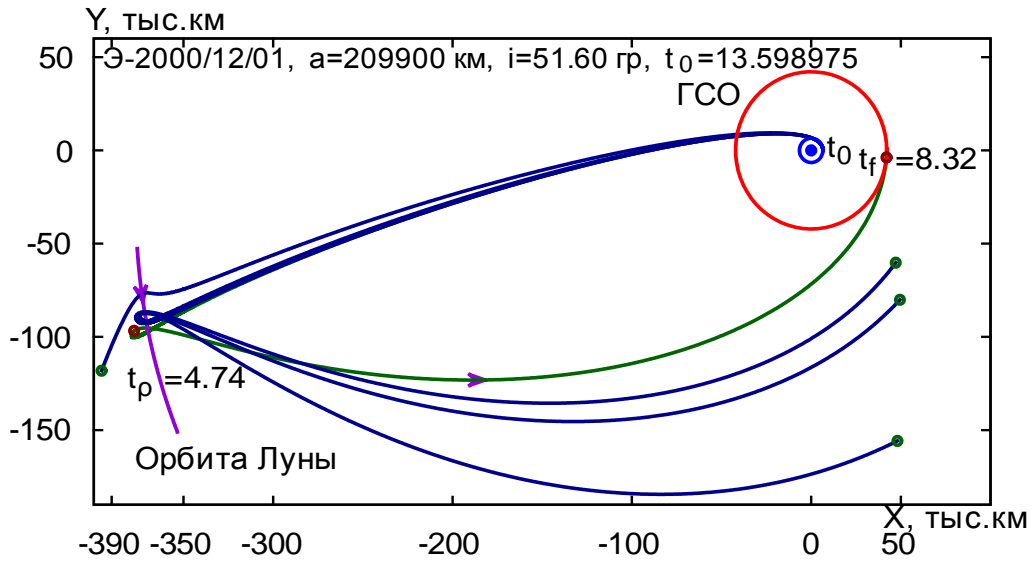


(7б)

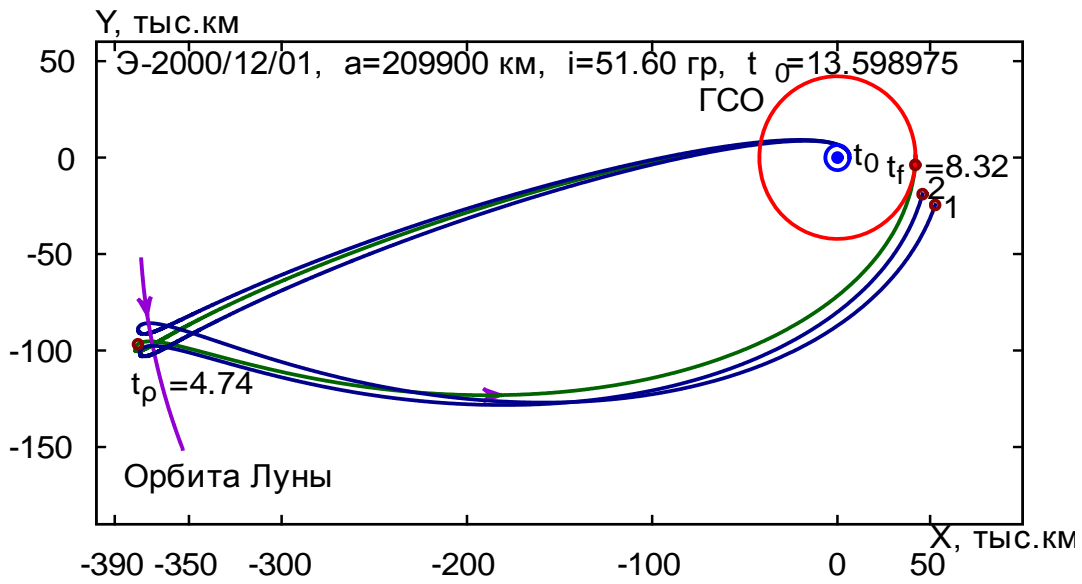


(7в)

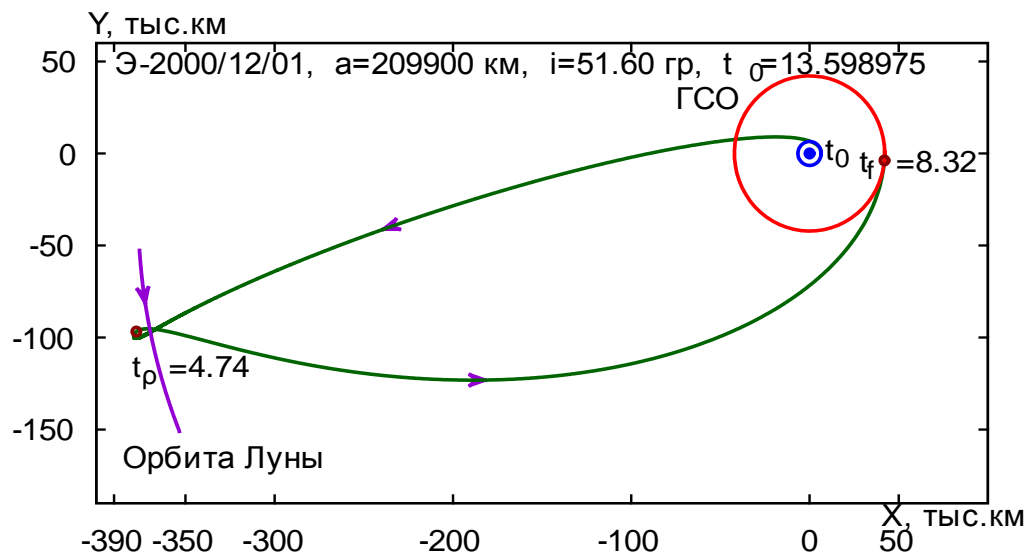
Рис 7. Траектория 1.5: а) этапы 1, 2, б) этап 3, в) итоговая траектория.



