



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 63 за 2017 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Тыглиян М.А., Тюрина Н.Н.

Математическая модель
развития аневризмы в
кровеносном сосуде

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Тыглиян М.А., Тюрина Н.Н. Математическая модель развития аневризмы в кровеносном сосуде // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2017. № 63. 20 с. doi:[10.20948/prepr-2017-63](https://doi.org/10.20948/prepr-2017-63)
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2017-63>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Российской академии наук**

М.А. Тыглиян, Н.Н. Тюрина

**Математическая модель развития
аневризмы в кровеносном сосуде**

Москва — 2017

М.А. Тыглиян, Н.Н. Тюрина

Математическая модель развития аневризмы в кровеносном сосуде

В данной работе представлена математическая модель прохождения импульса крови по сосуду с аневризмой. Проводится качественный анализ полученных соотношений.

Ключевые слова: гемодинамика, аневризма, математическая модель

М.А. Tygliyan, N.N. Tyurina

Mathematical model of the aneurysm development in a blood vessel

This paper presents the mathematical model of the blood pulse passage along a vessel with the aneurysm. A qualitative analysis of the obtained equations is performed.

Key words: hemodynamics, aneurysm, mathematical model

Оглавление

I. Введение.....	3
II. Постановка задачи. Описание процесса прохождения импульса по сосуду с аневризмой.....	4
III. Прохождение импульса до точки бифуркации.....	5
IV. Ветвление импульса в точке бифуркации.....	6
V. Прохождение импульсом аневризмы.....	8
VI. Отражение от стенки аневризмы.....	8
VII. Обратное прохождение аневризмы.....	9
VIII. Выход импульса из аневризмы с прохождением в сосуд и отражением обратно в аневризму.....	9
IX. Анализ формул.....	13
X. Заключение.....	14
XI. Литература.....	15
XII. Приложение. Итоговые таблицы.....	16

I. Введение

Настоящая публикация является продолжением работы, начатой под руководством д.ф.-м.н., профессора Антона Павловича Фаворского, ведущего специалиста в области моделирования системы кровообращения, который обратил внимание на актуальность рассматриваемой проблемы и предложил подход, в рамках которого проводилось исследование. Эту работу мы посвящаем светлой памяти Антона Павловича, чей значимый вклад в данную проблематику в целом и в это исследование, в частности, невозможно переоценить.

Аневризма – это локальное расширение просвета кровеносного сосуда или сердца вследствие патологических изменений их стенки или аномалий развития, другими словами, патологическое выпячивание истонченного участка сердца или сосуда.

В области аневризмы нарушается кровоток, возникает опасность разрыва истонченной стенки аневризмы и кровоизлияния в окружающие ткани. Аневризма может длительное время не проявлять себя, но может являться причиной нарушения кровоснабжения тканей, питаемых поврежденным сосудом. При больших размерах аневризма сдавливает близлежащие органы и ткани. В 25% случаев разрывы аневризм приводят к летальному исходу.

Насчитывается около 30 разновидностей аневризм, которые принято различать по происхождению и механизмам развития. Одно из ведущих мест в патологии занимают аневризмы, которые развиваются в области тройников Виллизиева круга сосудов головного мозга. Проблема аневризм сосудов головного мозга обычно сводится к бифуркационно–гемодинамическому виду [3] аневризм, причиной образования которых выступает совокупность взаимосвязанных гемодинамических факторов, действующих изнутри сосуда. Все эти факторы обуславливают силу, которая направлена изнутри сосуда и работает на растяжение (выпячивание) сосудистой стенки, обладающей высокой степенью эластичности. Основными гемодинамическими факторами являются артериальное давление, которое имеет пульсирующий характер и вызывает растяжение сосудистой трубки, и структура самого сосудистого русла.

Известно, что пульсовая волна при прохождении участков ветвления сосудов претерпевает изменения своей амплитуды. Коэффициенты прохождения и отражения, связывающие амплитуды пульсовой волны до и после участков ветвления сосудов обсуждались в работах [1, 2]. Установлено, что при определенных условиях в артериальной части сосудистой системы могут возникать колебания давления с растущей во времени амплитудой [4,5].

Аневризма может развиваться на более слабом, то есть менее эластичном, участке сосуда, где коэффициент жесткости сосуда меньше, чем всюду на сосуде. Квазиодномерная модель, описывающая движение крови в сосуде, включает в себя три уравнения. Два уравнения выражают законы сохранения массы крови и количества движения. Эти уравнения не зависят от

физиологических свойств сосуда и справедливы для сосудов с любыми характеристиками [6]. В качестве третьего уравнения обычно используют соотношение, связывающее площадь поперечного сечения сосуда и трансмуральное давление (разница давлений внутри и снаружи сосуда). Именно в этом уравнении, которое называют уравнением состояния, учитываются все присущие данному типу сосуда свойства [6,9].

В данной работе представлена математическая модель прохождения импульса крови по сосуду с аневризмой, что представляет практический интерес с точки зрения понимания механизмов развития аневризм и прогностических возможностей.

II. Постановка задачи. Описание процесса прохождения импульса по сосуду с аневризмой

Будем строить математическую модель, исходя из следующих предположений:

- Будем полагать, что коэффициент жесткости сосуда всюду постоянен, кроме выделенного участка сосуда.
- На выделенном участке сосуда коэффициент жесткости также постоянен, но отличен от коэффициента жесткости сосуда.
- Будем полагать, что размеры «слабого участка» малы по сравнению с длиной сосуда.
- Середину такого участка будем считать точкой бифуркации.
- Аневризму будем рассматривать как слепое ответвление сосуда, где фоновая скорость крови равна нулю.

Схематически это можно представить следующим образом:

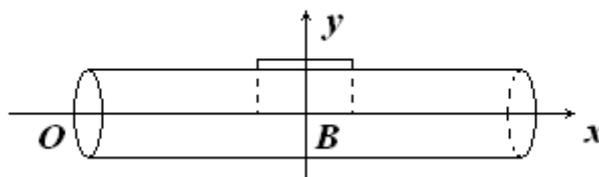


Рис. 1

Ox — ось сосуда, Bu — ось аневризмы, B — точка бифуркации

Тогда для того, чтобы проследить развитие аневризмы, нужно проследить за входящим в сосуд импульсом на следующих этапах:

- Прохождение импульса до точки бифуркации
- Ветвление импульса в точке бифуркации
- Прохождение импульсом аневризмы
- Отражение от стенки аневризмы
- Обратное прохождение аневризмы
- Выход импульса из аневризмы с ветвлением в сосуд и отражением обратно в аневризму

Последний этап подразумевает циклическое прохождение и ветвление аневризмы (см. схему 1), до тех пор, пока амплитуда импульса не станет достаточно мала, чтобы им можно было пренебречь, либо, в случае роста амплитуды, пока выдерживает сосуд.



Схема 1

Прохождение импульса по сосуду с аневризмой

III. Прохождение импульса до точки бифуркации

Пусть задан начальный импульс $r_1^{0+} \neq 0$ шириной λ^0 , при этом $r_1^{0-} = 0$. Тогда начальные возмущения давления p_1^{0+} и скорости u_1^{0+} крови, удовлетворяют уравнениям [2]:

$$\begin{aligned} p_1^{0+} &= \frac{1}{2} \rho \cdot \bar{c}_1 \cdot r_1^{0+}, \\ u_1^{0+} &= \frac{1}{2} r_1^{0+}. \end{aligned} \quad (1)$$

Монофазный импульс r_1^{0+} шириной λ^0 будет двигаться по сосуду с фоновыми параметрами $\bar{p}_1, \bar{u}_1, \bar{S}_1, \bar{\chi}_1, \bar{c}_1$ до точки B согласно уравнению переноса [7]:

$$\frac{\partial r_1^{0+}}{\partial t} + (\bar{u}_1 + \bar{c}_1) \frac{\partial r_1^{0+}}{\partial x} = 0. \quad (2)$$

При этом его ширина и амплитуда не изменятся, то есть, согласно уравнениям (1), амплитуда малых отклонений давления p_1^{0+} и скорости u_1^{0+} останется постоянной.

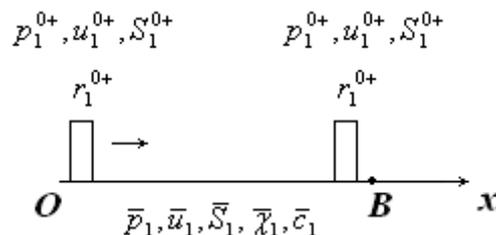


Рис.2

Прохождение импульса до точки бифуркации

IV. Ветвление импульса в точке бифуркации

Исходя из нашего представления аневризмы как слепого ответвления сосуда, естественно рассматривать процесс прохождения импульсом участка с аневризмой как ветвление сосуда 1 на сосуд 2 с теми же фоновыми параметрами и сосуд A (аневризма) со своими фоновыми параметрами.

Фоновое давление предполагается постоянным $\bar{p}_1 = \bar{p}_2 = \bar{p}_A = \bar{p}$. Фоновую скорость крови в аневризме будем полагать равной нулю: $\bar{u}_A = 0$.

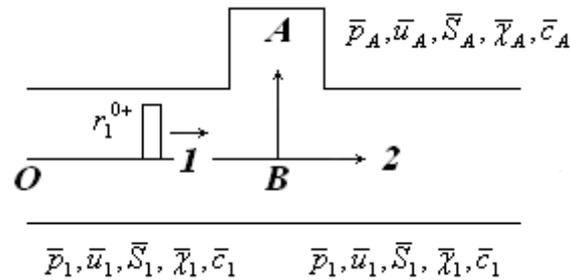


Рис.3

Картина ветвления сосуда в точке бифуркации

Импульс r_1^{0+} при прохождении точки ветвления разделится на импульс r_2^+ шириной λ_2^+ , который пройдет в продолжение сосуда, импульс r_A^+ шириной λ_A^+ , который пройдет в аневризму, и импульс r_1^- шириной λ_1^- , который отразится обратно в сосуд (см.рис.4).

