ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 67 за 2017 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Фомин И.В., Сасоров П.В.

Релаксация спин–поляризованного разреженного электронного газа

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Фомин И.В., Сасоров П.В. Релаксация спин–поляризованного разреженного электронного газа // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2017. № 67. 23 с. doi:10.20948/prepr-2017-67
URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2017-67

Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Российской академии наук

И.В. Фомин, П.В. Сасоров

Релаксация спин–поляризованного разреженного электронного газа

Москва – 2017

Фомин И.В., Сасоров П.В.

Релаксация спин–поляризованного разреженного электронного газа

В статье приводится вычисление времени релаксации суммарной спиновой поляризации для разреженного газа фермионов (электронов). Вычисление проводится на основе полученного ранее интеграла столкновений, подробно учитывающего спиновую компоненту взаимодействующих частиц. В качестве промежуточного результата получена оптическая теорема, соответствующая интегралу парных столкновений электронов. При этом использованы общие свойства симметрии амплитуды взаимного рассеяния двух электронов. Полученный результат справедлив и для относительно холодной разреженной спин–поляризованной плазмы, с энергией электронов меньшей $\sim\ \alpha^2 mc^2$. Окончательный результат получен при добавочном предположении, что общая спиновая поляризация облака газа фермионов относительно мала $\boldsymbol{s} \ll 1$.

Ключевые слова: спин–орбитальное взаимодействие, взаимодействие тождественных частиц, разреженная холодная плазма, спин - поляризация, релаксация.

Igor Vadimovich Fomin, Pavel Vasiljevich Sasorov.

Relaxation of spin-polarized low-density electron gas

We derive the relaxation time of the total spin polarization for a low–density spin–polarized gas of fermions (electrons). This calculation is based on previously obtained collision operator in kinetic equation. This collision operator takes into consideration the spin component of interacting particles. As a side result we obtained the optical theorem, corresponding to the collision operator. Wherein we used the global symmetries in the mutual scattering amplitudes of two electrons. The result obtained is viable even in the case of relatively cold low–density spin–polarized plasma. The final result is obtained under assumption of small summary spin–polarization of fermions.

Key words: spin–orbital interaction, interaction of identical particles, low–density cold plasma, spin–polarization, relaxation.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (грант 15-01-06195a).

Введение

Спин–поляризация плазмы редко рассматривается при кинетическом или гидродинамическом описании ее динамики [1, 2, 3, 4]. Это происходит несмотря на то, что время релаксации спиновой поляризации плазмы в α^{-4} раз дольше, чем время установления максвелловской функции распределения в полностью ионизованной плазме. Причиной отмеченного пренебрежения эффектами спиновой поляризации является ее слабое влияние на обычно рассматриваемые свойства плазмы.

Свойства поляризации газов и плазмы рассматриваются в ряде работ [5, 6, 7]. Создание слабоионизованной плазмы с сильной степенью спин–поляризации приводит к избытку метастабильных по спину атомов и ионов. Подобная плазма может иметь существенное практическое значение. Избыток метастабильных атомов и ионов приводит к своеобразной консервации энергии возбужденных атомов и ионов. Благодаря данной консервации возникают нестандартные каналы химических реакций в такой плазме. Одним из способов создания такой спин-поляризованной плазмы является использование ферромагнитных катодов в тлеющем разряде [8, 9].

В работе [10] нами были получены интегралы столкновений, входящие в кинетические уравнения для полной плотности электронов в фазовом пространстве $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p})$ и для плотности параметра $\boldsymbol{s}$ в том же пространстве, определяющего спиновую часть одночастичной матрицы плотности. Вывод этих интегралов столкновений не использовал малости амплитуды рассеяния. Допускалось, что $p_T f \sim \hbar$, а вместо условия малости амплитуды использовалось условие достаточной разреженности плазмы

$$n_e \ll f^{-3}. \tag{1}$$

В таком случае возникает дополнительное требование, чтобы населенности N_e электронных квантово-механических состояний были бы малы. Поэтому реально мы использовали сильное ограничение:

$$N_e \ll 1\,. \tag{2}$$

Последнее означает, в частности, что электронная система далека от фермиевского вырождения. Полученные выражения справедливы и при малых средних энергиях электронов $E_T < \alpha^2 m_e c^2$, что типично для не очень горячей плазмы.

Для количественного рассмотрения процессов релаксации спин-поляризации надо использовать выражения для амплитуд рассеяния заряженных частиц с учетом их спиновой степени свободы.

В нашей работе [11] исследовались амплитуды рассеяния точечных заряженных частиц друг на друге с учетом их спин-орбитального взаимодействия.

Получены точные формулы для таких амплитуд в первом порядке теории возмущений по силе спин-орбитального взаимодействия, то есть в первом порядке по α^2. При этом, в качестве невозмущенных волновых функций взяты точные волновые функции в кулоновском поле. Надо отметить, что в классической серии работ [12, 13, 14, 15, 16, 17] для получения конкретных выражений для этих амплитуд рассеяния используется, в конце концов, первое борновское приближение. Результатом такого приближения является то, что полученные амплитуды не могут быть использованы для холодной плазмы. Классическая работа [18] посвящена вычислению точных амплитуд рассеяния заряженных частиц друг на друге без использования теории возмущений, но в ней рассматривались только бесспиновые частицы. Таким образом, для рассмотрения относительно холодной плазмы, с $\hbar p/(m_e e^2) \ll 1$, необходимо использовать амплитуды рассеяния, полученные в работе [11].

В данной работе мы совместим интеграл столкновений из [10] и амплитуду взаимного рассеяния двух электронов из работы [11]. Применив закон сохранения числа частиц к интегралу столкновений мы получим оптическую теорему для электрон–электронного взаимодействия. Далее подставим вид амплитуды рассеяния в интеграл столкновений и максимально упростим вид интеграла столкновений. Воспользовавшись малостью общей спиновой поляризации, получим классическое уравнение релаксации, из которого следует выражение для времени релаксации. Отметим, что приводимые вычисления сделаны в атомной системе единиц, в которой $|e| = \hbar = m_e = 1$.

Амплитуда взаимного рассеяния двух электронов

В данном разделе мы приведем информацию об амплитуде рассеяния электрона на электроне, используемую в наших работах [10, 11]. Для начала рассматривается рассеяние друг на друге "нетождественных" электронов. Если координаты и спиновые переменные двух электронов обозначить как $\boldsymbol{r}_1$, α, $\boldsymbol{r}_2$ и β, то асимптотики полного набора стационарных волновых функций рассеяния можно записать следующим образом, вводя координаты в системе центра инерции:

$$\psi^{\alpha\beta}_{\boldsymbol{p}_1\,\delta;\boldsymbol{p}_2\,\gamma}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2) =$$
$$= e^{i\boldsymbol{P}_{12}\boldsymbol{R}_{12}}\left[e^{i\boldsymbol{p}_{12}\boldsymbol{r}_{12}}\delta^{\alpha}_{\delta}\delta^{\beta}_{\gamma} + \frac{e^{ip_{12}r_{12}}}{r_{12}}\, f^{\alpha\beta}_{\delta\gamma}\left(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_1',\boldsymbol{p}_2'\right)\right]. \quad (3)$$

Здесь $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$, δ и γ – импульсные и спиновые квантовые числа состояния данной волновой функцией до рассеяния, а

$$\boldsymbol{P}_{12} = \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2\,, \quad \boldsymbol{p}_{12} = \frac{(\boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_2)}{2}\,, \quad \boldsymbol{R}_{12} = \frac{(\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2)}{2}\,, \quad \boldsymbol{r}_{12} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2\,, \quad (4)$$

$$\boldsymbol{p}'_{12} = p_{12}\,\frac{\boldsymbol{r}_{12}}{r_{12}}\,, \quad \boldsymbol{p}'_1 = \frac{1}{2}\boldsymbol{P}_{12} + \boldsymbol{p}'_{12}\,, \quad \boldsymbol{p}'_2 = \frac{1}{2}\boldsymbol{P}_{12} - \boldsymbol{p}'_{12}\,. \tag{5}$$

Эти соотношения вводят обозначения, связанные с системой центра инерции, как то: полный и приведенный импульсы, координату центра инерции и приведенную координату, импульсы после рассеяния, определенные направлением рассеяния в системе центра инерции и т.п., а также фактически вводит определение амплитуды рассеяния $f^{\alpha\beta}_{\delta\gamma}(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}'_1, \boldsymbol{p}'_2)$.

Наиболее общий вид амплитуды рассеяния нетождественных частиц со спином 1/2, как оператора по спиновым переменным обеих частиц, можно написать исходя из необходимых условий инвариантности [19].

$$\hat{f} = A + B(\hat{\boldsymbol{s}}_1 + \hat{\boldsymbol{s}}_2, \boldsymbol{\nu}) + C(\hat{\boldsymbol{s}}_1, \boldsymbol{\lambda})(\hat{\boldsymbol{s}}_2, \boldsymbol{\lambda}) + D(\hat{\boldsymbol{s}}_1, \boldsymbol{\mu})(\hat{\boldsymbol{s}}_2, \boldsymbol{\mu}) + \\ + E(\hat{\boldsymbol{s}}_1, \boldsymbol{\nu})(\hat{\boldsymbol{s}}_2, \boldsymbol{\nu}) + G(\hat{\boldsymbol{s}}_1 - \hat{\boldsymbol{s}}_2, \boldsymbol{\nu}). \tag{6}$$

Здесь A, B, C, D, E, G -скалярные величины, зависящие только от угла рассеяния θ и энергии p^2. Вектора $\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\nu}$ соответствуют единичным векторам, направленным вдоль $\boldsymbol{p}_{12} + \boldsymbol{p}'_{12}, \boldsymbol{p}_{12} - \boldsymbol{p}'_{12}, [\boldsymbol{p}_{12} \times \boldsymbol{p}'_{12}]$. Стоит отметить, что для случая тождественных частиц слагаемое $G(\hat{\boldsymbol{s}}_1 - \hat{\boldsymbol{s}}_2, \boldsymbol{\nu})$ должно занулятся, для сохранения суммарного спина. Вопросы вычисления коэффициентов, входящие в эти амплитуды обсуждались в работе [20].