(8a)

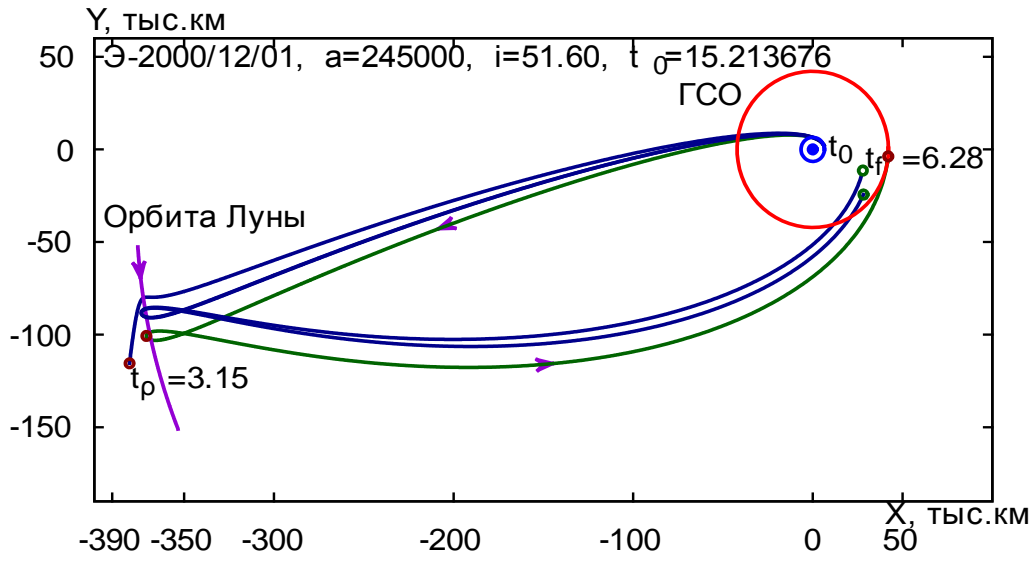


(8б)

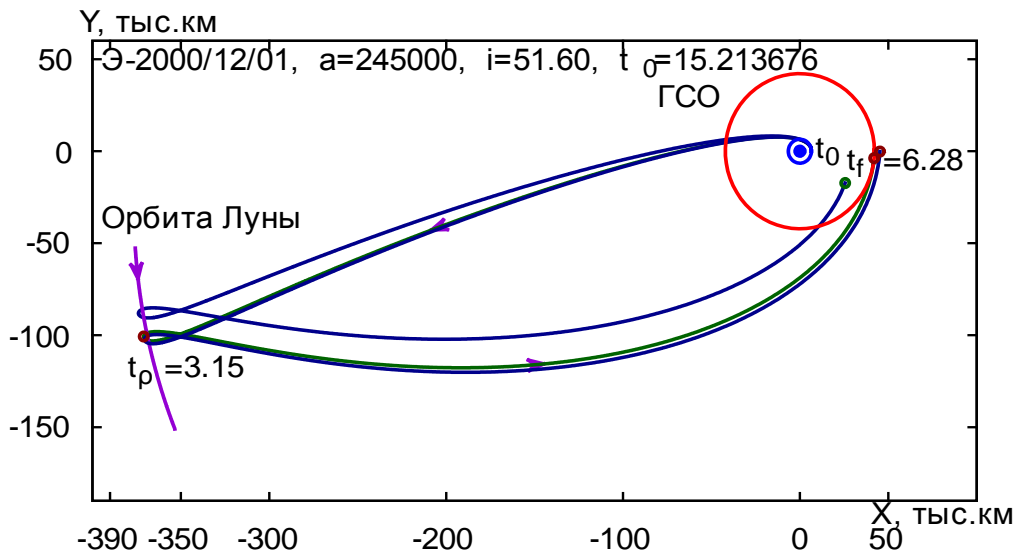


(8в)