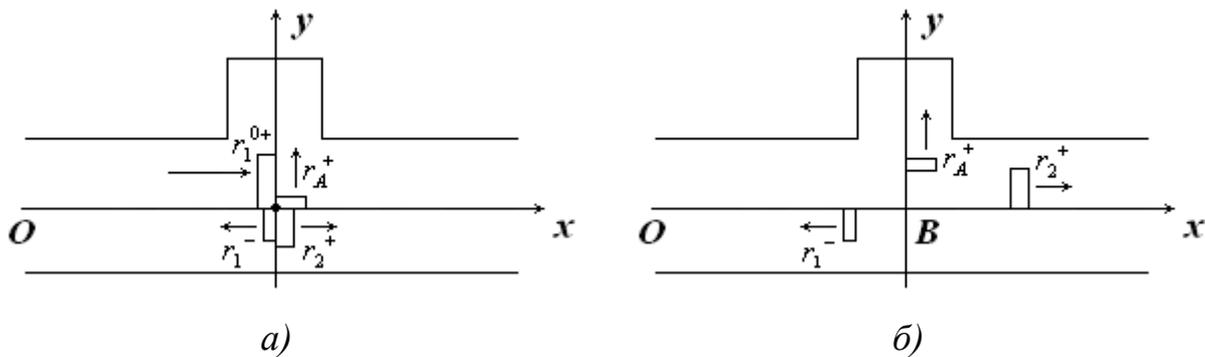


Рис.4 Ветвление сосуда в точке бифуркации: а) Прохождение импульса через точку бифуркации; б) После прохождения точки бифуркации

Условием сопряжения будем считать постоянство давления:

$$\bar{p}_1 + p_1 = \bar{p}_2 + p_2 = \bar{p}_A + p_A.$$

Учитывая, что фон давления постоянный, имеем:

$$p_1 = p_2 = p_A, \quad (3)$$

где $p_1 = p_1^{0+} + p_1^- = 0.5\rho\bar{c}_1(r_1^{0+} - r_1^-)$, $p_2 = p_2^+ = 0.5\rho\bar{c}_1 r_2^+$, $p_A = p_A^+ = 0.5\rho\bar{c}_A r_A^+$.

Используя формулы для ветвления сосудов [2], получаем выражение для амплитуды отраженного импульса:

$$r_1^- = \frac{\bar{\chi}_1(\bar{c}_1 + \bar{u}_1) + \bar{\chi}_A(\bar{c}_A + \bar{u}_A) - \bar{\chi}_1(\bar{c}_1 + \bar{u}_1)}{\bar{\chi}_1(\bar{c}_1 + \bar{u}_1) + \bar{\chi}_A(\bar{c}_A + \bar{u}_A) + \bar{\chi}_1(\bar{c}_1 - \bar{u}_1)} r_1^{0+} = \frac{\bar{\chi}_A \bar{c}_A}{2\bar{\chi}_1 \bar{c}_1 + \bar{\chi}_A \bar{c}_A} r_1^{0+}. \quad (4)$$

Ширина отраженного импульса равна $\frac{(\bar{c}_1 - \bar{u}_1)}{(\bar{u}_1 + \bar{c}_1)} \lambda^0$.

Для амплитуды прошедшего в продолжение сосуда импульса получаем:

$$r_2^+ = \frac{2\bar{\chi}_1 \bar{c}_1^2}{\bar{c}_1(\bar{\chi}_1(\bar{c}_1 + \bar{u}_1) + \bar{\chi}_A(\bar{c}_A + \bar{u}_A) + \bar{\chi}_1(\bar{c}_1 - \bar{u}_1))} r_1^{0+} = \frac{2\bar{\chi}_1 \bar{c}_1}{2\bar{\chi}_1 \bar{c}_1 + \bar{\chi}_A \bar{c}_A} r_1^{0+}, \quad (5)$$

Ширина прошедшего в продолжение сосуда импульса равна λ^0 .

Для амплитуды прошедшего в аневризму импульса получаем:

$$r_A^+ = \frac{2\bar{\chi}_1 \bar{c}_1^2}{\bar{c}_A(\bar{\chi}_1(\bar{c}_1 + \bar{u}_1) + \bar{\chi}_A(\bar{c}_A + \bar{u}_A) + \bar{\chi}_1(\bar{c}_1 - \bar{u}_1))} r_1^{0+} = \frac{2\bar{\chi}_1 \bar{c}_1^2}{\bar{c}_A(2\bar{\chi}_1 \bar{c}_1 + \bar{\chi}_A \bar{c}_A)} r_1^{0+}. \quad (6)$$

Ширина прошедшего в аневризму импульса равна $\frac{\bar{c}_A}{(\bar{u}_1 + \bar{c}_1)} \lambda^0$.

Отсюда находим выражения для малых отклонений давления и скорости крови:

$$\begin{aligned} p_1^- &= \frac{-0.5\rho\bar{\chi}_A \bar{c}_A \bar{c}_1}{2\bar{\chi}_1 \bar{c}_1 + \bar{\chi}_A \bar{c}_A} r_1^{0+} = \frac{-\bar{\chi}_A \bar{c}_A}{2\bar{\chi}_1 \bar{c}_1 + \bar{\chi}_A \bar{c}_A} p_1^{0+}, \\ u_1^- &= \frac{0.5\bar{\chi}_A \bar{c}_A}{2\bar{\chi}_1 \bar{c}_1 + \bar{\chi}_A \bar{c}_A} r_1^{0+} = \frac{\bar{\chi}_A \bar{c}_A}{2\bar{\chi}_1 \bar{c}_1 + \bar{\chi}_A \bar{c}_A} u_1^{0+}, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} p_2^+ &= \frac{\rho\bar{\chi}_1 \bar{c}_1^2}{2\bar{\chi}_1 \bar{c}_1 + \bar{\chi}_A \bar{c}_A} r_1^{0+} = \frac{2\bar{\chi}_1 \bar{c}_1}{2\bar{\chi}_1 \bar{c}_1 + \bar{\chi}_A \bar{c}_A} p_1^{0+}, \\ u_2^+ &= \frac{\bar{\chi}_1 \bar{c}_1}{2\bar{\chi}_1 \bar{c}_1 + \bar{\chi}_A \bar{c}_A} r_1^{0+} = \frac{2\bar{\chi}_1 \bar{c}_1}{2\bar{\chi}_1 \bar{c}_1 + \bar{\chi}_A \bar{c}_A} u_1^{0+} \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} p_A^+ &= \frac{\rho\bar{\chi}_1 \bar{c}_1^2}{2\bar{\chi}_1 \bar{c}_1 + \bar{\chi}_A \bar{c}_A} r_1^{0+} = \frac{2\bar{\chi}_1 \bar{c}_1}{2\bar{\chi}_1 \bar{c}_1 + \bar{\chi}_A \bar{c}_A} p_1^{0+}, \\ u_A^+ &= \frac{\bar{\chi}_1 \bar{c}_1^2}{\bar{c}_A(2\bar{\chi}_1 \bar{c}_1 + \bar{\chi}_A \bar{c}_A)} r_1^{0+} = \frac{2\bar{\chi}_1 \bar{c}_1^2}{\bar{c}_A(2\bar{\chi}_1 \bar{c}_1 + \bar{\chi}_A \bar{c}_A)} u_1^{0+} \end{aligned} \quad (9)$$

Время прохождения импульса точки бифуркации $\tau = \frac{\lambda^0}{\bar{u}_1 + \bar{c}_1}$.

Малые отклонения давления во время прохождения удовлетворяют уравнениям:

$$p_1 = p_2 = p_A = \frac{\rho \bar{\chi}_1 \bar{c}_1^2}{2\bar{\chi}_1 \bar{c}_1 + \bar{\chi}_A \bar{c}_A} r_1^{0+} = \frac{2\bar{\chi}_1 \bar{c}_1}{2\bar{\chi}_1 \bar{c}_1 + \bar{\chi}_A \bar{c}_A} p_1^{0+} \quad (10)$$

Импульсы, прошедший в продолжение сосуда r_2^+ и отраженный обратно в сосуд r_1^- , будут двигаться с постоянными скоростями, $\bar{u}_1 + \bar{c}_1$ и $\bar{u}_1 - \bar{c}_1$ соответственно, до концов сосуда, где произойдет прохождение в сопряженный сосуд (или тканевый узел) и частичное отражение обратно в сосуд. Вклад отраженных на концах сосуда импульсов в развитие аневризмы может быть учтен с помощью суперпозиции, поэтому в данном рассмотрении мы сосредоточимся на прохождении импульсом аневризмы.

Итоговые таблицы см. в приложении (Таблица 1. Ветвление импульса в аневризму и в продолжение сосуда)

V. Прохождение импульсом аневризмы

Импульс, прошедший в аневризму, будет двигаться с постоянной скоростью \bar{c}_A , сохраняя амплитуду r_A^+ и ширину λ_A^+ , до стенки аневризмы, при этом амплитуды малых отклонений давления p_A^+ и скорости u_A^+ в аневризме останутся постоянными. Процесс движения импульса по аневризме аналогичен движению по сосуду, рассмотренному в пункте II, за исключением того, что фоновая скорость крови $\bar{u}_A = 0$.

VI. Отражение от стенки аневризмы

Когда импульс достигнет стенки аневризмы, он отразится и начнет двигаться в обратном направлении с той же скоростью, при этом скорость на стенке в момент отражения равна нулю.

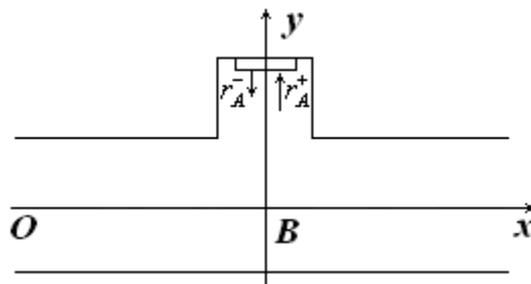


Рис.5

Отражение от стенки аневризмы

Используя формулы для отражения от стенки сосуда [2], получаем следующую картину. Отраженный импульс равен исходному с противоположным знаком:

$$r_A^- = -r_A^+. \quad (11)$$

Соответственно, малые отклонения давления и скорости крови отраженного импульса также сохраняют амплитуду по модулю:

$$p_A^- = p_A^+, \quad u_A^- = -u_A^+. \quad (12)$$

Рассмотрим теперь, что происходит на стенке аневризмы во время отражения. Скорость на границе равна нулю:

$$u_{cp} = 0, \quad (13)$$

Для давления получаем:

$$p_{cp} = p_A^+ + p_A^- = 2p_A^+. \quad (14)$$

То есть в момент отражения добавочное давление на стенку увеличивается вдвое, что в ряде случаев может привести к разрыву аневризмы.

Время отражения импульса от стенки аневризмы $\tau = \frac{\lambda_A^+}{\bar{c}_A} = \frac{\lambda^0}{(\bar{u}_1 + \bar{c}_1)}$.

Итоговые таблицы см. в приложении (Таблица 2. Отражение от стенки аневризмы)

VII. Обратное прохождение аневризмы

Процесс прохождения импульсом аневризмы после отражения от стенки полностью аналогичен процессу прохождения до отражения.

