



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 53 за 2017 г.



ISSN 2071-2898 (Print)  
ISSN 2071-2901 (Online)

**Иванов Д.С., Кушнирук М.С.**

Исследование алгоритма  
управления  
пространственным  
движением группы  
спутников с помощью  
аэродинамической силы

**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Иванов Д.С., Кушнирук М.С. Исследование алгоритма управления пространственным движением группы спутников с помощью аэродинамической силы // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2017. № 53. 32 с. doi:[10.20948/prepr-2017-53](https://doi.org/10.20948/prepr-2017-53)  
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2017-53>

**Ордена Ленина  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ  
имени М.В. Келдыша  
Российской академии наук**

**Д.С. Иванов, М.С. Кушнирук**

**Исследование алгоритма управления  
пространственным движением  
группы спутников  
с помощью аэродинамической силы**

**Москва — 2017**

**Иванов Д.С., Кушнирук М.С.**

Исследование алгоритма управления пространственным движением группы спутников с помощью аэродинамической силы

Анализируется подход к управлению групповым полетом спутников на низкой околоземной орбите с помощью аэродинамической силы. Предложена простая модель аэродинамической силы, позволяющая рассчитать угловое положение спутника относительно набегающего потока для создания требуемой аэродинамической силы. При заданных параметрах модели найдена область допустимого управления спутниками. Рассматривается алгоритм управления группой спутников на основе линейно-квадратичного регулятора. Предложен метод исследования области параметров алгоритма, при которых на заданных отклонениях траектории расчетное управление будет находиться в области допустимых значений. Проведено численное исследование управляемого движения при действующих возмущениях от второй гармоники гравитационного потенциала Земли и неточности знания плотности атмосферы.

**Ключевые слова:** малый спутник, групповой полет, аэродинамическая сила, алгоритм управления

**Ivanov D.S., Kushniruk M.S.**

Investigation of Control Algorithm Using Aerodynamic Force for Satellite Formation Flying Three-Dimensional Motion

Control of group of satellites in Low-Earth orbit by aerodynamic force is considered. A simple model of aerodynamic force acting on the satellite is proposed. It allows to calculate the satellite attitude relative to the incoming flow to obtain the required aerodynamic force. With the given model parameters, the region of admissible satellite control is obtained. An algorithm to control a relative motion of satellites based on a linear-quadratic controller is considered. A method is proposed for studying the range of parameters of the algorithm in which the calculated control will be located in the range of admissible values for the given deviations of the trajectory. A numerical study of the controlled motion under the action of perturbations from the second harmonic of the Earth gravitational potential and the inaccuracy of the knowledge of the density of the atmosphere is carried out.

**Key words:** Small satellite, formation flying, aerodynamic force, control algorithm

Исследование поддержано грантом РФФИ № 17-01-00449.

## Введение

Групповой полет – формация спутников, движущихся по орбите на большом удалении (от нескольких метров до нескольких десятков километров) друг от друга и решающих единую задачу. Групповой полет спутников расширяет возможности наблюдений и решения различных прикладных задач в космосе. Основными его преимуществами являются способность одновременного выполнения экспериментов и повышенная надежность: неисправность одного из спутников не приводит к утрате работоспособности всей группы. Для проведения таких исследований необходимо обеспечить управление относительным движением спутников. В связи с широким использованием в формациях малых спутников, имеющих ограничения по массе, запасу топлива и энергетике на борту, большой интерес представляют алгоритмы управления относительным движением, не требующие расхода рабочего тела. Существуют методы управления, основанные на использовании магнитных [1] и электростатических сил [2,3], обмене импульсом между спутниками [4]. В настоящей работе исследуется управление относительным движением с использованием аэродинамической силы в верхних слоях атмосферы.

Рассматривается группа спутников, движущихся по близким низким околокруговым орбитам вокруг Земли. Предполагается, что спутники имеют одинаковую форму с некоторой плоской частью, например, плоскими солнечными панелями. За счет поворота относительно центра масс изменяется площадь сечения аппарата относительно набегающего потока, которая определяет величину аэродинамической силы, действующей на аппарат. Если спутники имеют различную ориентацию относительно набегающего потока, то возникает разница между действующими на спутники силами. Таким образом, за счет изменения взаимной ориентации, например с помощью установленных на борту маховиков, можно управлять относительным движением центров масс спутников.

Аэродинамическую силу можно разделить на две составляющие – это сила сопротивления, направленная против вектора скорости, и аналог "подъемной" силы, которая перпендикулярна плоскостям, с которыми сталкиваются молекулы атмосферы. На низких околоземных орбитах взаимодействие воздуха со спутником таково, что максимальное значение силы сопротивления почти на порядок больше, чем значение "подъемной" силы [5], поэтому, как правило, при разработке алгоритмов управления ею пренебрегают. Однако это приводит к потере потенциальной возможности управления движением вне плоскости орбиты, что делает недостижимыми целый ряд относительных траекторий, в том числе траекторий стыковки. В настоящей работе используется модель аэродинамической силы, учитывающая как силу сопротивления, так и небольшую по величине "подъемную" силу, что позволяет получить полностью управляемое относительное движение спутников в группе.

Популярность управления с использованием аэродинамических сил обусловлена упрощенным запуском группы малых и коротко живущих спутников

на низкие орбиты и эффективным управлением без расхода топлива. Несмотря на достаточно большой объем исследований алгоритмов управления, пока были реализованы лишь две миссии, где тестировалась подобная схема управления – спутники OrbComm [12] и спутники JC2Sat-FF [13].

Впервые подход к управлению с помощью аэродинамической силы сопротивления был предложен в 1986 году Леонардом [6] в предположении дискретного изменения эффективного сечения спутников, летящих в группе. Он предложил алгоритм управления групповым полетом с помощью аэродинамической силы на основе пропорционально-дифференциального (ПД) регулятора. Кумар, Банг и Тахк в работе [7] добавили интегральную часть, что позволило уменьшить энергетические затраты для совершения маневра. С технической точки зрения проще реализовать релейное управление, когда спутник может принимать только два угловых положения: в первом на аппарат почти не действует сила сопротивления, во втором возникает значительная сила сопротивления. Релейное управление с помощью импульсной модуляции позволяет реализовать рассчитанное по ПД- или пропорционально-интегрально-дифференциальному (ПИД) регулятору управляющее воздействие, однако сама модуляция приводит к ошибкам исполнения, что было показано в работе [8]. Наряду с регуляторами в литературе рассматриваются ляпуновское управление. Например, Перес и Бевилакквa [9] разработали алгоритм для управления движением спутников в нижних слоях атмосферы на основе функции Ляпунова и сравнили работу алгоритма управления для поддержания требуемой траектории в случае кеплерова движения и при воздействии возмущения со стороны второй гармоники разложения гравитационного потенциала Земли. В работах [10,11] предлагаются алгоритмы на основе скользящего управления, которые применяются для нелинейной динамики движения группы спутников.

В вышеупомянутых работах по управлению групповым полетом рассматривалась только сила аэродинамического сопротивления. Не проводились и исследования зависимости переходных процессов от параметров алгоритмов, что представляется весьма важным аспектом их применения. Вследствие ограниченности аэродинамической силы расчетное воздействие может оказаться нереализуемым, что может привести как к ухудшению сходимости траектории к требуемому движению, так и вовсе к расхождению. В настоящей работе рассматривается модель аэродинамической силы, которая позволяет рассчитать ориентацию спутников относительно набегающего потока для создания необходимой аэродинамической силы. Параметры модели определяют область реализуемых значений аэродинамической силы. Тогда возникает задача определения такой области параметров алгоритма управления, при которых расчетное управление не будет выходить за эту область или, по крайней мере, будет незначительно и ненадолго выходить из неё. В работе предложена методика нахождения этой области на основе преобразования эллипсоида отклонений траектории в пространство управления. Методика применена для алгоритма управления на основе линейно-квадратического регулятора (ЛКР). Исследова-

ние ЛКР строится на основе линейной модели относительного движения и с постоянной плотностью атмосферы на околокруговой орбите. Поэтому для проверки результатов исследования было проведено численное моделирование управляемого движения с учетом возмущений и детальной модели плотности атмосферы. Оно показало, что алгоритм с найденными с помощью методики параметрами продолжает работать несмотря на ошибки в знании плотности атмосферы, хотя скорость сходимости при этом падает.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

### 1.1. Уравнения относительного движения

В упрощенной постановке будем рассматривать группу, состоящую из двух спутников, движущихся по близким околокруговым орбитам. Для описания траекторий спутников удобно пользоваться уравнениями движения, записанными в относительных координатах. Общий вид уравнений относительного движения двух спутников достаточно сложен для аналитического рассмотрения, поэтому на первом этапе используется простая модель движения, описываемая системой уравнений Хилла-Клохесси-Уилтшира [14,15]. Модель описывает относительное движение двух спутников, летящих по близким околокруговым орбитам в центральном поле тяготения Земли. В этой модели используется опорная система координат, ее начало (опорная точка  $O$ ) движется по круговой орбите радиуса  $r_0$  с орбитальной угловой скоростью  $\omega = \sqrt{\mu/r_0^3}$ , где  $\mu$  – гравитационный параметр Земли. Ось  $Oz$  направлена от центра Земли, ось  $Oy$  направлена по нормали к плоскости орбиты, ось  $Ox$  дополняет тройку до правой (рис. 1).

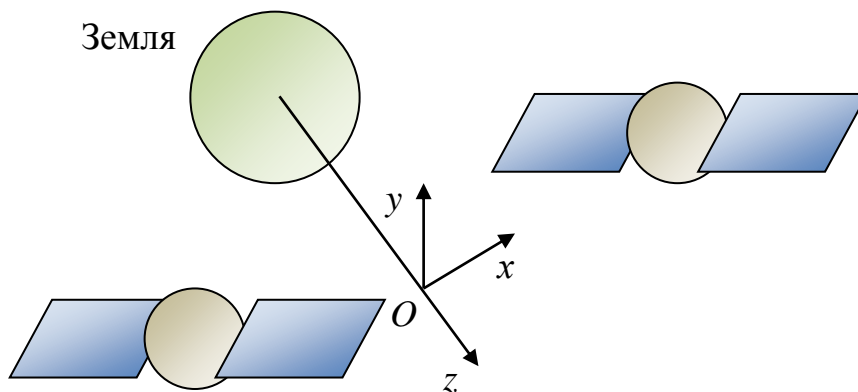


Рис.1. Система координат, связанная с опорной точкой  $O$ , движущейся по круговой орбите

Пусть  $\mathbf{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ ,  $\mathbf{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$  – координаты первого и второго спутников в опорной системе координат. Тогда для координат  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = (x, y, z)$  вектора относительного положения спутников можно записать следующую систему уравнений движения:

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -2\dot{z}\omega, \\ \ddot{y} &= -y\omega^2, \\ \ddot{z} &= 2\dot{x}\omega + 3z\omega^2.\end{aligned}\tag{1}$$

Решение этой системы имеет вид

$$\begin{aligned}x(t) &= -3c_1\omega t + 2c_2 \cos \omega t - 2c_3 \sin \omega t + c_4, \\ y(t) &= c_5 \sin \omega t + c_6 \cos \omega t, \\ z(t) &= 2c_1 + c_2 \sin \omega t + c_3 \cos \omega t,\end{aligned}\tag{2}$$

где константы интегрирования  $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$  выражаются через начальные условия

$$x(t_0) = x_0, y(t_0) = y_0, z(t_0) = z_0, \dot{x}(t_0) = \dot{x}_0, \dot{y}(t_0) = \dot{y}_0, \dot{z}(t_0) = \dot{z}_0,\tag{3}$$

в момент времени  $t_0$ , в который определены относительные координаты  $x_0, y_0, z_0$  и относительные скорости  $\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0$  следующим образом:

$$\begin{aligned}c_1 &= 2z_0 + \frac{\dot{x}_0}{\omega}, \\ c_2 &= \frac{\dot{z}_0}{\omega} \cos(\omega t_0) - \left( \frac{2\dot{x}_0}{\omega} + 3z_0 \right) \sin(\omega t_0), \\ c_3 &= -\frac{\dot{z}_0}{\omega} \sin(\omega t_0) - \left( \frac{2\dot{x}_0}{\omega} + 3z_0 \right) \cos(\omega t_0), \\ c_4 &= x_0 - \frac{2\dot{z}_0}{\omega} + 3\omega \left( \frac{\dot{x}_0}{\omega} + 3z_0 \right) t_0, \\ c_5 &= y_0 \sin(\omega t_0) + \frac{\dot{y}_0}{\omega} \cos(\omega t_0), \\ c_6 &= y_0 \cos(\omega t_0) - \frac{\dot{y}_0}{\omega} \sin(\omega t_0).\end{aligned}$$

Как видно, относительная траектория спутника замкнута тогда и только тогда, когда  $c_1 = 0$ . Величина  $c_1$  обуславливает скорость относительного дрейфа двух спутников. Заметим, что величина  $\sqrt{c_2^2 + c_3^2}$  определяет амплитуду траектории вдоль осей  $Ox$  и  $Oz$ , величина  $\sqrt{c_5^2 + c_6^2}$  определяет амплитуду траектории вдоль оси  $Oy$ , величина  $c_4$  – сдвиг вдоль оси  $Ox$ .

