ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 55 за 2017 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Брюно А.Д.

Вычисление сложных асимптотических разложений решений уравнений Пенлеве

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Брюно А.Д. Вычисление сложных асимптотических разложений решений уравнений Пенлеве // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2017. № 55. 27 с. doi:10.20948/prepr-2017-55
URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2017-55

О р д е н а Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М. В. КЕЛДЫША
Р о с с и й с к о й а к а д е м и и н а у к

А. Д. Брюно

Вычисление сложных асимптотических разложений решений уравнений Пенлеве

Москва — 2017

УДК 517.925

Александр Дмитриевич Брюно

Вычисление сложных асимптотических разложений решений уравнений Пенлеве. Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, 2017.

Рассматриваются сложные асимптотические разложения решений полиномиального обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ). Они являются такими рядами по целым степеням независимой переменной, коэффициенты которых суть ряды Лорана по убывающим степеням логарифма независимой переменной. Предлагается алгоритм для составления ОДУ для этих коэффициентов. Первый коэффициент является решением укороченного уравнения. Для некоторых уравнений он оказывается полиномом. Возникает вопрос: будут ли следующие коэффициенты полиномами? Здесь этот вопрос рассмотрен для третьего (P_3) и шестого (P_6) уравнений Пенлеве. Оказалось, что для них во всех случаях второй коэффициент также является полиномом, но третий коэффициент является полиномом либо всегда, либо при определённых условиях на параметры уравнения, либо никогда.

Ключевые слова: обыкновенное дифференциальное уравнение, сложное асимптотическое разложение, полиномиальность коэффициентов.

Alexander Dmitrievich Bruno

Calculation of complicated asymptotic expansions of solutions to the Painlevé equations.

We consider the complicated asymptotic expansions of solutions to a polynomial ordinary differential equation (ODE). They are such series on integral powers of the independent variable, which coefficients are the Laurent series on decreasing powers of the logarithm of the independent variable. We propose an algorithm for writing ODEs for these coefficients. The first coefficient is a solution of a truncated equation. For some initial equations, it is a polynomial. Question: will the following coefficients be polynomials? Here the question is considered for the third (P_3) and sixth (P_6) Painlevé equations. It appears that for them the second coefficients are polynomials in all cases, but the third coefficient is a polynomial ether always, either under some restriction on parameters, or never.

Key words: ordinary differential equation, complicated asymptotic expansion, polynomiality of coefficients.

Работа поддержана программой IV.1.1 ОМН РАН.

1. Введение

В 2004 г. я предложил способ вычисления асимптотических разложений решений полиномиального ОДУ [1]. Он позволял вычислять степенные и степенно-логарифмические разложения, в которых коэффициенты при степенях независимой переменной x являются либо постоянными, либо многочленами от логарифма. Позже оказалось, что у таких уравнений асимптотические разложения решений могут иметь в качестве коэффициентов при степенях x ряды Лорана либо по убывающим степеням логарифма x, либо по мнимым степеням x — соответственно сложные [2] и экзотические [3] разложения. Для их вычисления методы из [1] неудобны. Теперь я разработал метод составления ОДУ для каждого коэффициента такого ряда. Эти уравнения содержат младшие и высшие вариации от определённых частей исходного уравнения. Первый коэффициент сложного разложения является решением укороченного уравнения и, вообще говоря, является рядом Лорана по логарифмам. Но для некоторых уравнений он оказывается полиномом. Возникает вопрос: *будут ли следующие коэффициенты полиномами?*

Этот вопрос я рассмотрел для двух уравнений Пенлеве P_3 и P_6. Ибо из шести уравнений Пенлеве $P_1 - P_6$ три имеют сложные разложения решений — это P_3, P_5 и P_6. Первые коэффициенты этих разложений известны и все являются полиномами [4]. Оказалось, что во всех случаях уравнений P_3 и P_6 второй коэффициент также полином, но третий коэффициент является полиномом либо всегда, либо при некоторых условиях на параметры уравнения, либо никогда.

Основные результаты работы

В п. 2.1 предложен алгоритм составления уравнений для коэффициентов разложения решения алгебраического уравнения (теорема 1). В п. 2.2 этот алгоритм переносится на обыкновенное дифференциальное уравнение. Для этого производные заменяются вариациями (теорема 2). Кроме того, указывается правило коммутирования операторов и степеней независимой переменной (лемма 1). В пп. 3 и 4 этот подход применён к уравнениям Пенлеве P_3 и P_6 соответственно. У каждого из них имеется по два семейства сложных разложений решений — основное и дополнительное, у которых первый коэффициент является полиномом от логарифма независимой переменной. Оказалось, что у всех четырёх этих семейств вторые коэффициенты — также полиномы.

Гипотеза 1. *У основного семейства уравнения P_3 все коэффициенты являются полиномами, если параметр уравнения $d = 0$.*

Теорема 3. *У дополнительного семейства уравнения P_3 третий и четвёртый коэффициенты являются многочленами, только если параметр уравнения $a = 0$. Пятый коэффициент никогда не является многочленом.*

Теорема 4. *У основного семейства уравнения P_6, если параметр уравнения $b = 0$, то третий коэффициент может быть многочленом только при трёх определённых значениях остальных параметров уравнения.*

Теорема 5. *У дополнительного семейства уравнения P_6 третий коэффициент может быть многочленом, только если параметры уравнения удовлетворяют определённому алгебраическому уравнению.*

2. Составление уравнений для коэффициентов

2.1. Алгебраический случай. Пусть задан многочлен

$$f(x,y) \tag{2.1}$$

и ряд

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k \, x^k \,, \tag{2.2}$$

где коэффициенты φ_k являются функциями от каких-то величин. Подставим ряд (2.2) в многочлен (2.1) и выделим все слагаемые с фиксированной степенью x. Для этого разобьём многочлен (2.1) в сумму

$$f(x,y) = \sum_{i=0}^{m} f_i(y) \, x^i \,, \tag{2.3}$$

ряд (2.2) запишем в виде

$$y = \varphi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k \, x^k \stackrel{def}{=} \varphi_0 + \Delta \,. \tag{2.4}$$

Тогда

$$\Delta^j = \sum_{k=j}^{\infty} c_{jk} \, x^k \,, \tag{2.5}$$

где коэффициенты c_{jk} являются определёнными суммами произведений j коэффициентов φ_l и соответствующих мультиномиальных коэффициентов [5]. Наконец, каждое слагаемое $f_i(\varphi_0 + \Delta)$ разложим в ряд Тейлора

$$f_i = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \, \frac{d^j f_i}{dy^j}\Big|_{y=\varphi_0} \Delta^j \,. \tag{2.6}$$

В итоге результат подстановки ряда (2.2) в многочлен (2.1) можно записать в виде суммы
$$\sum_{i=0}^{m} x^i \left[f_i(\varphi_0) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!} \frac{d^j f_i(\varphi_0)}{dy^j} \sum_{k=j}^{\infty} c_{jk}\, x^k \right] \tag{2.7}$$
слагаемых вида
$$x^i \frac{1}{j!} \frac{d^j f_i(\varphi_0)}{dy^j} c_{jk}\, x^k \,. \tag{2.8}$$
Здесь целые индексы $i,j,k \geqslant 0$ таковы
$$k \geqslant j; \text{ если } j = 0, \text{ то } k = 0\,. \tag{2.9}$$
Множество таких точек $(i,j,k) \in \mathbb{Z}^3$ обозначим $\mathbf{M}$. Наконец, все слагаемые (2.8) с фиксированной степенью x^n выделяются равенством
$$i + k = n\,. \tag{2.10}$$
Множество $\mathbf{M}$ полезно представить как часть целочисленной решётки $\mathbb{Z}^3$ в $\mathbb{R}^3$ с точками (i,j,k), которые удовлетворяют неравенствам (2.9).

Если мы ищем разложение (2.2) как решение уравнения
$$f(x,y) = 0$$
и хотим применить метод неопределённых коэффициентов, то для коэффициента φ_0 получаем уравнение $f_0(\varphi_0) = 0$, а для коэффициента φ_n с $n > 0$ — уравнение
$$\frac{df_0(\varphi_0)}{dy} \varphi_n x^n + \sum_{(i,j,k)\in \mathbf{N}(n)} x^i \frac{1}{j!} \frac{d^j f_i(\varphi_0)}{dy^j} c_{jk}\, x^k + x^n f_n(\varphi_0) = 0\,, \tag{2.11}$$
где
$$\mathbf{N}(n) = \mathbf{M} \cap \{j > 0,\ i + k = n \text{ и } j > 1, \text{ если } i = 0\}.$$
Может случиться, что некоторые $d^j f_i/dy^j = 0$, включая f_n, и некоторые $c_{jk} = 0$. Тогда в (2.11) соответствующие слагаемые отсутствуют. Это уравнение мы можем сократить на x^n и получить его в виде
$$\frac{df_0(\varphi_0)}{dy} \varphi_n + \sum_{(i,j,k)\in \mathbf{N}(n)} \frac{1}{j!} \frac{d^j f_i(\varphi_0)}{dy^j} c_{jk} + f_n(\varphi_0) = 0\,. \tag{2.12}$$