Амплитуды r_A^- , p_A^- , u_A^- сохраняются в процессе прохождения, ширина импульса $\lambda_A^- = \frac{\bar{c}_A}{(\bar{u}_1 + \bar{c}_1)} \lambda^0$ не изменяется, импульс движется с постоянной скоростью $-\bar{c}_A$ от стенки аневризмы к точке бифуркации B .

VIII. Выход импульса из аневризмы с прохождением в сосуд и отражением обратно в аневризму

Поскольку мы предполагаем, что процесс ветвления аневризмы будет циклическим, введем индексы: i для импульса входящего в точку ветвления, $i+1$ для импульсов выходящих из точки ветвления, где i меняется от 1 до ∞ .

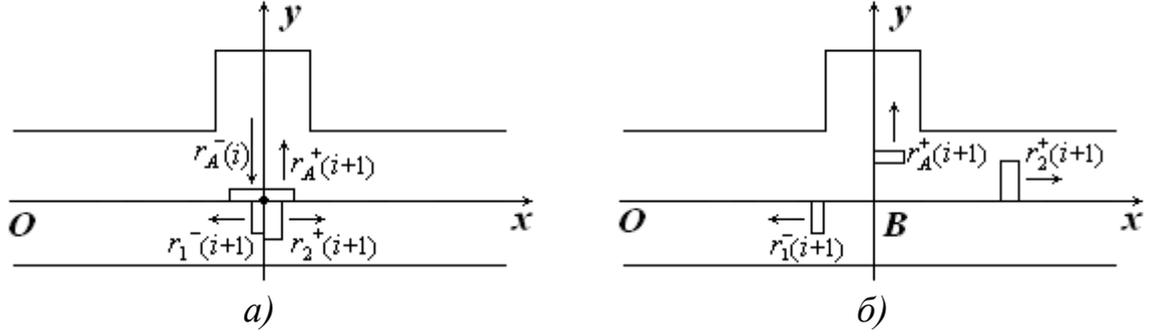


Рис.6 Выход импульса из аневризмы с прохождением в сосуд и отражением обратно в аневризму. а) Прохождение импульса через точку бифуркации б) После прохождения точки бифуркации

Закон Кирхгофа:

$$(\bar{S}_1 + S_1)(\bar{u}_1 + u_1) = (\bar{S}_A + S_A)(\bar{u}_A + u_A) + (\bar{S}_1 + S_2)(\bar{u}_1 + u_2). \quad (15)$$

Вспомним, что $\bar{u}_A = 0$.

$$\bar{S}_1\bar{u}_1 + S_1\bar{u}_1 + \bar{S}_1u_1 + S_1u_1 = \bar{S}_A u_A + S_A u_A + \bar{S}_1\bar{u}_1 + S_2\bar{u}_1 + \bar{S}_1u_2 + S_2u_2. \quad (16)$$

$$S_1u_1 \rightarrow 0, S_A u_A \rightarrow 0, S_2u_2 \rightarrow 0.$$

Линеаризуя, получаем:

$$S_1\bar{u}_1 + \bar{S}_1u_1 = \bar{S}_A u_A + S_2\bar{u}_1 + \bar{S}_1u_2. \quad (17)$$

Перегруппируем:

$$\bar{S}_A u_A = \bar{u}_1(S_1 - S_2) + \bar{S}_1(u_1 - u_2). \quad (18)$$

Сделаем подстановку:

$$\bar{S}_A = \rho\bar{\chi}_A\bar{c}_A^2, \quad \bar{S}_1 = \rho\bar{\chi}_1\bar{c}_1^2,$$

$$S_1 = \bar{\chi}_1 p_1^-(i+1) = -\frac{\bar{\chi}_1 \rho \bar{c}_1}{2} r_1^-(i+1), \quad S_2 = \bar{\chi}_1 p_2^+(i+1) = \frac{\bar{\chi}_1 \rho \bar{c}_1}{2} r_2^+(i+1),$$

$$u_A = u_A^+(i+1) + u_A^-(i) = \frac{r_A^+(i+1) + r_A^-(i)}{2}, \quad u_1 = u_1^-(i+1) = \frac{r_1^-(i+1)}{2}, \quad u_2 = u_2^+(i+1) = \frac{r_2^+(i+1)}{2}.$$

Получим:

$$\bar{\chi}_A \bar{c}_A^2 (r_A^+(i+1) + r_A^-(i)) = \bar{\chi}_1 \bar{c}_1^2 (r_1^-(i+1) - r_2^+(i+1)) - \bar{u}_1 \bar{\chi}_1 \bar{c}_1 (r_1^-(i+1) + r_2^+(i+1)). \quad (19)$$

Используем условие постоянства давления: $p_A = p_1 = p_2 \Rightarrow$

$$p_A^+(i+1) + p_A^-(i) = p_1^-(i+1) = p_2^+(i+1) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} \rho \bar{c}_A (r_A^+(i+1) - r_A^-(i)) = \frac{1}{2} \rho \bar{c}_1 (-r_1^-(i+1)) = \frac{1}{2} \rho \bar{c}_1 (r_2^+(i+1)). \quad (20)$$

Подставляя равенства (20) в уравнение (19), получаем:

$$\begin{aligned} \bar{\chi}_A \bar{c}_A^2 (r_A^+(i+1) + r_A^-(i)) &= 2 \bar{\chi}_1 \bar{c}_1^2 (r_1^-(i+1)) \\ \bar{\chi}_A \bar{c}_A (r_A^+(i+1) + r_A^-(i)) &= 2 \bar{\chi}_1 \bar{c}_1 (r_1^-(i) - r_A^+(i+1)) \\ (2 \bar{\chi}_1 \bar{c}_1 + \bar{\chi}_A \bar{c}_A) \cdot r_A^+(i+1) &= (2 \bar{\chi}_1 \bar{c}_1 - \bar{\chi}_A \bar{c}_A) \cdot r_A^-(i) \end{aligned} \quad (22)$$

Теперь можем выразить амплитуды выходящих из точки бифуркации импульсов через амплитуду входящего импульса:

$$r_A^+(i+1) = \frac{2 \bar{\chi}_1 \bar{c}_1 - \bar{\chi}_A \bar{c}_A}{2 \bar{\chi}_1 \bar{c}_1 + \bar{\chi}_A \bar{c}_A} \cdot r_A^-(i). \quad (23)$$

Ширина отраженного обратно в аневризму импульса равна

$$\lambda_A^+(i+1) = \lambda_A^-(i) = \frac{\bar{c}_A}{(\bar{u}_1 + \bar{c}_1)} \lambda^0.$$

То есть ширина импульса, попадающего в аневризму, остается постоянной.

$$r_1^-(i+1) = \frac{2 \bar{\chi}_A \bar{c}_A^2}{2 \bar{\chi}_1 \bar{c}_1^2 + \bar{\chi}_A \bar{c}_A \bar{c}_1} \cdot r_A^-(i). \quad (24)$$

Ширина прошедшего в начало сосуда импульса равна

$$\lambda_1^-(i+1) = (\bar{c}_1 - \bar{u}_1) \frac{\lambda_A^-(i)}{\bar{c}_A} = \frac{(\bar{c}_1 - \bar{u}_1)}{(\bar{u}_1 + \bar{c}_1)} \lambda^0.$$

$$r_2^+(i+1) = \frac{-2 \bar{\chi}_A \bar{c}_A^2}{2 \bar{\chi}_1 \bar{c}_1^2 + \bar{\chi}_A \bar{c}_A \bar{c}_1} \cdot r_A^-(i). \quad (25)$$

Ширина прошедшего в продолжение сосуда импульса равна λ^0 .

Учитывая (11), $r_A^-(i) = -r_A^+(i)$, получаем рекурсивную формулу:

$$r_A^-(i) = -\frac{2 \bar{\chi}_1 \bar{c}_1 - \bar{\chi}_A \bar{c}_A}{2 \bar{\chi}_1 \bar{c}_1 + \bar{\chi}_A \bar{c}_A} \cdot r_A^-(i-1). \quad (26)$$

Осталось дополнить ее начальным условием. Используя (6), (11), получаем:

$$r_A^-(1) = \frac{-2\bar{\chi}_1\bar{c}_1^2}{\bar{c}_A(2\bar{\chi}_1\bar{c}_1 + \bar{\chi}_A\bar{c}_A)} r_1^{0+}. \quad (27)$$

Теперь выразим амплитуды i -ых импульсов через начальный r_1^{0+} :

$$r_A^-(i) = \left(-\frac{2\bar{\chi}_1\bar{c}_1 - \bar{\chi}_A\bar{c}_A}{2\bar{\chi}_1\bar{c}_1 + \bar{\chi}_A\bar{c}_A} \right)^{i-1} \cdot \frac{-2\bar{\chi}_1\bar{c}_1^2}{\bar{c}_A(2\bar{\chi}_1\bar{c}_1 + \bar{\chi}_A\bar{c}_A)} r_1^{0+}, \quad (28)$$

$$r_A^+(i+1) = \frac{-2\bar{\chi}_1\bar{c}_1^2(2\bar{\chi}_1\bar{c}_1 - \bar{\chi}_A\bar{c}_A)}{\bar{c}_A(2\bar{\chi}_1\bar{c}_1 + \bar{\chi}_A\bar{c}_A)^2} \left(-\frac{2\bar{\chi}_1\bar{c}_1 - \bar{\chi}_A\bar{c}_A}{2\bar{\chi}_1\bar{c}_1 + \bar{\chi}_A\bar{c}_A} \right)^{i-1} r_1^{0+}, \quad (29)$$

$$r_1^-(i+1) = \frac{-4\bar{\chi}_1\bar{\chi}_A\bar{c}_1\bar{c}_A}{(2\bar{\chi}_1\bar{c}_1 + \bar{\chi}_A\bar{c}_A)^2} \left(-\frac{2\bar{\chi}_1\bar{c}_1 - \bar{\chi}_A\bar{c}_A}{2\bar{\chi}_1\bar{c}_1 + \bar{\chi}_A\bar{c}_A} \right)^{i-1} \cdot r_1^{0+}, \quad (30)$$

$$r_2^+(i+1) = \frac{4\bar{\chi}_1\bar{\chi}_A\bar{c}_1\bar{c}_A}{(2\bar{\chi}_1\bar{c}_1 + \bar{\chi}_A\bar{c}_A)^2} \left(-\frac{2\bar{\chi}_1\bar{c}_1 - \bar{\chi}_A\bar{c}_A}{2\bar{\chi}_1\bar{c}_1 + \bar{\chi}_A\bar{c}_A} \right)^{i-1} r_1^{0+}. \quad (31)$$

