



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

[Попов И.В.](#)

Построение разностной
схемы повышенного порядка
аппроксимации для
нелинейного уравнения
переноса с использованием
адаптивной искусственной
вязкости

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Попов И.В. Построение разностной схемы повышенного порядка аппроксимации для нелинейного уравнения переноса с использованием адаптивной искусственной вязкости // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2017. № 68. 22 с. <http://doi.org/10.20948/prepr-2017-68>
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2017-68>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Российской академии наук**

И. В. Попов

**Построение разностной схемы
повышенного порядка аппроксимации
для нелинейного уравнения переноса
с использованием адаптивной
искусственной вязкости**

Москва — 2017

И. В. Попов

Построение разностной схемы повышенного порядка аппроксимации для нелинейного уравнения переноса с использованием адаптивной искусственной вязкости

Метод адаптивной искусственной вязкости (АИВ) применяется для моделирования процесса одномерного нелинейного переноса. С этой целью разработана разностная схема повышенного порядка аппроксимации по времени и по пространству. Для предложенной схемы проведено исследование устойчивости и сходимости к точному решению. Проведено сравнение численного решения с точным автомодельным решением типа волны разряжения.

Ключевые слова: нелинейное уравнение переноса, адаптивная искусственная вязкость, разностная схема.

I. V. Popov

Construction of difference scheme with high order approximation using adaptive artificial viscosity for nonlinear advection equation

The adaptive artificial viscosity (AAV) method for simulation of one-dimensional non-linear advection processes is described in the paper. A finite difference scheme with high order approximation on time and space was constructed. The analysis of stability and convergence of the scheme was fulfilled. The comparison of scheme solution with exact ones was made.

Key words: nonlinear advection equation, adaptive artificial viscosity, finite difference scheme.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты №№ 15-01-04620-а, 16-07-00519-а, 16-29-15095-офи-м).

Оглавление

1. Постановка задачи.....	3
2. Построение разностной схемы.....	4
3. Анализ устойчивости разностной схемы.....	6
4. Исследование аппроксимации и сходимости схемы.....	11
5. Некоторые численные результаты.....	19
Заключение.....	22
Список литературы.....	22

Введение

Линейное уравнение переноса является основным гиперболическим уравнением, которое используется для разработки и тестирования новых численных методов, моделирующих процессы тепломассопереноса. В последнее время очень часто стали встречаться задачи, которые приводят к нелинейному уравнению переноса, например, в задачах фильтрации. При определенных параметрах уравнение переноса может переходить как в линейное уравнение, так и в нелинейное уравнение переноса, и обратно. Такой процесс возможен при изменении уравнения состояния в процессе моделирования. Это обстоятельство следует учитывать при создании новых разностных схем. Также часто требуются схемы, имеющие повышенный порядок точности, как по времени, так и по пространству. В связи с этим возникает проблема разработки линейных и нелинейных устойчивых схем, имеющих порядок точности выше первого [1]. Таким образом, требуется разработать единый разностный метод второго или более высокого порядка точности, пригодный для решения уравнения переноса, адаптированный как к линейному, так и нелинейному случаям.

В данной работе разработан разностный метод решения уравнения переноса второго порядка точности по пространству и времени. Для улучшения его устойчивости применен метод адаптивной искусственной вязкости, представленный в работе [2, 3]. Предложенный метод тестировался на автомобильном решении, представляющем собой аналог волны разряжения. Предложенный метод был эффективно применен для задач многофазной фильтрации. В связи с этим проведено сравнение разработанной численной схемы со схемой с направленными разностями, которая часто применяется в задачах фильтрации.

1. Постановка задачи

Рассмотрим нелинейное одномерное уравнение переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad f = f(u), \quad (x, t) \in \Omega. \quad (1)$$

Начальные и граничные условия имеют вид

$$u(x, 0) = \psi(x), \quad x \in [0, L]; \quad (2)$$

$$u(0, t) = \varphi(t), \quad t \in [0, T]. \quad (3)$$

Здесь функция $f(u)$ является достаточной гладкой в области значений своего аргумента; $\psi(x)$, $\varphi(t)$ – в общем случае непрерывные кусочно-гладкие

функции, удовлетворяющие условию согласования $\psi(0) = \varphi(0)$;
 $\Omega = \{0 \leq x \leq L; 0 \leq t \leq T\}$ – область интегрирования уравнения (1).