Подействовав оператором $\hat{f}$ на угловую часть разложения плоской волны $\delta^{\alpha}_{\gamma}\delta^{\beta}_{\delta}\sum_L (2L+1)P_L(\cos\theta)$ можно получить более явное выражение

$$\hat{f}(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}'_1, \boldsymbol{p}'_2) = \left(1 - \frac{1}{2}\hat{\boldsymbol{S}}^2\right)\bar{A}(\theta) + \frac{1}{2}\hat{\boldsymbol{S}}^2 A(\theta) + \left(\hat{\boldsymbol{S}}\cdot\boldsymbol{\nu}\right)B(\theta) - \\ - \left(\hat{\boldsymbol{S}}\cdot\boldsymbol{\lambda}\right)^2 C(\theta)\,\mathrm{tg}\,\frac{\theta}{2} + \left(\hat{\boldsymbol{S}}\cdot\boldsymbol{\mu}\right)^2 C(\theta)\,\mathrm{ctg}\,\frac{\theta}{2} + \left(\hat{\boldsymbol{S}}\cdot\boldsymbol{\nu}\right)^2 D(\theta). \tag{7}$$

Отметим следующие симметрии входящих в выражение выше величин:

$$\theta(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}'_1, \boldsymbol{p}'_2) = \theta(\boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}'_2, \boldsymbol{p}'_1), \tag{8}$$

$$\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}'_1, \boldsymbol{p}'_2) = \boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}'_2, \boldsymbol{p}'_1), \tag{9}$$

$$\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}'_1, \boldsymbol{p}'_2) = -\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}'_2, \boldsymbol{p}'_1), \tag{10}$$

$$\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}'_1, \boldsymbol{p}'_2) = -\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}'_2, \boldsymbol{p}'_1). \tag{11}$$

Отсюда следует инвариантность относительно инверсии пространства

$$f^{\alpha\beta}_{\gamma\delta}(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}'_1, \boldsymbol{p}'_2) = f^{\alpha\beta}_{\gamma\delta}(\boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}'_2, \boldsymbol{p}'_1). \tag{12}$$

Для больших энергий спин–орбитальное взаимодействие будет всегда доминировать над спин–спиновым.В работе [11] мы показали, что в случае холодной разреженной электронной плазмы, спин–спиновое взаимодействие дает существенно меньший вклад, нежели спин–орбитальное взаимодействие.

Это явление обусловлено свойствами кулоновского отталкивания, при котором основной вклад в рассеяние дают большие значения орбитального момента L. Для вычисления фаз рассеяния, входящих в амплитуду рассеяния (7) в [11] мы использовали гамильтониан Брейта [2]. А значит мы можем ограничится точностью $\mathcal{O}(\alpha^4)$ при вычислении амплитуды рассеяния

$$\hat{f}(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_1',\boldsymbol{p}_2') = A(\theta) + \left(\hat{\boldsymbol{S}}\cdot\boldsymbol{\nu}\right) B(\theta) + \mathcal{O}(\alpha^4)\,. \tag{13}$$

Благодаря перестановочным свойствам матриц Паули оператор $\hat{f}$ линеен по спиновым переменным и обладает очевидной симметрией:

$$\boldsymbol{S}^{\alpha\beta}_{\gamma\delta} = \frac{1}{2}\left(\delta^{\alpha}_{\gamma}\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{\beta}_{\delta} + \delta^{\beta}_{\delta}\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{\alpha}_{\gamma}\right) = \boldsymbol{S}^{\beta\alpha}_{\delta\gamma}. \tag{14}$$

Тогда

$$f^{\alpha\beta}_{\gamma\delta}(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_1',\boldsymbol{p}_2') = f^{\beta\alpha}_{\delta\gamma}(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_1',\boldsymbol{p}_2'). \tag{15}$$

Сочетая вместе инварианты (12),(15) мы получаем тривиальную симметрию, соответствующую перенумерации первой и второй частицы.

$$f^{\alpha\beta}_{\gamma\delta}(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_1',\boldsymbol{p}_2') = f^{\beta\alpha}_{\delta\gamma}(\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2',\boldsymbol{p}_1'). \tag{16}$$

Для реальных тождественных электронов в кинетическое уравнение, согласно [10], входит антисимметризованная амплитуда рассеяния. На основании полученной амплитуды рассеяния $\hat{f}$ для частиц со спином $1/2$ мы формируем амплитуду рассеяния для двух электронов, как тождественных частиц:

$$F^{\alpha\beta}_{\delta\gamma}(\boldsymbol{p}_1,\,\boldsymbol{p}_2,\,\boldsymbol{p}_1',\,\boldsymbol{p}_2') = f^{\alpha\beta}_{\delta\gamma}(\boldsymbol{p}_1,\,\boldsymbol{p}_2,\,\boldsymbol{p}_1',\,\boldsymbol{p}_2') - f^{\beta\alpha}_{\delta\gamma}(\boldsymbol{p}_1,\,\boldsymbol{p}_2,\,\boldsymbol{p}_2',\,\boldsymbol{p}_1')\,. \tag{17}$$

В результате, получаемая амплитуда $\hat{F}$ обладает тремя описанными выше в (12), (15), (16) инвариантами и дополнительно антисимметрией по перестановке тождественных частиц.

$$F^{\alpha\beta}_{\gamma\delta}(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_1',\boldsymbol{p}_2') = F^{\alpha\beta}_{\gamma\delta}(\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2',\boldsymbol{p}_1'). \tag{18}$$

$$F^{\alpha\beta}_{\gamma\delta}(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_1',\boldsymbol{p}_2') = F^{\beta\alpha}_{\delta\gamma}(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_1',\boldsymbol{p}_2'). \tag{19}$$

$$F^{\alpha\beta}_{\gamma\delta}(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_1',\boldsymbol{p}_2') = F^{\beta\alpha}_{\delta\gamma}(\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2',\boldsymbol{p}_1'). \tag{20}$$

$$F^{\alpha\beta}_{\gamma\delta}(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_1',\boldsymbol{p}_2') = -F^{\beta\alpha}_{\gamma\delta}(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_2',\boldsymbol{p}_1'). \tag{21}$$

Стоит отметить, что для написания данных инвариантов достаточно только общих соображений о симметриях амплитуды рассеяния и пренебрежения спин–спиновым взаимодействием. В явном же виде амплитуда взаимного рассеяния для двух электронов имеет следующий вид:

$$F^{\alpha\beta}_{\delta\gamma}(\boldsymbol{p}_1,\,\boldsymbol{p}_2,\,\boldsymbol{p}'_1,\,\boldsymbol{p}'_2) = A(\boldsymbol{p}_1,\,\boldsymbol{p}_2,\,\boldsymbol{p}'_1,\,\boldsymbol{p}'_2)\delta^{\alpha}_{\delta}\delta^{\beta}_{\gamma}+ \\ + B(\boldsymbol{p}_1,\,\boldsymbol{p}_2,\,\boldsymbol{p}'_1,\,\boldsymbol{p}'_2)(\delta^{\alpha}_{\delta}\boldsymbol{\sigma}^{\beta}_{\gamma} + \delta^{\beta}_{\gamma}\boldsymbol{\sigma}^{\alpha}_{\delta})\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{p}_1,\,\boldsymbol{p}_2,\,\boldsymbol{p}'_1,\,\boldsymbol{p}'_2) - A(\boldsymbol{p}_1,\,\boldsymbol{p}_2,\,\boldsymbol{p}'_2,\,\boldsymbol{p}'_1)\delta^{\beta}_{\delta}\delta^{\alpha}_{\gamma}- \\ - B(\boldsymbol{p}_1,\,\boldsymbol{p}_2,\,\boldsymbol{p}'_2,\,\boldsymbol{p}'_1)(\delta^{\beta}_{\delta}\boldsymbol{\sigma}^{\alpha}_{\gamma} + \delta^{\alpha}_{\gamma}\boldsymbol{\sigma}^{\beta}_{\delta})\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{p}_1,\,\boldsymbol{p}_2,\,\boldsymbol{p}'_2,\,\boldsymbol{p}'_1) \quad (22)$$

или

$$F^{\alpha\beta}_{\delta\gamma}(\boldsymbol{p}_1,\,\boldsymbol{p}_2,\,\boldsymbol{p}'_1,\,\boldsymbol{p}'_2) = A(\boldsymbol{p}_1,\,\boldsymbol{p}_2,\,\boldsymbol{p}'_1,\,\boldsymbol{p}'_2)\delta^{\alpha}_{\delta}\delta^{\beta}_{\gamma} - A(\boldsymbol{p}_1,\,\boldsymbol{p}_2,\,\boldsymbol{p}'_2,\,\boldsymbol{p}'_1)\delta^{\beta}_{\delta}\delta^{\alpha}_{\gamma}+ \\ + B(\boldsymbol{p}_1,\,\boldsymbol{p}_2,\,\boldsymbol{p}'_1,\,\boldsymbol{p}'_2)(\delta^{\alpha}_{\delta}\boldsymbol{\sigma}^{\beta}_{\gamma} + \delta^{\beta}_{\gamma}\boldsymbol{\sigma}^{\alpha}_{\delta})\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{p}_1,\,\boldsymbol{p}_2,\,\boldsymbol{p}'_1,\,\boldsymbol{p}'_2)+ \\ + B(\boldsymbol{p}_1,\,\boldsymbol{p}_2,\,\boldsymbol{p}'_2,\,\boldsymbol{p}'_1)(\delta^{\beta}_{\delta}\boldsymbol{\sigma}^{\alpha}_{\gamma} + \delta^{\alpha}_{\gamma}\boldsymbol{\sigma}^{\beta}_{\delta})\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{p}_1,\,\boldsymbol{p}_2,\,\boldsymbol{p}'_1,\,\boldsymbol{p}'_2). \quad (23)$$