Для удобства обозначим коэффициент преобразования для импульса, выходящего из аневризмы, через η :

$$\eta = \left(-\frac{2\bar{\chi}_1\bar{c}_1 - \bar{\chi}_A\bar{c}_A}{2\bar{\chi}_1\bar{c}_1 + \bar{\chi}_A\bar{c}_A} \right). \quad (32)$$

Выпишем выражения для малых отклонений давления и скорости крови:

$$p_A^-(i) = \frac{\rho\bar{\chi}_1\bar{c}_1^2}{(2\bar{\chi}_1\bar{c}_1 + \bar{\chi}_A\bar{c}_A)} \cdot \eta^{i-1} \cdot r_1^{0+} = \frac{2\bar{\chi}_1\bar{c}_1}{(2\bar{\chi}_1\bar{c}_1 + \bar{\chi}_A\bar{c}_A)} \cdot \eta^{i-1} \cdot p_1^{0+}, \quad (33)$$

$$u_A^-(i) = \frac{-\bar{\chi}_1\bar{c}_1^2}{\bar{c}_A(2\bar{\chi}_1\bar{c}_1 + \bar{\chi}_A\bar{c}_A)} \cdot \eta^{i-1} \cdot r_1^{0+} = \frac{-2\bar{\chi}_1\bar{c}_1^2}{\bar{c}_A(2\bar{\chi}_1\bar{c}_1 + \bar{\chi}_A\bar{c}_A)} \cdot \eta^{i-1} \cdot u_1^{0+}$$

$$p_A^+(i+1) = \frac{-\rho\bar{\chi}_1\bar{c}_1^2(2\bar{\chi}_1\bar{c}_1 - \bar{\chi}_A\bar{c}_A)}{(2\bar{\chi}_1\bar{c}_1 + \bar{\chi}_A\bar{c}_A)^2} \cdot \eta^{i-1} \cdot r_1^{0+} = \frac{-2\bar{\chi}_1\bar{c}_1(2\bar{\chi}_1\bar{c}_1 - \bar{\chi}_A\bar{c}_A)}{(2\bar{\chi}_1\bar{c}_1 + \bar{\chi}_A\bar{c}_A)^2} \cdot \eta^{i-1} \cdot p_1^{0+}, \quad (34)$$

$$u_A^+(i+1) = \frac{-\bar{\chi}_1\bar{c}_1^2(2\bar{\chi}_1\bar{c}_1 - \bar{\chi}_A\bar{c}_A)}{\bar{c}_A(2\bar{\chi}_1\bar{c}_1 + \bar{\chi}_A\bar{c}_A)^2} \cdot \eta^{i-1} \cdot r_1^{0+} = \frac{-2\bar{\chi}_1\bar{c}_1^2(2\bar{\chi}_1\bar{c}_1 - \bar{\chi}_A\bar{c}_A)}{\bar{c}_A(2\bar{\chi}_1\bar{c}_1 + \bar{\chi}_A\bar{c}_A)^2} \cdot \eta^{i-1} \cdot u_1^{0+}$$

$$p_1^-(i+1) = \frac{2\rho\bar{\chi}_1\bar{\chi}_A\bar{c}_1^2\bar{c}_A}{(2\bar{\chi}_1\bar{c}_1 + \bar{\chi}_A\bar{c}_A)^2} \cdot \eta^{i-1} \cdot r_1^{0+} = \frac{4\bar{\chi}_1\bar{\chi}_A\bar{c}_1\bar{c}_A}{(2\bar{\chi}_1\bar{c}_1 + \bar{\chi}_A\bar{c}_A)^2} \cdot \eta^{i-1} \cdot p_1^{0+}, \quad (35)$$

$$u_1^-(i+1) = \frac{-2\bar{\chi}_1\bar{\chi}_A\bar{c}_1\bar{c}_A}{(2\bar{\chi}_1\bar{c}_1 + \bar{\chi}_A\bar{c}_A)^2} \cdot \eta^{i-1} \cdot r_1^{0+} = \frac{-4\bar{\chi}_1\bar{\chi}_A\bar{c}_1\bar{c}_A}{(2\bar{\chi}_1\bar{c}_1 + \bar{\chi}_A\bar{c}_A)^2} \cdot \eta^{i-1} \cdot u_1^{0+}$$

$$p_2^+(i+1) = \frac{2\rho\bar{\chi}_1\bar{\chi}_A\bar{c}_1^2\bar{c}_A}{(2\bar{\chi}_1\bar{c}_1 + \bar{\chi}_A\bar{c}_A)^2} \cdot \eta^{i-1} \cdot r_1^{0+} = \frac{4\bar{\chi}_1\bar{\chi}_A\bar{c}_1\bar{c}_A}{(2\bar{\chi}_1\bar{c}_1 + \bar{\chi}_A\bar{c}_A)^2} \cdot \eta^{i-1} \cdot p_1^{0+}. \quad (36)$$

$$u_2^+(i+1) = \frac{2\bar{\chi}_1\bar{\chi}_A\bar{c}_1\bar{c}_A}{(2\bar{\chi}_1\bar{c}_1 + \bar{\chi}_A\bar{c}_A)^2} \cdot \eta^{i-1} \cdot r_1^{0+} = \frac{4\bar{\chi}_1\bar{\chi}_A\bar{c}_1\bar{c}_A}{(2\bar{\chi}_1\bar{c}_1 + \bar{\chi}_A\bar{c}_A)^2} \cdot \eta^{i-1} \cdot u_1^{0+}$$

В процессе прохождения добавочное давление в точке бифуркации составляет:

$$p_1(i+1) = p_2(i+1) = p_A(i+1) = \frac{2\rho\bar{\chi}_1\bar{\chi}_A\bar{c}_1^2\bar{c}_A}{(2\bar{\chi}_1\bar{c}_1 + \bar{\chi}_A\bar{c}_A)^2} \cdot \eta^{i-1} \cdot r_1^{0+} = \frac{4\bar{\chi}_1\bar{\chi}_A\bar{c}_1\bar{c}_A}{(2\bar{\chi}_1\bar{c}_1 + \bar{\chi}_A\bar{c}_A)^2} \cdot \eta^{i-1} \cdot p_1^{0+}. \quad (37)$$

Время прохождения точки бифуркации $\tau = \frac{\lambda_A^-}{\bar{c}_A} = \frac{\lambda^0}{(\bar{u}_1 + \bar{c}_1)}$.

Итоговые таблицы см. в приложении (Таблицы 3, 4. Ветвление аневризмы с отражением обратно в аневризму).

Замечание 1.

Время прохождения импульсом точки бифуркации во всех случаях одинаково и равно $\tau = \frac{\lambda^0}{\bar{u}_1 + \bar{c}_1}$.

Замечание 2.

Ширина импульсов, выходящих из точки бифуркации не меняется и равна соответственно λ^0 - для импульса, проходящего в продолжение сосуда, $\frac{(\bar{c}_1 - \bar{u}_1)}{(\bar{u}_1 + \bar{c}_1)} \lambda^0$ - для импульса, проходящего в начало сосуда, и $\frac{\bar{c}_A}{(\bar{u}_1 + \bar{c}_1)} \lambda^0$ - для импульса, проходящего по аневризме.

IX. Анализ формул

Формула для ветвления начального импульса в точке бифуркации:

$$p_A^+ = p_A^+(1) = \frac{2\bar{\chi}_1\bar{c}_1}{(2\bar{\chi}_1\bar{c}_1 + \bar{\chi}_A\bar{c}_A)} p_1^{0+}.$$

Амплитуда давления импульса, попадающего в аневризму после ветвления начального импульса в точке бифуркации, всегда меньше амплитуды давления начального импульса:

$$p_A^+ < p_1^{0+}.$$

Амплитуда давления импульса, попадающего в аневризму после ветвления начального импульса в точке бифуркации, не равна нулю:

$$p_A^+ \neq 0.$$

Амплитуда давления импульса, попадающего в аневризму после ветвления начального импульса в точке бифуркации, больше нуля:

$$p_A^+ > 0.$$

То есть, импульс, проходящий в аневризму после ветвления начального импульса в точке бифуркации, всегда существует.

Формула для цикла прохождения аневризмы:

$$p_A^+(i+1) = -\frac{2\bar{\chi}_1\bar{c}_1 - \bar{\chi}_A\bar{c}_A}{2\bar{\chi}_1\bar{c}_1 + \bar{\chi}_A\bar{c}_A} p_A^-(i).$$

Амплитуда давления импульса, попадающего в аневризму после ветвления импульса на выходе из аневризмы, может равняться нулю, может оставаться строго положительной или менять знак в зависимости от знака выражения $(2\bar{\chi}_1\bar{c}_1 - \bar{\chi}_A\bar{c}_A)$:

$$\begin{cases} p_A^+(i+1) = 0, & \text{если } 2\bar{\chi}_1\bar{c}_1 - \bar{\chi}_A\bar{c}_A = 0, \quad i = 2, \dots, \infty \\ p_A^+(i+1) > 0, & \text{если } 2\bar{\chi}_1\bar{c}_1 - \bar{\chi}_A\bar{c}_A < 0, \quad i = 2, \dots, \infty \\ p_A^+(i+1) - \text{меняет знак,} & \text{если } 2\bar{\chi}_1\bar{c}_1 - \bar{\chi}_A\bar{c}_A > 0, \quad i = 2, \dots, \infty \end{cases}$$

Если $(2\bar{\chi}_1\bar{c}_1 - \bar{\chi}_A\bar{c}_A) \neq 0$, тогда амплитуда давления импульса, попадающего в аневризму на следующей итерации, всегда по модулю меньше амплитуды давления импульса, прошедшего в аневризму на предыдущей итерации, и меньше амплитуды давления начального импульса:

$$|p_A^+(i+1)| < |p_A^-(i)| < |p_A^-(1)| < p_1^{0+}.$$

Формула для отражения от стенки аневризмы:

$$p_{ep} = p_{ep}(1) = 2p_A^+(1) = \frac{4\bar{\chi}_1\bar{c}_1}{(2\bar{\chi}_1\bar{c}_1 + \bar{\chi}_A\bar{c}_A)} \cdot p_1^{0+}.$$

В момент отражения импульса от стенки аневризмы добавочное давление на стенку увеличивается вдвое.

Х. Заключение

Построенная математическая модель дает качественное представление о прохождении пульсовой волны по сосуду с аневризмой и позволяет

количественно оценить нагрузку на стенки сосуда и истонченную стенку аневризмы.

Наибольшую нагрузку стенки аневризмы испытывают непосредственно во время отражения импульса, когда добавочное давление увеличивается вдвое.