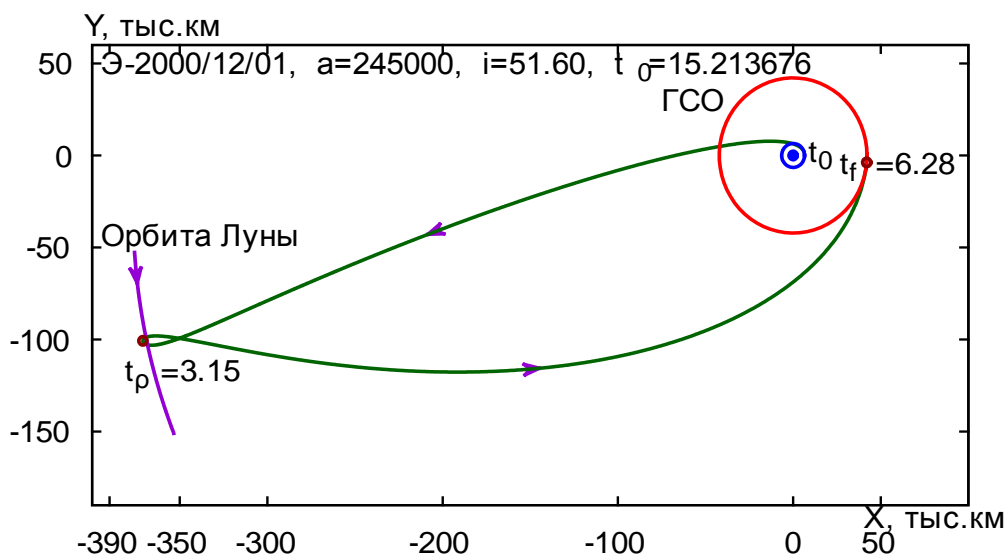
Рис 8. Траектория 2.1: а) этапы 1, 2, б) этап 3, в) итоговая траектория.



(9а)

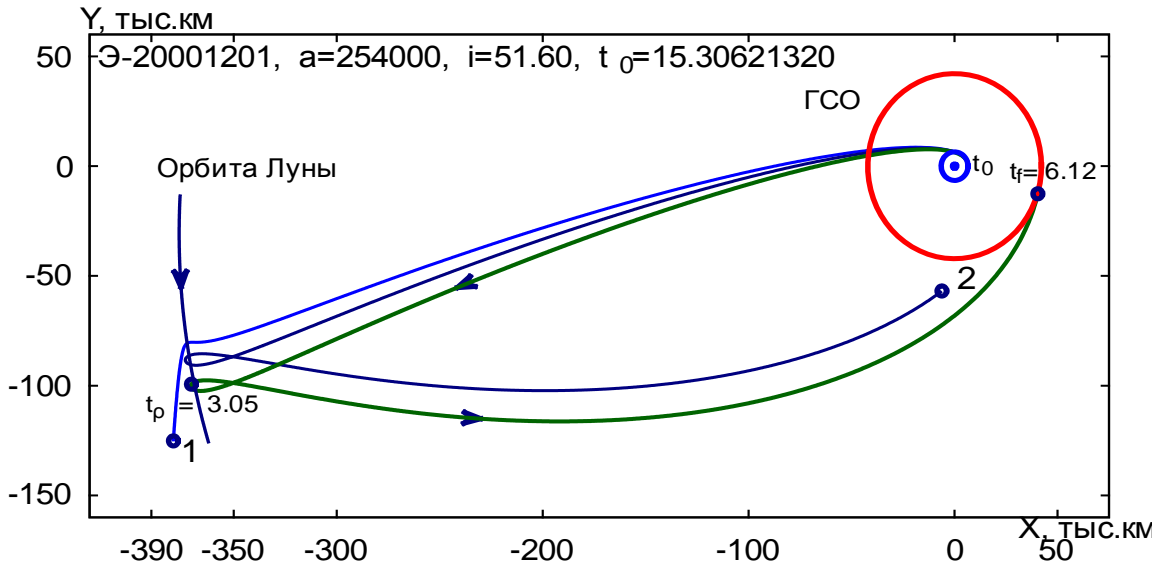


(9б)

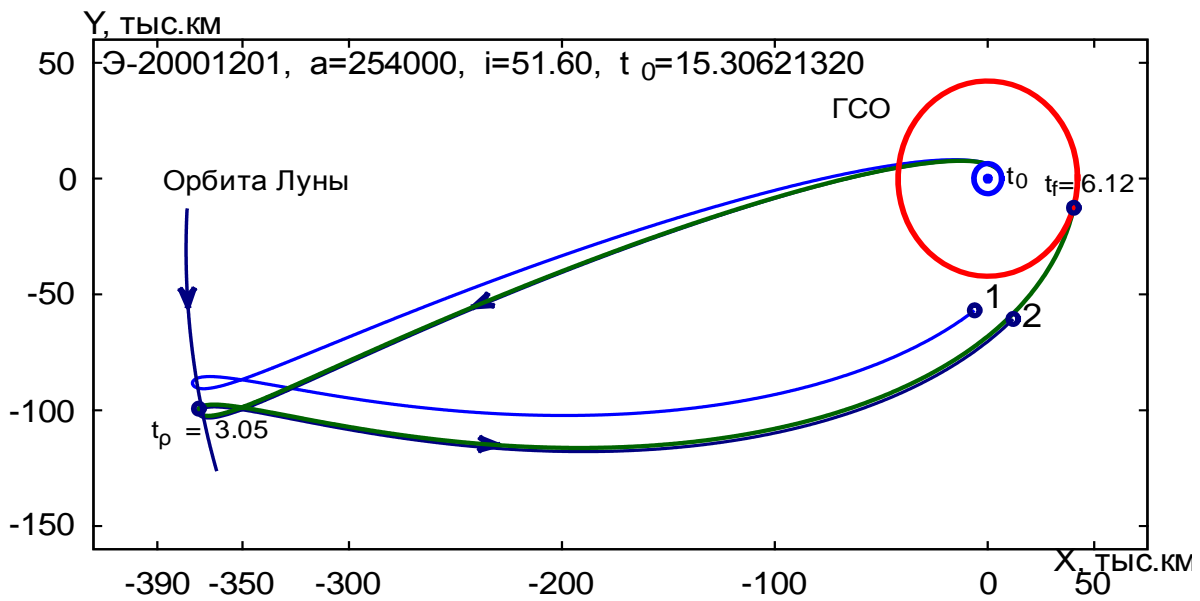


(9в)