Оптическая теорема, как следствие интеграла столкновений

Вопрос последующего получения оптической теоремы обсуждался для электронного рассеяния обсуждался в [21]. Мы же воспользуемся иным способом. В нашем распоряжении есть интеграл столкновений, описывающий динамику матрицы плотности электронов, через $n\,(\boldsymbol{p},t)$ и $\boldsymbol{S}\,(\boldsymbol{p},t)$, [10] [1]:

$$\frac{1}{2}\delta^{\alpha}_{\beta}\left(\frac{dn(\boldsymbol{p}_1)}{dt}\right)^{(ee)}_{st} + \boldsymbol{\sigma}^{\alpha}_{\beta}\left(\frac{d\boldsymbol{S}(\boldsymbol{p}_1)}{dt}\right)^{(ee)}_{st} = \\ = i\pi\int n(\boldsymbol{p}_1)n(\boldsymbol{p}_2)\Big\{\rho^{\gamma}_{\beta}(\boldsymbol{p}_1)\rho^{\delta}_{\mu}(\boldsymbol{p}_2)\left[F^{\alpha\mu}_{\gamma\delta}(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2) - F^{\alpha\mu}_{\delta\gamma}(\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2)\right] - \\ - \rho^{\alpha}_{\epsilon}(\boldsymbol{p}_1)\rho^{\mu}_{\xi}(\boldsymbol{p}_2)\left[F^{*\,\epsilon\xi}_{\beta\mu}(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2) - F^{*\,\xi\epsilon}_{\beta\mu}(\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2)\right]\Big\}\,d^3p_2+ \\ + \int n(\boldsymbol{p}'_1)n(\boldsymbol{p}'_2)\rho^{\gamma}_{\epsilon}(\boldsymbol{p}'_1)\rho^{\delta}_{\xi}(\boldsymbol{p}'_2)F^{\alpha\mu}_{\gamma\delta}(\boldsymbol{p}'_1,\boldsymbol{p}'_2,\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2)F^{*\,\epsilon\xi}_{\beta\mu}(\boldsymbol{p}'_1,\boldsymbol{p}'_2,\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2)\times \\ \times\,\delta\left(\frac{{p'_1}^2}{2} + \frac{{p'_2}^2}{2} - \frac{p_1^2}{2} - \frac{p_2^2}{2}\right)\delta\left(\boldsymbol{p}'_1 + \boldsymbol{p}'_2 - \boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_2\right)\,d^3p'_2\,d^3p'_1\,d^3p_2. \quad (24)$$

Если мы проинтегрируем обе части уравнения (24) по d^3p_1 и возьмем след получившегося результата, мы получим тождественный ноль, как следствие закона сохранения числа частиц:

$$\delta^{\beta}_{\alpha}\int\left(\frac{1}{2}\delta^{\alpha}_{\beta}\left(\frac{dn(\boldsymbol{p}_1)}{dt}\right)^{(ee)}_{st} + \boldsymbol{\sigma}^{\alpha}_{\beta}\left(\frac{d\boldsymbol{S}(\boldsymbol{p}_1)}{dt}\right)^{(ee)}_{st}\right)d^3p_1 = \frac{dN}{dt} = 0 \qquad (25)$$

[1]Как и в исходной статье, здесь F^* означает эрмитово сопряжение оператора F.

Отсюда и для правой части:

$$
\begin{aligned}
0 = i\pi\delta^{\beta}_{\alpha}\int n(\boldsymbol{p}_1)n(\boldsymbol{p}_2)\Big\{\rho^{\gamma}_{\beta}(\boldsymbol{p}_1)\rho^{\delta}_{\mu}(\boldsymbol{p}_2)\left[F^{\alpha\mu}_{\gamma\delta}(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2) - F^{\alpha\mu}_{\delta\gamma}(\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2)\right] - \\
- \rho^{\alpha}_{\epsilon}(\boldsymbol{p}_1)\rho^{\mu}_{\xi}(\boldsymbol{p}_2)\left[F^{*\,\epsilon\xi}_{\beta\mu}(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2) - F^{*\,\xi\epsilon}_{\beta\mu}(\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2)\right]\Big\} d^3p_2 d^3p_1 + \\
+ \delta^{\beta}_{\alpha}\int n(\boldsymbol{p}'_1)n(\boldsymbol{p}'_2)\rho^{\gamma}_{\epsilon}(\boldsymbol{p}'_1)\rho^{\delta}_{\xi}(\boldsymbol{p}'_2)F^{\alpha\mu}_{\gamma\delta}(\boldsymbol{p}'_1,\boldsymbol{p}'_2,\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2)F^{*\,\epsilon\xi}_{\beta\mu}(\boldsymbol{p}'_1,\boldsymbol{p}'_2,\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2)\times \\
\times\,\delta\left(\frac{{p'_1}^2}{2} + \frac{{p'_2}^2}{2} - \frac{p_1^2}{2} - \frac{p_2^2}{2}\right)\delta\left(\boldsymbol{p}'_1 + \boldsymbol{p}'_2 - \boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_2\right)\, d^3p'_2\, d^3p'_1\, d^3p_2 d^3p_1. \quad (26)
\end{aligned}
$$

Это выражение должно выполняться при любых $n(\boldsymbol{p})$ и $\rho(\boldsymbol{p})$. Для удобства, рассмотрим взаимодействие двух узких пучков электронов: $n(\boldsymbol{p}) = n_a\delta(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_a) + n_b\delta(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_b)$. Сразу можно сказать, что можно отбросить столкновения в пределах одного пучка, так как они приводит лишь к слабому размытию, за счет малых относительных скоростей столкновения.

$$
\begin{aligned}
0 = i\pi\delta^{\beta}_{\alpha}n_a(\boldsymbol{p}_a)n_b(\boldsymbol{p}_b)\Big\{\rho^{\gamma}_{\beta}(\boldsymbol{p}_a)\rho^{\delta}_{\mu}(\boldsymbol{p}_b)\left[F^{\alpha\mu}_{\gamma\delta}(\boldsymbol{p}_a,\boldsymbol{p}_b,\boldsymbol{p}_a,\boldsymbol{p}_b) - F^{\alpha\mu}_{\delta\gamma}(\boldsymbol{p}_b,\boldsymbol{p}_a,\boldsymbol{p}_a,\boldsymbol{p}_b)\right] - \\
- \rho^{\alpha}_{\epsilon}(\boldsymbol{p}_a)\rho^{\mu}_{\xi}(\boldsymbol{p}_b)\left[F^{*\,\epsilon\xi}_{\beta\mu}(\boldsymbol{p}_a,\boldsymbol{p}_b,\boldsymbol{p}_a,\boldsymbol{p}_b) - F^{*\,\xi\epsilon}_{\beta\mu}(\boldsymbol{p}_b,\boldsymbol{p}_a,\boldsymbol{p}_a,\boldsymbol{p}_b)\right]\Big\} + \\
+ \delta^{\beta}_{\alpha}n_a(\boldsymbol{p}_a)n_b(\boldsymbol{p}_b)\int \rho^{\gamma}_{\epsilon}(\boldsymbol{p}_a)\rho^{\delta}_{\xi}(\boldsymbol{p}_b)F^{\alpha\mu}_{\gamma\delta}(\boldsymbol{p}_a,\boldsymbol{p}_b,\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2)F^{*\,\epsilon\xi}_{\beta\mu}(\boldsymbol{p}_a,\boldsymbol{p}_b,\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2)\times \\
\times\,\delta\left(\frac{p_a^2}{2} + \frac{p_b^2}{2} - \frac{p_1^2}{2} - \frac{p_2^2}{2}\right)\delta\left(\boldsymbol{p}_a + \boldsymbol{p}_b - \boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_2\right)\, d^3p_2 d^3p_1. \quad (27)
\end{aligned}
$$

Сократим общую плотность электронов и проведем свертку по спиновым индексам. Также мы можем переобозначить повторяющиеся спиновые индексы другими буквами, чтобы выделить общий множитель.

$$
\begin{aligned}
- i\pi\Big\{\rho^{\gamma}_{\alpha}(\boldsymbol{p}_a)\rho^{\delta}_{\mu}(\boldsymbol{p}_b)\left[F^{\alpha\mu}_{\gamma\delta}(\boldsymbol{p}_a,\boldsymbol{p}_b,\boldsymbol{p}_a,\boldsymbol{p}_b) - F^{\alpha\mu}_{\delta\gamma}(\boldsymbol{p}_b,\boldsymbol{p}_a,\boldsymbol{p}_a,\boldsymbol{p}_b)\right] - \\
- \rho^{\gamma}_{\alpha}(\boldsymbol{p}_a)\rho^{\delta}_{\mu}(\boldsymbol{p}_b)\left[F^{*\,\alpha\mu}_{\gamma\delta}(\boldsymbol{p}_a,\boldsymbol{p}_b,\boldsymbol{p}_a,\boldsymbol{p}_b) - F^{*\,\mu\alpha}_{\gamma\delta}(\boldsymbol{p}_b,\boldsymbol{p}_a,\boldsymbol{p}_a,\boldsymbol{p}_b)\right]\Big\} = \\
= \int \rho^{\gamma}_{\alpha}(\boldsymbol{p}_a)\rho^{\delta}_{\mu}(\boldsymbol{p}_b)F^{\beta\zeta}_{\gamma\delta}(\boldsymbol{p}_a,\boldsymbol{p}_b,\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2)F^{*\,\alpha\mu}_{\beta\zeta}(\boldsymbol{p}_a,\boldsymbol{p}_b,\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2)\times \\
\times\,\delta\left(\frac{p_a^2}{2} + \frac{p_b^2}{2} - \frac{p_1^2}{2} - \frac{p_2^2}{2}\right)\delta\left(\boldsymbol{p}_a + \boldsymbol{p}_b - \boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_2\right)\, d^3p_2 d^3p_1. \quad (28)
\end{aligned}
$$