Полученные соотношения свидетельствуют о заиклиивании прохождения импульсом аневризмы, и, несмотря на постепенное затухание модуля амплитуды добавочного давления на каждой итерации, суммарное давление на стенку, в зависимости от параметров сосуда и аневризмы, может оказаться достаточно большим, чтобы привести к фатальным последствиям. В дальнейшей работе планируется оценить интегральную нагрузку на стенки сосуда при прохождении пульсовой волны по сосуду с аневризмой.

Авторы с большой теплотой и благодарностью вспоминают советы и поддержку Антона Павловича Фаворского, который являлся идейным вдохновителем этой работы. Высочайший профессионализм Антона Павловича, его внимание к деталям и к качеству работы всегда будут для нас главным ориентиром в научной деятельности. Светлая память.

XI. Литература

1. *Мухин С.И., Соснин Н.В., Фаворский А.П., Хруленко А.Б.* Линейный анализ волн давления и скорости в системе эластичных сосудов. Препринт М.: МАКС-Пресс, 2001, 40 с.
2. *Тыглиян М.А., Тюрина Н.Н.* Математическая модель прохождения гемодинамического импульса через точки бифуркации // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша, 2017, 18 с.
3. *Арабидзе Г.Г., Бредикис Ю.И., Верещагин Н.В.* / Под ред. Е.И. Чазова. Болезни сердца и сосудов. Т.3 – М.: Медицина, 1992, С. 238-336.
4. *Ашметков И.В., Мухин С.И., Соснин Н.В., Фаворский А.П.* Краевая задача для ЛГД уравнений на графе // Дифференциальные уравнения, 2004, Т. 40. № 1, С. 920-935.
5. *Ашметков И.В., Мухин С.И., Соснин Н.В., Фаворский А.П.* Математическое моделирование гемодинамических факторов развития аневризм в артериальных сосудах . Препринт М.: МАКС-Пресс, 2003, 51 с.
6. *Ашметков И.В., Буничева А.Я., Мухин С.И., Соколова Т.В., Соснин Н.В., Фаворский А.П.* Математическое моделирование гемодинамики в мозге и большом круге кровообращения. / сб. Компьютер и мозг. - М.: Наука, 2005, с.39-99.
7. *Ландау Л.Д., Лившиц Е.М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1988, 736 с.
8. *Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н.* Системы квазилинейных уравнений. М.: Наука, 1978, 687 с.
9. *Каро К., Педли Т., Штотер Р., Сид У.* Механика кровообращения. М.: Мир, 1981, 624 с.

ХП. Приложение. Итоговые таблицы

Таблица 1. Ветвление импульса в аневризму и в продолжение сосуда

Импульс	r	p	u	λ	\bar{c}	\bar{u}	$\bar{\lambda}$	τ
Исходный (1)	r_1^{0+}	$p_1^{0+} = 0.5 \rho \bar{c}_1 r_1^{0+}$	$u_1^{0+} = 0.5 r_1^{0+}$	λ^0	\bar{c}_1	\bar{u}_1	$\bar{\lambda}_1$	$\lambda^0 / (\bar{u}_1 + \bar{c}_1)$
Промежный в продолжение сосуда (2)	$r_2^+ = \frac{2 \bar{\lambda}_1 \bar{c}_1}{2 \bar{\lambda}_1 \bar{c}_1 + \bar{\lambda}_A \bar{c}_A} r_1^{0+}$	$p_2^+ = 0.5 \rho \bar{c}_1 r_2^+$ $p_2^+ = \frac{\rho \bar{\lambda}_1 \bar{c}_1^2}{2 \bar{\lambda}_1 \bar{c}_1 + \bar{\lambda}_A \bar{c}_A} r_1^{0+}$ $p_2^+ = \frac{2 \bar{\lambda}_1 \bar{c}_1}{2 \bar{\lambda}_1 \bar{c}_1 + \bar{\lambda}_A \bar{c}_A} p_1^{0+}$	$u_2^+ = \frac{\bar{\lambda}_1 \bar{c}_1}{2 \bar{\lambda}_1 \bar{c}_1 + \bar{\lambda}_A \bar{c}_A} r_1^{0+}$ $u_2^+ = \frac{2 \bar{\lambda}_1 \bar{c}_1}{2 \bar{\lambda}_1 \bar{c}_1 + \bar{\lambda}_A \bar{c}_A} u_1^{0+}$	λ^0	\bar{c}_1	\bar{u}_1	$\bar{\lambda}_1$	$\lambda^0 / (\bar{u}_1 + \bar{c}_1)$
Промежный в аневризму (4)	$r_A^+ = \frac{2 \bar{\lambda}_1 \bar{c}_1^2}{\bar{c}_A (2 \bar{\lambda}_1 \bar{c}_1 + \bar{\lambda}_A \bar{c}_A)} r_1^{0+}$	$p_A^+ = 0.5 \rho \bar{c}_A r_A^+$ $p_A^+ = \frac{\rho \bar{\lambda}_1 \bar{c}_1^2}{2 \bar{\lambda}_1 \bar{c}_1 + \bar{\lambda}_A \bar{c}_A} r_1^{0+}$ $p_A^+ = \frac{2 \bar{\lambda}_1 \bar{c}_1}{2 \bar{\lambda}_1 \bar{c}_1 + \bar{\lambda}_A \bar{c}_A} p_1^{0+}$	$u_A^+ = 0.5 r_A^+$ $u_A^+ = \frac{\bar{\lambda}_1 \bar{c}_1^2}{\bar{c}_A (2 \bar{\lambda}_1 \bar{c}_1 + \bar{\lambda}_A \bar{c}_A)} r_1^{0+}$ $u_A^+ = \frac{2 \bar{\lambda}_1 \bar{c}_1^2}{2 \bar{\lambda}_1 \bar{c}_1 + \bar{\lambda}_A \bar{c}_A} u_1^{0+}$	$\frac{\bar{c}_A}{(\bar{u}_1 + \bar{c}_1)} \lambda^0$	\bar{c}_A	\bar{u}_A	$\bar{\lambda}_A$	$\lambda^0 / (\bar{u}_1 + \bar{c}_1)$
Отраженный в сосуд (1)	$r_1^- = \frac{\bar{\lambda}_A \bar{c}_A}{2 \bar{\lambda}_1 \bar{c}_1 + \bar{\lambda}_A \bar{c}_A} r_1^{0+}$	$p_1^- = -0.5 \rho \bar{c}_1 r_1^-$ $p_1^- = \frac{-0.5 \rho \bar{\lambda}_A \bar{c}_A \bar{c}_1}{2 \bar{\lambda}_1 \bar{c}_1 + \bar{\lambda}_A \bar{c}_A} r_1^{0+}$ $p_1^- = \frac{-\bar{\lambda}_A \bar{c}_A}{2 \bar{\lambda}_1 \bar{c}_1 + \bar{\lambda}_A \bar{c}_A} p_1^{0+}$	$u_1^- = 0.5 r_1^-$ $u_1^- = \frac{0.5 \bar{\lambda}_A \bar{c}_A}{2 \bar{\lambda}_1 \bar{c}_1 + \bar{\lambda}_A \bar{c}_A} r_1^{0+}$ $u_1^- = \frac{\bar{\lambda}_A \bar{c}_A}{2 \bar{\lambda}_1 \bar{c}_1 + \bar{\lambda}_A \bar{c}_A} u_1^{0+}$	$(\bar{c}_1 - \bar{u}_1) \lambda^0 / (\bar{u}_1 + \bar{c}_1)$	\bar{c}_1	\bar{u}_1	$\bar{\lambda}_1$	$\lambda^0 / (\bar{u}_1 + \bar{c}_1)$
Во время прохождения	$r_1 = r_1^{0+} + r_1^- = \frac{2(\bar{\lambda}_1 \bar{c}_1 + \bar{\lambda}_A \bar{c}_A)}{2 \bar{\lambda}_1 \bar{c}_1 + \bar{\lambda}_A \bar{c}_A} r_1^{0+}$ $r_2 = r_2^+ = \frac{2 \bar{\lambda}_1 \bar{c}_1}{2 \bar{\lambda}_1 \bar{c}_1 + \bar{\lambda}_A \bar{c}_A} r_1^{0+}$ $r_A = r_A^+ = \frac{2 \bar{\lambda}_1 \bar{c}_1^2}{\bar{c}_A (2 \bar{\lambda}_1 \bar{c}_1 + \bar{\lambda}_A \bar{c}_A)} r_1^{0+}$	$p_1 = p_1^{0+} + p_1^-$ $p_1 = 0.5 \rho \bar{c}_1 (r_1^{0+} - r_1^-)$ $p_2 = p_2^+ = 0.5 \rho \bar{c}_1 r_2^+$ $p_A = p_A^+ = 0.5 \rho \bar{c}_A r_A^+$ $p_1 = p_2 = p_A = \frac{\rho \bar{\lambda}_1 \bar{c}_1^2}{2 \bar{\lambda}_1 \bar{c}_1 + \bar{\lambda}_A \bar{c}_A} r_1^{0+} = \frac{2 \bar{\lambda}_1 \bar{c}_1}{2 \bar{\lambda}_1 \bar{c}_1 + \bar{\lambda}_A \bar{c}_A} p_1^{0+} = \frac{2 \bar{\lambda}_1 \bar{c}_1}{\bar{c}_A (2 \bar{\lambda}_1 \bar{c}_1 + \bar{\lambda}_A \bar{c}_A)} p_1^{0+}$	$u_1 = u_1^{0+} + u_1^- = 0.5 (r_1^{0+} + r_1^-)$ $u_1 = \frac{\bar{\lambda}_1 \bar{c}_1 + \bar{\lambda}_A \bar{c}_A}{2 \bar{\lambda}_1 \bar{c}_1 + \bar{\lambda}_A \bar{c}_A} r_1^{0+}$ $u_1 = \frac{2(\bar{\lambda}_1 \bar{c}_1 + \bar{\lambda}_A \bar{c}_A)}{2 \bar{\lambda}_1 \bar{c}_1 + \bar{\lambda}_A \bar{c}_A} u_1^{0+}$ $u_2 = u_2^+ = 0.5 r_2^+$ $u_2 = \frac{\bar{\lambda}_1 \bar{c}_1}{2 \bar{\lambda}_1 \bar{c}_1 + \bar{\lambda}_A \bar{c}_A} r_1^{0+}$ $u_2 = \frac{2 \bar{\lambda}_1 \bar{c}_1}{2 \bar{\lambda}_1 \bar{c}_1 + \bar{\lambda}_A \bar{c}_A} u_1^{0+}$ $u_A = u_A^+ = 0.5 r_A^+$ $u_A = \frac{\bar{\lambda}_1 \bar{c}_1^2}{\bar{c}_A (2 \bar{\lambda}_1 \bar{c}_1 + \bar{\lambda}_A \bar{c}_A)} r_1^{0+}$ $u_A = \frac{2 \bar{\lambda}_1 \bar{c}_1^2}{\bar{c}_A (2 \bar{\lambda}_1 \bar{c}_1 + \bar{\lambda}_A \bar{c}_A)} u_1^{0+}$	-	-	-	-	-