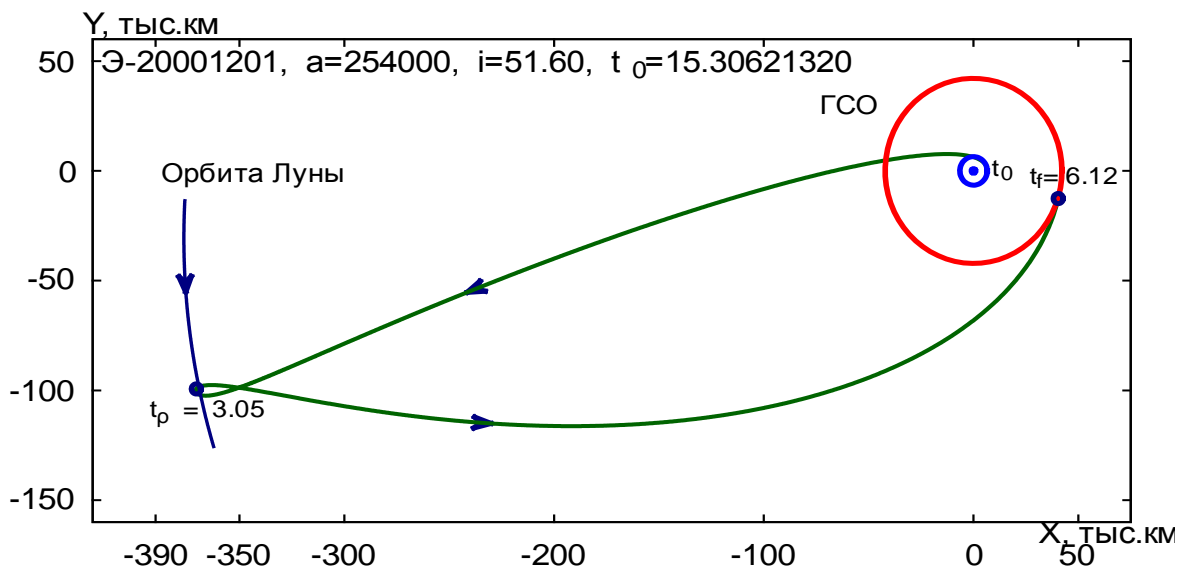
Рис 9. Траектория 2.6: а) этапы 1, 2, б) этап 3, в) итоговая траектория.



(10a)

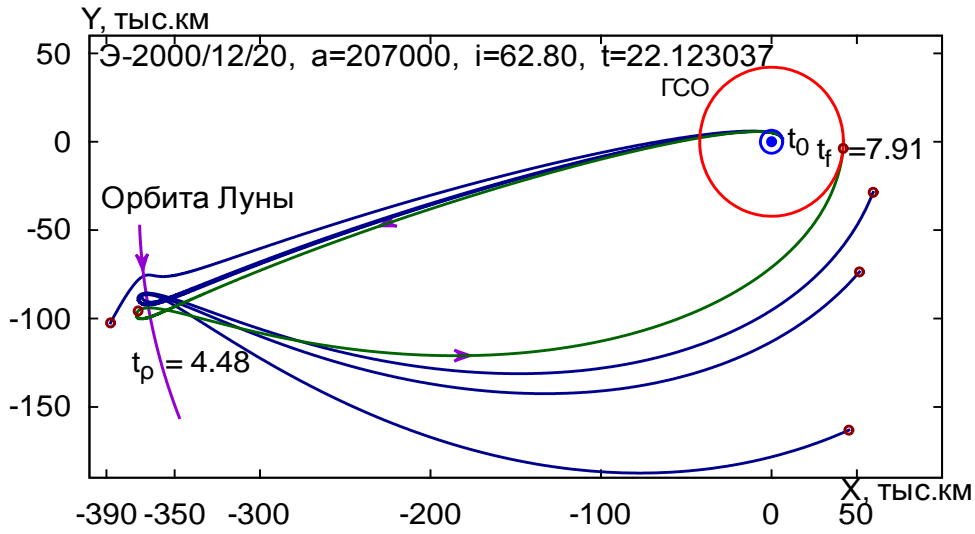


(10б)