И опять, это уравнение должно выполняться при произвольных $\rho^{\alpha}_{\beta}(\boldsymbol{p})$. Отсюда следует равенство:

$$
\begin{aligned}
&-i\pi\Bigg\{\Big[F^{\alpha\mu}_{\gamma\delta}(\boldsymbol{p}_a,\boldsymbol{p}_b,\boldsymbol{p}_a,\boldsymbol{p}_b)-F^{\alpha\mu}_{\delta\gamma}(\boldsymbol{p}_b,\boldsymbol{p}_a,\boldsymbol{p}_a,\boldsymbol{p}_b)\Big]-\\
&\qquad-\Big[F^{*\,\alpha\mu}_{\gamma\delta}(\boldsymbol{p}_a,\boldsymbol{p}_b,\boldsymbol{p}_a,\boldsymbol{p}_b)-F^{*\,\mu\alpha}_{\gamma\delta}(\boldsymbol{p}_b,\boldsymbol{p}_a,\boldsymbol{p}_a,\boldsymbol{p}_b)\Big]\Bigg\}=\\
&=\int F^{\beta\zeta}_{\gamma\delta}(\boldsymbol{p}_a,\boldsymbol{p}_b,\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2)F^{*\,\alpha\mu}_{\beta\zeta}(\boldsymbol{p}_a,\boldsymbol{p}_b,\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2)\delta\left(\frac{p_a^2}{2}+\frac{p_b^2}{2}-\frac{p_1^2}{2}-\frac{p_2^2}{2}\right)\times\\
&\qquad\times\delta\left(\boldsymbol{p}_a+\boldsymbol{p}_b-\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_2\right)\,d^3p_2d^3p_1. \qquad (29)
\end{aligned}
$$

Воспользовавшись свойствами симметрии амплитуды рассеяния (18 - 21), получим окончательную форму оптической теоремы для двух электронов:

$$
\begin{aligned}
&-4i\pi\Big\{AF\Big\}^{\alpha\mu}_{\gamma\delta}(\boldsymbol{p}_a,\boldsymbol{p}_b,\boldsymbol{p}_a,\boldsymbol{p}_b)=\int F^{\beta\zeta}_{\gamma\delta}(\boldsymbol{p}_a,\boldsymbol{p}_b,\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2)F^{*\,\alpha\mu}_{\beta\zeta}(\boldsymbol{p}_a,\boldsymbol{p}_b,\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2)\times\\
&\qquad\times\delta\left(\frac{p_a^2}{2}+\frac{p_b^2}{2}-\frac{p_1^2}{2}-\frac{p_2^2}{2}\right)\delta\left(\boldsymbol{p}_a+\boldsymbol{p}_b-\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_2\right)\,d^3p_2d^3p_1. \qquad (30)
\end{aligned}
$$

Здесь и далее мы используем обозначение для антиэрмитовой и эрмитовой части тензора:

$$
\{AF\}^{\alpha\beta}_{\gamma\delta}=\frac{1}{2}\left(F^{\alpha\beta}_{\gamma\delta}-F^{*\,\alpha\beta}_{\gamma\delta}\right)\ ,\ \{HF\}^{\alpha\beta}_{\gamma\delta}=\frac{1}{2}\left(F^{\alpha\beta}_{\gamma\delta}+F^{*\,\alpha\beta}_{\gamma\delta}\right). \qquad (31)
$$

Отметим, что форма оптической теоремы (30) не может быть написана из общих соображений сохранения баланса. Дополнительная спиновая степень свободы дает несколько равнозначных вариантов написания. Поэтому требуется выводить оптическую теорему напрямую из интеграла столкновений.

Общий вид интеграла столкновений, с учетом симметрий амплитуды рассеяния

Далее рассмотрим оптическую теорему применительно к уравнению релаксации спиновой поляризации:

$$\left(\frac{d\boldsymbol{S}(\boldsymbol{p}_1)}{dt}\right)^{(ee)}_{st} = i\frac{\pi}{2}\int n(\boldsymbol{p}_1)n(\boldsymbol{p}_2)\boldsymbol{\sigma}^{\beta}_{\alpha}\times$$
$$\times\left\{\rho^{\gamma}_{\beta}(\boldsymbol{p}_1)\rho^{\delta}_{\mu}(\boldsymbol{p}_2)\left[F^{\alpha\mu}_{\gamma\delta}(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2)-F^{\alpha\mu}_{\delta\gamma}(\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2)\right]-\right.$$
$$\left.-\rho^{\alpha}_{\epsilon}(\boldsymbol{p}_1)\rho^{\mu}_{\xi}(\boldsymbol{p}_2)\left[F^{*\,\epsilon\xi}_{\beta\mu}(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2)-F^{*\,\xi\epsilon}_{\beta\mu}(\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2)\right]\right\}d^3p_2+$$
$$+\frac{1}{2}\int n(\boldsymbol{p}'_1)n(\boldsymbol{p}'_2)\boldsymbol{\sigma}^{\beta}_{\alpha}\rho^{\gamma}_{\epsilon}(\boldsymbol{p}'_1)\rho^{\delta}_{\xi}(\boldsymbol{p}'_2)F^{\alpha\mu}_{\gamma\delta}(\boldsymbol{p}'_1,\boldsymbol{p}'_2,\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2)F^{*\,\epsilon\xi}_{\beta\mu}(\boldsymbol{p}'_1,\boldsymbol{p}'_2,\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2)\times$$
$$\times\,\delta\left(\frac{p'^2_1}{2}+\frac{p'^2_2}{2}-\frac{p^2_1}{2}-\frac{p^2_2}{2}\right)\delta\left(\boldsymbol{p}'_1+\boldsymbol{p}'_2-\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_2\right)\,d^3p'_2\,d^3p'_1\,d^3p_2. \quad (32)$$

Раскладываем линейное по амплитуде слагаемое на эрмитову и антиэрмитову часть,

$$F^{\alpha\beta}_{\gamma\delta}=\{HF\}^{\alpha\beta}_{\gamma\delta}+\{AF\}^{\alpha\beta}_{\gamma\delta}\,, \quad (33)$$

получаем:

$$\left(\frac{d\boldsymbol{S}(\boldsymbol{p}_1)}{dt}\right)^{(ee)}_{st} = i\pi\int n(\boldsymbol{p}_1)n(\boldsymbol{p}_2)\boldsymbol{\sigma}^{\beta}_{\alpha}\times$$
$$\times\,\rho^{\delta}_{\mu}(\boldsymbol{p}_2)\left\{\rho^{\gamma}_{\beta}(\boldsymbol{p}_1)\,\{HF\}^{\alpha\mu}_{\gamma\delta}(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2)-\rho^{\alpha}_{\gamma}(\boldsymbol{p}_1)\,\{HF\}^{\gamma\mu}_{\beta\delta}(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2)\right\}d^3p_2+$$
$$+\,i\pi\int n(\boldsymbol{p}_1)n(\boldsymbol{p}_2)\boldsymbol{\sigma}^{\beta}_{\alpha}\times$$
$$\times\,\rho^{\delta}_{\mu}(\boldsymbol{p}_2)\left\{\rho^{\gamma}_{\beta}(\boldsymbol{p}_1)\,\{AF\}^{\alpha\mu}_{\gamma\delta}(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2)+\rho^{\alpha}_{\gamma}(\boldsymbol{p}_1)\,\{AF\}^{\gamma\mu}_{\beta\delta}(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2)\right\}d^3p_2+$$
$$+\frac{1}{2}\int n(\boldsymbol{p}'_1)n(\boldsymbol{p}'_2)\boldsymbol{\sigma}^{\beta}_{\alpha}\rho^{\gamma}_{\epsilon}(\boldsymbol{p}'_1)\rho^{\delta}_{\xi}(\boldsymbol{p}'_2)F^{\alpha\mu}_{\gamma\delta}(\boldsymbol{p}'_1,\boldsymbol{p}'_2,\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2)F^{*\,\epsilon\xi}_{\beta\mu}(\boldsymbol{p}'_1,\boldsymbol{p}'_2,\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2)\times$$
$$\times\,\delta\left(\frac{p'^2_1}{2}+\frac{p'^2_2}{2}-\frac{p^2_1}{2}-\frac{p^2_2}{2}\right)\delta\left(\boldsymbol{p}'_1+\boldsymbol{p}'_2-\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_2\right)\,d^3p'_2\,d^3p'_1\,d^3p_2. \quad (34)$$

Заменяя антиэрмитову часть амплитуды рассеяния с помощью оптической теоремы (30) и делая циклическую замену индексов суммирования, получаем

$$\left(\frac{d\boldsymbol{S}(\boldsymbol{p}_1)}{dt}\right)_{st}^{(ee)} = i\pi\int n(\boldsymbol{p}_1)n(\boldsymbol{p}_2)\rho_\beta^\gamma(\boldsymbol{p}_1)\rho_\mu^\omega(\boldsymbol{p}_2)\times$$
$$\times\left\{\boldsymbol{\sigma}_\alpha^\beta\left\{HF\right\}_{\gamma\omega}^{\alpha\mu}(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2) - \boldsymbol{\sigma}_\gamma^\chi\left\{HF\right\}_{\chi\omega}^{\beta\mu}(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2)\right\}d^3p_2+$$

$$+\int\Big\{\frac{1}{2}n(\boldsymbol{p}_1')n(\boldsymbol{p}_2')\rho_\beta^\gamma(\boldsymbol{p}_1')\rho_\mu^\omega(\boldsymbol{p}_2')\boldsymbol{\sigma}_\alpha^\chi F_{\gamma\omega}^{\alpha\nu}(\boldsymbol{p}_1',\boldsymbol{p}_2',\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2)F_{\chi\nu}^{*\,\beta\mu}(\boldsymbol{p}_1',\boldsymbol{p}_2',\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2)-$$
$$-\frac{1}{4}n(\boldsymbol{p}_1)n(\boldsymbol{p}_2)\rho_\beta^\gamma(\boldsymbol{p}_1)\rho_\mu^\omega(\boldsymbol{p}_2)\times$$
$$\times\Big[\boldsymbol{\sigma}_\gamma^\chi F_{\chi\omega}^{\xi\zeta}(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_1',\boldsymbol{p}_2')F_{\xi\zeta}^{*\,\beta\mu}(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_1',\boldsymbol{p}_2')+\boldsymbol{\sigma}_\alpha^\beta F_{\gamma\omega}^{\xi\zeta}(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_1',\boldsymbol{p}_2')F_{\xi\zeta}^{*\,\alpha\mu}(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_1',\boldsymbol{p}_2')\Big]\Big\}\times$$
$$\times\,\delta\left(\frac{{p_1'}^2}{2}+\frac{{p_2'}^2}{2}-\frac{p_1^2}{2}-\frac{p_2^2}{2}\right)\delta\left(\boldsymbol{p}_1'+\boldsymbol{p}_2'-\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_2\right)\,d^3p_2'\,d^3p_1'\,d^3p_2. \quad (35)$$