Теорема 1. *Если $df_0(\varphi_0)/dy \neq 0$, то последовательно по росту n из уравнений* (2.12) *находятся коэффициенты φ_n.*

Пример 1. Приведём несколько начальных уравнений (2.12).

$$
\begin{aligned}
&n=0,\quad f_0(\varphi_0)=0\,.\\
&n=1,\quad \frac{df_0(\varphi_0)}{dy}\,\varphi_1+f_1(\varphi_0)=0\,.\\
&n=2,\quad \frac{df_0}{dy}\,\varphi_2+\frac{1}{2}\,\frac{d^2f_0}{dy^2}\,\varphi_1^2+\frac{df_1}{dy}\,\varphi_1+f_2=0\,.\\
&n=3,\quad \frac{df_0}{dy}\,\varphi_3+\frac{1}{2}\,\frac{d^2f_0}{dy^2}\,(2\varphi_1\varphi_2)+\frac{1}{6}\,\frac{d^3f_0}{dy^3}\,\varphi_1^3+\frac{df_1}{dy}\,\varphi_2+\frac{1}{2}\,\frac{d^2f_1}{dy^2}\,\varphi_1^2+\\
&\qquad\quad +\frac{df_2}{dy}\,\varphi_1+f_3(\varphi_0)=0\,.
\end{aligned}
$$

Здесь все f_i и их производные берутся в $y=\varphi_0$. □

2.2. Случай ОДУ. Если $f(x,y)$ — дифференциальный многочлен, т.е. содержит производные d^ly/dx^l, то роль производных $\dfrac{d^jf_i}{dy^j}$ играют вариации $\dfrac{\delta^jf_i}{\delta y^j}$, они же производные Фреше/Гато. При этом для многочлена $f(y)$ без производных j-ая вариация $\dfrac{\delta^jf}{\delta y^j}=\dfrac{d^jf}{dy^j}$, а вариация производной есть $\dfrac{\delta}{\delta y}\left(\dfrac{d^ky}{dx^k}\right)=\dfrac{d^k}{dx^k}$, для произведения

$$
\frac{\delta(f\cdot g)}{\delta y}=f\,\frac{\delta g}{\delta y}+\frac{\delta f}{\delta y}\cdot g\;,\quad \frac{\delta}{\delta y}\left(\frac{d^ky}{dx^k}\cdot\frac{d^l}{dx^l}\right)=\frac{d^{k+l}}{dx^{k+l}}\;.
$$

Наконец, для вариаций справедлив аналог формулы Тейлора

$$
f(y+\Delta)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}\,\frac{\delta^jf(y)}{\delta y^j}\,\Delta^j\;.
$$

Пусть теперь задан дифференциальный многочлен $f(x,y)$ и для уравнения $f=0$ ищется решение в виде разложения

$$
y=\sum\varphi_kx^k\;.
$$

Здесь применима техника, описанная ранее для алгебраического уравнения, но со следующими уточнениями.

1) Дифференциальный многочлен $f(x,y)$ является суммой дифференциальных мономов $a(x,y)$, которые являются произведениями обычного монома $\mathrm{const}\cdot x^ry^s$ и нескольких производных d^ly/dx^l. Каждому моному $a(x,y)$ ставится

в соответствие его векторный показатель степени $Q(a) = (q_1,q_2)$ по следующим правилам

$$Q(\text{const}) = 0,\, Q(x^r y^s) = (r,s),\, Q(d^l y/dx^l) = (-l,1)\ ,$$

для произведения дифференциальных мономов их векторные показатели степени складываются как векторы

$$Q(ab) = Q(a) + Q(b)\ .$$

Теперь в часть $f_i(x,y)$ собираем все дифференциальные мономы $a(x,y)$, у которых в $Q(a)$ первая координата $q_1 = i$. Кроме того, предполагаем, что в $f(x,y)$ нет мономов с $q_1 < 0$, и $f_0(y) \not\equiv 0$. Тогда справедливы формулы алгебраического случая с заменой производных вариациями.

2) Вариации — это операторы, которые не переставляются с дифференциальными многочленами. Поэтому формула (2.11) принимает вид

$$\frac{\delta f_0}{\delta y}\, x^n \varphi_n + \sum_{(i,j,k)\in\, \mathbf{N}(n)} x^i \frac{1}{j!}\, \frac{\delta^j f_i}{\delta y^j}\, x^k c_{jk} + x^n f_n = 0\ , \tag{2.13}$$

но в ней нельзя сократить на x^n и получить аналог формулы (2.12). В формуле (2.13) все $\delta^j f_i/\delta y^j$ берутся при $y = \varphi_0$.

Теорема 2. *В разложении* (2.2) *коэффициент* φ_n *удовлетворяет уравнению* (2.13).

3) В зависимости от класса функций коэффициентов φ_k имеются соответствующие формулы перестановки функций этого класса с вариациями. Например, если φ_k суть ряды по $\ln x$, то положим $\xi = \ln x$, тогда $x^s = e^{s\xi}$ и справедлива

Лемма 1 ([4]). *Пусть*

$$\mu\left(\frac{d}{d\xi}\right) = \sum_{l=0}^{N} \mu_l \frac{d^l}{d\xi^l},\, \mu_l = \text{const} \in \mathbb{C}, \tag{2.14}$$

тогда

$$\mu\left(\frac{d}{d\xi}\right)\left(e^{s\xi}\varphi(\xi)\right) = e^{s\xi} \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} \mu^{(k)}(s) \cdot \varphi^{(k)}(\xi), \tag{2.15}$$

где многочлен $\mu(s) = \sum_{l=0}^{N} \mu_l s^l$, $\mu^{(k)}(s)$ — k*-я производная от* $\mu(s)$ *по* s *и* $\varphi^{(k)}(\xi)$ — k*-я производная* $\varphi(\xi)$ *по* ξ.

Эта лемма даёт правило перестановки оператора и степени x^s. Применяя его в уравнении (2.13), можно сократить уравнение на x^n и получить уравнение без x, только с ξ.

4) При вычислении второй вариации на какой-то функции надо сначала выписать эту вариацию как оператор, а затем подставить в неё эту функцию. Нельзя подставлять функцию в первую вариацию, а затем вычислять от неё следующую вариацию. Это может привести к ошибочному результату.

В целом алгоритм вычисления коэффициентов сложного разложения решения ОДУ состоит из следующих шагов.

Шаг 0. Из исходного уравнения $f(x,y) = 0$ выделяем укороченное уравнение $\hat{f}_1^{(1)}(x,y) = 0$, соответствующее некоторому ребру $\Gamma_1^{(1)}$ многоугольника Γ дифференциальной суммы $f(x,y)$ и имеющее сложное решение, зависящее от $\ln x$.

Шаг 1. Делаем степенное преобразование переменных $x,y \to x,z$, переводящее ребро $\Gamma_1^{(1)}$ в вертикальное.

Шаг 2. Записываем преобразованное полное уравнение $g(x,z) \stackrel{def}{=} f(x,y) = 0$ в виде суммы $g = \sum x^i g_i(x,z)$, где носители сумм $g_i(x,z)$ лежат на вертикальной оси.

Шаг 3. В частях $g_i(x,z)$ заменяем независимую переменную x на $\xi = \ln x$, получаем $h_i(\xi,z) \stackrel{def}{=} g_i(x,z)$ и у уравнения $h_0(\xi,z) = 0$ находим все решения $z(\xi)$, являющиеся степенными рядами.

Шаг 4. Согласно теореме 2 выписываем уравнения для нескольких первых коэффициентов $\varphi_k(\xi)$ искомого сложного разложения $z = \sum \varphi_k x^k$.

Шаг 5. Используя лемму 1, из этих уравнений исключаем степени x и получаем линейные ОДУ для коэффициентов $\varphi_k(\xi)$. Решения $\varphi_k(\xi)$ этих уравнений являются степенными рядами от ξ и могут быть вычислены методами статьи [1].