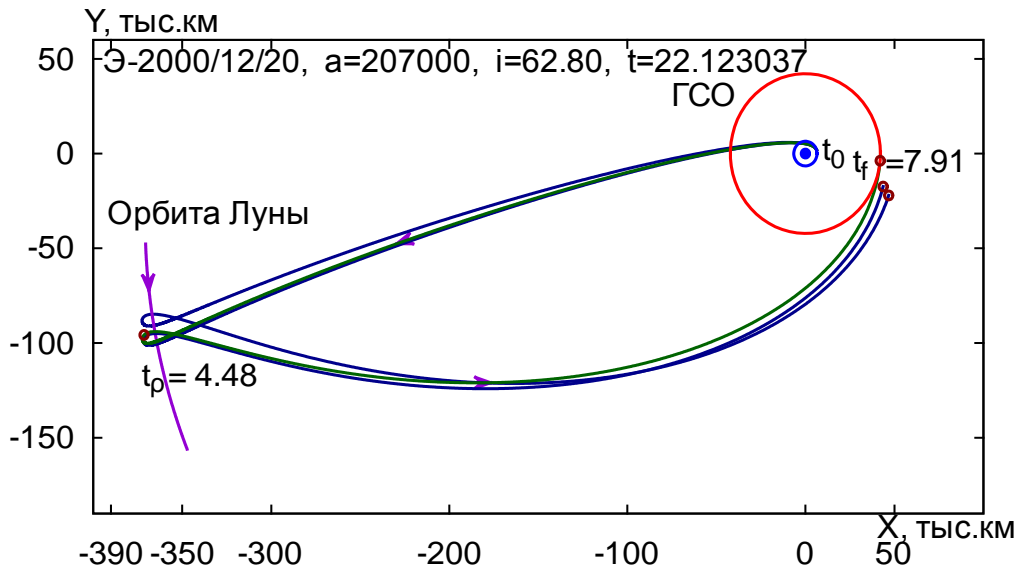


(10в)

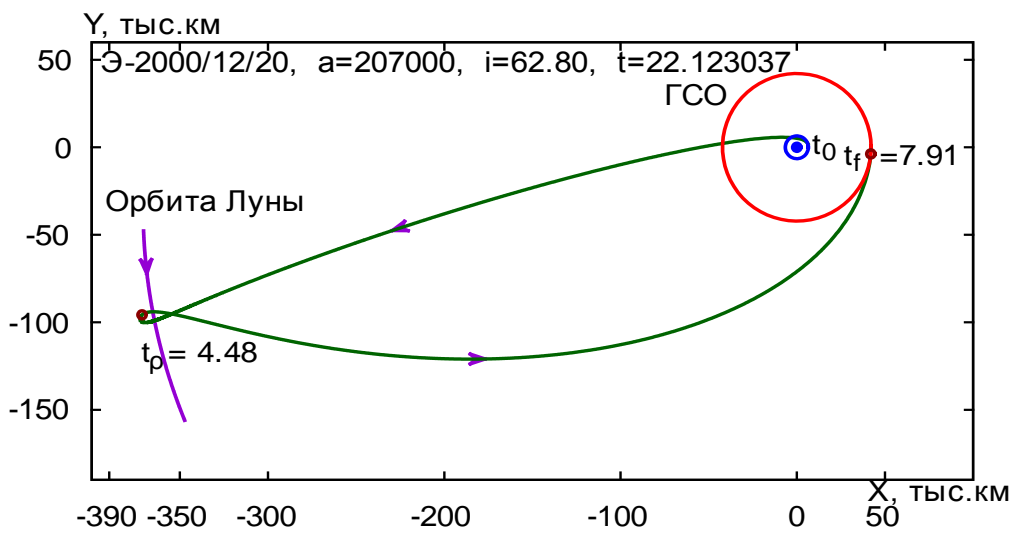
Рис 10. Траектория 2.7: а) этапы 1, 2, б) этап 3, в) итоговая траектория.



(11a)

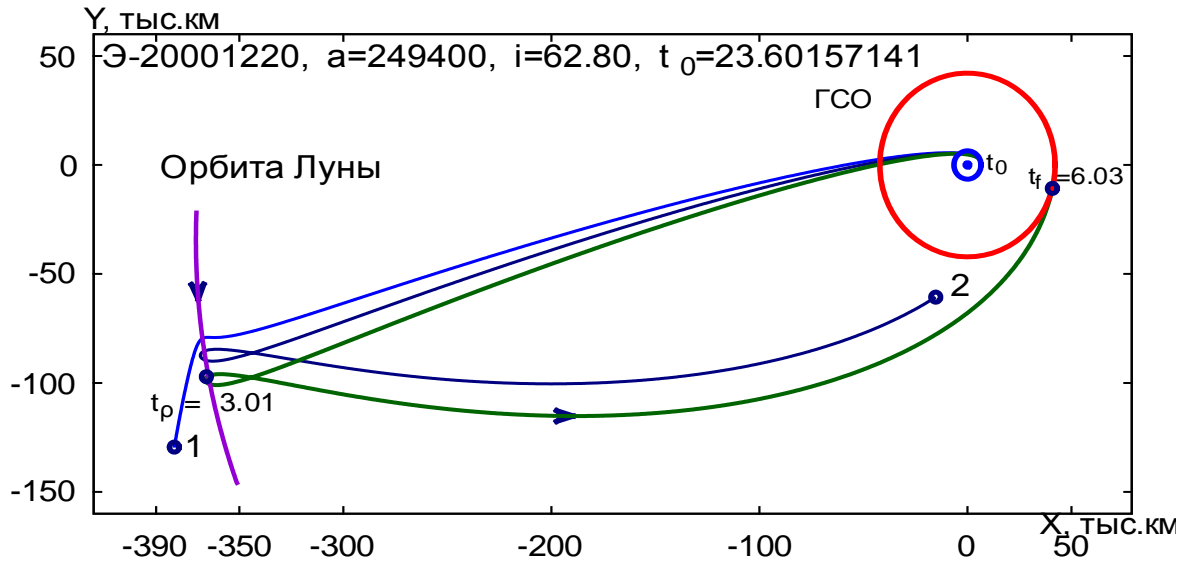


(11б)