## 1.2. Модель аэродинамической силы

Рассмотрим управляемое движение двух спутников. Будем предполагать, что оба спутника имеют одинаковую форму. Для упрощения на начальном этапе будем предполагать, что каждый из спутников состоит из центральной части, имеющей форму шара, и тонкой пластины. К каждому спутнику приложена аэродинамическая сила, действующая как на центральную часть, так и на пластину. Аэродинамическая сила, действующая на центральную часть, не за-

висит от ориентации спутника в пространстве и одинакова для обоих спутников, а силы, действующие на пластины, зависят от положения пластины по отношению к направлению набегающего потока. Запишем уравнения относительного движения с учетом аэродинамической силы в виде

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -2\dot{z}\omega + \Delta f_x, \\ \ddot{y} &= -y\omega^2 + \Delta f_y, \\ \ddot{z} &= 2\dot{x}\omega + 3z\omega^2 + \Delta f_z,\end{aligned}\tag{4}$$

где  $\Delta \mathbf{f} = [\Delta f_x \ \Delta f_y \ \Delta f_z]^T = \mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_1$  – разница удельных аэродинамических сил, действующих на спутники.

При всей сложности физических процессов, описывающих взаимодействие частиц атмосферы с поверхностью тела на газодинамическом уровне, можно построить достаточно простую модель этих взаимодействий с помощью ограниченного числа эмпирических коэффициентов. Будем считать, что взаимодействие проходит механическим путем по двум схемам – зеркальной, когда отражение молекулы от поверхности является абсолютно упругим, и диффузной при абсолютно неупругом столкновении. Определим действительное отражение как линейную интерполяцию двух предельных схем взаимодействия, полагая, что часть молекул  $\varepsilon$  отражается зеркально, а остальная часть  $(1 - \varepsilon)$  – диффузно с максвелловским распределением, соответствующим некоторой температуре  $T_r$ . Для этого случая в работе [5] было получено выражение для действующей на пластину удельной аэродинамической силы в следующем виде:

$$\mathbf{f}_i = -\frac{1}{m} \rho V^2 S \left\{ (1 - \varepsilon)(\mathbf{e}_v, \mathbf{n}_i)\mathbf{e}_v + 2\varepsilon(\mathbf{e}_v, \mathbf{n}_i)^2 \mathbf{n}_i + (1 - \varepsilon) \frac{\nu}{V} (\mathbf{e}_v, \mathbf{n}_i) \mathbf{n}_i \right\}.\tag{5}$$

Здесь  $\rho$  – плотность атмосферы на расстояние  $r_0$  от центра Земли,  $m$  – масса спутника,  $V$  – скорость набегающего потока (предполагается одинаковой для двух спутников),  $S$  – площадь пластины,  $\mathbf{n}_i$  – единичный вектор внешней нормали к пластине,  $\mathbf{e}_v$  – единичный вектор, направленный по скорости набегающего потока,  $\nu = \sqrt{\pi R T_r / 2}$  – параметр, пропорциональный наиболее вероятной тепловой скорости диффузно отраженных молекул,  $R$  – газовая постоянная,  $i = 1, 2$ . Первое слагаемое обуславливает собой аэродинамическую силу сопротивления, направленную против движения потока воздуха, а второе и третье – это компоненты силы, направленные против нормали к пластине, которые и составляют "подъемную" силу. В модели аэродинамической силы (5) есть два параметра взаимодействия  $\varepsilon$  и  $\eta = \nu / V$ , которые в общем случае не являются постоянными и зависят от угла падения, скорости падающих частиц и других характеристик газа и поверхности. Однако в настоящей работе рассматриваются



некоторые средние значения параметров  $\varepsilon$  и  $\eta$  и считается, что они неизменны при повороте пластины. В работе [5] была решена обратная задача по определению этих параметров исходя из летных данных о движении спутников "Протон" с кососимметричными панелями солнечных батарей. По этим оценкам схемы взаимодействия газа с поверхностью спутника таковы, что  $\varepsilon \approx 0.1$  и  $\eta = v/V \approx 0.1$ .

Запишем выражение для компонент силы (5), введя два угла  $\theta$  и  $\varphi$  для задания вектора нормали  $\mathbf{n}_i$  к одной из поверхностей пластины следующим образом (рис. 2):

$$\mathbf{n}_i = \begin{bmatrix} \sin \theta_i \\ \cos \theta_i \cos \varphi_i \\ \cos \theta_i \sin \varphi_i \end{bmatrix}.$$

Угол  $\theta$  выбран таким образом, чтобы при  $\theta = 0$  на спутник не будет действовать аэродинамическая сила. Примем, что угол  $\theta$  изменятся в пределах  $[0; \pi/2]$ , так как при  $\theta < 0$  необходимо рассматривать уже другую сторону пластины и её нормаль – молекулы атмосферы будут сталкиваться с обратной поверхностью. Для однозначности будем поворачивать пластину в сторону набегающего потока только одной стороной. Угол  $\varphi \in [0, 2\pi)$ .

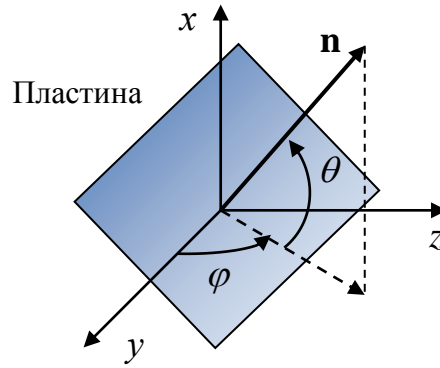


Рис. 2. Углы для задания ориентации нормали к поверхности в ОСК

В орбитальной системе координат  $\mathbf{e}_V = [1 \ 0 \ 0]^T$ . Подставив значения для  $\mathbf{n}_i$  и  $\mathbf{e}_V$  в выражение для аэродинамической силы (5), получим

$$\mathbf{f}_i = k \begin{bmatrix} -2\varepsilon(\sin \theta_i)^3 + \eta(\varepsilon - 1)(\sin \theta_i)^2 + (\varepsilon - 1)\sin \theta_i \\ -\cos \theta_i \sin \theta_i (\eta - \varepsilon\eta + 2\varepsilon \sin \theta_i) \cos \varphi_i \\ -\cos \theta_i \sin \theta_i (\eta - \varepsilon\eta + 2\varepsilon \sin \theta_i) \sin \varphi_i \end{bmatrix}, \quad (6)$$

где  $k = \frac{1}{m} \rho V^2 S$ . Если ввести для упрощения следующие функции

$$\begin{aligned} p(\theta_i) &= -2\varepsilon(\sin \theta_i)^3 + \eta(\varepsilon - 1)(\sin \theta_i)^2 + (\varepsilon - 1)\sin \theta_i, \\ g(\theta_i) &= -\cos \theta_i \sin \theta_i (\eta - \varepsilon\eta + 2\varepsilon \sin \theta_i), \end{aligned} \quad (7)$$

то выражение для силы упростится до следующего:

$$\mathbf{f}_i = k \begin{bmatrix} p(\theta_i) \\ g(\theta_i) \cos \varphi_i \\ g(\theta_i) \sin \varphi_i \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Из записи (8) видно, что проекция силы на ось  $Ox$  зависит только от угла  $\theta$ . Проекция силы на плоскость  $Oyz$  определяется величиной  $g(\theta_i)$ , а положение вектора определяется углом  $\varphi$ . Если принять  $\varepsilon \approx 0.1$  и  $\eta = \nu/V \approx 0.1$ , то зависимость абсолютных значений функций  $p(\theta_i)$  и  $g(\theta_i)$  выглядит так, как показано на рис. 3. Максимальное значение силы в проекции на ось  $Ox$  достигается в точке  $\theta = 90$  град, т.е. когда пластина перпендикулярна набегающему потоку, при этом  $p \approx 1.2$ . Максимум силы в проекции на плоскость  $Oyz$  меньше на порядок –  $g \approx 0.12$  при  $\theta \approx 52$  град, причем в точках  $\theta = 0$  и  $\theta = 90$  град  $g = 0$ . Это приводит к тому, что создание силы в плоскости  $Oyz$  возможно только в случае ненулевой и не максимальной силы вдоль оси  $Ox$ .

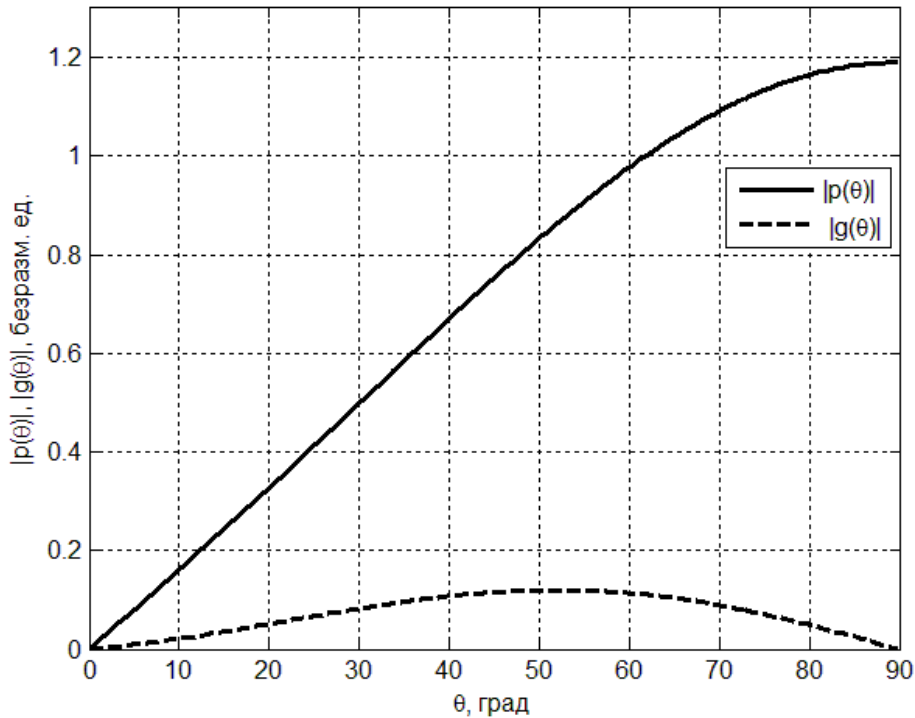


Рис. 3. Зависимость компонент аэродинамической силы от угла  $\theta$

Так как в работе рассматривается управление относительным движением двух спутников, то для управления необходимо рассчитать разницу аэродинамических сил, действующих на аппараты:

$$\Delta \mathbf{f} = \mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2 = k \begin{bmatrix} p(\theta_1) - p(\theta_2) \\ g(\theta_1) \cos \varphi_1 - g(\theta_2) \cos \varphi_2 \\ g(\theta_1) \sin \varphi_1 - g(\theta_2) \sin \varphi_2 \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Таким образом, разница двух аэродинамических сил задается четырьмя углами  $\theta_1, \theta_2, \varphi_1, \varphi_2$ , которые и определяют относительное движение центров масс аппаратов. Однако, так как проекция силы на плоскость  $Oyz$  мала, как видно из рис. 3, то проекцию разности сил  $\Delta \mathbf{f}$  на эту плоскость можно увеличить за счет задания  $\varphi_2 = \varphi_1 + \pi$ , тогда эта составляющая силы будет определяться значением  $g(\theta_1) + g(\theta_2)$ :

$$\Delta \mathbf{f} = k \begin{bmatrix} p(\theta_1) - p(\theta_2) \\ (g(\theta_1) + g(\theta_2)) \cos \varphi_1 \\ (g(\theta_1) + g(\theta_2)) \sin \varphi_1 \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Из рис.4 видно, что максимальная проекция разности сил на плоскость  $Oyz$  вдвое больше, чем проекция одной силы. На рис. 5 показана область возможных значений проекций  $\Delta \mathbf{f}$  на ось  $Ox$  и плоскость  $Oyz$  в нормированных на  $k$  значениях. Так как положение проекции в  $Oyz$  определяется углом  $\varphi_1$ , то, чтобы получить представление о возможных значениях векторов  $\Delta \mathbf{f}$  в трехмерном пространстве, нужно вращать фигуру на рис. 5 относительно оси ординат.