Таблица 2. Отражение от стенки аневризмы

Импульс	r	p	u	λ	\bar{c}	\bar{u}	$\bar{\lambda}$
исходный (А)	r_A^+	$p_A^+ = 0.5\rho\bar{c}_A r_A^+$ $p_A^+ = \frac{\rho\bar{\lambda}_1\bar{c}_1^2}{2\bar{\lambda}_1\bar{c}_1 + \bar{\lambda}_A\bar{c}_A} r_1^{0+}$ $p_A^+ = \frac{2\bar{\lambda}_1\bar{c}_1}{2\bar{\lambda}_1\bar{c}_1 + \bar{\lambda}_A\bar{c}_A} p_1^{0+}$	$u_A^+ = 0.5r_A^+$ $u_A^+ = \frac{\bar{\lambda}_1\bar{c}_1^2}{\bar{c}_A(2\bar{\lambda}_1\bar{c}_1 + \bar{\lambda}_A\bar{c}_A)} r_1^{0+}$ $u_A^+ = \frac{2\bar{\lambda}_1\bar{c}_1^2}{\bar{c}_A(2\bar{\lambda}_1\bar{c}_1 + \bar{\lambda}_A\bar{c}_A)} u_1^{0+}$	$\lambda_A^+ = \frac{\bar{c}_A}{(\bar{u}_1 + \bar{c}_1)} \lambda^0$	\bar{c}_A	0	$\bar{\lambda}_A$
отраженный	$r_A^- = -r_A^+$ $r_A^- = \frac{-2\bar{\lambda}_1\bar{c}_1^2}{\bar{c}_A(2\bar{\lambda}_1\bar{c}_1 + \bar{\lambda}_A\bar{c}_A)} r_1^{0+}$	$p_A^- = -0.5\rho\bar{c}_A r_A^-$ $p_A^- = 0.5\rho\bar{c}_A r_A^+$ $p_A^- = \frac{\rho\bar{\lambda}_1\bar{c}_1^2}{2\bar{\lambda}_1\bar{c}_1 + \bar{\lambda}_A\bar{c}_A} r_1^{0+}$ $p_A^- = p_A^+ = \frac{2\bar{\lambda}_1\bar{c}_1}{2\bar{\lambda}_1\bar{c}_1 + \bar{\lambda}_A\bar{c}_A} p_1^{0+}$	$u_A^- = 0.5r_A^-$ $u_A^- = -0.5r_A^+$ $u_A^- = \frac{-\bar{\lambda}_1\bar{c}_1^2}{\bar{c}_A(2\bar{\lambda}_1\bar{c}_1 + \bar{\lambda}_A\bar{c}_A)} r_1^{0+}$ $u_A^- = -u_A^+ = \frac{-2\bar{\lambda}_1\bar{c}_1^2}{\bar{c}_A(2\bar{\lambda}_1\bar{c}_1 + \bar{\lambda}_A\bar{c}_A)} u_1^{0+}$	$\lambda_A^- = \lambda_A^+$ $\lambda_A^- = \frac{\bar{c}_A}{(\bar{u}_1 + \bar{c}_1)} \lambda^0$		0	$\bar{\lambda}_A$
Во время прохождения	$r_A^{sp} = r_A^- + r_A^+ = 0$	$p_A^{sp} = p_A^+ + p_A^-$ $p_A^{sp} = 0.5\rho\bar{c}_A(r_A^+ - r_A^-)$ $p_A^{sp} = \rho\bar{c}_A r_A^+$ $p_A^{sp} = \frac{2\rho\bar{\lambda}_1\bar{c}_1^2}{2\bar{\lambda}_1\bar{c}_1 + \bar{\lambda}_A\bar{c}_A} r_1^{0+}$ $p_A^{sp} = 2p_A^+ = \frac{4\bar{\lambda}_1\bar{c}_1}{2\bar{\lambda}_1\bar{c}_1 + \bar{\lambda}_A\bar{c}_A} p_1^{0+}$	$u_A^{sp} = u_A^+ + u_A^- = 0.5(r_A^+ + r_A^-)$ $u_A^{sp} = 0$	$\tau_{отпр} = \frac{\lambda_A^+}{\bar{c}_A} = \frac{\lambda^0}{(\bar{u}_1 + \bar{c}_1)}$ <p>- время отражения.</p>			

Таблица 3. Ветвление аневризмы с отражением обратно в аневризму. Инвариант, параметры сосудов

Импульс	r	λ	\bar{c}	\bar{u}	$\bar{\chi}$
Исходный (A)	$r_A^-(1) = \frac{-2\bar{\chi}_1\bar{c}_1^2}{\bar{c}_A(2\bar{\chi}_1\bar{c}_1 + \bar{\chi}_A\bar{c}_A)} r_1^{0+}$ $r_A^-(i) = \left(-\frac{2\bar{\chi}_1\bar{c}_1 - \bar{\chi}_A\bar{c}_A}{2\bar{\chi}_1\bar{c}_1 + \bar{\chi}_A\bar{c}_A} \right)^{i-1} \cdot r_A^-(1)$ $r_A^-(i) = \left(-\frac{2\bar{\chi}_1\bar{c}_1 - \bar{\chi}_A\bar{c}_A}{2\bar{\chi}_1\bar{c}_1 + \bar{\chi}_A\bar{c}_A} \right)^{i-1} \cdot \frac{-2\bar{\chi}_1\bar{c}_1^2}{\bar{c}_A(2\bar{\chi}_1\bar{c}_1 + \bar{\chi}_A\bar{c}_A)} r_1^{0+}$	$\lambda_A^-(i) = \lambda_A^-(1)$ $\lambda_A^-(i) = \frac{\bar{c}_A}{(\bar{u}_1 + \bar{c}_1)} \lambda^0$	\bar{c}_A	0	$\bar{\chi}_A$
Прошедший в начало сосуда(1)	$r_1^-(i+1) = \frac{2\bar{\chi}_A\bar{c}_A^2}{\bar{c}_1(2\bar{\chi}_1\bar{c}_1 + \bar{\chi}_A\bar{c}_A)} r_A^-(i)$ $r_1^-(i+1) = \frac{-4\bar{\chi}_1\bar{\chi}_A\bar{c}_1\bar{c}_A}{(2\bar{\chi}_1\bar{c}_1 + \bar{\chi}_A\bar{c}_A)^2} \left(-\frac{2\bar{\chi}_1\bar{c}_1 - \bar{\chi}_A\bar{c}_A}{2\bar{\chi}_1\bar{c}_1 + \bar{\chi}_A\bar{c}_A} \right)^{i-1} \cdot r_1^{0+}$	$\lambda_1^-(i+1) = (\bar{c}_1 - \bar{u}_1) \frac{\lambda_A^-(i)}{\bar{c}_A}$ $\lambda_1^-(i+1) = \frac{(\bar{c}_1 - \bar{u}_1)}{(\bar{u}_1 + \bar{c}_1)} \lambda^0$	\bar{c}_1	\bar{u}_1	$\bar{\chi}_1$
Прошедший в продолжение сосуда(2)	$r_2^+(i+1) = \frac{-2\bar{\chi}_A\bar{c}_A^2}{\bar{c}_1(2\bar{\chi}_1\bar{c}_1 + \bar{\chi}_A\bar{c}_A)} r_A^-(i)$ $r_2^+(i+1) = \frac{4\bar{\chi}_1\bar{\chi}_A\bar{c}_1\bar{c}_A}{(2\bar{\chi}_1\bar{c}_1 + \bar{\chi}_A\bar{c}_A)^2} \left(-\frac{2\bar{\chi}_1\bar{c}_1 - \bar{\chi}_A\bar{c}_A}{2\bar{\chi}_1\bar{c}_1 + \bar{\chi}_A\bar{c}_A} \right)^{i-1} r_1^{0+}$	$\lambda_2^+(i+1) = (\bar{c}_1 + \bar{u}_1) \frac{\lambda_A^-(i)}{\bar{c}_A}$ $\lambda_2^+(i+1) = \frac{(\bar{c}_1 + \bar{u}_1)}{(\bar{u}_1 + \bar{c}_1)} \lambda^0 = \lambda^0$	\bar{c}_1	\bar{u}_1	$\bar{\chi}_1$
Отраженный обратно в аневризму (A)	$r_A^+(i+1) = \frac{2\bar{\chi}_1\bar{c}_1 - \bar{\chi}_A\bar{c}_A}{2\bar{\chi}_1\bar{c}_1 + \bar{\chi}_A\bar{c}_A} r_A^-(i)$ $r_A^+(i+1) = \frac{-2\bar{\chi}_1\bar{c}_1^2(2\bar{\chi}_1\bar{c}_1 - \bar{\chi}_A\bar{c}_A)}{\bar{c}_A(2\bar{\chi}_1\bar{c}_1 + \bar{\chi}_A\bar{c}_A)^2} \left(-\frac{2\bar{\chi}_1\bar{c}_1 - \bar{\chi}_A\bar{c}_A}{2\bar{\chi}_1\bar{c}_1 + \bar{\chi}_A\bar{c}_A} \right)^{i-1} r_1^{0+}$	$\lambda_A^+(i+1) = \lambda_A^-(i)$ $\lambda_A^+(i+1) = \frac{\bar{c}_A}{(\bar{u}_1 + \bar{c}_1)} \lambda^0$	\bar{c}_A	0	$\bar{\chi}_A$
Во время прохождения	$r_1(i+1) = r_1^-(i+1) = \frac{2\bar{\chi}_A\bar{c}_A^2}{2\bar{\chi}_1\bar{c}_1^2 + \bar{\chi}_A\bar{c}_A\bar{c}_1} r_A^-(i)$ $r_1(i+1) = \frac{-4\bar{\chi}_1\bar{c}_1\bar{\chi}_A\bar{c}_A}{(2\bar{\chi}_1\bar{c}_1 + \bar{\chi}_A\bar{c}_A)^2} \left(-\frac{2\bar{\chi}_1\bar{c}_1 - \bar{\chi}_A\bar{c}_A}{2\bar{\chi}_1\bar{c}_1 + \bar{\chi}_A\bar{c}_A} \right)^{i-1} \cdot r_1^{0+}$ $r_2(i+1) = r_2^+(i+1) = \frac{-2\bar{\chi}_A\bar{c}_A^2}{2\bar{\chi}_1\bar{c}_1^2 + \bar{\chi}_A\bar{c}_A\bar{c}_1} r_A^-(i)$ $r_2(i+1) = \frac{4\bar{\chi}_1\bar{c}_1\bar{\chi}_A\bar{c}_A}{(2\bar{\chi}_1\bar{c}_1 + \bar{\chi}_A\bar{c}_A)^2} \left(-\frac{2\bar{\chi}_1\bar{c}_1 - \bar{\chi}_A\bar{c}_A}{2\bar{\chi}_1\bar{c}_1 + \bar{\chi}_A\bar{c}_A} \right)^{i-1} r_1^{0+}$ $r_A(i+1) = r_A^+(i+1) + r_A^-(i) = \frac{2\bar{\chi}_1\bar{c}_1 - \bar{\chi}_A\bar{c}_A}{2\bar{\chi}_1\bar{c}_1 + \bar{\chi}_A\bar{c}_A} r_A^-(i) + r_A^-(i)$ $r_A(i+1) = \frac{4\bar{\chi}_1\bar{c}_1}{2\bar{\chi}_1\bar{c}_1 + \bar{\chi}_A\bar{c}_A} r_A^-(i)$ $r_A(i+1) = \frac{-8\bar{\chi}_1^2\bar{c}_1^3}{\bar{c}_A(2\bar{\chi}_1\bar{c}_1 + \bar{\chi}_A\bar{c}_A)^2} \left(-\frac{2\bar{\chi}_1\bar{c}_1 - \bar{\chi}_A\bar{c}_A}{2\bar{\chi}_1\bar{c}_1 + \bar{\chi}_A\bar{c}_A} \right)^{i-1} r_1^{0+}$	-	-	-	-