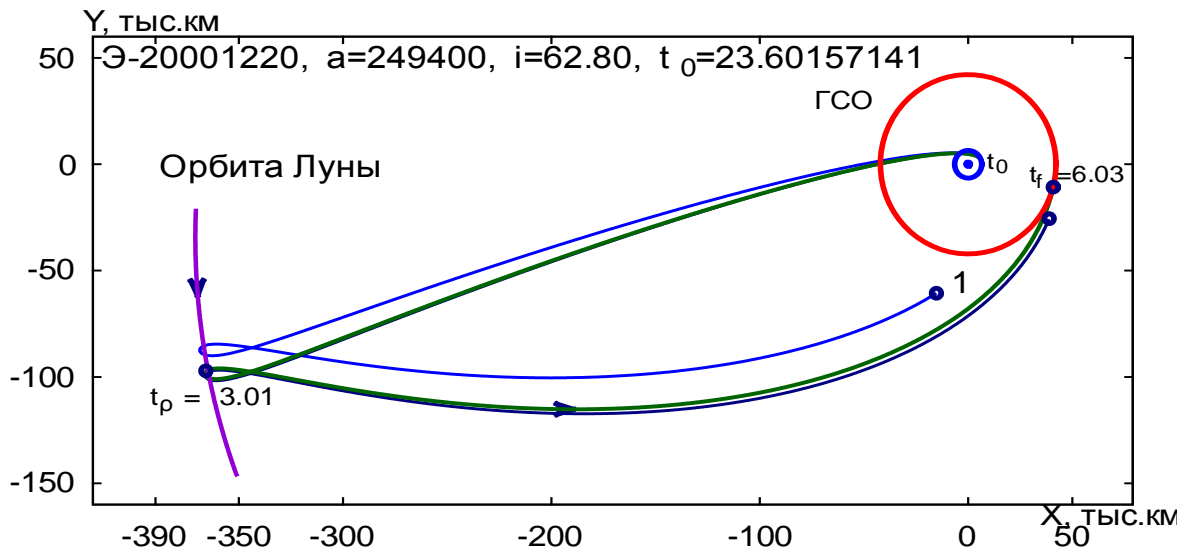


(11в)

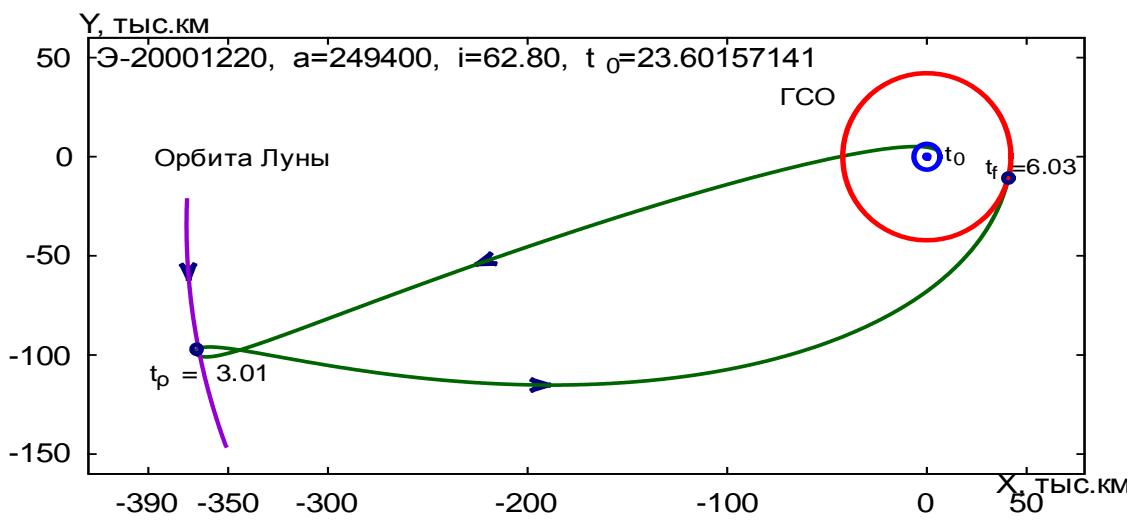
Рис 11. Траектория 3.1: а) этапы 1, 2, б) этап 3, в) итоговая траектория.