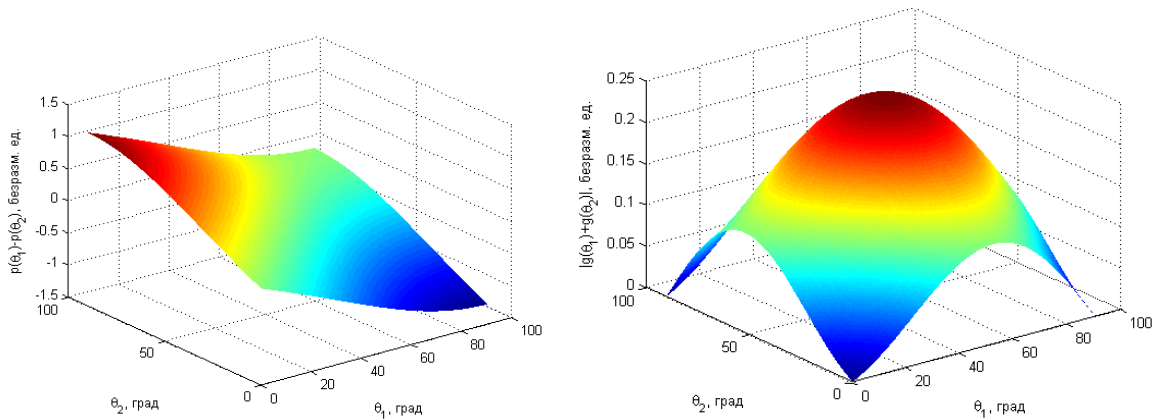


Рис. 4. Величины  $p(\theta_1) - p(\theta_2)$  и  $|g(\theta_1) + g(\theta_2)|$

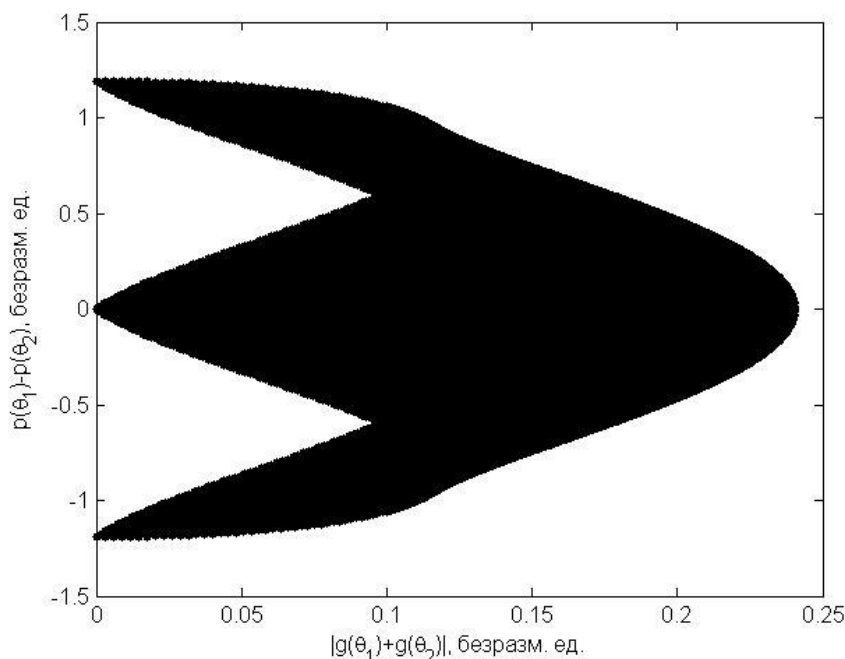


Рис. 5. Область управления

## 2. АЛГОРИТМ УПРАВЛЕНИЯ

Малые спутники, как правило, имеют ограничения по вычислительной мощности бортовых компьютеров. Поэтому представляется разумным использовать относительно простой алгоритм управления их движением. Будем считать, что на борту спутников установлена аппаратура, способная в режиме реального времени определять вектор состояния относительного движения – относительное положение и скорость. Этого можно достичь, например, используя обработку изображений с бортовой камеры [16]. Спутники с помощью бортовых датчиков автономно определяют свое угловое положение в орбитальной системе координат и с помощью системы управления ориентацией, например маховичной [17], обеспечивают необходимое угловое положение. Далее предположим, что между спутниками существует канал обмена информацией, по которому аппараты могут посылать как данные об угловом положении, так и управляющие команды для системы управления ориентацией. Пусть целью управления будет достижение требуемой траектории, которая строится исходя из свободного движения согласно уравнениям (1). В этих предположениях построим алгоритм управления с обратной связью на основе линейно-квадратического регулятора.

### 2.1. Линейно-квадратический регулятор

Представим уравнения движения (4) в виде линейной системы вида

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \quad (11)$$

где  $\mathbf{x} = [\mathbf{r}^T \mathbf{v}^T]^T$  – вектор состояния,  $\mathbf{A}$  – матрица динамики системы, которая имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} & E \\ C & D \end{bmatrix}, \quad E - \text{единичная матрица размером } 3 \times 3,$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & 3\omega^2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2\omega \\ 0 & 0 & 0 \\ 2\omega & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$B$  – матрица управления

$$B = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} \\ E \end{bmatrix},$$

$\mathbf{u}$  – вектор управления  $\mathbf{u} = \Delta \mathbf{f}$ .

Пусть требуемое движение соответствует свободному движению системы и описывается уравнениями:

$$\dot{\mathbf{x}}_d = A\mathbf{x}_d.$$

Тогда можно записать линейное уравнение для описания динамики отклонения траектории от требуемой,

$$\dot{\mathbf{e}} = A\mathbf{e} + B\mathbf{u}, \quad (12)$$

где  $\mathbf{e} = [\mathbf{x}^T - \mathbf{x}_d^T]^T$ .

При построении линейно-квадратического регулятора рассматривается обратная связь вида  $\mathbf{u} = K\mathbf{e}$ , обеспечивающая минимизацию функционала

$$J = \int_0^{\infty} (\mathbf{e}^T Q \mathbf{e} + \mathbf{u}^T R \mathbf{u}) dt \quad (13)$$

вдоль траектории системы. Здесь  $Q, R$  – положительно определенные матрицы, определяющие вес ошибок по вектору состояния и вес расхода ресурса управления соответственно.

Обратная связь, минимизирующая функционал, определяется уравнением

$$\mathbf{u} = -R^{-1} B^T P \mathbf{e}, \quad (14)$$

где матрица  $P$  находится из решения уравнения Риккати

$$A^T P + P A - P B R^{-1} B^T P + Q = 0. \quad (15)$$

Задав весовые матрицы  $Q$  и  $R$ , можно решить уравнение Риккати (15) относительно матрицы  $P$  и, зная текущий вектор ошибок траектории  $\mathbf{e}$ , вычислить вектор управления. Матрицы  $Q$  и  $R$  являются параметрами алгоритма и определяют качество переходных процессов. Возникает задача выбора таких матриц, которые бы обеспечили требуемое быстроедействие алгоритма при заданных ограничениях на управление.

## 2.2. Вычисление ориентации спутников при заданном управлении

Пусть согласно алгоритму управления с обратной связью (14) вычислено управляющее воздействие  $\mathbf{u}$ . Возникает задача вычисления таких углов ориентации спутников  $\theta_1, \theta_2, \varphi$ , которые бы реализовали вектор  $\mathbf{u}$  с помощью разно-

сти аэродинамических сил  $\Delta \mathbf{f}$  (10). Для этого необходимо решить следующую систему нелинейных уравнений:

$$\begin{cases} p(\theta_1) - p(\theta_2) = \tilde{u}_1, \\ (g(\theta_1) + g(\theta_2)) = -\sqrt{\tilde{u}_2^2 + \tilde{u}_3^2}. \end{cases} \quad (16)$$

Здесь  $p(\theta)$ ,  $g(\theta)$  – функции, определенные в (7),  $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u} / k = [\tilde{u}_1 \ \tilde{u}_2 \ \tilde{u}_3]^T$  – безразмерный вектор управления. Угол  $\varphi$  определяется из системы

$$\cos \varphi = \frac{u_2}{\sqrt{u_2^2 + u_3^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{u_3}{\sqrt{u_2^2 + u_3^2}}.$$

Аналитическое решение системы уравнений (16) достаточно громоздко, поэтому здесь оно не приводится. Система (16) в зависимости от величины вектора  $\tilde{\mathbf{u}}$  может не иметь решений, иметь единственное решение и иметь два решения. Это можно продемонстрировать графически. Если задаться параметрами аэродинамической силы  $\varepsilon \approx 0.1$  и  $\eta = v/V \approx 0.1$ , то поверхности функций  $p(\theta_1) - p(\theta_2)$  и  $|g(\theta_1) + g(\theta_2)|$  приобретают вид, приведенный на рис. 4. Плоскость, задаваемая уравнением  $\tilde{u}_1 = const$ , пересекается с поверхностью  $p(\theta_1) - p(\theta_2)$  вдоль некоторой кривой, как показано на рис. 6а. Эта кривая задает множество решений уравнения  $p(\theta_1) - p(\theta_2) = \tilde{u}_1$ . Если на этом множестве построить график функции  $|g(\theta_1) + g(\theta_2)|$  и найти точки пересечения с плоскостью  $\sqrt{\tilde{u}_2^2 + \tilde{u}_3^2} = const$ , то эти точки и будут решением системы (16) (см. рис. 6б). В случае отсутствия этих точек пересечения система не имеет решения и расчетное управление нереализуемо. В случае двух точек пересечения, как, например, на рис. 6б, необходимо выбрать только одно решение. Из двух решений представляется разумным выбирать то, которое соответствует меньшей сумме углов  $\theta_1 + \theta_2$ , чтобы уменьшить абсолютное значение аэродинамической силы сопротивления, действующей на спутники, и тем самым увеличить время жизни группы спутников.

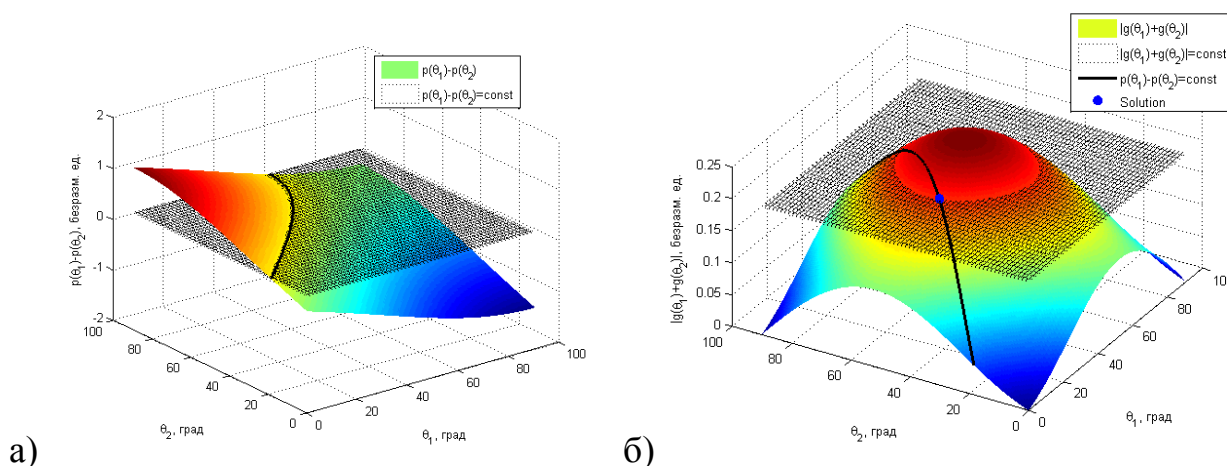


Рис. 6. Графическое решение системы (16)

Из рис. 6 можно заранее сказать, что управление будет нереализуемым, если расчетное управление будет лежать вне интервалов  $\tilde{u}_1 \notin [-1.19; 1.19]$  и  $\sqrt{\tilde{u}_2^2 + \tilde{u}_3^2} \notin [0; 0.24]$ . Это может произойти в случае, если неудачно выбраны параметры алгоритмов управления. Однако нереализуемым управление может быть и внутри указанных интервалов, если решения системы (16) не будет существовать. Область допустимых значений реализуемого управления представлена на рис. 5. Следует определиться, что делать, если вычисленное управляющее воздействие нереализуемо. Такая ситуация возможна при больших отклонениях траектории от желаемой на этапе переходных процессов.