Будем считать, что задача (1)-(3) имеет в области Ω классическое или обобщенное решение, обладающее достаточной гладкостью (в последнем случае вне точек разрыва). Более точная формулировка будет дана в п. 4.

2. Построение разностной схемы

По пространственной переменной x введём равномерную сетку $\bar{\omega}_x$ с шагом $h = \frac{L}{N_x}$ и узлами $x_k = h \cdot k$, $k = 0, \dots, N_x$, N_x – число узлов. По времени

также введём равномерную сетку $\bar{\omega}_t$ с шагом $\tau = \frac{T}{N_t}$ и узлами $t_n = n\tau$, $n = 0, \dots, N_t$, N_t – число шагов. При этом подразумевается, что шаги h и τ удовлетворяют условиям устойчивости (п. 3) и сходимости (п. 4) схемы.

Обозначим далее функции, относящиеся к моментам времени t_n и t_{n+1} , верхними индексами: $u^n = u(t_n)$, $u^{n+1} = u(t_{n+1})$, и перейдем к построению разностной схемы. Для этого воспользуемся подходом Лакса-Вендроффа [4], обеспечивающего второй порядок аппроксимации схемы по времени.

Запишем следующее разложение в ряд Тейлора:

$$u^{n+1} = u^n + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^n \tau + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)^n \tau^2 + O(\tau^3).$$

Выразим производные по времени через пространственные производные, используя исходное уравнение. В результате получим:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\partial f}{\partial x}\right) = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial x}\right).$$

Подставим пространственные производные вместо временных производных в разложение функции u^{n+1} :

$$u^{n+1} = u^n - \tau \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^n + \frac{\tau^2}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial x}\right)\right)^n + O(\tau^3),$$

или

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^n - \frac{\tau}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial x}\right)\right)^n = O(\tau^2). \quad (4)$$

Выделим поток в левой части выражения (4):

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} + \frac{\partial}{\partial x} \left[f^n - \frac{\tau}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial x} \right)^n \right] = O(\tau^2),$$

и перепишем дифференциально-разностное уравнение в потоковой форме

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} + \frac{\partial W^n}{\partial x} = O(\tau^2).$$

Здесь

$$W^n = f^n - \frac{\tau}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial x} \right)^n = f^n - \frac{\tau}{2} \left(\left[\frac{\partial f}{\partial u} \right]^2 \frac{\partial u}{\partial x} \right)^n = f^n - \frac{\tau}{2} \left(g(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right)^n,$$

$$g(u) = \left[\frac{\partial f}{\partial u} \right]^2.$$

Для обеспечения второго порядка аппроксимации по пространству воспользуемся центрально-разностной аппроксимацией. В итоге в потоковой форме получим следующую разностную схему

$$u_k^{n+1} = u_k^n - \frac{\tau}{h} \left[W_{k+1/2}^n - W_{k-1/2}^n \right], \quad k = 1, \dots, N_x - 1, \quad n = 0, \dots, N_t - 1; \quad (5)$$

$$W_{k\pm 1/2}^n = f(u_{k\pm 1/2}^n) - \frac{\tau}{2} g(u_{k\pm 1/2}^n) \nabla_h^\pm u_k^n, \quad u_{k\pm 1/2}^n = \frac{1}{2} (u_{k\pm 1}^n + u_k^n), \quad (6)$$

$$\nabla_h^+ u_k^n = \frac{u_{k+1}^n - u_k^n}{h}, \quad \nabla_h^- u_k^n = \frac{u_k^n - u_{k-1}^n}{h}.$$