(12a)

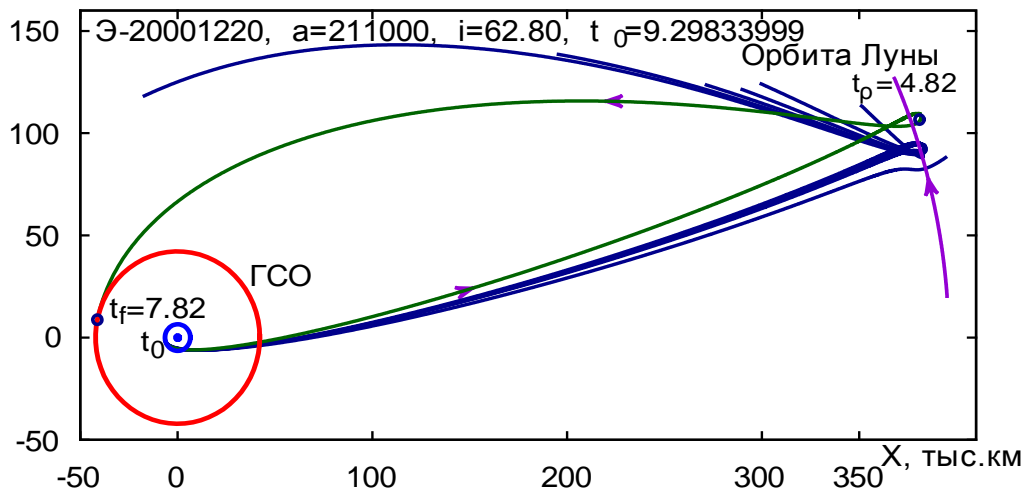


(12б)

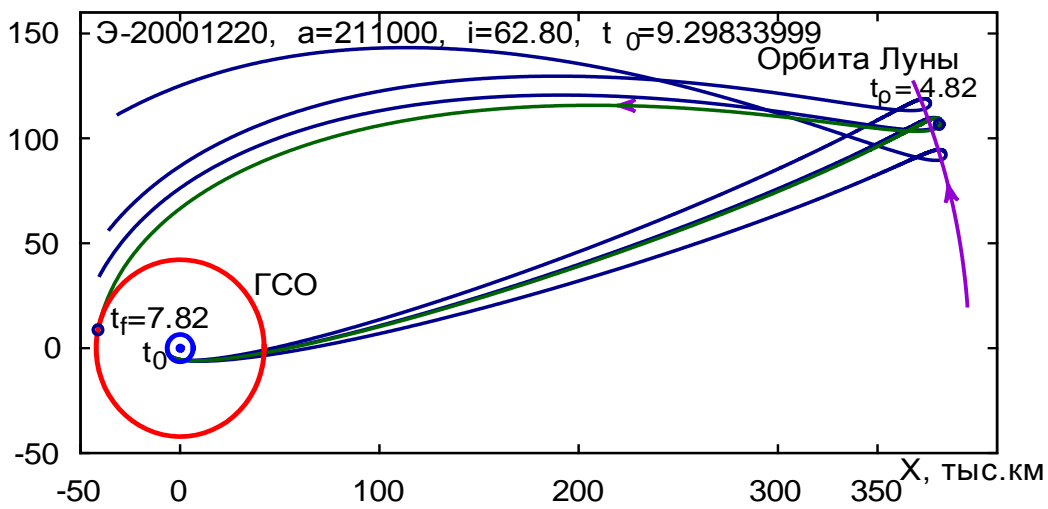


(12в)

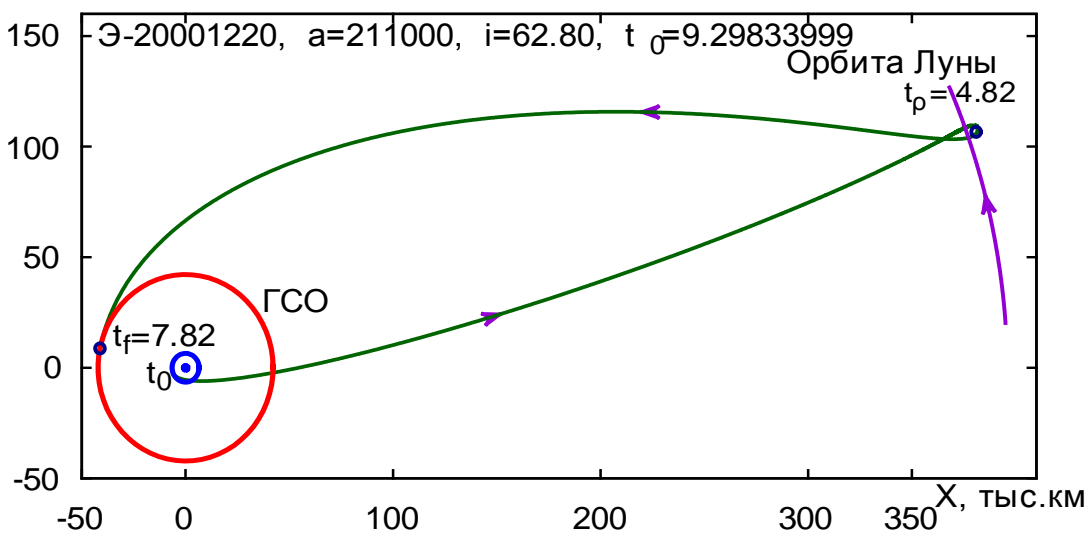
Рис 12. Траектория 3.6: а) этапы 1, 2, б) этап 3, в) итоговая траектория



(13a)