Подставив сюда выражения для спиновой матрицы плотности

$$\rho_\beta^\gamma(\boldsymbol{p}_1) = \frac{1}{2}\delta_\beta^\gamma + \boldsymbol{\sigma}_\beta^\gamma\boldsymbol{s}(\boldsymbol{p}_1), \quad (36)$$

проведем свертку по символам Кронекера и перегруппируем слагаемые:

$$\left(\frac{d\boldsymbol{S}(\boldsymbol{p}_1)}{dt}\right)_{st}^{(ee)} = i\pi\int n(\boldsymbol{p}_1)n(\boldsymbol{p}_2)\Big[$$

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_\beta^\gamma\boldsymbol{s}(\boldsymbol{p}_1)\Big\{\boldsymbol{\sigma}_\alpha^\beta\left\{HF\right\}_{\gamma\mu}^{\alpha\mu}(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2) - \boldsymbol{\sigma}_\gamma^\chi\left\{HF\right\}_{\chi\mu}^{\beta\mu}(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2)\Big\}+$$
$$+\boldsymbol{\sigma}_\beta^\gamma\boldsymbol{s}(\boldsymbol{p}_1)\boldsymbol{\sigma}_\mu^\omega\boldsymbol{s}(\boldsymbol{p}_2)\Big\{\boldsymbol{\sigma}_\alpha^\beta\left\{HF\right\}_{\gamma\omega}^{\alpha\mu}(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2)-\boldsymbol{\sigma}_\gamma^\chi\left\{HF\right\}_{\chi\omega}^{\beta\mu}(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2)\Big\}\Big]\,d^3p_2+$$
$$+\frac{1}{2}\int\Big\{n(\boldsymbol{p}_1')n(\boldsymbol{p}_2')\Big[$$

$$\frac{1}{4}\boldsymbol{\sigma}_\alpha^\chi F_{\gamma\mu}^{\alpha\nu}(\boldsymbol{p}_1',\boldsymbol{p}_2',\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2)F_{\chi\nu}^{*\,\gamma\mu}(\boldsymbol{p}_1',\boldsymbol{p}_2',\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2)+$$
$$+\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_\beta^\gamma\boldsymbol{s}(\boldsymbol{p}_1')\boldsymbol{\sigma}_\alpha^\chi F_{\gamma\mu}^{\alpha\nu}(\boldsymbol{p}_1',\boldsymbol{p}_2',\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2)F_{\chi\nu}^{*\,\beta\mu}(\boldsymbol{p}_1',\boldsymbol{p}_2',\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2)+$$
$$+\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_\mu^\omega\boldsymbol{s}(\boldsymbol{p}_2')\boldsymbol{\sigma}_\alpha^\chi F_{\gamma\omega}^{\alpha\nu}(\boldsymbol{p}_1',\boldsymbol{p}_2',\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2)F_{\chi\nu}^{*\,\gamma\mu}(\boldsymbol{p}_1',\boldsymbol{p}_2',\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2)+$$
$$+\boldsymbol{\sigma}_\beta^\gamma\boldsymbol{s}(\boldsymbol{p}_1')\boldsymbol{\sigma}_\mu^\omega\boldsymbol{s}(\boldsymbol{p}_2')\boldsymbol{\sigma}_\alpha^\chi F_{\gamma\omega}^{\alpha\nu}(\boldsymbol{p}_1',\boldsymbol{p}_2',\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2)F_{\chi\nu}^{*\,\beta\mu}(\boldsymbol{p}_1',\boldsymbol{p}_2',\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2)\Big]-$$

$$
-\frac{1}{2}n(\boldsymbol{p}_1)n(\boldsymbol{p}_2)\Big[\frac{1}{4}\Big(\boldsymbol{\sigma}_{\gamma}^{\chi}F_{\chi\mu}^{\xi\zeta}(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_1',\boldsymbol{p}_2')F_{\xi\zeta}^{*\,\gamma\mu}(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_1',\boldsymbol{p}_2')+
$$

$$
+\boldsymbol{\sigma}_{\alpha}^{\gamma}F_{\gamma\mu}^{\xi\zeta}(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_1',\boldsymbol{p}_2')F_{\xi\zeta}^{*\,\alpha\mu}(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_1',\boldsymbol{p}_2')\Big)+
$$

$$
+\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_{\beta}^{\gamma}\boldsymbol{s}(\boldsymbol{p}_1)\Big(\boldsymbol{\sigma}_{\gamma}^{\chi}F_{\chi\mu}^{\xi\zeta}(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_1',\boldsymbol{p}_2')F_{\xi\zeta}^{*\,\beta\mu}(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_1',\boldsymbol{p}_2')+
$$

$$
+\boldsymbol{\sigma}_{\alpha}^{\beta}F_{\gamma\mu}^{\xi\zeta}(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_1',\boldsymbol{p}_2')F_{\xi\zeta}^{*\,\alpha\mu}(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_1',\boldsymbol{p}_2')\Big)+
$$

$$
+\frac{1}{2}\delta_{\gamma}^{\gamma}\boldsymbol{\sigma}_{\mu}^{\omega}\boldsymbol{s}(\boldsymbol{p}_2)\Big(\boldsymbol{\sigma}_{\gamma}^{\chi}F_{\chi\omega}^{\xi\zeta}(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_1',\boldsymbol{p}_2')F_{\xi\zeta}^{*\,\gamma\mu}(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_1',\boldsymbol{p}_2')+
$$

$$
+\boldsymbol{\sigma}_{\alpha}^{\gamma}F_{\gamma\omega}^{\xi\zeta}(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_1',\boldsymbol{p}_2')F_{\xi\zeta}^{*\,\alpha\mu}(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_1',\boldsymbol{p}_2')\Big)+
$$

$$
+\boldsymbol{\sigma}_{\beta}^{\gamma}\boldsymbol{s}(\boldsymbol{p}_1)\boldsymbol{\sigma}_{\mu}^{\omega}\boldsymbol{s}(\boldsymbol{p}_2)\Big(\boldsymbol{\sigma}_{\gamma}^{\chi}F_{\chi\omega}^{\xi\zeta}(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_1',\boldsymbol{p}_2')F_{\xi\zeta}^{*\,\beta\mu}(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_1',\boldsymbol{p}_2')+
$$

$$
+\boldsymbol{\sigma}_{\alpha}^{\beta}F_{\gamma\omega}^{\xi\zeta}(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_1',\boldsymbol{p}_2')F_{\xi\zeta}^{*\,\alpha\mu}(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_1',\boldsymbol{p}_2')\Big)\Big]\Big\}\times
$$

$$
\times\,\delta\left(\frac{{p_1'}^2}{2}+\frac{{p_2'}^2}{2}-\frac{p_1^2}{2}-\frac{p_2^2}{2}\right)\delta\left(\boldsymbol{p}_1'+\boldsymbol{p}_2'-\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_2\right)\,d^3p_2'\,d^3p_1'\,d^3p_2. \quad (37)
$$

Уравнение (37) развернуто описывает динамику плотности спиновой поляризации электронного газа.

Релаксация суммарной спин–поляризации электронов

Рассмотрим динамику общей спиновой поляризации электронного газа. Для этого проинтегрируем обе части уравнения (37) по d^3p_1. В правой части мы сможем произвести циклическую замену переменных интегрирования и получить:

$$
\int\left(\frac{d\boldsymbol{S}(\boldsymbol{p}_1)}{dt}\right)_{st}^{(ee)}d^3p_1=\frac{d\boldsymbol{s}}{dt}=
$$

$$
=i\pi\int n(\boldsymbol{p}_1)n(\boldsymbol{p}_2)\Big[\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_{\beta}^{\gamma}\boldsymbol{s}(\boldsymbol{p}_1)\Big\{\boldsymbol{\sigma}_{\alpha}^{\beta}\left\{HF\right\}_{\gamma\mu}^{\alpha\mu}(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2)-\boldsymbol{\sigma}_{\gamma}^{\chi}\left\{HF\right\}_{\chi\mu}^{\beta\mu}(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2)\Big\}+
$$

$$
+\boldsymbol{\sigma}_{\beta}^{\gamma}\boldsymbol{s}(\boldsymbol{p}_1)\boldsymbol{\sigma}_{\mu}^{\omega}\boldsymbol{s}(\boldsymbol{p}_2)\Big\{\boldsymbol{\sigma}_{\alpha}^{\beta}\left\{HF\right\}_{\gamma\omega}^{\alpha\mu}(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2)-\boldsymbol{\sigma}_{\gamma}^{\chi}\left\{HF\right\}_{\chi\omega}^{\beta\mu}(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2)\Big\}\Big]\,d^3p_2d^3p_1+
$$

$$
+\frac{1}{2}\int n(\boldsymbol{p}_1)n(\boldsymbol{p}_2)\Big\{
$$

$$
\frac{1}{4}\boldsymbol{\sigma}_{\alpha}^{\chi}F_{\gamma\mu}^{\alpha\nu}(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_1',\boldsymbol{p}_2')F_{\chi\nu}^{*\,\gamma\mu}(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_1',\boldsymbol{p}_2')+
$$

$$
+\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_{\beta}^{\gamma}\boldsymbol{s}(\boldsymbol{p})\boldsymbol{\sigma}_{\alpha}^{\chi}F_{\gamma\mu}^{\alpha\nu}(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_1',\boldsymbol{p}_2')F_{\chi\nu}^{*\,\beta\mu}(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_1',\boldsymbol{p}_2')+
$$

$$+\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_{\mu}^{\omega}\boldsymbol{s}(\boldsymbol{p}_2)\boldsymbol{\sigma}_{\alpha}^{\chi}F_{\gamma\omega}^{\alpha\nu}(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_1',\boldsymbol{p}_2')F_{\chi\nu}^{*\,\gamma\mu}(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_1',\boldsymbol{p}_2')+$$