3. Третье уравнение Пенлеве P_3

3.1. Постановка задачи. Третье уравнение Пенлеве, записанное в виде дифференциальной суммы, есть

$$f(x,y) \stackrel{def}{=} -xyy'' + xy'^2 - yy' + ay^3 + by + cxy^4 + dx = 0, \tag{3.1}$$

где a, b, c, d — комплексные параметры. Его носитель и многоугольник при $a,b,c,d \neq 0$ показаны на рис. 1. Ребру $\Gamma_1^{(1)}$ рис. 1 соответствует укороченное уравнение

$$\hat{f}_1^{(1)} \stackrel{def}{=} -xyy'' + xy'^2 - yy' + by + dx = 0. \tag{3.2}$$

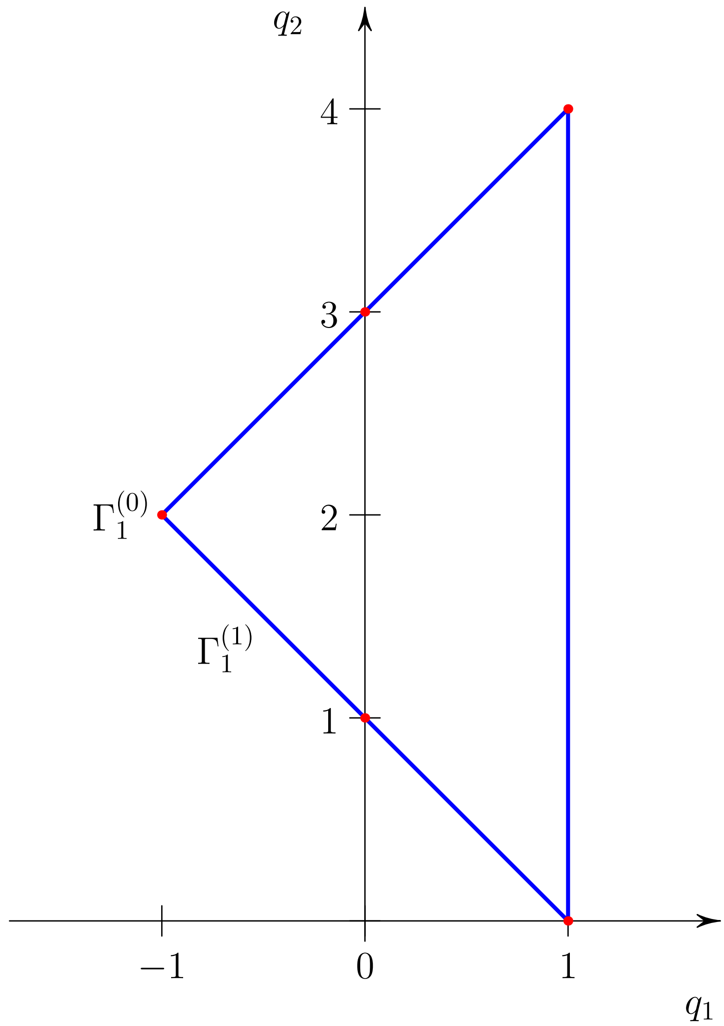

Рис. 1. Носитель и многоугольник уравнения (3.1) при $a,b,c,d \neq 0$.

После степенного преобразования $y = xz$ и сокращения на x полное уравнение (3.1) переходит в

$$g \stackrel{def}{=} -x^2zz'' + x^2z'^2 - xzz' + bz + d + ax^2z^3 + cx^4z^4 = 0. \qquad (3.3)$$

При этом укороченное уравнение (3.2) принимает вид

$$g_0 \stackrel{def}{=} -x^2zz'' + x^2z'^2 - xzz' + bz + d = 0\,. \qquad (3.4)$$

Носитель и многоугольник уравнения (3.3) показаны на рис. 2. При этом укороченному уравнению (3.4) соответствует вертикальное ребро $\widetilde{\Gamma}_1^{(1)}$ на оси $q_1 = 0$. Здесь $g_2 = az^3, g_4 = cz^4$. После логарифмического преобразования $\xi = \ln x$ уравнение (3.4) переходит в уравнение

$$h_0 \stackrel{def}{=} -z\ddot{z} + \dot{z}^2 + bz + d = 0. \qquad (3.5)$$

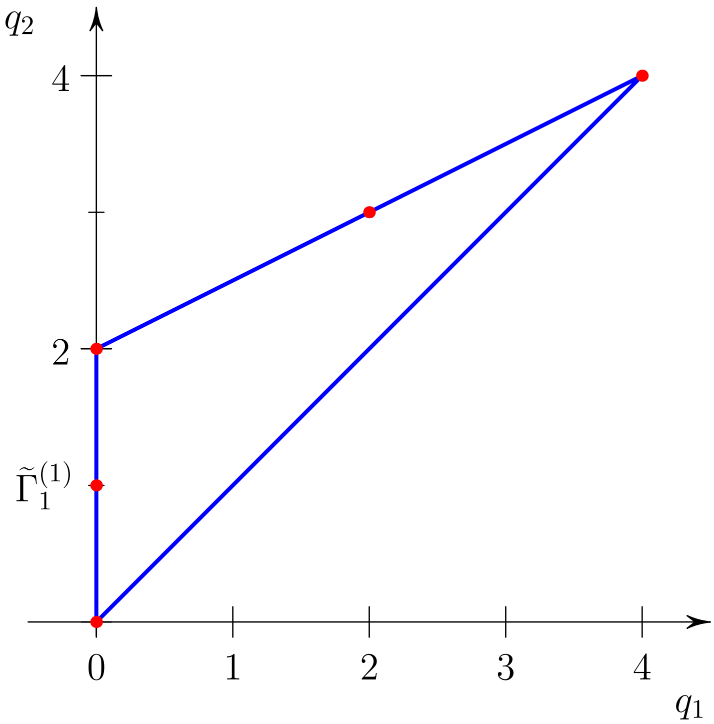

Рис. 2. Носитель и многоугольник уравнения (3.3).

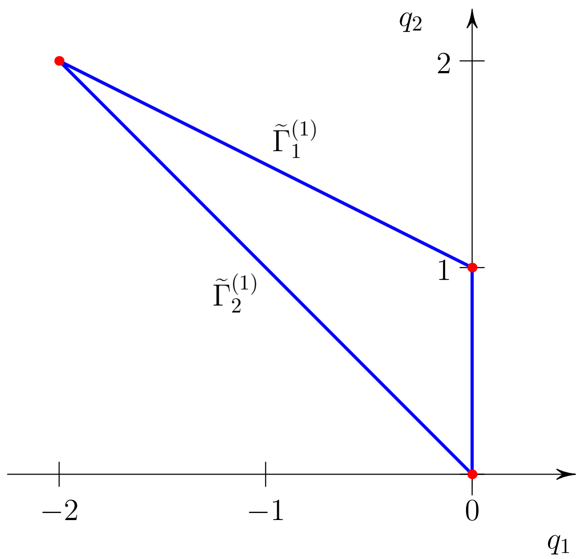

Рис. 3. Носитель и многоугольник уравнения (3.5) при $bd \neq 0$.

Его носитель и многоугольник показаны на рис. 3 в случае $bd \neq 0$.

Рассмотрим случай $b \neq 0$. Ребру $\widetilde{\Gamma}_1^{(1)}$ рис. 3 соответствует укороченное уравнение

$$\hat{h}_1^{(1)} = -z\ddot{z} + \dot{z}^2 + bz = 0.$$

Оно имеет степенное решение $z = -b\xi^2/2$. Согласно [1], продолжая его разложение по убывающим степеням ξ, получаем решение уравнения (3.5)

$$z = -\frac{b}{2}(\ln x + \tilde{c})^2 - \frac{d}{2b}, \tag{3.6}$$

где $\tilde{c}$ — произвольная постоянная. По (3.5) первая вариация

$$\frac{\delta h_0}{\delta z} = -\ddot{z} - z\frac{d^2}{d\xi^2} + 2\dot{z}\frac{d}{d\xi} + b. \tag{3.7}$$

При этом $h_2 = g_2 = az^3, h_4 = g_4 = cz^4, \delta^2 h_0/\delta z^2 = 0$.

Рассмотрим уравнение (3.1) в случае $b = 0$, $d \neq 0$. Тогда уравнение (3.5) имеет вид

$$h_0 \overset{def}{=} -z\ddot{z} + \dot{z}^2 + d = 0\,.$$

Его многоугольник совпадает с ребром $\widetilde{\Gamma}_2^{(1)}$ рис. 3. Это уравнение имеет решение

$$z = \pm\sqrt{-d}\,(\ln x + \tilde{c})\,, \tag{3.8}$$

где $\tilde{c}$ — произвольная постоянная.

Решения уравнения (3.3) имеют вид

$$z = \varphi_0(\xi) + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_{2k}(\xi)x^{2k}, \tag{3.9}$$

где φ_0 даётся формулой (3.6) или (3.8).

В первом случае, т.е. при $b \neq 0$, семейство решений (3.9) назовём **основным**, а во втором случае, т.е. при $b = 0, d \neq 0$, — **дополнительным**. Ниже рассмотрим по отдельности разложения (3.9) этих двух семейств решений уравнения (3.3).