Таблица 4. Ветвление аневризмы с отражением обратно в аневризму. Малые отклонения давления и скорости крови.

	p	u
<i>Исходный (А)</i>	$p_A^-(i) = -0.5 \rho \bar{c}_A r_A^-(i) = -0.5 \rho \bar{c}_A \left(-\frac{2\bar{\chi}_1 \bar{c}_1 - \bar{\chi}_A \bar{c}_A}{2\bar{\chi}_1 \bar{c}_1 + \bar{\chi}_A \bar{c}_A} \right)^{i-1} r_A^-(1)$ $p_A^-(i) = \left(-\frac{2\bar{\chi}_1 \bar{c}_1 - \bar{\chi}_A \bar{c}_A}{2\bar{\chi}_1 \bar{c}_1 + \bar{\chi}_A \bar{c}_A} \right)^{i-1} \cdot \frac{\rho \bar{\chi}_1 \bar{c}_1^2}{(2\bar{\chi}_1 \bar{c}_1 + \bar{\chi}_A \bar{c}_A)} r_1^{0+}$ $p_A^-(i) = \left(-\frac{2\bar{\chi}_1 \bar{c}_1 - \bar{\chi}_A \bar{c}_A}{2\bar{\chi}_1 \bar{c}_1 + \bar{\chi}_A \bar{c}_A} \right)^{i-1} \cdot p_A^-(1)$ $p_A^-(i) = \frac{2\bar{\chi}_1 \bar{c}_1}{(2\bar{\chi}_1 \bar{c}_1 + \bar{\chi}_A \bar{c}_A)} \left(-\frac{2\bar{\chi}_1 \bar{c}_1 - \bar{\chi}_A \bar{c}_A}{2\bar{\chi}_1 \bar{c}_1 + \bar{\chi}_A \bar{c}_A} \right)^{i-1} \cdot p_1^{0+}$	$u_A^-(i) = 0.5 r_A^-(i) = 0.5 \left(-\frac{2\bar{\chi}_1 \bar{c}_1 - \bar{\chi}_A \bar{c}_A}{2\bar{\chi}_1 \bar{c}_1 + \bar{\chi}_A \bar{c}_A} \right)^{i-1} \cdot r_A^-(1)$ $u_A^-(i) = \frac{-\bar{\chi}_1 \bar{c}_1^2}{\bar{c}_A (2\bar{\chi}_1 \bar{c}_1 + \bar{\chi}_A \bar{c}_A)} \left(-\frac{2\bar{\chi}_1 \bar{c}_1 - \bar{\chi}_A \bar{c}_A}{2\bar{\chi}_1 \bar{c}_1 + \bar{\chi}_A \bar{c}_A} \right)^{i-1} \cdot r_1^{0+}$ $u_A^-(i) = \left(-\frac{2\bar{\chi}_1 \bar{c}_1 - \bar{\chi}_A \bar{c}_A}{2\bar{\chi}_1 \bar{c}_1 + \bar{\chi}_A \bar{c}_A} \right)^{i-1} \cdot u_A^-(1)$ $u_A^-(i) = \frac{-2\bar{\chi}_1 \bar{c}_1^2}{\bar{c}_A (2\bar{\chi}_1 \bar{c}_1 + \bar{\chi}_A \bar{c}_A)} \left(-\frac{2\bar{\chi}_1 \bar{c}_1 - \bar{\chi}_A \bar{c}_A}{2\bar{\chi}_1 \bar{c}_1 + \bar{\chi}_A \bar{c}_A} \right)^{i-1} \cdot u_1^{0+}$
<i>Промежный в начало сосуда(1)</i>	$p_1^-(i+1) = -0.5 \rho \bar{c}_1 r_1^-(i+1)$ $p_1^-(i+1) = \frac{2\bar{\chi}_A \bar{c}_A}{(2\bar{\chi}_1 \bar{c}_1 + \bar{\chi}_A \bar{c}_A)} p_A^-(i)$ $p_1^-(i+1) = \frac{2\rho \bar{\chi}_1 \bar{\chi}_A \bar{c}_1^2 \bar{c}_A}{(2\bar{\chi}_1 \bar{c}_1 + \bar{\chi}_A \bar{c}_A)^2} \left(-\frac{2\bar{\chi}_1 \bar{c}_1 - \bar{\chi}_A \bar{c}_A}{2\bar{\chi}_1 \bar{c}_1 + \bar{\chi}_A \bar{c}_A} \right)^{i-1} \cdot r_1^{0+}$ $p_1^-(i+1) = \frac{4\bar{\chi}_1 \bar{\chi}_A \bar{c}_1 \bar{c}_A}{(2\bar{\chi}_1 \bar{c}_1 + \bar{\chi}_A \bar{c}_A)^2} \left(-\frac{2\bar{\chi}_1 \bar{c}_1 - \bar{\chi}_A \bar{c}_A}{2\bar{\chi}_1 \bar{c}_1 + \bar{\chi}_A \bar{c}_A} \right)^{i-1} \cdot p_1^{0+}$	$u_1^-(i+1) = 0.5 r_1^-(i+1)$ $u_1^-(i+1) = \frac{\bar{\chi}_A \bar{c}_A^2}{\bar{c}_1 (2\bar{\chi}_1 \bar{c}_1 + \bar{\chi}_A \bar{c}_A)} r_A^-(i)$ $u_1^-(i+1) = \frac{2\bar{\chi}_A \bar{c}_A^2}{\bar{c}_1 (2\bar{\chi}_1 \bar{c}_1 + \bar{\chi}_A \bar{c}_A)} u_A^-(i)$ $u_1^-(i+1) = \frac{-2\bar{\chi}_1 \bar{\chi}_A \bar{c}_1 \bar{c}_A}{(2\bar{\chi}_1 \bar{c}_1 + \bar{\chi}_A \bar{c}_A)^2} \left(-\frac{2\bar{\chi}_1 \bar{c}_1 - \bar{\chi}_A \bar{c}_A}{2\bar{\chi}_1 \bar{c}_1 + \bar{\chi}_A \bar{c}_A} \right)^{i-1} \cdot r_1^{0+}$ $u_1^-(i+1) = \frac{-4\bar{\chi}_1 \bar{\chi}_A \bar{c}_1 \bar{c}_A}{(2\bar{\chi}_1 \bar{c}_1 + \bar{\chi}_A \bar{c}_A)^2} \left(-\frac{2\bar{\chi}_1 \bar{c}_1 - \bar{\chi}_A \bar{c}_A}{2\bar{\chi}_1 \bar{c}_1 + \bar{\chi}_A \bar{c}_A} \right)^{i-1} \cdot u_1^{0+}$
<i>Промежный в продолжение сосуда (2)</i>	$p_2^+(i+1) = 0.5 \rho \bar{c}_1 r_2^+(i+1)$ $p_2^+(i+1) = \frac{2\bar{\chi}_A \bar{c}_A}{(2\bar{\chi}_1 \bar{c}_1 + \bar{\chi}_A \bar{c}_A)} p_A^-(i)$ $p_2^+(i+1) = \frac{2\rho \bar{\chi}_1 \bar{\chi}_A \bar{c}_1^2 \bar{c}_A}{(2\bar{\chi}_1 \bar{c}_1 + \bar{\chi}_A \bar{c}_A)^2} \left(-\frac{2\bar{\chi}_1 \bar{c}_1 - \bar{\chi}_A \bar{c}_A}{2\bar{\chi}_1 \bar{c}_1 + \bar{\chi}_A \bar{c}_A} \right)^{i-1} r_1^{0+}$ $p_2^+(i+1) = \frac{4\bar{\chi}_1 \bar{\chi}_A \bar{c}_1 \bar{c}_A}{(2\bar{\chi}_1 \bar{c}_1 + \bar{\chi}_A \bar{c}_A)^2} \left(-\frac{2\bar{\chi}_1 \bar{c}_1 - \bar{\chi}_A \bar{c}_A}{2\bar{\chi}_1 \bar{c}_1 + \bar{\chi}_A \bar{c}_A} \right)^{i-1} p_1^{0+}$	$u_2^+(i+1) = 0.5 r_2^+(i+1)$ $u_2^+(i+1) = \frac{-\bar{\chi}_A \bar{c}_A^2}{\bar{c}_1 (2\bar{\chi}_1 \bar{c}_1 + \bar{\chi}_A \bar{c}_A)} r_A^-(i)$ $u_2^+(i+1) = \frac{-2\bar{\chi}_A \bar{c}_A^2}{\bar{c}_1 (2\bar{\chi}_1 \bar{c}_1 + \bar{\chi}_A \bar{c}_A)} u_A^-(i)$ $u_2^+(i+1) = \frac{2\bar{\chi}_1 \bar{\chi}_A \bar{c}_1 \bar{c}_A}{(2\bar{\chi}_1 \bar{c}_1 + \bar{\chi}_A \bar{c}_A)^2} \left(-\frac{2\bar{\chi}_1 \bar{c}_1 - \bar{\chi}_A \bar{c}_A}{2\bar{\chi}_1 \bar{c}_1 + \bar{\chi}_A \bar{c}_A} \right)^{i-1} r_1^{0+}$ $u_2^+(i+1) = \frac{4\bar{\chi}_1 \bar{\chi}_A \bar{c}_1 \bar{c}_A}{(2\bar{\chi}_1 \bar{c}_1 + \bar{\chi}_A \bar{c}_A)^2} \left(-\frac{2\bar{\chi}_1 \bar{c}_1 - \bar{\chi}_A \bar{c}_A}{2\bar{\chi}_1 \bar{c}_1 + \bar{\chi}_A \bar{c}_A} \right)^{i-1} u_1^{0+}$
<i>Отраженный обратно в аневризму (А)</i>	$p_A^+(i+1) = 0.5 \rho \bar{c}_A r_A^+(i+1)$ $p_A^+(i+1) = -\frac{2\bar{\chi}_1 \bar{c}_1 - \bar{\chi}_A \bar{c}_A}{2\bar{\chi}_1 \bar{c}_1 + \bar{\chi}_A \bar{c}_A} p_A^-(i)$ $p_A^+(i+1) = \frac{-\rho \bar{\chi}_1 \bar{c}_1^2 (2\bar{\chi}_1 \bar{c}_1 - \bar{\chi}_A \bar{c}_A)}{(2\bar{\chi}_1 \bar{c}_1 + \bar{\chi}_A \bar{c}_A)^2} \left(-\frac{2\bar{\chi}_1 \bar{c}_1 - \bar{\chi}_A \bar{c}_A}{2\bar{\chi}_1 \bar{c}_1 + \bar{\chi}_A \bar{c}_A} \right)^{i-1} r_1^{0+}$ $p_A^+(i+1) = \frac{-2\bar{\chi}_1 \bar{c}_1 (2\bar{\chi}_1 \bar{c}_1 - \bar{\chi}_A \bar{c}_A)}{(2\bar{\chi}_1 \bar{c}_1 + \bar{\chi}_A \bar{c}_A)^2} \left(-\frac{2\bar{\chi}_1 \bar{c}_1 - \bar{\chi}_A \bar{c}_A}{2\bar{\chi}_1 \bar{c}_1 + \bar{\chi}_A \bar{c}_A} \right)^{i-1} p_1^{0+}$	$u_A^+(i+1) = 0.5 r_A^+(i+1)$ $u_A^+(i+1) = \frac{2\bar{\chi}_1 \bar{c}_1 - \bar{\chi}_A \bar{c}_A}{2(2\bar{\chi}_1 \bar{c}_1 + \bar{\chi}_A \bar{c}_A)} r_A^-(i)$ $u_A^+(i+1) = \frac{2\bar{\chi}_1 \bar{c}_1 - \bar{\chi}_A \bar{c}_A}{2\bar{\chi}_1 \bar{c}_1 + \bar{\chi}_A \bar{c}_A} u_A^-(i)$ $u_A^+(i+1) = \frac{-\bar{\chi}_1 \bar{c}_1^2 (2\bar{\chi}_1 \bar{c}_1 - \bar{\chi}_A \bar{c}_A)}{\bar{c}_A (2\bar{\chi}_1 \bar{c}_1 + \bar{\chi}_A \bar{c}_A)^2} \left(-\frac{2\bar{\chi}_1 \bar{c}_1 - \bar{\chi}_A \bar{c}_A}{2\bar{\chi}_1 \bar{c}_1 + \bar{\chi}_A \bar{c}_A} \right)^{i-1} r_1^{0+}$ $u_A^+(i+1) = \frac{-2\bar{\chi}_1 \bar{c}_1^2 (2\bar{\chi}_1 \bar{c}_1 - \bar{\chi}_A \bar{c}_A)}{\bar{c}_A (2\bar{\chi}_1 \bar{c}_1 + \bar{\chi}_A \bar{c}_A)^2} \left(-\frac{2\bar{\chi}_1 \bar{c}_1 - \bar{\chi}_A \bar{c}_A}{2\bar{\chi}_1 \bar{c}_1 + \bar{\chi}_A \bar{c}_A} \right)^{i-1} u_1^{0+}$