Схему (5), (6) замыкают следующие начальные и граничные условия:

$$u_k^0 = \psi(x_k), \quad k = 0, \dots, N_x; \quad (7)$$

$$u_0^n = \varphi(t_n), \quad n = 0, \dots, N_t; \quad u_{N_x}^n = u_{N_x-1}^n, \quad n = 0, \dots, N_t. \quad (8)$$

Заметим, что в линейном случае, когда $f(u) = au$, схема (5)-(8) переходит в разностную схему Лакса-Вендрофа:

$$u_k^{n+1} = u_k^n - \tau a \frac{u_{k+1}^n - u_{k-1}^n}{2h} + \frac{\tau^2 a^2}{2} \frac{u_{k+1}^n - 2u_k^n + u_{k-1}^n}{h^2}.$$

3. Анализ устойчивости разностной схемы

Исследуем сначала построенную схему (5)-(8) на устойчивость, используя принцип максимума [5, 6]. Для этого предположим непрерывность функции $f(u)$ и ее первых производных на всей числовой оси, а также их ограниченность на любом конечном интервале.

Далее введем во всех точках сетки, а также в полужелтых точках, аналог скорости переноса, положив

$$a_k^n = \frac{\partial f}{\partial u}(u_k^n), \quad a_{k+1/2}^n = \frac{\partial f}{\partial u}(u_{k+1/2}^n),$$

и число Куранта $\gamma = \frac{\tau}{h} a$, где $a = \max \left(\max_{0 \leq k \leq N_x, 0 \leq n \leq N_t} |a_k^n|, \max_{0 \leq k \leq N_x-1, 0 \leq n \leq N_t} |a_{k+1/2}^n| \right)$.

Уравнение (5) с учетом (6) и введенных величин, перепишем в виде

$$\begin{aligned} u_k^{n+1} &= u_k^n - \gamma p_k^n \frac{1}{2} (u_{k+1}^n - u_{k-1}^n) + \\ &+ \frac{\gamma^2}{2} \left\{ \left[p_{k+1/2}^n \right]^2 (u_{k+1}^n - u_k^n) - \left[p_{k-1/2}^n \right]^2 (u_k^n - u_{k-1}^n) \right\}, \quad k = 1, \dots, N_x - 1; \\ p_k^n &= \begin{cases} 0, & u_{k+1/2}^n = u_{k-1/2}^n; \\ \frac{1}{a} \frac{f(u_{k+1/2}^n) - f(u_{k-1/2}^n)}{u_{k+1/2}^n - u_{k-1/2}^n}, & u_{k+1/2}^n \neq u_{k-1/2}^n; \end{cases} \quad p_{k\pm 1/2}^n = \frac{1}{a} \frac{\partial f}{\partial u}(u_{k\pm 1/2}^n). \end{aligned} \quad (9)$$

Соотношения (9) можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} u_k^{n+1} &= \frac{\gamma}{2} (\gamma p_{k-1/2}^2 + p_k) u_{k-1}^n + \left(1 - \frac{\gamma^2}{2} (p_{k+1/2}^2 + p_{k-1/2}^2) \right) u_k^n + \\ &+ \frac{\gamma}{2} (\gamma p_{k+1/2}^2 - p_k) u_{k+1}^n \equiv A_k u_{k-1}^n + C_k u_k^n + B_k u_{k+1}^n, \quad k = 1, \dots, N_x - 1. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь и далее временной индекс u параметров p_k^n и $p_{k\pm 1/2}^n$ опущен.

Из условия неотрицательности коэффициентов A_k , B_k и C_k в правой части (10) вытекают неравенства:

$$\gamma > 0, \quad 1 - \frac{\gamma^2}{2} (p_{k+1/2}^2 + p_{k-1/2}^2) \geq 0, \quad \gamma p_{k\pm 1/2}^2 \mp p_k \geq 0, \quad k = 1, \dots, N_x - 1. \quad (11)$$