В случае если реализовать расчетный вектор управления  $\tilde{\mathbf{u}}$  полностью невозможно, представляется разумным постараться реализовать хотя бы какие-то его компоненты. Наибольший ресурс управления имеется по компоненте  $\tilde{u}_1$  и, кроме того, управление по оси  $Ox$  влияет на движение по оси  $Oz$ , как видно из уравнений движения (4). Поэтому можно отдать приоритет реализации управления по компоненте  $\tilde{u}_1$ . В случае, если  $\tilde{u}_1 \notin [-1.19; 1.19]$ , следует реализовать предельное значение  $\Delta f_1 = -1.19$  или  $\Delta f_1 = 1.19$  в зависимости от знака  $\tilde{u}_1$ , а остальные компоненты  $\Delta f_2, \Delta f_3$  окажутся равными нулю. Если же  $\tilde{u}_1 \in [-1.19; 1.19]$ , а решения системы (16) нет, то можно точно реализовать  $\Delta f_1 = \tilde{u}_1$ , но при этом выбрать такие  $\theta_1^*$  и  $\theta_2^*$ , удовлетворяющие  $p(\theta_1^*) - p(\theta_2^*) = \tilde{u}_1$ , при которых  $|g(\theta_1) + g(\theta_2)|$  будет максимальным. Тогда

$$\Delta f_2 = \frac{(g(\theta_1^*) + g(\theta_2^*))\tilde{u}_2}{\sqrt{\tilde{u}_2^2 + \tilde{u}_3^2}}, \quad \Delta f_3 = \frac{(g(\theta_1^*) + g(\theta_2^*))\tilde{u}_3}{\sqrt{\tilde{u}_2^2 + \tilde{u}_3^2}}. \quad (17)$$

В этом случае  $\Delta f_2$  и  $\Delta f_3$  будут пропорциональны расчетным значениям  $\tilde{u}_2$  и  $\tilde{u}_3$ .

### 2.3. Методика исследования

Для выбора параметров ЛКР, которые бы не приводили к насыщению управления и при этом обеспечивали бы наилучшую скорость сходимости, можно воспользоваться следующим подходом для моделирования отклонения траектории. Пусть в начальный момент времени отклонение траектории  $\mathbf{e}_0$  находится внутри эллипсоида, который задается следующим образом:

$$\mathbf{e}_0^T P_0^{-1} \mathbf{e}_0 = 1.$$

Здесь  $P_0$  – положительно определенная матрица. В случае если начальное отклонение  $\mathbf{e}_0$  является случайной нормально распределенной величиной, то  $P_0$  можно определить как ковариационную матрицу вида

$$P_0 = M(\mathbf{e}_0 \mathbf{e}_0^T),$$

которая определяет вероятность нахождения случайного вектора  $\mathbf{e}_0$  внутри эллипсоида. Однако с помощью матрицы  $P_0$  можно задать эллипсоид, используя

информацию о предельно возможных отклонениях независимо от предположения о случайности вектора  $\mathbf{e}_0$ . Эта информация может быть доступна, например, в случае известных ошибок отделения спутников от ракетносителя или в случае заранее заданных маневров перехода с одной относительной орбиты на другую для конкретной миссии. Допустим, известно, что предельные отклонения траектории для компоненты  $e_i$  составляют величину  $\sigma_i$  и нет корреляции между компонентами вектора  $\mathbf{e}_0$ . Тогда матрица  $P_0$  будет диагональной вида

$$P_0 = \text{diag}(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_3^2, \sigma_4^2, \sigma_5^2, \sigma_6^2).$$

При исследовании алгоритмов управления будем предполагать, что относительный дрейф спутников в начальный момент времени равен нулю. Дело в том, что дрейф приводит к неограниченному увеличению относительного расстояния по оси  $x$ , поэтому при его наличии в первую очередь необходимо максимально быстро его устранить или свести к минимуму. Для этого на начальном этапе следует приложить по трансверсали максимальную силу  $\Delta f_x$  противоположного знака с относительным дрейфом, т.е. ориентировать панели одного из спутников перпендикулярно набегающему потоку, а другого – вдоль. Это достаточно очевидное управление для устранения дрейфа и в настоящей работе не рассматривается.

Для того чтобы задать с помощью матрицы  $P_0$  все возможные начальные отклонения  $\mathbf{e}_0$ , исключая те, что соответствуют траекториям с ненулевым дрейфом, введем корреляцию между отклонениями по скорости по оси  $x$   $\sigma_4$  и координатой по оси  $z$   $\sigma_3$  по формуле

$$\sigma_4 = -2\omega\sigma_3.$$

Остальные компоненты вектора  $\mathbf{e}$  между собой предполагаются некоррелированными.

Модель изменения вектора ошибок задается формулой (12), что с учетом управления с обратной связью приводит к линейной системе вида

$$\dot{\mathbf{e}} = (A - BK)\mathbf{e}.$$

Тогда закон изменения матрицы  $P$  записывается через уравнение Рикатти,

$$\dot{P} = FP + PF^T, \quad (18)$$

где

$$F = A - BK.$$

Если проинтегрировать матричное уравнение (18), то можно получить эллипсоид отклонений в любой момент времени. Собственное число матрицы  $F$  с максимальной действительной частью определяет скорость сходимости управляемой системы.

Управление с обратной связью

$$\mathbf{u} = -K\mathbf{e}$$

задает преобразование эллипсоида отклонений, определяемого матрицей  $P$ , в эллипсоид в пространстве управления с матрицей



$$P_u = KPK^T. \quad (19)$$

Чтобы не было насыщения управления, необходимо, чтобы этот эллипсоид находился внутри области допустимых значений разности сил  $\Delta f$ . Эта область может быть получена путём вращения фигуры, изображенной на рис. 5, относительно оси ординат, как было сказано выше. Однако эта область допустимых значений управления достаточно сложная. Аппроксимируем её с помощью цилиндра, описанного вокруг неё. Тогда если эллипсоид управления вписан в этот цилиндр, как изображено на рис. 7, то управление не будет приходить в насыщение. Однако следует заметить, что и в этом случае управление может не быть точно реализовано, если система уравнений (16) не будет иметь решения.

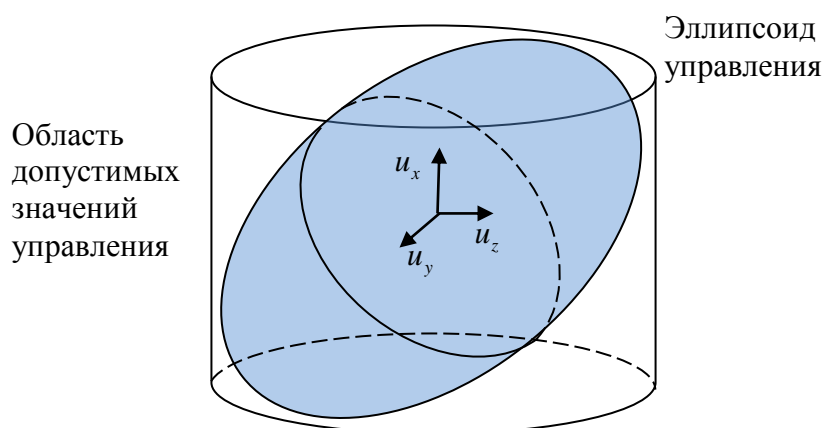


Рис. 7. Эллипсоид управления, вписанный в область реализуемых значений управления

Таким образом, при выборе параметров алгоритмов управления для обеспечения ненасыщения следует руководствоваться следующей методикой. При заданных предельных значениях начальных отклонений траектории  $e_0$  строится ковариационная матрица  $P_0$ . Она используется как начальные условия для уравнения Риккати (18). В матрицу обратной связи  $K$  входят параметры алгоритма управления – матрицы  $Q$  и  $R$  для ЛКР. Изменение этих параметров влияет на динамику системы и, соответственно, на изменение матрицы  $P$ . Если проинтегрировать уравнение Риккати на одном витке управляемого полета и для каждой точки рассчитать по формуле (19) матрицу для управления  $P_u$ , то нужно задать такие параметры алгоритмов, чтобы эллипсоид, определяемый матрицей  $P_u$ , в каждой точке был вписан в область допустимых значений управления. Продемонстрируем эту методику на конкретных примерах.

### 3. ИССЛЕДОВАНИЕ АЛГОРИТМА

При выборе параметров алгоритмов управления необходимо учитывать ограничения на значение управления и задавать их таким образом, чтобы в управлении не было насыщения при некотором заранее определенном векторе ошибок траектории. Кроме того, важной характеристикой переходных процес-

сов является скорость сходимости – на допустимом множестве параметров алгоритмов следует выбирать те, которые обеспечивают максимальную степень устойчивости для уравнения ошибок траектории (12). В этом разделе проводится исследование алгоритма управления для выбора наилучших параметров с точки зрения обеспечения ненасыщения управления при заданных ошибках и максимизации скорости сходимости во время переходных процессов.

### 3.1. Нахождение параметров алгоритма

Рассмотрим околокруговую орбиту с высотой  $h = 340$  км, по которой движется один из спутников. Второй спутник движется на небольшом расстоянии относительно первого. На этой высоте при средней солнечной активности (индекс 150) плотность ночной атмосферы примерно равна  $\rho \approx 10^{-11}$  кг/м<sup>3</sup> (согласно ГОСТ [18]). На первом этапе исследования будем считать её постоянной вдоль всей орбиты.

Параметры спутников возьмем такими же, как у микроспутника "Таблет-Сат-Аврора" [19]. Спутник оснащен 6 солнечными батареями, располагающимися в одной плоскости. Суммарная площадь пластин составляет  $S = 0.6$  м<sup>2</sup>. Центральная часть имеет форму цилиндрического восьмиугольника. Разница между максимальной и минимальной площадью сечения центральной части при повороте спутника незначительна, поэтому будем считать, что площадь сечения центральной части не зависит от ориентации спутника и составляет  $S_0 = 0.1$  м<sup>2</sup>. Масса микроспутника составляет  $m = 26$  кг.

В предположении, что атмосфера на высоте 340 км неподвижна, скорость набегающего потока вычислим как скорость движения спутника по орбите по формуле

$$V = \sqrt{\frac{\mu}{R_E + h}} \approx 7.69 \text{ км/с},$$

где  $R_E = 6371$  км – средний радиус Земли.