3.2. Основное семейство. Вычислим $\varphi_2(\xi)$. Положим $\xi = \ln x + \tilde{c}$, тогда (3.6) принимает вид

$$z = -\frac{b}{2}\xi^2 - \frac{d}{2b}. \tag{3.10}$$

Согласно теореме 2, равенству (3.7) и лемме 1 уравнение для $\varphi = \varphi_2$ есть

$$-z\left[2^2\varphi + 2\cdot 2\dot{\varphi} + \frac{1}{2}\cdot 2\ddot{\varphi}\right] + 2\dot{z}\left[2\varphi + \dot{\varphi}\right] + 2b\varphi + az^3 = 0,$$

где z даётся формулой (3.10) и учтено, что $\ddot{z} = -b$. Учитывая (3.10), получаем

$$\left(\frac{b}{2}\xi^2 + \frac{d}{2b}\right)\left[4\varphi + 4\dot{\varphi} + \ddot{\varphi}\right] - 2b\xi[2\varphi + \dot{\varphi}] + 2b\varphi = a\left[\frac{b}{2}\xi^2 + \frac{d}{2b}\right]^3. \tag{3.11}$$

Носитель этого уравнения состоит из точек $(-2{,}1)$, $(-1{,}1)$, $(0{,}1)$, $(1{,}1)$, $(2{,}1)$, 0, $(2{,}0)$, $(4{,}0)$, $(6{,}0)$. Укороченное уравнение есть

$$\left(\frac{b}{2}\xi^2\right)[4\varphi] = a\left[\frac{b}{2}\xi^2\right]^3 .$$

Решение имеет вид

$$\varphi = \frac{a}{4}\left(\frac{b}{2}\xi^2\right)^2 + O\left(\xi^3\right).$$

Если уравнение (3.11) разделить на $b/2$ и ввести параметр $\lambda = d/b^2$, то для

$$\psi = 16\varphi/(ab^2)$$

получается уравнение

$$\left(\xi^2+\lambda\right)\left[4\psi + 4\dot{\psi} + \ddot{\psi}\right] - 4\xi\left[2\psi + \dot{\psi}\right] + 4\psi = 4\left(\xi^2+\lambda\right)^3 . \tag{3.12}$$

Оно имеет полиномиальное решение

$$\psi = \xi^4 - 2\xi^3 + (2+2\lambda)\xi^2 - (1+2\lambda)\xi + \lambda^2. \tag{3.13}$$

Оно вычисляется так. В уравнение (3.12) подставляется многочлен от ξ четвёртой степени с пятью неопределёнными коэффициентами. После приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях ξ для неопределённых коэффициентов получается система семи линейных уравнений. Подсистема первых пяти уравнений оказывается треугольной невырожденной. Из неё однозначно находятся все коэффициенты многочлена (3.13), как функции параметра λ. Оставшиеся два линейных уравнения для коэффициентов удовлетворяются найденными коэффициентами тождественно по параметру λ, что кажется неожиданным. Таким образом, ряд Лорана

$$\varphi = \sum_{k=4}^{-\infty} c_k\xi^k$$

оказался многочленом $\varphi = \sum\limits_{k=4}^{0} c_k\xi^k$.

Далее для упрощения вычислений рассматриваем основное семейство только при

$$d = 0 . \tag{3.14}$$

Тогда $\lambda = 0, z = -\dfrac{b}{2}\xi^2, \dot{z} = -b\xi, \ddot{z} = -b$ и

$$\varphi_2 = \frac{ab^2}{16}(\xi^4 - 2\xi^3 + 2\xi^2 - \xi) . \tag{3.15}$$

По теореме 2 уравнение для φ_4 есть

$$\frac{\delta h_0}{\delta z}\,x^4\varphi_4 + x^2\frac{\delta h_2}{\delta z}\,x^2\varphi_2 + x^4 h_4 = 0\,.$$

Согласно (3.7) и лемме 1

$$\frac{\delta h_0}{\delta z}\,x^4\varphi_4 = x^4\frac{b}{2}\xi^2\left[16\varphi_4 + 8\dot{\varphi}_4 + \ddot{\varphi}_4\right] - x^4 2b\xi\left[4\varphi_4 + \dot{\varphi}_4\right] + x^4\cdot 2b\varphi_4\,,$$

$$\frac{\delta h_2}{\delta z}\,x^2\varphi_2 = x^2\frac{3ab^2}{4}\xi^4\varphi_2 \quad \text{и} \quad h_4 = \frac{c}{16}(b\xi^2)^4\,.$$

После сокращения на x^4 получаем уравнение

$$\frac{b}{2}\,\xi^2\left[16\varphi_4 + 8\dot{\varphi}_4 + \ddot{\varphi}_4\right] - 2b\xi\left[4\varphi_4 + \dot{\varphi}_4\right] + 2\,b\varphi_4 + \frac{3}{4}ab^2\xi^4\varphi_2 + \frac{cb^4}{16}\xi^8 = 0\,.$$

Оно имеет полиномиальное решение

$$\varphi_4 = a^2b^3\psi_1 + c\,b^3\psi_2\,,$$

где

$$\psi_1 = \frac{1}{2^9}\left(-3\xi^6 + \frac{15}{2}\,\xi^5 - \frac{91}{8}\,\xi^4 + \frac{115}{2}\,\xi^3 - \frac{115}{4}\,\xi^2 + \frac{115}{16}\,\xi\right)\,,$$

$$\psi_2 = \frac{1}{2^7}\left(-\xi^6 + 2\,\xi^5 - \frac{19}{2^3}\,\xi^4 + \frac{15}{2^3}\,\xi^3 - \frac{15}{2^4}\,\xi^2 + \frac{15}{2^6}\,\xi\right)\,.$$

Согласно теореме 2 для φ_6 и φ_8 получаем следующие уравнения

$$\frac{\delta h_0}{\delta z}\,x^6\varphi_6 + x^2\frac{\delta h_2}{\delta z}\,x^4\varphi_4 + x^2\frac{1}{2}\,\frac{\delta^2 h_2}{\delta z^2}\,(x^2\varphi_2)^2 + x^4\frac{\delta h_4}{\delta z}\,x^2\varphi_2 = 0\,,$$

$$\frac{\delta h_0}{\delta z}\,x^8\varphi_8 + x^2\frac{\delta h_2}{\delta z}\,x^6\varphi_6 + x^2\frac{1}{2}\,\frac{\delta^2 h_2}{\delta z^2}\,2(x^2\varphi_2)\,(x^4\varphi_4) + x^4\frac{\delta h_4}{\delta z}\,x^4\varphi_4 + {}$$
$$+\,\frac{1}{2}\,\frac{\delta^2 h_4}{\delta z^2}\,(x^2\varphi_2)^2 = 0\,.$$

Эти уравнения имеют полиномиальные решения при любых $b \neq 0, a, c$, поскольку их части, содержащие вариации от h_2 и от h_4, не содержат ξ^2,ξ и $\xi^0 = \text{const}$.

Гипотеза 1. *При $d = 0$ для основного семейства сложных разложений* (3.9) *решений уравнения P_3 все коэффициенты $\varphi_{2k}(\xi)$ являются многочленами.*

3.3. Дополнительное семейство. Положим $\xi = \ln x + \tilde{c}$, тогда согласно (3.8) $\varphi_0 = \beta\,\xi$, где $\beta^2 = -d$. Уравнение для φ_2 согласно теореме 2 есть

$$\frac{\delta h_0}{\delta z}\, x^2\varphi_2 + x^2 h_2(\varphi_0) = 0\,, \tag{3.16}$$

где согласно (3.7)

$$\frac{\delta h_0}{\delta z} = -z\,\frac{d^2}{d\xi^2} + 2\dot{z}\,\frac{d}{d\xi}\,, \quad z = \varphi_0 = \beta\,\xi, \quad \dot{z} = \beta\;.$$

Согласно лемме 1

$$\frac{d^2}{d\xi^2} x^2\varphi_2 = x^2[4\varphi_2 + 4\dot{\varphi}_2 + \ddot{\varphi}_2]\,,$$

$$\frac{d}{d\xi} x^2\varphi_2 = x^2[2\varphi_2 + \dot{\varphi}_2]\,.$$

Поэтому уравнение (3.16) после сокращения на x^2 принимает вид

$$-\beta\,\xi\,[4\varphi + 4\dot{\varphi} + \ddot{\varphi}] + 2\,\beta\,[2\varphi + \dot{\varphi}] + a(\beta\,\xi)^3 = 0\,.$$

Оно имеет полиномиальное решение

$$\varphi = -\frac{ad}{4}\left(\xi^2 - \xi + \frac{1}{2}\right)\,.$$

При этом удовлетворяется линейная система 4 уравнений для трёх коэффициентов.

Уравнение для φ_4 согласно теореме 2 есть

$$\frac{\delta h_0}{\delta z}\, x^4\varphi_4 + x^2\frac{\delta h_2}{\delta z}\, x^2\varphi_2 + x^4 h_4(\varphi_0) = 0\,. \tag{3.17}$$

Согласно лемме 1

$$\frac{d^2}{d\xi^2} x^4\varphi_4 = x^4[16\varphi_4 + 8\dot{\varphi}_4 + \ddot{\varphi}_4]\,,$$

$$\frac{d}{d\xi} x^4\varphi_4 = x^4[4\varphi_4 + \dot{\varphi}_4]\,.$$

Здесь $\dfrac{\delta h_2}{\delta z} = \dfrac{dh_2}{dz} = 3az^2$, $h_4 = cz^4$. Поэтому после сокращения на x^4 уравнение (3.17) принимает вид

$$-\beta\xi[16\varphi_4 + 8\dot{\varphi}_4 + \ddot{\varphi}_4] + 2\beta[4\varphi_4 + \dot{\varphi}_4] + 3a\beta^2\xi^2\varphi_2 + c(\beta\xi)^4 = 0\,. \tag{3.18}$$

Будем искать его решение в виде многочлена третьей степени

$$\varphi_4 = A\xi^3 + B\xi^2 + C\xi + D\,.$$

Тогда сумма двух первых слагаемых в (3.18) есть

$$-16\beta A\xi^4 + (-16B-16A)\beta\xi^3 + (-16C-8B)\beta\xi^2 + (-16D+2B)\beta\xi + 2(4D+C)\beta\,.$$

Здесь коэффициенты при ξ^2,ξ и $\xi^0 = 1$ по βB,βC и βD образуют матрицу

$$\begin{pmatrix} -8 & -16 & 0 \\ 2 & 0 & -16 \\ 0 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

с нулевым определителем. С другой стороны,

$$3a\beta^2\xi^2\varphi_2 + c(\beta\xi)^4 = \frac{3a^2d^2}{4}\,\left(\xi^4 - \xi^3 + \frac{1}{2}\xi^2\right) + c\beta^4\xi^4\,.$$

У этой суммы коэффициенты при ξ^2,ξ и 1 суть $\frac{3}{8}a^2d^2$,0 и 0 соответственно. Поэтому линейная система уравнений для A,B,C,D разрешима только при $\frac{3}{8}a^2d^2 = 0$. Поскольку $d \neq 0$, то получаем условие $a = 0$. При этом условии

$$\varphi_4 = \frac{c\beta^3}{16}\left(\xi^3 - \xi^2 + \frac{1}{2}\xi - \frac{1}{8}\right)\,. \tag{3.19}$$

Поскольку $a = 0$, то $g = g_0 + x^4 g_4$, $\varphi_2 = 0$, и разложение решения содержит только степени z, кратные 4.