В силу предположения об ограниченности производной $\frac{\partial f}{\partial u}$ на любом конечном интервале следует ограниченность сверху величин p_k и $p_{k+1/2}$ по модулю единицей. Отсюда и из (11) вытекают неравенства

$$0 < \gamma \leq 1, \quad \gamma p_{k \pm 1/2}^2 \geq \pm p_k. \quad (12)$$

Первое из условий (12) совпадает с результатом линейной теории, второе условие является противоречивым и не может быть выполнено в общем случае. Поэтому в данной ситуации при условии $0 < \gamma \leq 1$ переходим к оценке нормы решения через модули коэффициентов:

$$\begin{aligned} |u_k^{n+1}| &\leq (|A_k| + C_k + |B_k|) \|u^n\|_{C(\bar{\omega}_x)}, \quad k = 1, \dots, N_x - 1; \\ |u_k^{n+1}| &\leq (1 + \gamma |p_k|) \|u^n\|_{C(\bar{\omega}_x)} \leq (1 + \gamma) \|u^n\|_{C(\bar{\omega}_x)}, \quad k = 1, \dots, N_x - 1; \\ \|u^{n+1}\|_{C(\bar{\omega}_x)} &\leq (1 + \gamma) \|u^n\|_{C(\bar{\omega}_x)}. \end{aligned}$$

В итоге схема (5)-(8) условно устойчива в том смысле, что норма получаемого по ней решения не может расти быстрее, чем $e^{\gamma n}$. Этот факт можно сформулировать в виде следующего утверждения.

Утверждение 1. При условии ограниченности производной $\frac{\partial f}{\partial u}$ на любом конечном интервале изменения u и выполнении условия $0 < \gamma \leq 1$ решение разностной схемы (5)-(8) для любого $n \geq 0$ удовлетворяет априорной оценке

$$\|u^{n+1}\|_{C(\bar{\omega}_x)} \leq (1 + \gamma) \|u^n\|_{C(\bar{\omega}_x)}. \quad (13)$$

Данный факт побуждает нас изменить схему (5)-(8). Для этого добавим в уравнения (5) оператор, содержащий искусственную вязкость:

$$M_h [\mu_k^n, u_k^n] = \frac{1}{h} \left[\mu_{k+1/2}^n \nabla_h^+ u_k^n - \mu_{k-1/2}^n \nabla_h^- u_k^n \right]. \quad (14)$$

Тогда уравнения (5) примут вид

$$u_k^{n+1} = u_k^n - \frac{\tau}{h} \left[W_{k+1/2}^n - W_{k-1/2}^n \right] + \frac{\tau}{2} M_h [\mu_k^n, u_k^n]. \quad (5')$$

При этом следует отметить, что оператор искусственной вязкости вводится в конкретной точке k ($k = 1, \dots, N_x - 1$) лишь тогда, когда $u_{k+1/2}^n \neq u_{k-1/2}^n$. В этом смысле, введенная искусственная вязкость является адаптивной.

Исследуем теперь измененную схему на устойчивость. По аналогии с предыдущим из уравнений (5') с учетом (14) получим выражения вида (10):

$$u_k^{n+1} = A_k u_{k-1}^n + C_k u_k^n + B_k u_{k+1}^n, \quad (10')$$

где

$$A_k = \frac{\gamma}{2} \left(\gamma p_{k-1/2}^2 + p_k + q_{k-1/2} \right), \quad B_k = \frac{\gamma}{2} \left(\gamma p_{k+1/2}^2 - p_k + q_{k+1/2} \right),$$

$$C_k = \left(1 - \frac{\gamma^2}{2} \left(p_{k+1/2}^2 + p_{k-1/2}^2 \right) - \frac{\gamma}{2} \left(q_{k-1/2} + q_{k+1/2} \right) \right), \quad q_{k\pm 1/2} \equiv \frac{\mu_{k\pm 1/2}^n}{ah}.$$