$$+\boldsymbol{\sigma}_{\beta}^{\gamma}\boldsymbol{s}(\boldsymbol{p}_1)\boldsymbol{\sigma}_{\mu}^{\omega}\boldsymbol{s}(\boldsymbol{p}_2)\boldsymbol{\sigma}_{\alpha}^{\chi}F_{\gamma\omega}^{\alpha\nu}(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_1',\boldsymbol{p}_2')F_{\chi\nu}^{*\,\beta\mu}(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_1',\boldsymbol{p}_2')-$$

$$-\frac{1}{8}\Big(\boldsymbol{\sigma}_{\gamma}^{\chi}F_{\chi\mu}^{\xi\zeta}(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_1',\boldsymbol{p}_2')F_{\xi\zeta}^{*\,\gamma\mu}(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_1',\boldsymbol{p}_2')+$$

$$+\boldsymbol{\sigma}_{\alpha}^{\gamma}F_{\gamma\mu}^{\xi\zeta}(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_1',\boldsymbol{p}_2')F_{\xi\zeta}^{*\,\alpha\mu}(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_1',\boldsymbol{p}_2')\Big)-$$

$$-\frac{1}{4}\boldsymbol{\sigma}_{\beta}^{\gamma}\boldsymbol{s}(\boldsymbol{p}_1)\Big(\boldsymbol{\sigma}_{\gamma}^{\chi}F_{\chi\mu}^{\xi\zeta}(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_1',\boldsymbol{p}_2')F_{\xi\zeta}^{*\,\beta\mu}(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_1',\boldsymbol{p}_2')+$$

$$+\boldsymbol{\sigma}_{\alpha}^{\beta}F_{\gamma\mu}^{\xi\zeta}(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_1',\boldsymbol{p}_2')F_{\xi\zeta}^{*\,\alpha\mu}(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_1',\boldsymbol{p}_2')\Big)-$$

$$-\frac{1}{4}\delta_{\gamma}^{\gamma}\boldsymbol{\sigma}_{\mu}^{\omega}\boldsymbol{s}(\boldsymbol{p}_2)\Big(\boldsymbol{\sigma}_{\gamma}^{\chi}F_{\chi\omega}^{\xi\zeta}(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_1',\boldsymbol{p}_2')F_{\xi\zeta}^{*\,\gamma\mu}(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_1',\boldsymbol{p}_2')+$$

$$+\boldsymbol{\sigma}_{\alpha}^{\gamma}F_{\gamma\omega}^{\xi\zeta}(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_1',\boldsymbol{p}_2')F_{\xi\zeta}^{*\,\alpha\mu}(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_1',\boldsymbol{p}_2')\Big)-$$

$$-\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_{\beta}^{\gamma}\boldsymbol{s}(\boldsymbol{p}_1)\boldsymbol{\sigma}_{\mu}^{\omega}\boldsymbol{s}(\boldsymbol{p}_2)\Big(\boldsymbol{\sigma}_{\gamma}^{\chi}F_{\chi\omega}^{\xi\zeta}(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_1',\boldsymbol{p}_2')F_{\xi\zeta}^{*\,\beta\mu}(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_1',\boldsymbol{p}_2')+$$

$$+\boldsymbol{\sigma}_{\alpha}^{\beta}F_{\gamma\omega}^{\xi\zeta}(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_1',\boldsymbol{p}_2')F_{\xi\zeta}^{*\,\alpha\mu}(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_1',\boldsymbol{p}_2')\Big)\Big\}\times$$

$$\times\,\delta\left(\frac{p_1'^2}{2}+\frac{p_2'^2}{2}-\frac{p_1^2}{2}-\frac{p_2^2}{2}\right)\delta\left(\boldsymbol{p}_1'+\boldsymbol{p}_2'-\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_2\right)\,d^3p_2'\,d^3p_1'\,d^3p_2d^3p_1. \quad (38)$$

Дальнейшее упрощение уравнения (38) требует подстановки амплитуды рассеяния в явном виде (23). Это вычисление чрезвычайно громоздкое, но содержит только вычислительные трудности. Далее мы приведем этом результат, разбив его на шесть частей, для удобства изложения. При этом мы будем использовать обозначения

$$F(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_1',\boldsymbol{p}_2')=F(\theta),\ F(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_2',\boldsymbol{p}_1')=F(\pi-\theta). \quad (39)$$

Далее местами мы будем использовать обозначение (39) для краткости записи. Оно демонстрирует основную угловую зависимость амплитуды. После подстановки явного вида амплитуды в интеграл столкновений мы можем сгруппировать результат по отдельным слагаемым.

$$\frac{d\boldsymbol{s}}{dt}=I+II+III+IV+V+VI. \quad (40)$$

Здесь

$$
I = i\pi \int n(\boldsymbol{p}_1) n(\boldsymbol{p}_2) \times
$$
$$
\times \Big[\frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^{\gamma}_{\beta} \boldsymbol{s}(\boldsymbol{p}_1) \Big\{ \boldsymbol{\sigma}^{\beta}_{\alpha} \left\{HF\right\}^{\alpha\mu}_{\gamma\mu} (\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2) - \boldsymbol{\sigma}^{\alpha}_{\gamma} \left\{HF\right\}^{\beta\mu}_{\alpha\mu} (\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2) \Big\} +
$$
$$
+ \boldsymbol{\sigma}^{\gamma}_{\beta} \boldsymbol{s}(\boldsymbol{p}_1) \boldsymbol{\sigma}^{\omega}_{\mu} \boldsymbol{s}(\boldsymbol{p}_2) \Big\{ \boldsymbol{\sigma}^{\beta}_{\alpha} \left\{HF\right\}^{\alpha\mu}_{\gamma\omega} (\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2) - \boldsymbol{\sigma}^{\alpha}_{\gamma} \left\{HF\right\}^{\beta\mu}_{\alpha\omega} (\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2) \Big\} \Big] \, d^3 p_2. \tag{41}
$$

Слагаемое I соответствует линейной по амплитуде части интеграла столкновений, не вошедшей в оптическую теорему. В довольно общих физических случаях это слагаемое в уравнении (40), описывающее когерентное вращение вектора $\boldsymbol{S}$, тождественно обращается в 0. Это связано с дебаевским экранированием в плазме, которое зануляет амплитуду рассеяния вперед.

$$
II = \frac{1}{8} \int n(\boldsymbol{p}_1) n(\boldsymbol{p}_2) \times
$$
$$
\times \Big\{ 4\boldsymbol{\nu} \Big\{ A(\theta) B^*(\theta) + A(\theta) B^*(\pi - \theta) - A(\pi - \theta) B^*(\theta) - A(\pi - \theta) B^*(\pi - \theta) +
$$
$$
+ A^*(\theta) B(\theta) - A^*(\pi - \theta) B(\theta) + A^*(\theta) B(\pi - \theta) - A^*(\pi - \theta) B(\pi - \theta) \Big\} -
$$
$$
- 4\boldsymbol{\nu} \Big\{ A(\theta) B^*(\theta) + A(\theta) B^*(\pi - \theta) - A(\pi - \theta) B^*(\theta) - A(\pi - \theta) B^*(\pi - \theta) -
$$
$$
- A^*(\pi - \theta) B(\theta) + A^*(\theta) B(\theta) + A^*(\theta) B(\pi - \theta) - A^*(\pi - \theta) B(\pi - \theta) \Big\} \Big\} \times
$$
$$
\times \delta\left(\frac{p_1'^2}{2} + \frac{p_2'^2}{2} - \frac{p_1^2}{2} - \frac{p_2^2}{2} \right) \delta\left(\boldsymbol{p}_1' + \boldsymbol{p}_2' - \boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_2 \right) \, d^3 p_2' \, d^3 p_1' \, d^3 p_2 d^3 p_1 = 0 \tag{42}
$$

Это слагаемое содержит оставшиеся, скалярные по спину, слагаемые, входящие в (40). Оно очевидным образом тождественно обращается в ноль.

$$
III = \int n(\boldsymbol{p}_1) n(\boldsymbol{p}_2) \Big\{ -\boldsymbol{s}(\boldsymbol{p}_1) + \boldsymbol{s}(\boldsymbol{p}_2) \Big\} |A(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_2', \boldsymbol{p}_1')|^2 \times
$$
$$
\times \delta\left(\frac{p_1'^2}{2} + \frac{p_2'^2}{2} - \frac{p_1^2}{2} - \frac{p_2^2}{2} \right) \delta\left(\boldsymbol{p}_1' + \boldsymbol{p}_2' - \boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_2 \right) \, d^3 p_2' \, d^3 p_1' \, d^3 p_2 d^3 p_1. \tag{43}
$$

Это слагаемое образовано из линейных по спину слагаемых, пропорциональных $\sim |A|^2$, и соответствует интегралу столкновений Больцмана, который перемешивает распределение спиновой поляризации за счет классических столкновений. При установлении равновесного по импульсам максвелловского распределения, это слагаемое зануляется, если уже установилось равномерное распределение поляризации $\boldsymbol{s}(\boldsymbol{p}) = n(\boldsymbol{p})\boldsymbol{s}$. В случае произвольного распределения плотности поляризации данный интеграл не зануляется и является основным членом в процессе релаксации.