Для φ_8 теорема 2 даёт уравнение

$$\frac{\delta h_0}{\delta z}\,x^8\varphi_8 + x^4\frac{\delta h_4}{\delta z}\,x^4\varphi_4 = 0\,. \tag{3.20}$$

Согласно (3.7) здесь $\dfrac{\delta h_0}{\delta z} = -z\dfrac{d^2}{d\xi^2} + \dot z\,\dfrac{d}{d\xi}$, $\dfrac{\delta h_4}{\delta z} = \dfrac{dg_4}{dz} = 4cz^3$.

Согласно лемме 1

$$\frac{d^2}{d\xi^2}x^8\varphi_8 = x^8[64\varphi_8 + 16\dot\varphi_8 + \ddot\varphi_8]\,,$$

$$\frac{d}{d\xi}x^8\varphi_8 = x^8[8\varphi_8 + \dot\varphi_8]\,.$$

Поскольку h_4 не содержит производных, то вариация

$$\frac{\delta h_4}{\delta z} = \frac{dh_4}{dz} = 4c\,(\beta\xi)^3$$

и она перестановочна с $x^4\varphi_4$. Сокращая уравнение (3.20) на x^8, получаем уравнение

$$-\beta\xi\,[64\varphi_8 + 16\dot\varphi_8 + \ddot\varphi_8] + 2\beta\,[8\varphi_8 + \dot\varphi_8] + 4c\beta^3\xi^3\varphi_4 = 0\,.$$

Оно имеет полиномиальное решение

$$\varphi_8 = \frac{c^2\beta^5}{16^2}\,\left(\xi^5 - 2\xi^4 + \frac{59}{32}\xi^3 - \frac{59}{64}\xi^2 + \frac{59}{4\cdot 64}\xi - \frac{59}{32\cdot 64}\right)\,.$$

По теореме 2 для φ_{12} получаем уравнение

$$\frac{\delta h_0}{\delta z}\,x^{12}\varphi_{12} + x^4\frac{\delta h_4}{\delta z}\,x^8\varphi_8 + x^4\,\frac{1}{2}\,\frac{\delta^2 h_4}{\delta z^2}\,\left(x^4\varphi_4\right)^2 = 0\,,$$

которое по лемме 1 принимает вид

$$-\beta\xi[144\varphi_{12} + 24\dot\varphi_{12} + \ddot\varphi_{12}] + 2\beta[12\varphi_{12} + \dot\varphi_{12}] + 4c(\beta\xi)^3\varphi_8 + \frac{1}{2}\cdot 6c(\beta\xi)^2\varphi_4^2 = 0\,. \tag{3.21}$$

Если искать решение этого уравнения в виде многочлена 7 степени

$$\varphi_{12} = E\xi^7 + F\xi^6 + G\xi^5 + H\xi^4 + I\xi^3 + J\xi^2 + K\xi + L\,,$$

то сумма членов младших степеней по ξ в первых двух слагаемых в (3.21) есть

$$\beta(-144K - 24J)\xi^2 + \beta(-144L + 2J)\xi + \beta(24L + 2K)\,.$$

Матрица коэффициентов при $\beta J, \beta K$ и βL есть

$$\begin{pmatrix} -24 & -144 & 0 \\ 2 & 0 & -144 \\ 0 & 2 & 24 \end{pmatrix}\,.$$

Она является вырожденной. С другой стороны, младшие степени по ξ в оставшейся части уравнения (3.21) суть

$$3c\beta^2\left(\frac{c\beta^3}{16}\right)^2\left(-\frac{1}{8}\right)^2\xi^2 \tag{3.22}$$

согласно выражению (3.19) для φ_4. Для разрешимости линейной системы уравнений для коэффициентов $E,\ldots,L$ необходимо равенство нулю коэффициентов в (3.22). Поскольку $\beta \neq 0$, то это возможно только при $c = 0$. В этом случае полное уравнение вырождается в укороченное $g_0 = 0$ и в разложении решения $z = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \varphi_{4k}(\xi)\, x^{4k}$ для $k > 0$ все $\varphi_{4k} = 0$. Это тривиально вырожденный интегрируемый случай с $a = c = 0$. Итак, доказана

Теорема 3. *Для дополнительного семейства сложных разложений* (3.9) *решений уравнения P_3 коэффициенты $\varphi_{2k}(\xi)$ являются полиномами только в случаях:*

- $k = 1$ *при любых a и c,*
- $k = 2$ *и* $k = 4$ *при $a = 0$.*

4. Шестое уравнение Пенлеве P_6

4.1. Постановка задачи. До сих пор мы рассматривали разложения вблизи $x = 0$, и они были по положительным степеням i,k,n. Но теперь будет удобнее рассматривать разложения вблизи $x = \infty$, т.е. по отрицательным степеням i,k,n. Все формулы раздела 2 остаются справедливыми с обращением знаков i,k,n. При этом знаки j остаются неотрицательными.

После избавления от знаменателей уравнение P_6 принимает вид

$$\begin{aligned} f(x,y) \overset{def}{=} 2y''x^2(x-1)^2y(y-1)(y-x) - (y')^2[\, x^2(x-1)^2(y-1)(y-x) + \\ + x^2(x-1)^2y(y-x) + x^2(x-1)^2y(y-1)\,] + \\ + 2y'[\, x(x-1)^2y(y-1)(y-x) + x^2(x-1)y(y-1)(y-x) + \\ + x^2(x-1)^2y(y-1)\,] - \\ - [\, 2ay^2(y-1)^2(y-x)^2 + 2bx(y-1)^2(y-x)^2 + \\ + 2c(x-1)y^2(y-x)^2 + 2dx(x-1)y^2(y-1)^2\,] = 0. \quad (4.1) \end{aligned}$$

Его носитель и многоугольник показаны на рис. 4.

Разделим полином (4.1) на x^3, результат обозначим $\widetilde{f}$ и запишем его в виде

$$\widetilde{f}(x,y) = \widetilde{f}_0 + x^{-1}\widetilde{f}_{-1} + x^{-2}\widetilde{f}_{-2} + x^{-3}\widetilde{f}_{-3}\ ,$$

где

$$\widetilde{f}_0(x,y) = -2y''x^2y(y-1) + y'^2x^2(2y-1) - 2y'xy(y-1) - 2b(y-1)^2 + 2cy^2\ ,$$

$$\begin{aligned} \widetilde{f}_{-1}(x,y) = 2y''x^2y(y-1)(y+2) - y'^2x^2\left(3y^2+2y-2\right) + 2y'xy(y-1)(2y+1) + \\ + 2\left[ay^2(y-1)^2 - 2by(y-1)^2 - cy^2(2y+1) + dy^2(y-1)^2\right]\ , \end{aligned}$$

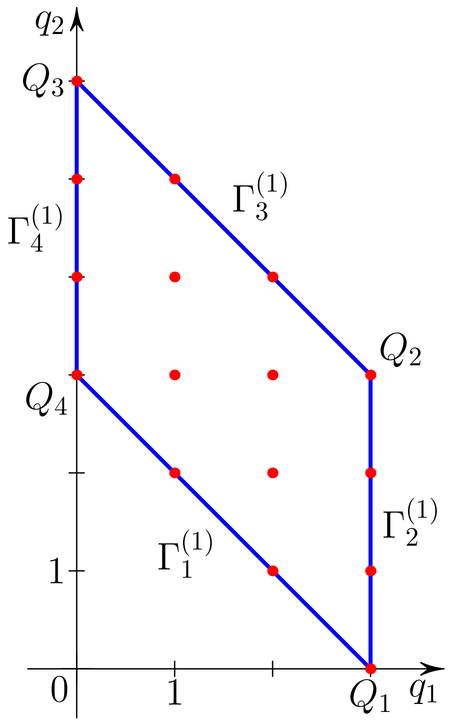

Рис. 4. Носитель и многоугольник уравнения (4.1).