Для заданных параметров орбиты и аппарата вычислим коэффициент  $k$  в формуле ускорения от аэродинамической силы

$$k = \frac{1}{m} \rho V^2 S \approx 1.4 \cdot 10^{-5} \text{ м/с}^2.$$

Рассмотрим переход с одной замкнутой относительной траектории на некоторую другую замкнутую орбиту. Пусть в начальный момент предельное отклонение траектории от опорной задано. В качестве примера примем:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_3 = 100 \text{ м}, \\ \sigma_2 &= 10 \text{ м}, \\ \sigma_4 &= -2\omega\sigma_{z_0}, \\ \sigma_5 &= \sigma_6 = 0.01 \text{ м/с}. \end{aligned} \tag{20}$$

Тем самым зададим отклонение по нормали к орбите на порядок меньше, чем в плоскости орбиты, а также свяжем между собой  $\sigma_4$  и  $\sigma_3$ , чтобы получить замкнутые относительные орбиты. Ковариационная матрица будет иметь вид

$$P_0 = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3^2 & \sigma_3\sigma_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3\sigma_4 & \sigma_4^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_5^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_6^2 \end{bmatrix}.$$

Зададим матрицы  $Q$  и  $R$ . Матрица  $Q$  в функционале (13) является весовой матрицей для отклонения траектории. Пусть для определенности она будет единичной. Матрица  $R$  является весовой для управления. Так как для аэродинамической силы максимальная величина в плоскости и вне плоскости отличаются в несколько раз, то разумно рассмотреть диагональную матрицу вида

$$R = \text{diag}(r_x, r_{yz}, r_{yz}).$$

Проведем исследование, при каких значениях параметров  $r_x$  и  $r_{yz}$  на заданных ошибках начальных отклонений (20) управление не будет насыщаться, т.е.  $\tilde{u}_1 \in [-1.19; 1.19]$  и  $\sqrt{\tilde{u}_2^2 + \tilde{u}_3^2} \in [0; 0.24]$ , как указано в разделе 2.3. На рис. 8а изображены изолинии величин  $\tilde{u}_1$  и  $\sqrt{\tilde{u}_2^2 + \tilde{u}_3^2}$  в зависимости от параметров  $r_x$  и  $r_{yz}$  и выделены предельные значения, выше которых наступает насыщение. Во всей области допустимых значений управления разумно выбрать такие параметры, которые соответствуют максимальной скорости сходимости. На рис. 8б изображены изолинии самых правых действительных частей характеристических корней уравнения движения. Таким образом, для заданного эллипсоида начальных отклонений значения при параметрах  $r_x = 4.5 \cdot 10^{13}$  и  $r_{yz} = 4 \cdot 10^{14}$  управление не будет приходить в насыщение, а ошибки будут сходиться с максимальной скоростью.

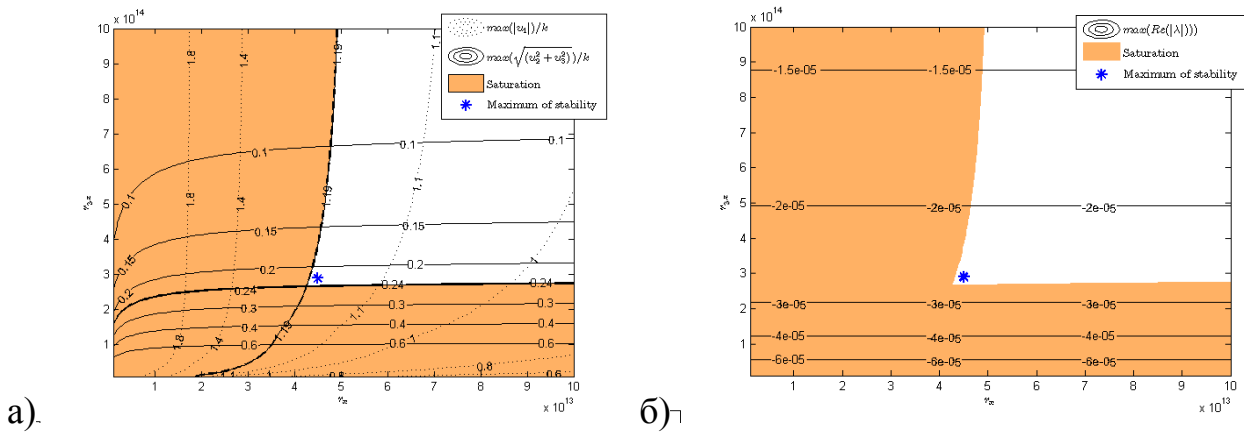


Рис. 8. Области параметров, приводящие к насыщению управления (а), и точка с максимальной степенью сходимости (б)

### 3.2. Моделирование управляемого движения

Проведем математическое моделирование управляемого движения с найденными параметрами, чтобы убедиться, что управление не будет насыщаться, а отклонение траектории сойдется к нулю. Для этого зададим сначала значения констант  $c_1 - c_6$  в начальный момент времени для линейной модели (2), например,

$$c_1 = 0, c_2 = 0, c_3 = 200\text{м}, c_4 = 0, c_5 = 20\text{м}, c_6 = 0. \quad (21)$$

Опорная траектория пусть задается константами  $\tilde{c}_1 - \tilde{c}_6$ :

$$\tilde{c}_1 = 0, \tilde{c}_2 = 0, \tilde{c}_3 = 100\text{м}, \tilde{c}_4 = 0, \tilde{c}_5 = 10\text{м}, \tilde{c}_6 = 0. \quad (22)$$

Такие условия задают начальные отклонения траектории и скоростей:

$$\Delta x = 0, \Delta y = 0, \Delta z = 100\text{м}, \Delta \dot{x} = -0.23\text{м/с}, \Delta \dot{y} = 0.01\text{м/с}, \Delta \dot{z} = 0.$$

При этом выполняется

$$\Delta \dot{x} = -2\omega \Delta z.$$

Это означает, что выбранные начальная и опорная траектории являются частным случаем множества, задаваемого эллипсоидом с параметрами (20).

Таким образом, рассмотрим в качестве примера переход с некоторой начальной замкнутой орбиты на замкнутую опорную орбиту меньшего размера. Примем наилучшие с точки зрения сходимости параметры регулятора  $r_x = 4.5 \cdot 10^{13}$  и  $r_{yz} = 4 \cdot 10^{14}$ . На рис. 9 показаны исходная и опорная относительные орбиты и траектория аппарата. Из рисунка видно, что траектория аппарата постепенно сходится к опорной орбите. На рис. 10 изображены графики покомпонентных отклонений координат и скоростей от опорного движения.

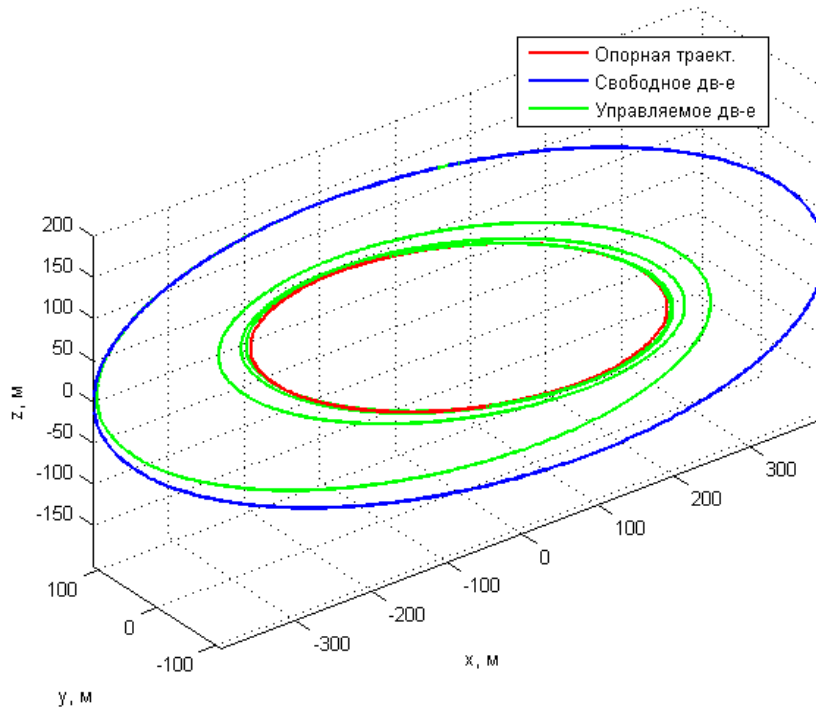


Рис. 9. Опорная траектория и управляемое движение

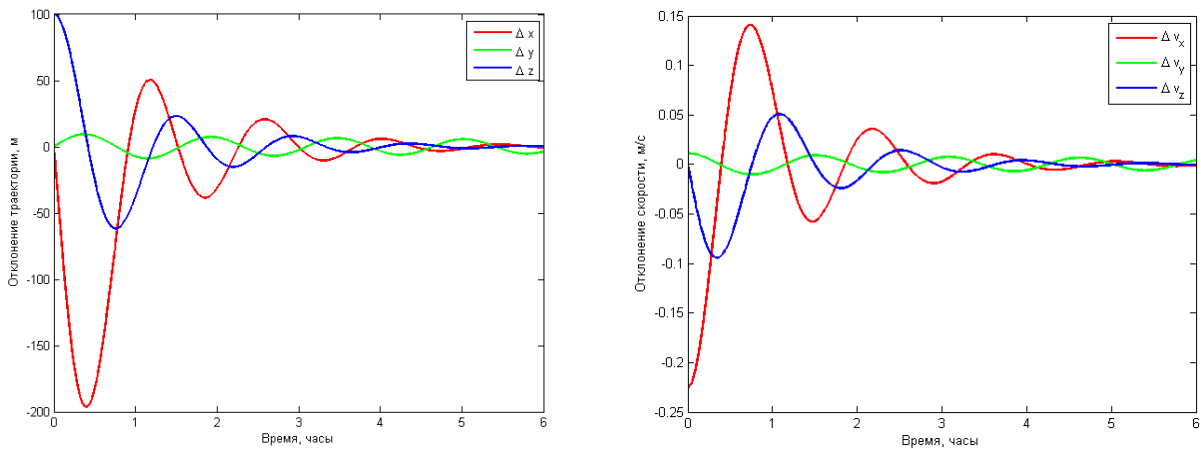


Рис. 10. Отклонение траектории и скорости от опорной орбиты

Так как рассматриваемый пример относительной траектории является частным случаем начальных отклонений, заданных эллипсоидом с параметрами (20), управление с  $r_x = 4.5 \cdot 10^{13}$  и  $r_{yz} = 4 \cdot 10^{14}$  не будет насыщаться, т.е. выходить за пределы  $\tilde{u}_1 \in [-1.19; 1.19]$  и  $\sqrt{\tilde{u}_2^2 + \tilde{u}_3^2} \in [0; 0.24]$ , что можно увидеть из рис. 11а. Однако реализованное управление будет несколько отличаться от расчетного, так как расчетное управление может быть вне области допустимого управления. На рис. 11б представлено реализованное управление, а на рис. 12а – разность расчетного и реализованного управлений. Расчетное и реализованное управления не совпадают, когда расчетное управление выходит из области, представленной на рис. 12б. В этом случае алгоритм нацелен наиболее близко

реализовать компоненту управления по оси  $Ox$ , а по остальным осям управление вычисляется по формулам (17). Каждому значению реализованного управления соответствует набор углов, задающих ориентацию векторов нормали к плоским частям спутника, записанных в орбитальной системе координат. Углы представлены на рис. 13.

Так как требуемая ориентация обеспечивается с помощью бортовой системы управления, например маховичной, то существует ограничение на максимальное угловое управляющее воздействие. Поэтому в случае, если разность расчетных углов ориентации на двух последовательных шагах управления превышает максимально допустимое значение, определяемое системой управления ориентации, то реализуются не расчетное, а максимально возможное приращение углов, вследствие чего также возникают ошибки управления. В частности, вследствие требуемых, но нереализуемых быстрых разворотов возникает ошибка по управлению по компоненте  $Ox$ , что видно из рис. 12а. В настоящей работе угловое движение детально не моделируется, поэтому считается, что угловое положение обеспечивается системой управления ориентации точно за исключением быстрых поворотов, а максимальное угловое управляющее ускорение принято за  $1 \text{ град/с}^2$ .