Таблица 4. Продолжение. Ветвление аневризмы с отражением обратно в аневризму. Малые отклонения давления и скорости крови в процессе прохождения точки бифуркации.

	p	u
Во время прохождения	$p_1(i+1) = p_2(i+1) = p_A(i+1)$ $p_1(i+1) = p_1^-(i+1) = -0.5\rho\bar{c}_1 r_1^-(i+1)$ $p_2(i+1) = p_2^+(i+1) = 0.5\rho\bar{c}_1 r_2^+(i+1)$ $p_A(i+1) = p_A^+(i+1) + p_A^-(i) = 0.5\rho\bar{c}_A(r_A^+(i+1) - r_A^-(i))$	$u_1(i+1) = u_1^-(i+1) = 0.5r_1^-(i+1)$ $u_1(i+1) = \frac{2\bar{\chi}_A\bar{c}_A^2}{\bar{c}_1(2\bar{\chi}_1\bar{c}_1 + \bar{\chi}_A\bar{c}_A)}u_A^-(i)$ $u_1(i+1) = \frac{-2\bar{\chi}_1\bar{\chi}_A\bar{c}_1\bar{c}_A}{(2\bar{\chi}_1\bar{c}_1 + \bar{\chi}_A\bar{c}_A)^2}\left(-\frac{2\bar{\chi}_1\bar{c}_1 - \bar{\chi}_A\bar{c}_A}{2\bar{\chi}_1\bar{c}_1 + \bar{\chi}_A\bar{c}_A}\right)^{i-1} \cdot r_1^{0+}$ $u_1(i+1) = \frac{-4\bar{\chi}_1\bar{\chi}_A\bar{c}_1\bar{c}_A}{(2\bar{\chi}_1\bar{c}_1 + \bar{\chi}_A\bar{c}_A)^2}\left(-\frac{2\bar{\chi}_1\bar{c}_1 - \bar{\chi}_A\bar{c}_A}{2\bar{\chi}_1\bar{c}_1 + \bar{\chi}_A\bar{c}_A}\right)^{i-1} \cdot u_1^{0+}$
	$p_1(i+1) = p_2(i+1) = p_A(i+1) =$ $= \frac{2\bar{\chi}_A\bar{c}_A}{(2\bar{\chi}_1\bar{c}_1 + \bar{\chi}_A\bar{c}_A)}p_A^-(i)$ $= \frac{2\rho\bar{\chi}_1\bar{\chi}_A\bar{c}_1^2\bar{c}_A}{(2\bar{\chi}_1\bar{c}_1 + \bar{\chi}_A\bar{c}_A)^2}\left(-\frac{2\bar{\chi}_1\bar{c}_1 - \bar{\chi}_A\bar{c}_A}{2\bar{\chi}_1\bar{c}_1 + \bar{\chi}_A\bar{c}_A}\right)^{i-1} \cdot r_1^{0+} =$ $= \frac{4\bar{\chi}_1\bar{\chi}_A\bar{c}_1\bar{c}_A}{(2\bar{\chi}_1\bar{c}_1 + \bar{\chi}_A\bar{c}_A)^2}\left(-\frac{2\bar{\chi}_1\bar{c}_1 - \bar{\chi}_A\bar{c}_A}{2\bar{\chi}_1\bar{c}_1 + \bar{\chi}_A\bar{c}_A}\right)^{i-1} \cdot p_1^{0+}$	$u_2(i+1) = u_2^+(i+1) = 0.5r_2^+(i+1)$ $u_2(i+1) = \frac{-2\bar{\chi}_A\bar{c}_A^2}{\bar{c}_1(2\bar{\chi}_1\bar{c}_1 + \bar{\chi}_A\bar{c}_A)}u_A^-(i)$ $u_2(i+1) = \frac{2\bar{\chi}_1\bar{\chi}_A\bar{c}_1\bar{c}_A}{(2\bar{\chi}_1\bar{c}_1 + \bar{\chi}_A\bar{c}_A)^2}\left(-\frac{2\bar{\chi}_1\bar{c}_1 - \bar{\chi}_A\bar{c}_A}{2\bar{\chi}_1\bar{c}_1 + \bar{\chi}_A\bar{c}_A}\right)^{i-1} r_1^{0+}$ $u_2(i+1) = \frac{4\bar{\chi}_1\bar{\chi}_A\bar{c}_1\bar{c}_A}{(2\bar{\chi}_1\bar{c}_1 + \bar{\chi}_A\bar{c}_A)^2}\left(-\frac{2\bar{\chi}_1\bar{c}_1 - \bar{\chi}_A\bar{c}_A}{2\bar{\chi}_1\bar{c}_1 + \bar{\chi}_A\bar{c}_A}\right)^{i-1} u_1^{0+}$
		$u_A(i+1) = u_A^+(i+1) + u_A^-(i) = 0.5(r_A^+(i+1) + r_A^-(i))$ $u_A(i+1) = \frac{4\bar{\chi}_1\bar{c}_1}{2\bar{\chi}_1\bar{c}_1 + \bar{\chi}_A\bar{c}_A}u_A^-(i)$ $u_A(i+1) = \frac{-4\bar{\chi}_1^2\bar{c}_1^3}{\bar{c}_A(2\bar{\chi}_1\bar{c}_1 + \bar{\chi}_A\bar{c}_A)^2}\left(-\frac{2\bar{\chi}_1\bar{c}_1 - \bar{\chi}_A\bar{c}_A}{2\bar{\chi}_1\bar{c}_1 + \bar{\chi}_A\bar{c}_A}\right)^{i-1} r_1^{0+}$ $u_A^+(i+1) = \frac{-8\bar{\chi}_1^2\bar{c}_1^3}{\bar{c}_A(2\bar{\chi}_1\bar{c}_1 + \bar{\chi}_A\bar{c}_A)^2}\left(-\frac{2\bar{\chi}_1\bar{c}_1 - \bar{\chi}_A\bar{c}_A}{2\bar{\chi}_1\bar{c}_1 + \bar{\chi}_A\bar{c}_A}\right)^{i-1} u_1^{0+}$

Здесь λ – длина импульса, τ – время прохождения через точку бифуркации, p , u – малые отклонения давления и скорости крови в сосуде от постоянного течения со среднефоновыми значениями параметров \bar{p} и \bar{u} , $\bar{\chi} = dS/dp$ – коэффициент жесткости сосуда, \bar{c} – скорость распространения малых возмущений в сосуде.