$$\widetilde{f}_{-2}(x,y) = -2y''x^2y(y-1)(2y+1) + y'^2x^2(6y^2-2y-1) - 6y'xy^2(y-1) + \\ + 4ay^3(y-1)^2 - 2by^2(y-1)^2 - 2cy^3(y+2) + 2dy^2(y-1)^2\,,$$

$$\widetilde{f}_{-3}(x,y) = 2y''x^2y^2(y-1) - y'^2x^2y(3y-2) + 2y'xy^2(y-1) - 2ay^4(y-1)^2 + 2cy^4\,.$$

Носитель каждого из полиномов $x^{-i}\tilde{f}_{-i}$ расположен на своём вертикальном отрезке $q_1 = -i$ сдвинутого влево рис. 4. $\widetilde{f}_0$ соответствует правому вертикальному ребру $\Gamma_2^{(1)}$ рис. 4. После замены $\xi = \ln x$ выражения $y''x^2, y'^2x^2$ и $y'x$ переходят в $\ddot{y} - \dot{y}, \dot{y}^2$ и $\dot{y}$ соответственно, и эти полиномы принимают следующий вид

$$\begin{aligned}
g_0(\xi,y) = \quad & \tilde{f}_0 = -2\ddot{y}y(y-1) + \dot{y}^2(2y-1) - 2b(y-1)^2 - 2cy^2\,,\\
g_{-1}(\xi,y) = \quad & \tilde{f}_{-1} = 2(\ddot{y}-\dot{y})y(y-1)(y+2) - \dot{y}^2(3y^2+2y-2) + \\
& \quad + 2\dot{y}y(y-1)(2y+1) - 2\omega y^2(y-1)^2 + \\
& \quad + 4by(y-1)^2 + 2cy^2(2y+1),\\
g_{-2}(\xi,y) = \quad & \tilde{f}_{-2} = -2\ddot{y}y(y-1)(2y+1) + \dot{y}^2(6y^2-2y-1) + 2\dot{y}y(y-1)^2 + \\
& \quad + 4ay^3(y-1)^2 - 2by^2(y-1)^2 - 2cy^3(y+2) + 2dy^2(y-1)^2,\\
g_{-3}(\xi,y) = \quad & \tilde{f}_{-3} = 2\ddot{y}y^2(y-1) - \dot{y}^2y(3y-2) - 2ay^4(y-1)^2 + 2cy^4\,,
\end{aligned}$$
(4.2)

где $\omega = a + d$.

Будем искать решение уравнения (4.1) в виде ряда

$$y = \varphi_0(\xi) + \sum_{k=-1}^{-\infty} \varphi_k(\xi) x^k, \tag{4.3}$$

где $\varphi_0(\xi)$ — решение уравнения $g_0 = 0$ из (4.2). Его носитель и многоугольник при $b \neq 0$ и $b + c \neq 0$ показаны на рис. 5.

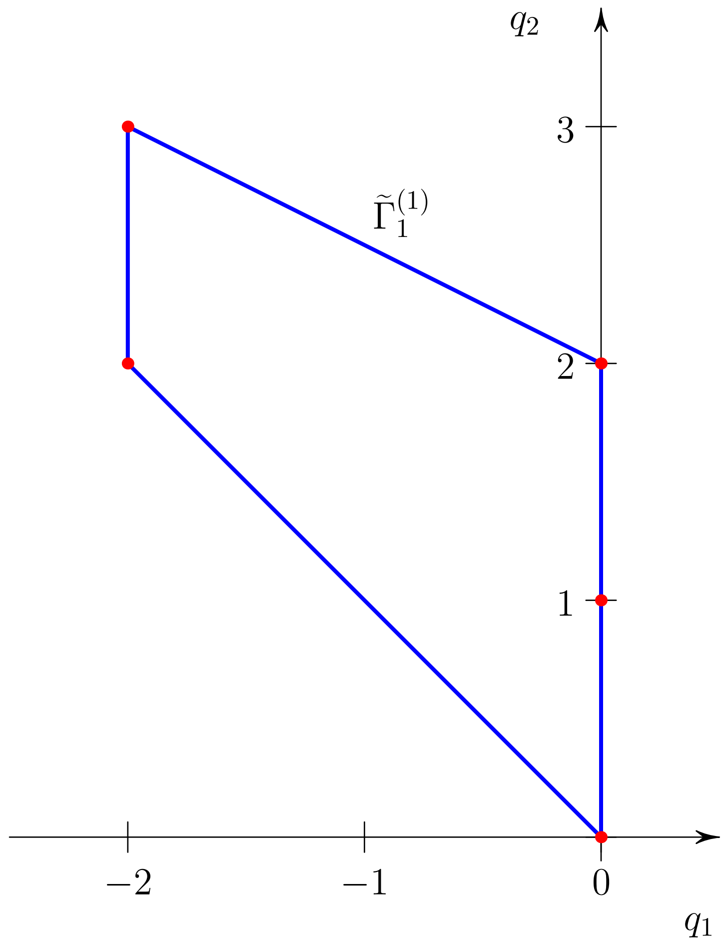

Рис. 5. Носитель и многоугольник дифференциального многочлена g_0 из (4.2).

Рассмотрим уравнение $g_0 = 0$ из (4.2) при $b + c \neq 0$. Ребру $\tilde{\Gamma}_1^{(1)}$ рис. 5 соответствует укороченное уравнение

$$\hat{g}_0 \overset{def}{=} -2\ddot{y}y^2 + 2\dot{y}^2 y - 2(b+c)y^2 = 0.$$

Оно имеет степенное решение $y = (b+c)\xi^2/2$. Продолжая его в виде ряда по ξ согласно [1], получаем решение уравнения $g_0 = 0$ из (4.2)

$$y = \frac{b+c}{2}(\ln x + \tilde{c})^2 + \frac{b}{b+c}, \tag{4.4}$$

где $\tilde{c}$ — произвольная постоянная.

Рассмотрим уравнение $g_0 = 0$ из (4.2) при $b + c = 0$ и $b \neq 0$. Тогда оно есть

$$g_0 \stackrel{def}{=} -2\ddot{y}y(y-1) + \dot{y}^2(2y-1) + 4by - 2b = 0. \tag{4.5}$$

Его носитель и многоугольник показаны на рис. 6.

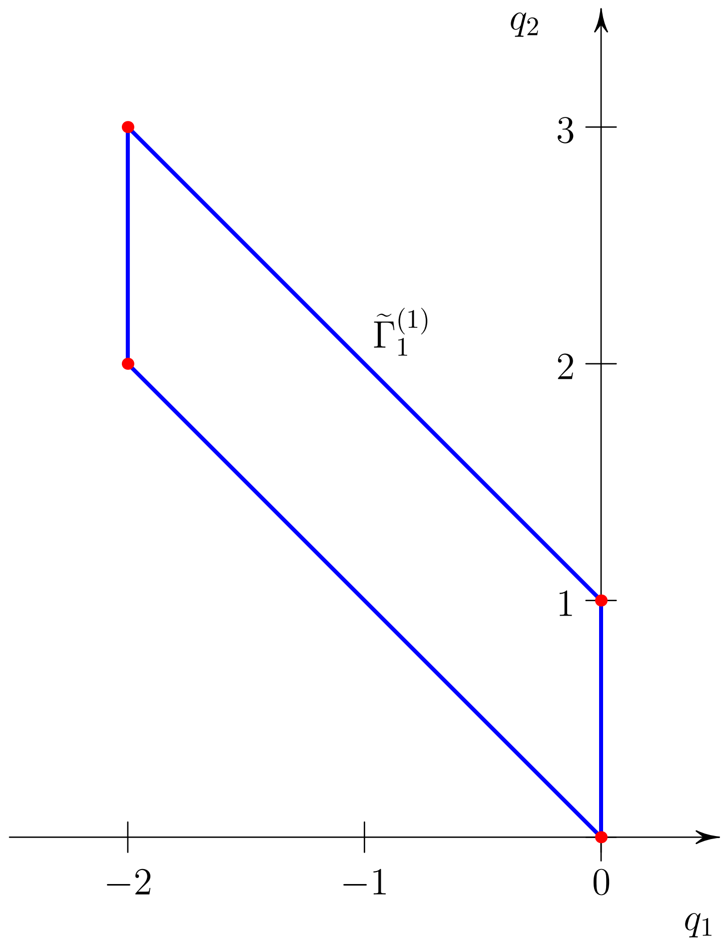

Рис. 6. Носитель и многоугольник уравнения (4.5).

Ребру $\tilde{\Gamma}_1^{(1)}$ рис. 6 соответствует укороченное уравнение

$$\hat{g}_0 \stackrel{def}{=} -2\ddot{y}y^2 + 2\dot{y}^2 y + 4by = 0.$$

Оно имеет степенное решение

$$y = \pm\sqrt{-2b}\xi.$$

Продолжая его, получаем степенное разложение решения уравнения (4.5)

$$y = \pm\sqrt{-2b}(\xi + \tilde{c}), \tag{4.6}$$

где $\tilde{c}$ — произвольная постоянная. Итак, получили два семейства разложений (4.3) решений полного уравнения P_6:
основное семейство при $b + c \neq 0$ с φ_0 из (4.4);
дополнительное семейство при $b + c = 0$ с φ_0 из (4.6).