Из этих соображений можно утверждать, что при релаксации поляризации, сперва идет процесс изотропизации поляризации по всему фазовому пространству. При этом характерное время установления общей поляризации соответствует максвелловскому времени релаксации к равновесному по импульсам распределению.

$$
\begin{gathered}
IV = i\int n(\boldsymbol{p}_1)n(\boldsymbol{p}_2)\times \\
\times\Big\{[\boldsymbol{s}(\boldsymbol{p}_1)\times\boldsymbol{\nu}]\Big[A(\theta)B^*(\theta)+A(\theta)B^*(\pi-\theta)-A^*(\theta)B(\theta)-A^*(\theta)B(\pi-\theta)\Big]- \\
-[\boldsymbol{s}(\boldsymbol{p}_2)\times\boldsymbol{\nu}]\Big\{A(\pi-\theta)B^*(\theta)+A(\pi-\theta)B^*(\pi-\theta)-A^*(\pi-\theta)B(\theta)-A^*(\pi-\theta)B(\pi-\theta)\Big\}\Big\}\times \\
\times\delta\left(\frac{{p'_1}^2}{2}+\frac{{p'_2}^2}{2}-\frac{p_1^2}{2}-\frac{p_2^2}{2}\right)\delta\left(\boldsymbol{p}'_1+\boldsymbol{p}'_2-\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_2\right)\,d^3p'_2\,d^3p'_1\,d^3p_2d^3p_1. \quad (44)
\end{gathered}
$$

Это слагаемое образовано из линейных по спину слагаемых, пропорциональных $\sim AB^*$. Оно так же зануляется, если мы заменим во втором слагаемом $\boldsymbol{p}_2 \leftrightarrow \boldsymbol{p}_1$. При этом $\theta \leftrightarrow \pi-\theta$ и второе слагаемое тождественно сокращается с первым.

$$
\begin{gathered}
V = 2\int\Big\{n(\boldsymbol{p}_1)n(\boldsymbol{p}_2)\Big[(\boldsymbol{\nu}\boldsymbol{s}(\boldsymbol{p}_1))\boldsymbol{\nu}-\boldsymbol{s}(\boldsymbol{p}_1)\Big]\Big\}\times \\
\times\Big[|B(\theta)|^2+B^*(\theta)B(\pi-\theta)+B(\pi-\theta)B^*(\theta)+|B(\pi-\theta)|^2\Big]\times \\
\times\delta\left(\frac{{p'_1}^2}{2}+\frac{{p'_2}^2}{2}-\frac{p_1^2}{2}-\frac{p_2^2}{2}\right)\delta\left(\boldsymbol{p}'_1+\boldsymbol{p}'_2-\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_2\right)\,d^3p'_2\,d^3p'_1\,d^3p_2d^3p_1. \quad (45)
\end{gathered}
$$

Это слагаемое образовано из линейных по спину слагаемых, пропорциональных $\sim |B|^2$. Оно представляет для нас особый интерес, так как оно описывает релаксацию спиновой поляризации после установления максвелловского распределения. К нему мы еще вернемся.

$$
\begin{gathered}
VI = \frac{1}{4}\int n(\boldsymbol{p}_1)n(\boldsymbol{p}_2)\Big\{2\boldsymbol{\sigma}^{\gamma}_{\beta}\boldsymbol{s}(\boldsymbol{p}_1)\boldsymbol{\sigma}^{\omega}_{\mu}\boldsymbol{s}(\boldsymbol{p}_2)\boldsymbol{\sigma}^{\chi}_{\alpha}F^{\alpha\nu}_{\gamma\omega}(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}'_1,\boldsymbol{p}'_2)F^{*\,\beta\mu}_{\chi\nu}(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}'_1,\boldsymbol{p}'_2)- \\
-\boldsymbol{\sigma}^{\gamma}_{\beta}\boldsymbol{s}(\boldsymbol{p}_1)\boldsymbol{\sigma}^{\omega}_{\mu}\boldsymbol{s}(\boldsymbol{p}_2)\Big(\boldsymbol{\sigma}^{\chi}_{\gamma}F^{\xi\zeta}_{\chi\omega}(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}'_1,\boldsymbol{p}'_2)F^{*\,\beta\mu}_{\xi\zeta}(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}'_1,\boldsymbol{p}'_2)+ \\
+\boldsymbol{\sigma}^{\beta}_{\alpha}F^{\xi\zeta}_{\gamma\omega}(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}'_1,\boldsymbol{p}'_2)F^{*\,\alpha\mu}_{\xi\zeta}(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}'_1,\boldsymbol{p}'_2)\Big)\Big\}\times \\
\times\delta\left(\frac{{p'_1}^2}{2}+\frac{{p'_2}^2}{2}-\frac{p_1^2}{2}-\frac{p_2^2}{2}\right)\delta\left(\boldsymbol{p}'_1+\boldsymbol{p}'_2-\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_2\right)\,d^3p'_2\,d^3p'_1\,d^3p_2d^3p_1. \quad (46)
\end{gathered}
$$

Это слагаемое сформировано из слагаемых, квадратичных по спину. Мы не приводим его в развернутом виде, из–за его громоздкости. Для интересующего нас вопроса релаксации спиновой поляризации, мы в дальнейшем отбросим это слагаемое, считая, что поляризация мала, $s^2 \ll 1$.

Уравнения (40 - 46) описывают динамику общей спиновой поляризации для электронного газа.

Время релаксации

Продолжим вычисления, описывающие релаксацию спиновой поляризации. Для этого мы рассмотрим произвольное распределение в фазовом пространстве. На временах, сопоставимых с временем установления максвелловского распределения, за счет слагаемого (43), произойдет изотропизация распределения спиновой плотности. В дальнейшем будет происходить релаксация спиновой поляризации, единой для всего газа электронов $\boldsymbol{s}(\boldsymbol{p}) = n(\boldsymbol{p})\boldsymbol{s}$. В общем виде эта релаксация будет описываться слагаемыми (45) и (46). Однако, при дополнительном предположении слабости общей спиновой поляризации $s^2 \ll 1$ мы можем перейти к классическом уравнению релаксации для экспоненциального затухания

$$\frac{d\boldsymbol{s}}{dt} = -\boldsymbol{s}/\tau, \tag{47}$$

в котором τ - время релаксации.

Введем систему координат, аналогичную случаю с ионами, в которой ось OZ сонаправлена с вектором $\boldsymbol{s}$. При этом мы постулируем, что поляризация спина общая для всей системы и не зависит от импульса.

$$\boldsymbol{s}(\boldsymbol{p}_1) = s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{48}$$

Пусть вектор $\boldsymbol{p}_{12}$ составляет угол θ_i с осью OZ. Выберем ось OX так, чтобы вектор $\boldsymbol{p}_{12}$ лежал в плоскости XOZ.

$$\boldsymbol{p}_{12} = p_{12} \begin{pmatrix} \sin\theta_i \\ 0 \\ \cos\theta_i \end{pmatrix}. \tag{49}$$

Введем вспомогательный единичный вектор $\boldsymbol{a}$, также лежащий в плоскости XOZ, но перпендикулярный вектору $\boldsymbol{p}_{12}$.

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} -\cos\theta_i \\ 0 \\ \sin\theta_i \end{pmatrix}. \tag{50}$$

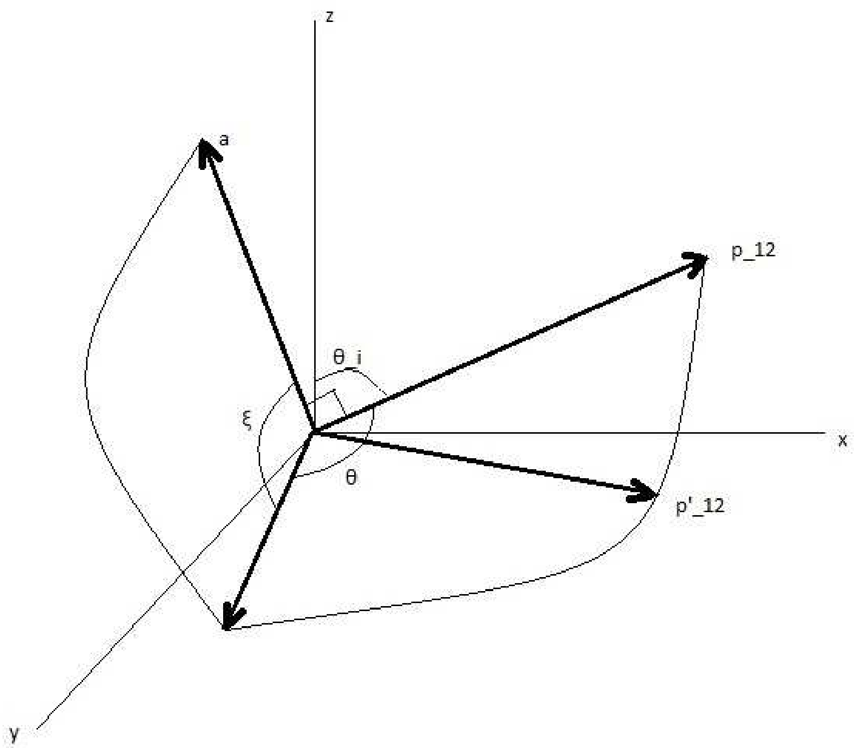

Рис. 1: Система координат, связанная со спином. $\boldsymbol{p}_{12}, \boldsymbol{a} \in ZOX$, $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{p}_{12}$. Вектор $\boldsymbol{p}_{12}$ составляет угол θ_i с осью OZ, угол θ между векторами $\boldsymbol{p}_{12}$ и $\boldsymbol{p}'_{12}$. Угол ξ получен при повороте вектора $\boldsymbol{a}$ вокруг оси $\boldsymbol{p}_{12}$ против часовой стрелки до плоскости, составленной из векторов $\boldsymbol{p}_{12}$ и $\boldsymbol{p}'_{12}$.

Вектор $\boldsymbol{p}'_{12}$ составляет угол θ с вектором $\boldsymbol{p}_{12}$. Само расположение вектора $\boldsymbol{p}'_{12}$ произвольно. Однако, введем угол ξ как угол поворота вектора $\boldsymbol{a}$ вокруг оси $\boldsymbol{p}_{12}$ такой, что будучи повернутым против часовой стрелки на угол ξ вектор $\boldsymbol{a}$ будет лежать в одной плоскости с векторами $\boldsymbol{p}_{12}$ и $\boldsymbol{p}'_{12}$. Тогда мы можем сказать, что вектор $\boldsymbol{\nu} = \frac{\boldsymbol{p}_{12} \times \boldsymbol{p}'_{12}}{|\boldsymbol{p}_{12} \times \boldsymbol{p}'_{12}|}$ получается из вектора $\boldsymbol{a}$ поворотом на угол $\xi + \pi/2$ вокруг вектора $\boldsymbol{p}_{12}$ по часовой стрелке. Отсюда можно получить явное выражение для вектора $\boldsymbol{\nu}$:

$$\boldsymbol{\nu} = \begin{pmatrix} \sin(\xi)\cos\theta_i \\ -\cos(\xi) \\ -\sin(\xi)\sin\theta_i \end{pmatrix}. \tag{51}$$

Отметим, что угловое пространство вектора $\boldsymbol{p}'_{12}$ полностью описывается парой углов ξ, θ, а угловое пространство вектора $\boldsymbol{p}_{12}$ описывается парой углов ϕ, θ_i. В нашем случае зависимость от ϕ отсутствует, благодаря выбору оси OX.