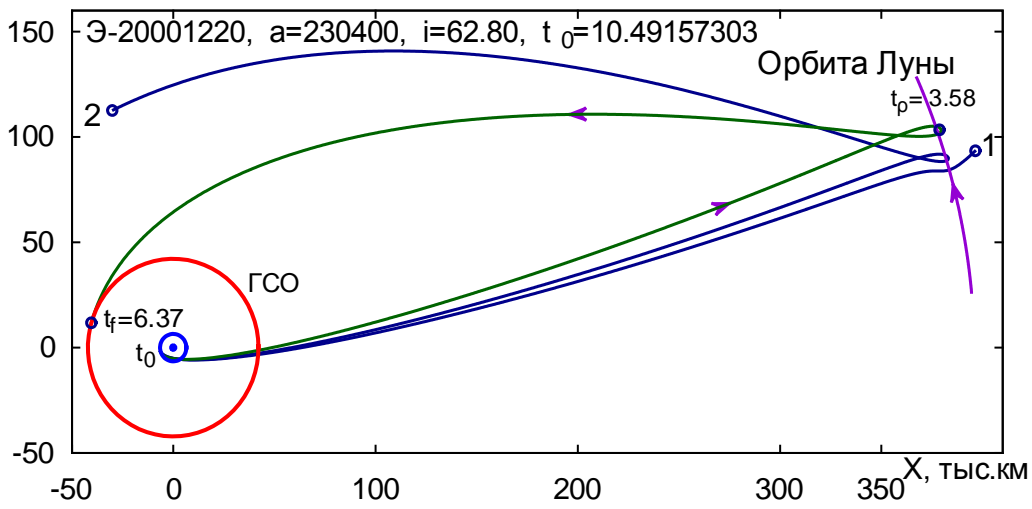


(13б)

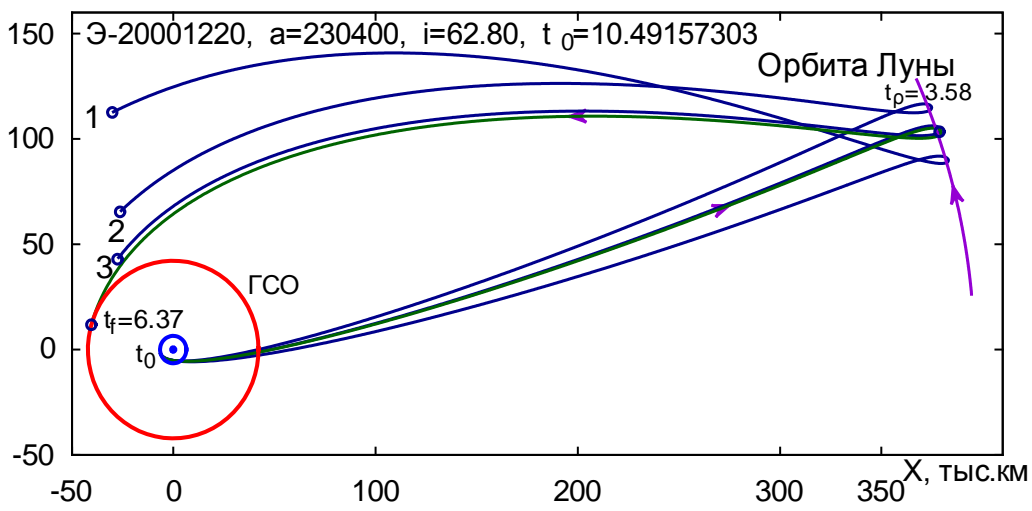


(13в)

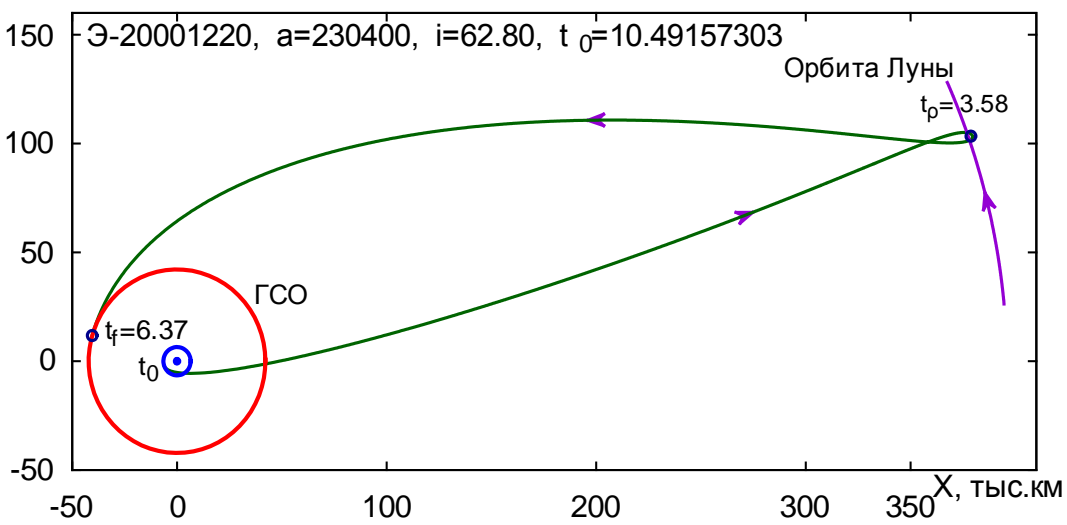
Рис 13. Траектория 4.1: а) этапы 1, 2, б) этап 3, в) итоговая траектория.



(14а)



(14б)



(14в)

Рис 14. Траектория 4.5: а) этапы 1, 2, б) этап 3, в) итоговая траектория.