Далее рассмотрим их по отдельности.

4.2. Основное семейство. Вычислим $\varphi_{-1}(\xi)$. Положим $\xi = \ln x + \tilde{c}$. Тогда (4.4) принимает вид

$$\varphi_0(\xi) = y = \frac{\alpha}{2}\xi^2 + \frac{b}{\alpha}, \tag{4.7}$$

где $\alpha = b + c$. По теореме 2 уравнение для φ_{-1} есть

$$\frac{\delta g_0}{\delta y}\, x^{-1}\varphi_{-1} + g_{-1}(\varphi_0) = 0.$$

Первая вариация для g_0 из (4.2) есть

$$\frac{\delta g_0}{\delta y} = -2y^2\frac{d^2}{d\xi^2} + 4y\dot{y}\frac{d}{d\xi} + 2y\frac{d^2}{d\xi^2} - 4y\ddot{y} + 2\ddot{y} - 2\dot{y}\frac{d}{d\xi} + 2\dot{y}^2 - 4(b+c)y + 4b. \tag{4.8}$$

Поэтому

$$\frac{\delta g_0}{\delta y} = a_1\frac{d^2}{d\xi^2} + a_2\frac{d}{d\xi} + a_3, \tag{4.9}$$

где $a_1 = -2y^2 + 2y$, $a_2 = 4y\dot{y} - 2\dot{y}$, $a_3 = -4y\ddot{y} + 2\ddot{y} + 2\dot{y}^2 - 4\alpha y + 4b$. Согласно лемме 1 и формуле (4.9) уравнение для $\varphi = \varphi_{-1}$ есть

$$a_1\left[\varphi - 2\dot{\varphi} + \ddot{\varphi}\right] + a_2\left[-\varphi + \dot{\varphi}\right] + a_3\varphi + g_{-1} = 0. \tag{4.10}$$

Согласно (4.7) $\dot{y} = \alpha\xi$, $\ddot{y} = \alpha = b + c$. Поэтому $\dot{y}^2 = 2\alpha y - 2b$. После этой замены и перегруппировки членов по параметрам ω,b,α, получаем из (4.2)

$$g_{-1} = -2\omega y^2(y-1)^2 - 4b(y-1)^2 + 2\alpha\xi y(y-1)^2. \tag{4.11}$$

Осталось три параметра ω, b,α. При этом $a_3 = -4\alpha y + 2\alpha$.

Уравнение (4.10) имеет полиномиальное решение

$$\varphi = A\xi^4 + B\xi^3 + C\xi^2 + D\xi + E, \tag{4.12}$$

где

$$\begin{gathered} A = -\frac{\omega\alpha^2}{4}, \quad B = \frac{\alpha^2}{2} - \omega\alpha^2, \quad C = \alpha^2 - 2\omega\alpha^2 - \omega b + \frac{\omega\alpha}{2}, \\ D = \alpha^2 - 2\omega\alpha^2 + \omega(\alpha - 2b) + b - \alpha, \quad E = \frac{\omega b(\alpha - b)}{\alpha^2}. \end{gathered} \tag{4.13}$$

При подстановке (4.12) в уравнение (4.10) и сравнении коэффициентов при степенях ξ от 0 до 8 получаем систему 9 линейных уравнений на 5 коэффициентов из (4.12). Из первых пяти уравнений однозначно находим коэффициенты как функции от 3 параметров. Удивительно, что оставшиеся 4 уравнения удовлетворяются тождественно по этим параметрам.

По теореме 2 уравнение для φ_{-2} есть

$$\frac{\delta g_0}{\delta y}\,x^{-2}\varphi_{-2}+\frac{1}{2}\frac{\delta^2 g_0}{\delta y^2}\left(x^{-1}\varphi_{-1}\right)^2+x^{-1}\frac{\delta g_{-1}}{\delta y}\,x^{-1}\varphi_{-1}+g_{-2}(\varphi_0)=0\,. \tag{4.14}$$

Первая вариация $\delta g_0/\delta y$ дана в (4.8). Вторая вариация

$$\frac{\delta^2 g_0}{\delta y^2}=(-4y+2)\frac{d^2}{d\xi^2}+8\dot y\frac{d}{d\xi}-4\alpha\,.$$

По лемме 1

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{d\xi^2}x^{-2}\varphi_{-2}&=x^{-2}\left[4\varphi_{-2}-4\dot\varphi_{-2}+\ddot\varphi_{-2}\right],\\ \frac{d}{d\xi}x^{-2}\varphi_{-2}&=x^{-2}\left[-2\varphi_{-2}+\dot\varphi_{-2}\right].\end{aligned}$$

Затем согласно (4.11)

$$\begin{aligned}\frac{\delta g_{-1}}{\delta y}&=2y(y-1)(y+2)\,\frac{d^2}{d\xi^2}-2\dot y(3y^2+2y-2)\frac{d}{d\xi}+2y(y-1)^2\,\frac{d}{d\xi}-\\ &-2\alpha(3y^2+2)-4\omega(2y^3-3y^2+y)+4c(3y^2+y)+4b(3y^2-y+2)\,.\end{aligned}$$

Поэтому уравнение для φ_{-2} есть

$$\begin{gathered}(-2y^2+2y)\left[4\varphi_{-2}-4\dot\varphi_{-2}+\ddot\varphi_{-2}\right]+(4y\dot y-2\dot y)\left[-2\varphi_{-2}+\dot\varphi_{-2}\right]+(-4\alpha y+2\alpha)\varphi_{-2}+\\ +(2y-1)\left[4\varphi_{-1}^2-4(\dot{\varphi_{-1}^2})+(\ddot{\varphi_{-1}^2})\right]+4\dot y\left[-2\varphi_{-1}^2+(\dot{\varphi_{-1}^2})\right]-2\alpha\varphi_{-1}^2+\\ +2y(y-1)(y+2)\left[\varphi_{-1}-2\dot\varphi_{-1}+\ddot\varphi_{-1}\right]-\\ -2[\dot y(3y^2+2y-2)+y(y-1)^2]\left[-\varphi_{-1}+\dot\varphi_{-1}\right]+\\ +[-2\alpha(3y^2+2)-4\omega(2y^3-2y^2+y)+4c(3y^2+y)+4b(3y^2-y+2)]\varphi_{-1}+g_{-2}=0\,.\end{gathered} \tag{4.15}$$

Чтобы упростить вычисления, ограничимся случаем

$$b=0\,.$$

Тогда $c = \alpha, d = \omega - \alpha$ и в $\delta g_{-1}/\delta y$ сумма членов без дифференциалов есть

$$-4\omega(2y^3 - 3y^2 + y) + 2\alpha(3y^2 + 2y - 2)\,.$$

Ищем $\varphi_{-2}(\xi)$ как многочлен 6 степени

$$\varphi_{-2} = F\xi^6 + G\xi^5 + H\xi^4 + I\xi^3 + J\xi^2 + K\xi + L\,.$$

Тогда в первой части уравнения (4.15), содержащей φ_{-2}, младшие по степеням ξ члены имеют вид

$$2\alpha(2-\alpha)L\xi^2 + 4\alpha L\xi + 2\alpha L\,.$$

Во второй части уравнения (4.15), содержащей φ_{-1}^2, получаем согласно (4.12)

$$(2\alpha D^2 + 24BD + 12C^2 - 24CD + 4D^2)\xi^2 + (12CD - 8D^2)\xi + 2D^2\,.$$

В третьей части, содержащей φ_{-1}, получаем $3\alpha D\xi^2$. А в четвёртой части, соответствующей g_{-2}, вообще нет членов ниже третьей степени ξ. Приравнивая к нулю суммы этих коэффициентов при одинаковых степенях ξ, получаем

$$\xi^0) \quad 2\alpha L + 2D^2 = 0, \quad \text{т.е.} \quad \alpha L = -D^2\,,$$

$$\xi^1) \quad 4\alpha L + 12CD - 8D^2 = 0, \quad \text{т.е.} \quad 12D(C - D) = 0\,,$$

и возможны два случая: $D = 0$ и $D = C$.

$$\xi^2) \quad 2\alpha(2-\alpha)L + 2\alpha D^2 + 24BD + 12C^2 - 24CD + 4D^2 + 3\alpha D = 0,$$

$$\text{т.е.} \quad 2(\alpha-2)D^2 + 2\alpha D^2 + 24BD + 12C^2 - 24CD + 4D^2 + 3\alpha D = 0\,.$$

В первом случае $D = 0$ получаем, что $C = 0$, т.е. согласно (4.13)

$$\alpha^2 - 2\omega\alpha^2 + \omega\alpha - \alpha = 0\,, \quad \alpha^2 - 2\omega\alpha^2 + \frac{\omega\alpha}{2} = 0\,.$$

Эта система имеет единственное решение с $\alpha = b + c \neq 0$

$$\omega = 2, \quad \alpha = \frac{1}{3}\,.$$

Во втором случае $D = C$ получаем $\omega = 2$, а из коэффициентов при ξ^2 получаем уравнение

$$4\alpha D^2 + 24BD + 12C^2 - 24CD + 3\alpha D = 0\,.$$

После замены $C = D$ оно принимает вид

$$4\alpha D^2 + 24BD - 12D^2 + 3\alpha D = 0\,.$$

Сокращая на D, получаем

$$4\alpha D + 24B - 12D + 3\alpha = 0\,.$$

Подставляя сюда выражения B,D через α и $\omega = 2$ согласно (4.13), получаем уравнение

$$12\alpha^2 - 4\alpha + 9 = 0\,. \tag{4.16}$$

Итак, доказана

Теорема 4. *Для основного семейства сложных разложений решений* (4.3) *уравнения P_6 при $b = 0$ третий коэффициент $\varphi_{-2}(\xi)$ может быть многочленом только при $\omega = 2$ в трёх случаях α: $\alpha = 1/3$ и α есть корень уравнения* (4.16).