С учетом изложенного выше предположения об установившемся максвелловском распределении и слабости общей поляризации, уравнение релаксации переписывается как:

$$\frac{d\boldsymbol{s}}{dt} = 2\int\Big\{n(\boldsymbol{p}_1)n(\boldsymbol{p}_2)\Big[(\boldsymbol{\nu s}(\boldsymbol{p}_1))\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{s}(\boldsymbol{p}_1)\Big]\Big\}\times$$
$$\times\Big[|B(\theta)|^2 + B^*(\theta)B(\pi-\theta) + B(\pi-\theta)B^*(\theta) + |B(\pi-\theta)|^2\Big]\times$$
$$\times\,\delta\left(\frac{p_1'^2}{2} + \frac{p_2'^2}{2} - \frac{p_1^2}{2} - \frac{p_2^2}{2}\right)\delta\left(\boldsymbol{p}_1' + \boldsymbol{p}_2' - \boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_2\right)\, d^3P_{12}'\, d^3p_{12}'\, d^3P_{12}d^3p_{12}. \quad (52)$$

Здесь мы учли, что якобиан перехода от переменных $d^3p_1d^3p_2d^3p_1'\,d^3p_2'$ к переменным $d^3p_{12}d^3p_{12}'d^3P_{12}d^3P_{12}'$ равен единице. Из работы [11] мы знаем, что амплитуда рассеяния выглядит как узкий пик при малых θ,

$$B(p_{12},\theta) = -\frac{3\alpha^2}{4\sin\theta}\left[1 + \frac{\theta-\pi}{2}\tan\frac{\theta}{2}\right]e^{-\frac{i}{p_{12}}\left[1+\ln(2p_{12})+\ln\sin\frac{\theta}{2}\right]}. \quad (53)$$

Это позволяет заменить сечение в интеграле столкновений на эффективное:

$$|B(\theta)|^2 + B^*(\theta)B(\pi-\theta) + B(\pi-\theta)B^*(\theta) + |B(\pi-\theta)|^2 \to 2|B(\theta)|^2. \quad (54)$$

Подставляя в (52) распределение Максвелла

$$n(\boldsymbol{p}) = (2\pi T)^{-3/2}e^{-\frac{p^2}{2T}}, \quad (55)$$

и проводя все необходимые интегрирования, получаем

$$\frac{d\boldsymbol{s}}{dt} = -\boldsymbol{s}\alpha^4 3(\pi T)^{1/2}\int\left[1 + \frac{\theta-\pi}{2}\tan\frac{\theta}{2}\right]^2\frac{1}{\sin\theta}d\theta = \frac{d\boldsymbol{s}}{dt} = -\boldsymbol{s}\alpha^4 3(\pi T)^{1/2}\ln\Lambda \quad (56)$$

с логарифмической точностью по $\ln\theta_{min}^{-1}$, где $\theta_{min} = \left(p^2 r_D\right)^{-1}$. Отсюда получаем обратное время релаксации:

$$\frac{1}{\tau_{ee}^{ls}} = 3\sqrt{\pi}\alpha^4\sqrt{T}\ln\Lambda. \quad (57)$$

Для сравнения, в работе [11] мы делали оценку для обратного времени релаксации на случай взаимодействия электронов и ионами

$$\frac{1}{\tau_{ei}^{ls}} = \frac{4\sqrt{2\pi}\alpha^4}{3}\sqrt{T}n_i\left(\ln\Lambda + \pi^2(3-4\ln 2)\frac{1}{T}\right). \quad (58)$$

Отсюда видно, что в области "теплой"плазмы, $E_T > \alpha^2mc^2$, релаксация спина электронов происходит как за счет столкновений с электронами, так и за счет столкновений с ионами. В случае же холодной плазмы начинает работать неклассический вклад от столкновений с ионами, понижая соответствующее время релаксации.

Заключение

Данная работа является логическим продолжением наших работ [10] и [11]. Формула (30) приводит форму оптической теоремы, справедливой для нашего интеграла столкновений, основанного на учете спин-орбитального взаимодействия медленных заряженных электронов. Это позволяет получить замкнутый вид интеграла столкновений для электронов (38), который основан на амплитуде рассеяния электронов в первом порядке по величине спин-орбитального взаимодействия. Проведена подстановка явного вида амплитуды рассеяния (40 - 46). Максвелловское распределение электронов и выравнивание спиновой матрицы плотности (то есть вектора $\boldsymbol{s}$, см. определение (36)), как функции импульса, происходит гораздо быстрее. чем релаксация $\boldsymbol{s}$ к 0. Поэтому темп релаксации спин-поляризации вычислен нами в предположении уже установившегося максвелловского распределения и независимости $\boldsymbol{s}$ от $\boldsymbol{p}$. При малых степенях спин-поляризации уравнение релаксации $\boldsymbol{s}$ (56) становится линейным, что позволяет однозначно определить темп релаксации спина (и характерное время релаксации). Проведено сопоставление времен релаксации спин-поляризации плазмы за счет электрон-электронных (57) и электрон-ионных (58) столкновений.

Литература

[1] Ландау, Л.Д., Лифшиц, Е.М. Квантовая механика (нерелятивистская теория). Издание 6-е, исправленное. М.: Физматлит, 2004.

URL: http://libgen.io/book/index.php?md5=59DA5849EEAC9674399A7176A8CED8D9

[2] Берестецкий В.Б., Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Теоретическая физика. Издание 4-е, исправленное. М.: Физматлит, 2002.

URL: http://libgen.io/book/index.php?md5=FC1D55188CBD5D57E3B0CD140C2887E0

[3] Климонтович Ю.Л. Кинетическая теория неидеального газа и неидеальной плазмы. М.: Наука, 1975.

URL: http://libgen.io/book/index.php?md5=BC7CB41F8EF59D5533444F8979C112C0

[4] Силин В.П. Введение в кинетическую теорию газов М.: ФИАН, 1998.

URL: http://libgen.io/book/index.php?md5=D1E3AA2B7800CE84F61E6B67B985D85B

[5] Севастьянов В.Н., Житников Р.А. Влияние оптической ориентации атомов He^4 в состоянии $2\ ^3S_1$ на электронную плотность и излучение гелия в плазме. ЖЭТФ **56** , 1508 (1969).

[6] Житников Р.А. Исследования по оптической ориентации атомов и ее использование для создания приборов квантовой электроники. УФН **104**, 168 (1971).

URL: http://ufn.ru/ru/articles/1971/5/m/

[7] Yankov V.V. Creation of spin-magnetized gas by plasma discharge. Phys. Scripta **57**, 460 (1998).

URL: http://iopscience.iop.org/1402-4896/57/3/021

[8] Ваганов А.Б. Поляризованные электроны из ферромагнетиков. УФН **119**, 257 (1976).

URL: http://ufn.ru/ru/articles/1976/6/c/

[9] Sinclair C.K., Adderley P.A., Dunham B.M., et al. Development of a high average current polarized electron source with long cathode operational lifetime. Phys. Rev. ST. Accel. Beams, 2007. 10. 023501.

URL: https://journals.aps.org/prab/abstract/10.1103/PhysRevSTAB.10.023501

[10] Сасоров П.В., Фомин И.В. Интеграл столкновений в кинетическом уравнении для разреженного электронного газа с учетом его спин-поляризации. ЖЭТФ **147**, 1271 (2015).

URL: http://www.jetp.ac.ru/cgi-bin/r/index/r/147/6/p1271?a=list

[11] Сасоров П.В., Фомин И.В. Переворот спина за счет спин-орбитального взаимодействия сталкивающихся медленных заряженных частиц. ЖЭТФ **151**, 99 (2017).

URL: http://www.jetp.ac.ru/cgi-bin/r/index/r/151/1/p99?a=list

[12] Mott N.F. The scattering of fast atomoic electrons by nuclei. Proc. Roy. Soc. (London), 1929. A124, c. 425; The polarisation of electrons by double scattering. Proc. Roy. Soc. (London), 1932. A135, c. 429.

URL: http://sci-hub.cc/http://www.jstor.org/stable/95377

[13] Möller C. Zur Theorie des durchgangs schneller elektronen durch materie. Ann. der Phys. **406**, 531 (1932).

URL: http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/andp.19324060506/abstract

[14] Мотт Н., Месси Г. Теория атомных столкновений. Издательство иностранной литературы. М., 1951.

URL: http://libgen.io/book/index.php?md5=C3701F1E4E6C1D9D0534E063A7ABD9F1

[15] McMaster W.H. Matrix representation of polarization. Amer. J. Phys. **22**, 531 (1954).

URL: http://scitation.aip.org/content/aapt/journal/ajp/22/6/10.1119/1.1933744

[16] Ford G., Mullen C. Scattering of polarazed Dirac particles on electrons. Phys. Rev., 1957. 108, c. 447.

URL: http://sci-hub.cc/https://journals.aps.org/pr/abstract/10.1103/PhysRev.108.477

[17] Stehle P. Calculation of electron-electron scattering. Phys. Rev., 1958. 110, c. 1458.

URL: http://journals.aps.org/pr/abstract/10.1103/PhysRev.110.1458

[18] W. Gordon, Z. Phys. **48**, 180 (1928).

URL: http://sci-hub.cc/https://link.springer.com/article/10.1007

[19] Wolfenstein L. Polarization of Fast Nucleons. Ann. Rev. Nucl. Sci. 1956. 6, c. 43.

URL: http://www.annualreviews.org/doi/abs/10.1146/annurev.ns.06.120156.000355

[20] Godberger M.L., Nambu Y., Oehme R. Dispersion relations for nucleon-nucleon scattering. Ann. of Phys. 1957. 2, c. 226.

URL: http://adsabs.harvard.edu/abs/1957AnPhy...2..226G

[21] Пузиков Л. Д., Рындин Р. М., Смородинский Я. А. Восстановление матрицы рассеяния в системе двух нуклонов. ЖЭТФ. 1957. Т. 32. С. 592

Оглавление