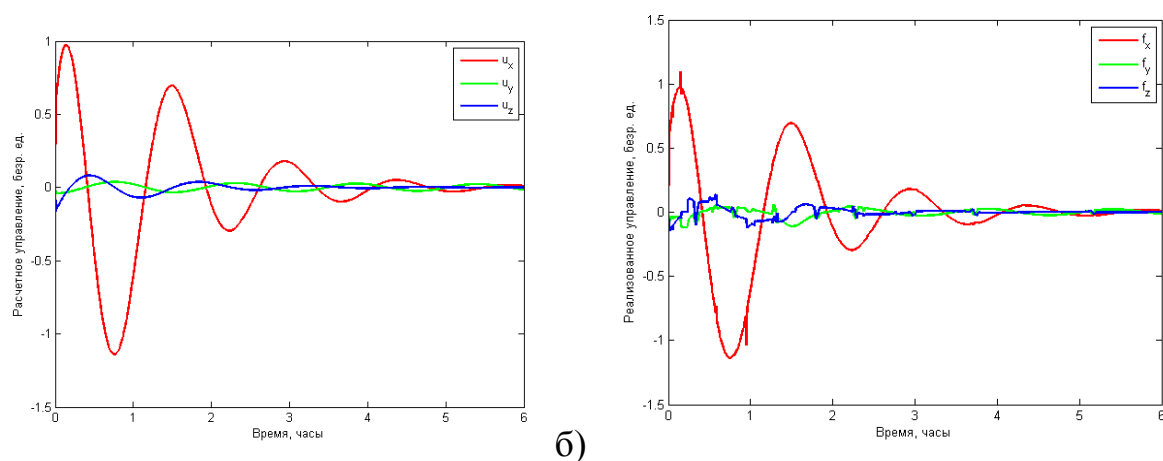


Рис. 11. Расчетное (а) и реализованное (б) управление

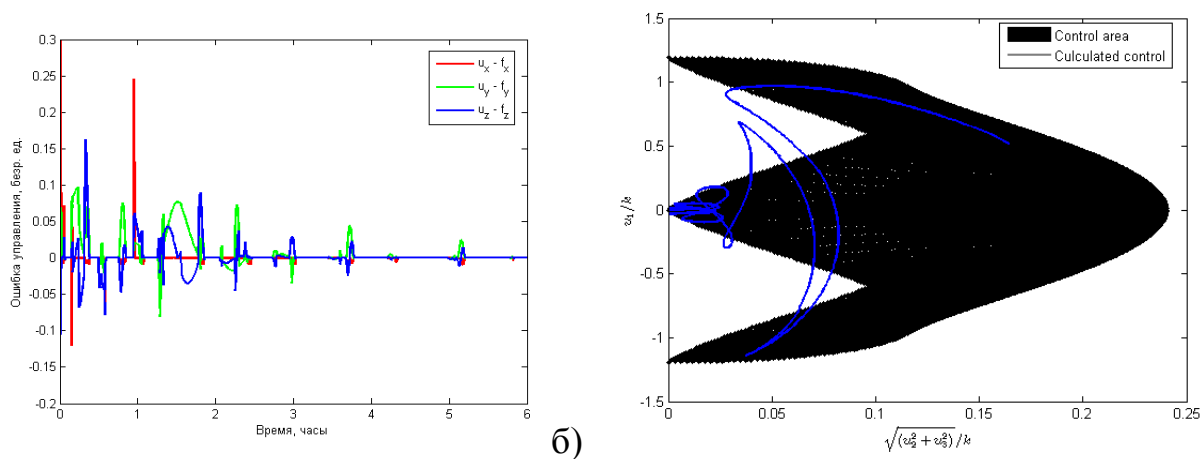


Рис. 12. Разница расчетного и реализованного управления и область управления

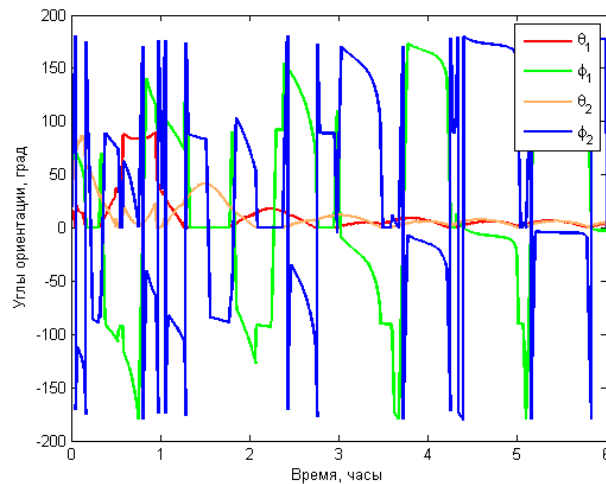


Рис. 13. Углы ориентации для задания нормалей к плоскости для двух спутников

На рис. 14 для примера продемонстрировано изменение компонент вектора нормали к плоской части одного из спутников в орбитальной системе координат (рис. 14а) и соответствующий ему годограф вектора нормали для первого спутника. Из рисунка видно, что в начале моделирования вектор нормали почти сонаправлен оси  $Ox$ , когда требуется реализовать большое управляющее воздействие по этой оси, но после вектор нормали становится параллелен плоскости  $Oyz$ , когда расчетное управление мало.

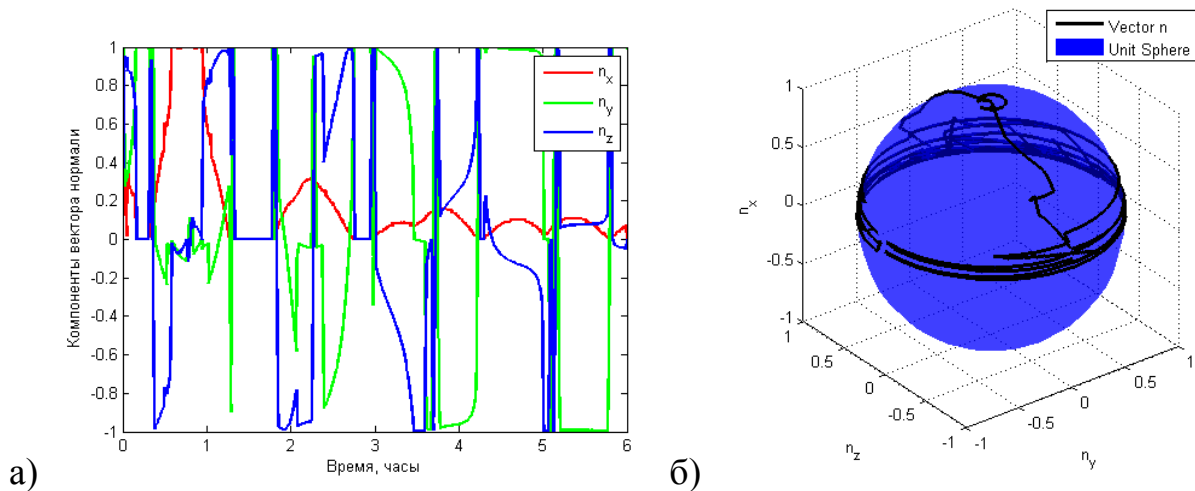


Рис. 14. Компоненты вектора нормали 1-го спутника (а) и траектория конца вектора на единичной сфере (б)

Рассмотрим, как будут меняться параметры ЛКР  $r_x$  и  $r_{yz}$  при изменении начальных отклонений траектории. В качестве примера будем изменять параметры отклонения по координатам  $x$  и  $z$ :  $\sigma_1 = \sigma_3 = \sigma$ . При выборе параметров  $r_x$  и  $r_{yz}$  из допустимой области, не приводящей к насыщению, будем выбирать те, которые соответствуют максимальной степени устойчивости, как изображено на рис. 8. На рис. 15 представлен график параметров управления при изме-

нении отклонения траектории  $\sigma$  в пределах от 50 до 500 м. Эта зависимость показывает, какие параметры следует выбирать, чтобы расчетное управление при заданных начальных отклонениях не превышало реализуемого управления. Используя разработанную методику, можно построить подобные зависимости для любых возможных начальных отклонений как по координатам, так и по скоростям, например зная ошибки отделения от ракетносителя, и заложить на борт соответствующие параметры ЛКР.

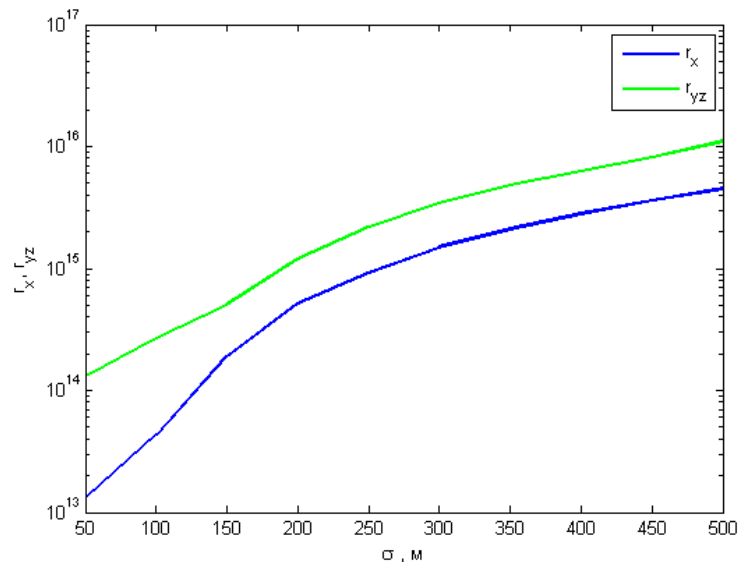


Рис. 15. Параметры ЛКР в области допустимого управления с максимальной степенью устойчивости

### 3.3. Влияние возмущений

На низких околокруговых орбитах основными источниками возмущений относительного движения группы спутников являются вторая гармоника  $J_2$  разложения гравитационного поля Земли и влияние слабой эллиптичности орбит. Однако наибольшие возмущения на движение вносят ошибки управления, вызванные неточным знанием плотности атмосферы. Плотность атмосферы на низких околоземных орбитах может меняться в несколько раз вдоль круговой орбиты и зависит от освещенности атмосферы в точке полета, а также от активности Солнца. Модели плотности атмосферы, например ГОСТ "Атмосфера Земли верхняя. Модель плотности для баллистического обеспечения полётов искусственных спутников Земли" [18], всегда имеют некоторую ошибку, и использование этих моделей для расчета плотности на возможно слабом бортовом компьютере может вызвать затруднения. Поэтому исследуем движение двух спутников в случае, если алгоритм управления построен по линейной модели (11) с постоянной плотностью атмосферы, моделируемое движение учитывает эллиптичность орбиты и вторую гармонику  $J_2$ , а плотность атмосферы меняется согласно модели [18].

Для демонстрации работы алгоритма управления возьмем те же параметры моделирования, что и для примера управления с использованием линейной мо-



дели, как описано в разделе 3.1. Интегрирование орбитального движения каждого спутника производится в инерциальной системе координат, а вычисление относительного движения получается путем перевода разницы положений и скоростей в орбитальной системе координат. Уравнения движения в инерциальной системе координат записываются следующим образом:

$$\ddot{\mathbf{R}}_i = -\frac{\mu}{R_i^3} \mathbf{R}_i + \mathbf{D}_i^{J_2} + \mathbf{F}_i^a,$$

$$\mathbf{D}_i^{J_2} = \frac{\delta}{R_i^5} \left( \frac{5Z_i^2}{R_i^2} - 1 \right) \mathbf{R}_i - 2 \frac{\delta}{R_i^5} Z_i \mathbf{Z}_i.$$

Здесь  $\mathbf{R}_i = [X_i, Y_i, Z_i]$  – радиус-вектор  $i$ -го спутника в ИСК,  $\mathbf{D}_i^{J_2}$  – вектор возмущений от второй гармоники разложения гравитационного поля Земли,  $\delta = 3J_2\mu R_E^2/2$ ,  $J_2 = 1082.6 \cdot 10^{-6}$  – вторая гармоника разложения гравитационного поля Земли,  $R_E = 6.378 \cdot 10^6$  м – средний радиус Земли,  $\mathbf{F}_i^a$  – аэродинамическая сила в ИСК, действующая на  $i$ -й спутник. Аэродинамическая сила вычисляется по формуле (5), где все векторы должны быть записаны в ИСК, а плотность атмосферы считается непостоянной и рассчитывается согласно модели ГОСТ. Относительное положение  $\mathbf{r}$  и относительная скорость  $\mathbf{v}$  двух спутников в орбитальной системе координат вычисляется по формулам

$$\mathbf{r} = G(\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1),$$

$$\mathbf{v} = G \left[ (\dot{\mathbf{R}}_2 - \dot{\mathbf{R}}_1) + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1) \right],$$
(23)

где  $G$  – матрица перехода из ИСК в ОСК,  $\boldsymbol{\omega}$  – орбитальная угловая скорость, записанная в ИСК.

Для расчета плотности по модели ГОСТ необходимо задать момент начала моделирования, уровень солнечной активности  $F_0$ , среднесуточный индекс солнечной активности, планетарные среднесуточные индексы геомагнитной возмущенности и другие параметры модели. Для определенности рассмотрим дату старта  $t_0 - 1$  января 2012 года 0 часов 00 минут. Для этой даты известны все эти параметры модели, в частности  $F_0 = 125 \cdot 10^{-2}$  Вт/(м<sup>2</sup> · Гц), что характеризуется как средний уровень солнечной активности.