4.3. Дополнительное семейство для P_6. Рассмотрим уравнение $f = 0$ при $b + c = 0$ и $b \neq 0$. Тогда $y = \varphi_0 = \beta\xi$, $\beta^2 = -2b$. Вычислим ряд $\varphi(\xi) = \varphi_{-1}(\xi)$. Он удовлетворяет уравнению (4.10) при $\alpha = 0$ и $y = \beta\xi$. Теперь $\dot{y} = \beta$, $\ddot{y} = 0$ и в уравнении (4.10)

$$a_1 = -2\beta^2\xi^2 + 2\beta\xi, \quad a_2 = 4\beta^2\xi - 2\beta, \quad a_3 = 0,$$
$$g_{-1} = -2\omega y^2(y-1)^2 - 4b(y-1)^2 + 2\beta y(y-1)^2,$$

а три параметра ω, b,β, связаны соотношением $\beta^2 = -2b$. Уравнение (4.10) имеет полиномиальное решение

$$\varphi = A\xi^2 + B\xi + C,$$

где

$$A = 2b\omega,\ B = 4b\omega + \beta\omega - 2b,\ C = 4b\omega + \beta\omega - 2b - \beta. \tag{4.17}$$

Для этих трёх коэффициентов получается линейная система пяти уравнений. Из первых трёх они однозначно находятся, а остальные два уравнения удовлетворяются тождественно по параметрам.

Замечание 1. В четырёх линейных системах для коэффициентов многочленов φ_2 для P_3 и φ_{-1} для P_6 ранг расширенной матрицы (т.е. включающей столбец для свободных членов) равен в точности числу коэффициентов. Хотя в случае общего положения он должен быть на единицу больше, тогда коэффициенты были бы связаны одним линейным соотношением, которое индуцировало бы одно алгебраическое уравнение на параметры. Но для уравнений Пенлеве эти матрицы имеют не максимальный возможный ранг, т.е. вырождены. Это новое свойство уравнений Пенлеве.

Теперь уравнение для φ_{-2} есть (4.14). Его слагаемые обозначим Φ_1,Φ_2,Φ_3 и Φ_4. Здесь

$$\frac{\delta g_0}{\delta y} = -2y(y-1)\frac{d^2}{d\xi^2} + 2y(2y-1)\frac{d}{d\xi}\,.$$

Поэтому

$$\frac{\delta g_0}{\delta y}x^{-2}\varphi_{-2} = x^{-2}\{(-2y(y-1))[4\varphi_{-2} - 4\dot{\varphi}_{-2} + \ddot{\varphi}_{-2}] + 2\dot{y}(2y-1)\,[-2\varphi_{-2} + \dot{\varphi}_{-2}]\}\,.$$

Ищем φ_{-2} в виде

$$\varphi_{-2} = D\xi^3 + E\xi^2 + F\xi + G\,.$$

Тогда для младших степеней ξ в $\Phi_1 x^2$ получаются значения

$$4\beta(\beta-1)\,(F-2G)\xi - 2\beta(F-2G)\,. \tag{4.18}$$

Здесь

$$\frac{\delta^2 g_0}{\delta y^2} = (-4y+2)\frac{d^2}{d\xi^2} + 8\dot{y}\frac{d}{d\xi}\,.$$

Поэтому

$$\Phi_2 x^2 = (-2\beta\xi + 1)\,[4\varphi_{-1}^2 - 4(\dot{\varphi_{-1}^2}) + (\ddot{\varphi_{-1}^2})] + 4\beta\,[-2\varphi_{-1}^2 + (\dot{\varphi_{-1}^2})]\,.$$

Младшие по степеням ξ члены в этом выражении суть

$$\begin{aligned}\big(-8\beta C^2 + 4\beta B^2 + 8\beta AC - 8B^2 + 8BC - 16AC + 12AB\big)\,\xi +\\ +8\beta BC - 8\beta C^2 + 4C^2 - 8BC + 2B^2 + 4AC\,.\end{aligned} \tag{4.19}$$

В Φ_3

$$\begin{aligned}\frac{\delta g_{-1}}{\delta y} = 2y(y-1)(y+2)\,\frac{d^2}{d\xi^2} - 2\dot{y}(3y^2 + 2y - 2)\frac{d}{d\xi} + 2y(y-1)^2\frac{d}{d\xi} -\\ -4\omega(2y^3 - 3y^2 + y) + 2\beta(3y^2 - 4y + 1) - 8b(y-1)\,.\end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}x\frac{\delta g_{-1}}{\delta y}x^{-1}\varphi_{-1} = 2y(y-1)(y+2)\,[\varphi_{-1} - 2\dot{\varphi}_{-1} + \ddot{\varphi}_{-1}] +\\ + [-2y(3y^2 + 2y - 2) + 2y(y-1)^2]\,[-\varphi_{-1} + \dot{\varphi}_{-1}] +\\ + [-4\omega(2y^3 - 3y^2 + y) + 2\beta(3y^2 - 4y + 1) - 8b(y-1)]\varphi_{-1}\,.\end{aligned} \tag{4.20}$$

Младшие по степеням ξ члены в этом выражении суть

$$\left[-4\beta^2 B + 4\beta(-C + 2B - 2A + 2A - B) + (2 - 4\beta)\beta^3\right]\xi + (2\beta + 8b)C\,.$$

Теперь $\ddot{y} = 0$, $\alpha = 0$, т. е. $c = -b$ и $d = \omega - a$, поэтому согласно (4.2)

$$g_{-2} = \beta^2(6y^2-2y-1)+2\beta y(y-1)^2+4ay^3(y-1)^2+2by^2(4y-1)+2(\omega-a)y^2(y-1)^2 .$$

Младшие по ξ члены в $x^2\Phi_4$ суть

$$(-2\beta^3 - 2\beta^2)\xi - \beta^2. \tag{4.21}$$

Младшие по степеням ξ члены в сумме $\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \Phi_4$ являются суммой формул (4.18), (4.19), (4.20), (4.21). Приравнивая к нулю коэффициенты при ξ и ξ^0, получаем два уравнения. Исключая из них $\beta(F - 2G)$, получаем одно уравнение. Подставив в него выражения A,B и C через β и ω из (4.17), выразив $b = -\beta^2/2$ и сократив на $2\beta^2$, получаем одно уравнение на β и ω:

$$-5 - 2\beta^2 + 2\beta^3 + \omega(-2 - 4\beta^3) + \omega^2(-2\beta + 4\beta^2) = 0 . \tag{4.22}$$

Итак, доказана

Теорема 5. *В дополнительном семействе сложных разложений* (4.3) *решений уравнения P_6 при $b = 0$ третий коэффициент $\varphi_{-2}(\xi)$ является полиномом только при условии* (4.22) *на параметры β и ω.*

На самом деле, для полиномиальности φ_{-2} параметр a должен быть определённой функцией от β и ω. Но вычисление этой полиномиальной функции весьма громоздко.

Замечание 2. Если коэффициент $\varphi_n(\xi)$ не является полиномом, то это, вообще говоря, расходящийся ряд Лорана, ибо в уравнение для него (2.13) он входит только в $(\delta f_0/\delta y)\, x^n\varphi_n$. При этом $\ddot{\varphi}_n$ содержится в виде суммы с $\dot{\varphi}_n$ и φ_n. Поэтому $\ddot{\varphi}_n$ не попадает в соответствующее укороченное уравнение. Поскольку ряд $\varphi_n(\xi)$ как решение уравнения (2.13) вычисляется методами из [1], то согласно §7 из [1] он, как правило, расходится.

Список литературы

[1] А. Д. Брюно, Асимптотики и разложения решений обыкновенного дифференциального уравнения // УМН, 2004. Т. 59. № 3. С. 31–80.

[2] А. Д. Брюно, Сложные разложения решений обыкновенного дифференциального уравнения // ДАН, 2006, Т. 406, № 6, С. 730–733.

[3] А. Д. Брюно, Экзотические разложения решений обыкновенного дифференциального уравнения // ДАН, 2007, Т. 416, № 5, С. 583–587.

[4] А. Д. Брюно, О сложных разложениях решений ОДУ // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша, 2011, № 15.

[5] Hazewinkel, Michiel, ed. (2001), ”Multinomial coefficient” (http://www.encyclopediaofmath.org/index.php?title=p/m065320), *Encyclopedia of Mathematics*, Springer, ISBN 978-1-55608-010-4

Список иллюстраций

Содержание