Наклонение орбиты  $i = 51.7^\circ$ , для первого спутника зададим такие начальные условия, при которых в центральном поле притяжения он двигался бы по круговой орбите, т.е. в плоскости орбиты зададим скорость  $\dot{R}_1(t_0) = \sqrt{\mu/(R_E + h)}$  перпендикулярно радиус-вектору, а начальные условия для второго аппарата – в соответствии с константами (21). Векторы положения и скорости второго спутника в ОСК будут выглядеть следующим образом:

$$\mathbf{r}(t_0) = \begin{bmatrix} c_2 + 2c_2 + c_4 \\ c_6 \\ 2c_1 + c_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}(t_0) = \begin{bmatrix} -3c_1\omega - 2c_3\omega \\ \omega c_5 \\ 2c_2\omega \end{bmatrix}.$$

Векторы положения и скорости в ИСК вычисляются так:

$$\mathbf{R}_2(t_0) = \mathbf{R}_1(t_0) + G^T \mathbf{r}(t_0),$$

$$\dot{\mathbf{R}}_2(t_0) = \dot{\mathbf{R}}_1(t_0) + G^T \mathbf{v}(t_0) + \boldsymbol{\omega} \times (G^T \mathbf{r}(t_0)).$$

В результате интегрирования уравнений движения для двух спутников с заданными начальными условиями методом Рунге-Кутты 4-го порядка с переменным шагом и контролем точности получаются траектории и скорости движения в ИСК, которые пересчитываются в относительные по формулам (23). И эти значения передаются в алгоритм управления (13), построенном по линейной модели и в предположении постоянной плотности атмосферы. На рис. 15 представлены относительные траектории двух аппаратов при перелете с заданной согласно (21) относительной траектории на опорную, согласно (22).

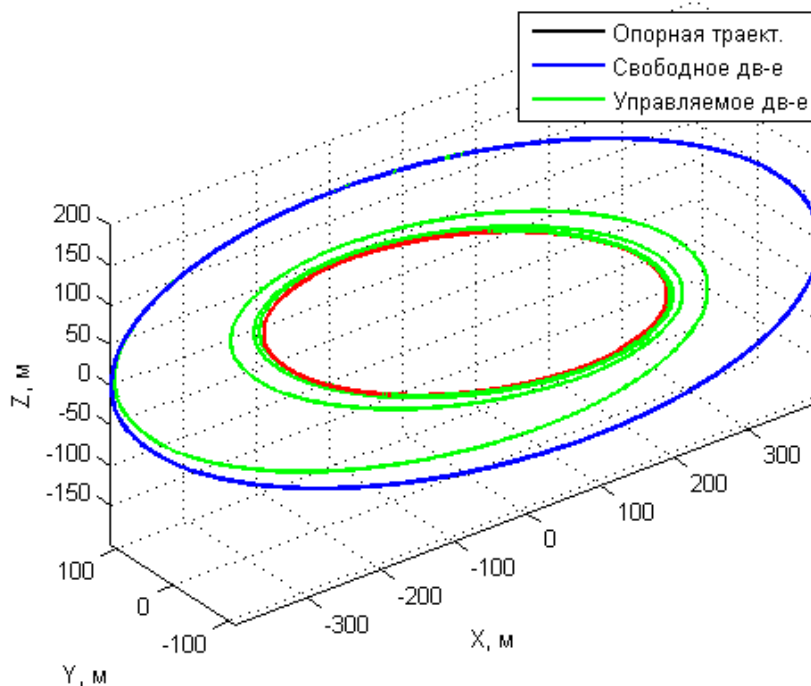


Рис. 15. Опорная траектория и управляемое движение

Управляемое движение, изображенное на рис. 15, несколько отличается от траектории, изображенной на рис. 9 и построенной по линейной модели. На рис. 16 представлена покоординатная разность траекторий управляемого движения, построенная по линейной модели и по полной. Плотность атмосферы при движении по орбите согласно модели ГОСТ отличается от постоянной  $10^{-11}$  кг/м<sup>3</sup>, как принято в алгоритме управления, почти в 1,5 раза в некоторых точках орбиты (рис. 16). Высота орбиты колеблется с амплитудой 12 км на витке вследствие нецентральности гравитационного поля (рис. 17), а также плавно

уменьшается под действием торможения о верхние слои атмосферы (около 0.1 км за 6 часов).

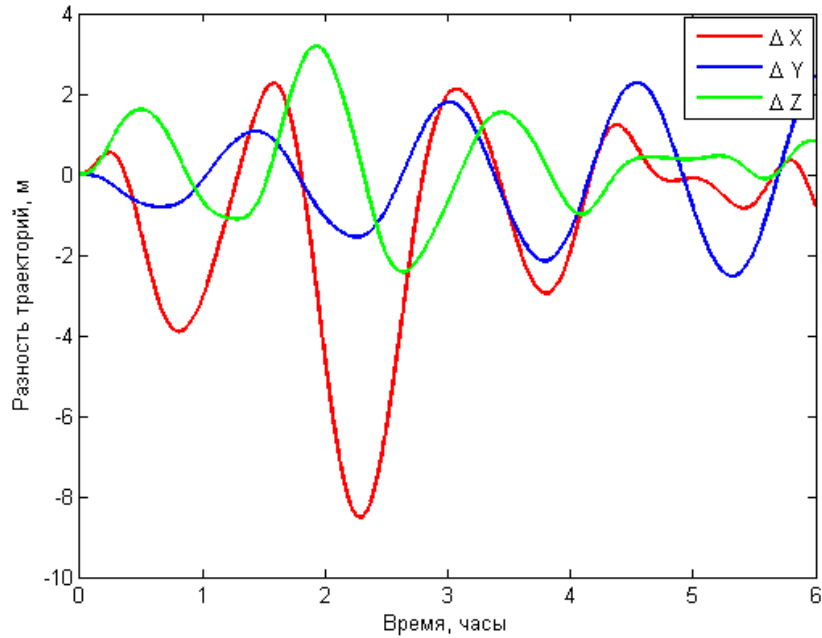


Рис. 16. Разность опорной траекторий и управляемого движения

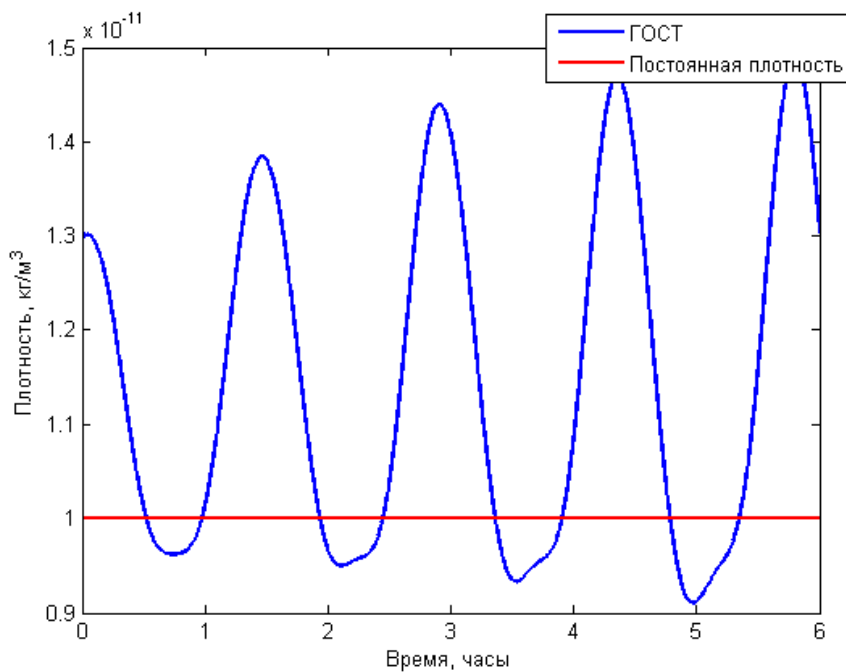


Рис. 17. Плотность атмосферы по модели ГОСТ и принятая постоянная плотность

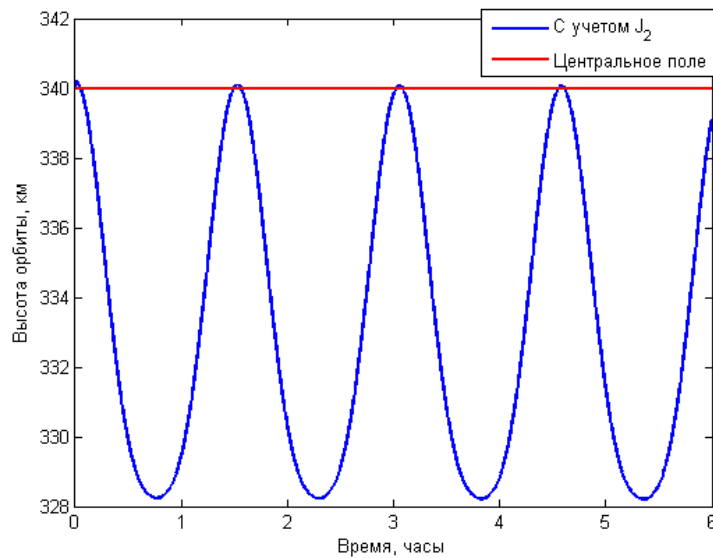


Рис. 18. Высота орбиты в центральном поле и с учетом полярного сжатия

Вариации плотности атмосферы вдоль орбиты приводят к неточной реализации расчетного управления даже в случае, если существует точное решение системы (16). На рис. 19 представлен график разности расчетного управления и реализованного с учетом актуальной плотности атмосферы в текущей точке. На рис. 20 приведена область допустимого управления и расчетное управление, которое несколько отличается от примера с постоянной плотностью и центральным полем (см. рис. 12).

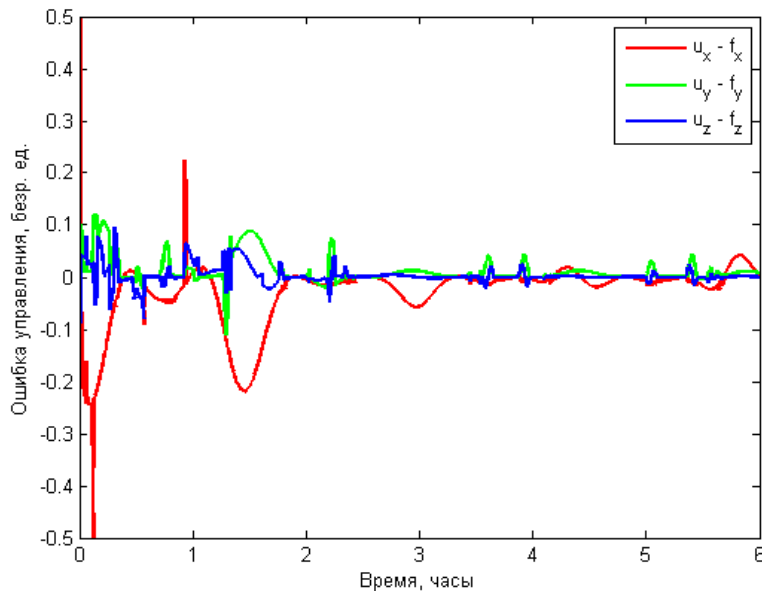


Рис. 19. Ошибки управления

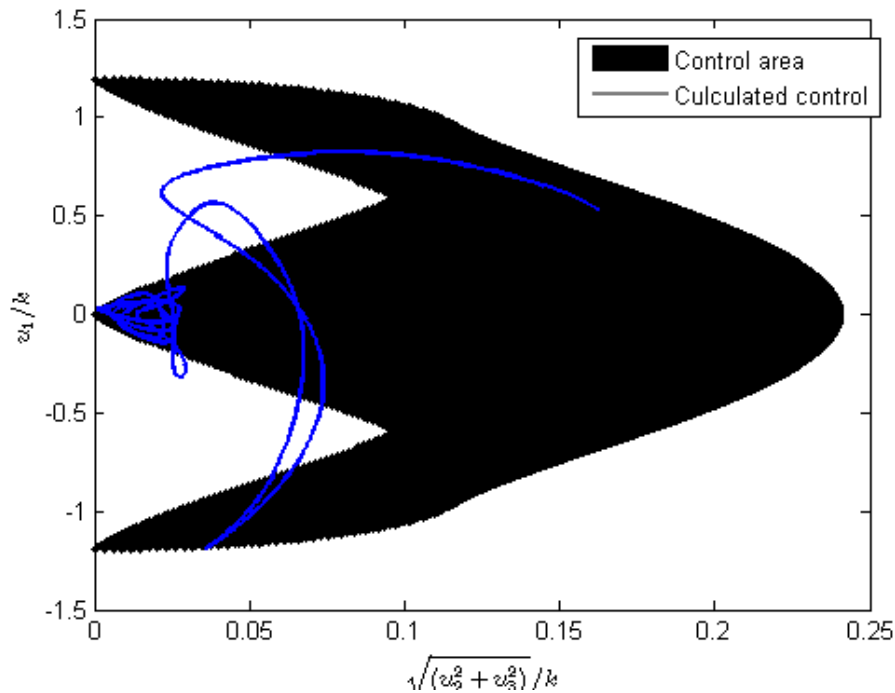


Рис. 20. Область допустимого управления и расчетное управление

Несмотря на введенные модели плотности атмосферы и учет нецентральности гравитационного поля, моделирование показало, что достаточно простой алгоритм управления на основе ЛКР с принятой постоянной плотностью атмосферы приводит спутники на требуемую относительную траекторию. Возникает вопрос: насколько можно ошибиться в величине постоянной плотности атмосферы и при этом алгоритм будет приводить отклонения траектории к нулю. Для этого проведем серию численных экспериментов с одинаковыми начальными условиями, но различными значениями плотности атмосферы, заложенной в алгоритм управления. Возьмем те же начальные условия, что и в примере выше, и будем варьировать плотность атмосферы в алгоритме управления, остальное оставляя неизменным. В качестве интегральной характеристики работы алгоритма примем функционал (13) с конечным временем  $T$ :

$$J = \int_0^T (\mathbf{e}^T Q \mathbf{e} + \mathbf{u}^T R \mathbf{u}) dt.$$

Чтобы сравнить работу алгоритма при различных значениях плотности, рассчитаем отношение  $J$  к функционалу  $J_0$  для работы алгоритма без учета возмущений и с постоянной плотностью. На рис. 21 представлен график отношения  $J / J_0$  при изменяющемся значении постоянной плотности, из которого видно, что при значении  $\rho < 9 \cdot 10^{-12}$  кг/м<sup>3</sup> алгоритм перестает работать вследствие насыщения управления и траектории расходится (рис. 22а). Однако при  $\rho > 10^{-11}$  значение  $J / J_0$  начинает монотонно и плавно увеличиваться. Это можно объяснить тем, что выбранные коэффициенты алгоритма (в нашем слу-

чае  $r_x = 4.5 \cdot 10^{13}$  и  $r_{yz} = 4 \cdot 10^{14}$ ) уже не обеспечивают максимальную скорость сходимости отклонения траектории для заданной плотности (см. рис. 8б). Траектория приближается к опорной медленнее (рис. 22б), а значит, за одинаковое время  $J$  будет больше. Поэтому при увеличении параметра плотности атмосферы требуется выбирать соответствующие коэффициенты алгоритма, однако при этом контролировать возможность насыщения управления.

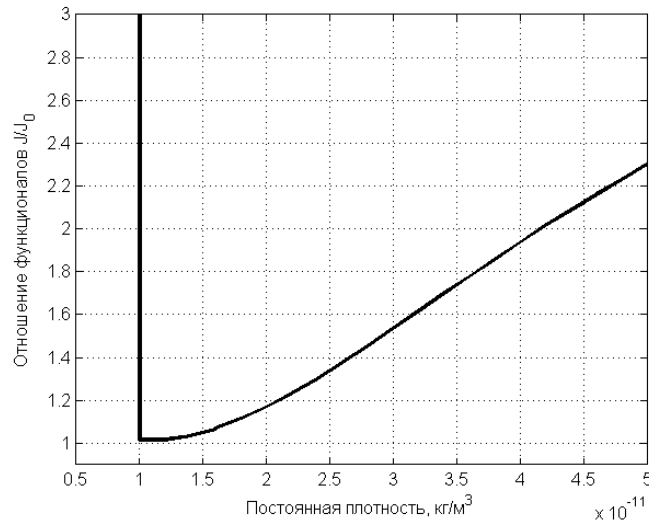


Рис. 21. Отношение функционала при изменении плотности

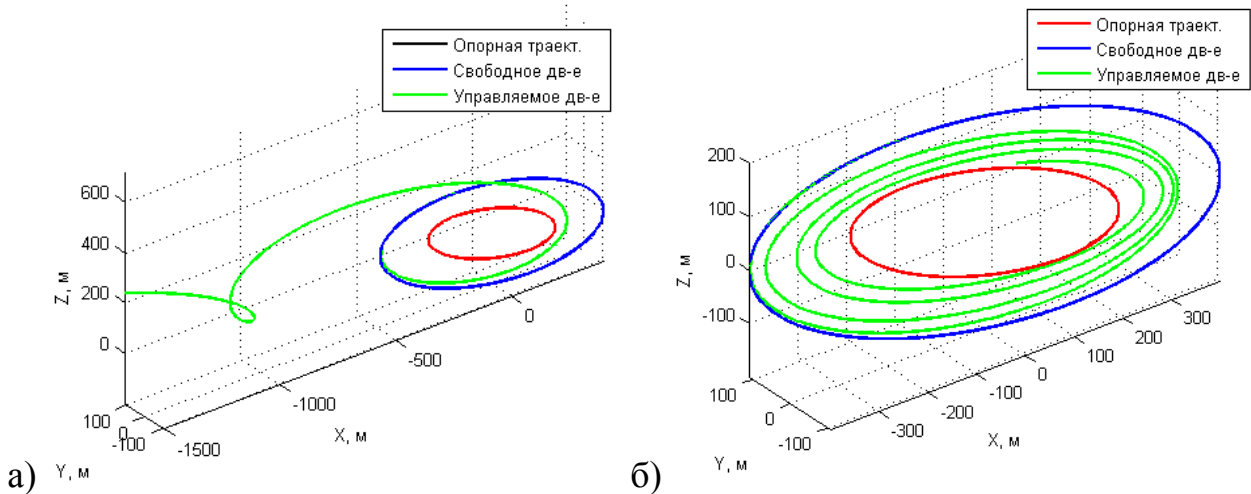


Рис. 22. Относительные траектории при  $\rho = 6 \cdot 10^{-12}$  кг/м<sup>3</sup> (а) и  $\rho = 5 \cdot 10^{-11}$  кг/м<sup>3</sup>

Таким образом, численное моделирование показало, что найденные параметры алгоритма с помощью разработанной методики исследования обеспечивают сходимость отклонения траектории только в случае, если заданная в алгоритме плотность атмосферы больше, чем реальная. В этом случае обеспечивается ненасыщение управления. Однако чем больше ошибка в знании плотности, тем медленнее сходимость.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Популярность групповых полетов микро- и наноспутников неизбежно приводит к необходимости поиска простых и дешевых способов управления. Наиболее естественным на низких околоземных орбитах кажется использование аэродинамических сил. Настоящая работа показала, что использование простой модели аэродинамической силы, которая учитывает "подъемную" составляющую, позволяет управлять относительным движением по всем трем координатам. При этом в алгоритме управления на борту спутников могут использоваться грубые модели относительного движения и плотности атмосферы, что значительно упрощает их вычислительную сложность. Предложенная методика исследования позволяет найти такие параметры алгоритмов управления с обратной связью, которые обеспечат ненасыщение управления при заданных предельных отклонениях траектории от требуемой. Для конкретного примера использования линейно-квадратического регулятора было показано, что плотность атмосферы, принятая в алгоритме, должна быть больше реальной плотности для обеспечения ненасыщения управления и сходимости отклонения траектории.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Peck M.A. et al. Spacecraft Formation Flying Using Lorentz Forces // J. Br. Interplanet. Soc. 2007. Vol. 60. P. 263–267.
2. Schaub H. et al. Challenges and Prospects of Coulomb Spacecraft Formation Control of the Astronautical Sciences // J. Astronaut. Sci. 2004. Vol. 52. P. 169–193.
3. King L.B., Parker G.G. Spacecraft Formation Flying Using Inter-vehicle Coulomb Forces // NASA tech. rep. NASA/NIAC, 2002. P. 103.
4. Ivanov D., Ovchinnikov M., Shestakov S. Satellite formation flying control by mass exchange // Acta Astronaut. Elsevier, 2014. Vol. 102. P. 392–401.
5. Белецкий В.В., Яншин А.М. Влияние аэродинамических сил на вращательное движение искусственных спутников. Киев: Наукова Думка, 1984. 187 с.
6. Leonard C.L. Formation Keeping of Spacecraft via Differential Drag // Master Thesis, Massachusetts Inst. Technol. 1986.
7. Kumar, B. S., and Ng, A., A Bang-Bang Control Approach to Maneuver Spacecraft in a Formation with Differential Drag, // Proceedings of the AIAA Guidance, Navigation and Control Conference and Exhibit, Honolulu, Hawaii, August 2008.

8. Zeng G., Hu M., Yao H. Relative Orbit Estimation and Formation Keeping Control of Satellite Formations in Low Earth Orbits // *Acta Astronaut.* Elsevier, 2012. Vol. 76. P. 164–175.
9. Perez D., Bevilacqua R. Lyapunov-based Spacecraft Rendezvous Maneuvers Using Differential Drag // AIAA-2011-6630 Pap. AIAA Guid. Dyn. Control Conf. 2011, Portland, OR.
10. Kumar K.D. et al. Maintenance of satellite formations using environmental forces // *Acta Astronaut.* Elsevier, 2014. Vol. 102. P. 341–354.
11. Varma S., Kumar K.D. Multiple Satellite Formation Flying Using Differential Aerodynamic Drag // *J. Spacecr. Rockets.* 2012. Vol. 49, № 2. P. 325–336.
12. Maclay C.T. Satellite Station-Keeping of the ORBCOMM Constellation Via Active Control of Atmospheric Drag: Operations, Constraints, and Performance // *Adv.Astronaut.Sci.* 2005. Vol. 120. P. 763–773.
13. De Ruiter A., Lee J., Ng A. A Fault-Tolerant Magnetic Spin Stabilizing Controller For The JC2Sat-FF Mission // AIAA Guid. Navig. Control Conf. Exhib. Honolulu, Hawaii, 18– 21 August 2008. AIAA-2008-7486.
14. Hill G.W. Researches in Lunar Theory // *Am. J. Math.* 1878. Vol. 1. P. 5–26.
15. Schweighart S., Sedwick R.J. High-Fidelity Linearized J2 Model for Satellite Formation Flight // *J. Guid. Control. Dyn.* 2002. Vol. 25, № 6. P. 1073–1080.
16. Ivanov D. et al. Satellite relative motion determination during separation using image processing // *Int. J. Sp. Sci. Eng.* 2014. Vol. 2, № 4. P. 365–379.
17. Ovchinnikov M.Y. et al. Development, integrated investigation, laboratory and in-flight testing of Chibis-M microsatellite ADCS // *Acta Astronaut.* Elsevier, 2014. Vol. 93. P. 23–33.
18. Атмосфера Земли верхняя. Модель плотности для баллистического обеспечения полётов искусственных спутников Земли; ГОСТ Р 25645.000-2001.
19. Ivanov D. et al. Analytical study of microsatellite attitude determination algorithms // *Acta Astronaut.* 2015. Vol. 116. P. 339–348.



## Оглавление

Введение .....	3
1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ .....	5
1.1. Уравнения относительного движения.....	5
1.2. Модель аэродинамической силы .....	6
2. АЛГОРИТМ УПРАВЛЕНИЯ.....	11
2.1. Линейно-квадратический регулятор .....	11
2.2. Вычисление ориентации спутников при заданном управлении ....	12
2.3. Методика исследования.....	14
3. ИССЛЕДОВАНИЕ АЛГОРИТМА .....	16
3.1. Нахождение параметров алгоритма .....	17
3.2. Моделирование управляемого движения .....	19
3.3. Влияние возмущений .....	23
ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....	30
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	30