Рассмотрим случай, когда $q_{k\pm 1/2}^n = \text{const} = q \equiv \frac{\mu}{ah} > 0$. Тогда требование неотрицательности A_k , B_k и C_k приводит нас к неравенствам

$$\gamma p^2 \pm p + q \geq 0, \quad 1 - \gamma^2 p^2 - \gamma q \geq 0,$$

в которых использована близость величин p_k и $p_{k\pm 1/2}$ и введен общий параметр p . Если предположить, что $0 < \gamma \leq 1$ (как и в линейной теории), и учесть, что параметр p по модулю не превосходит единицу, то несложно показать, что на число Куранта и параметр q (пропорциональный величине искусственной вязкости) необходимо наложить следующие достаточные условия (12'):

$$0 < \gamma \leq \gamma_{\max} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \frac{1}{4\gamma} \leq q \leq \frac{1-\gamma^2}{\gamma}. \quad (12')$$

В итоге в силу того, что $A_k + C_k + B_k = 1$, несложно доказать следующее утверждение.

Утверждение 2. При условии ограниченности производной $\frac{\partial f}{\partial u}$ на любом конечном интервале изменения u и выполнении условия (12') решение разностной схемы (5'), (6)-(8), (14) с постоянной искусственной вязкостью для любого $n \geq 0$ удовлетворяет априорной оценке

$$\|u^{n+1}\|_{C(\bar{\omega}_x)} \leq \|u^n\|_{C(\bar{\omega}_x)}. \quad (13')$$

С помощью утверждения 2 несложно доказать устойчивость схемы (5'), (6)-(8), (14) по входным данным.

Утверждение 3. При условии ограниченности производной $\frac{\partial f}{\partial u}$ на любом конечном интервале изменения u и выполнении условий (12') разностная схема

(5'), (6)-(8), (14) с постоянной адаптивной искусственной вязкостью будет устойчивой по начальным и граничным данным.

Отметим далее, что если нормировать начальные и граничные данные на максимальную величину $M = \max\left(\|\varphi\|_{C(\bar{\omega}_t)}, \|\psi\|_{C(\bar{\omega}_x)}\right)$, то по аналогии с дифференциальным случаем для разностного решения будет справедлива оценка $\|u\|_{C(\bar{\omega}_x \times \bar{\omega}_t)} \leq 1$.

В дальнейшем понадобится оценка для градиента решения схемы с адаптивной искусственной вязкостью. Получим ее при условии однородного граничного условия $\varphi(t) = \varphi_0 = \text{const} \geq 0$.

Из (5') с учетом равенств $u_0^{n+1} = u_0^n = \varphi_0$ при $n = 0, \dots, N_t - 1$ получаем

$$\begin{aligned} \nabla_h^- u_k^{n+1} &= \nabla_h^- u_k^n - \frac{\tau}{h^2} \left[f_{k+1/2}^n - f_{k-1/2}^n \right] + \\ &+ \frac{\tau^2}{2h^2} \left[g_{k+1/2}^n \nabla_h^+ u_k^n - g_{k-1/2}^n \nabla_h^- u_k^n \right] + \frac{\tau}{2h^2} \left[\mu_{k+1/2}^n \nabla_h^+ u_k^n - \mu_{k-1/2}^n \nabla_h^- u_k^n \right], \quad k = 1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla_h^- u_k^{n+1} &= \nabla_h^- u_k^n - \frac{\tau}{h^2} \left[f_{k+1/2}^n - 2f_{k-1/2}^n + f_{k-3/2}^n \right] + \\ &+ \frac{\tau^2}{2h^2} \left[g_{k+1/2}^n \nabla_h^+ u_k^n - 2g_{k-1/2}^n \nabla_h^- u_k^n + g_{k-3/2}^n \nabla_h^- u_{k-1}^n \right] + \\ &+ \frac{\tau}{2h^2} \left[\mu_{k+1/2}^n \nabla_h^+ u_k^n - 2\mu_{k-1/2}^n \nabla_h^- u_k^n + \mu_{k-3/2}^n \nabla_h^- u_{k-1}^n \right], \quad k = 2, \dots, N_x - 1. \end{aligned}$$

В полученных соотношениях учтем, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \left[f_{k+1/2}^n - f_{k-1/2}^n \right] &= \frac{\partial f}{\partial u}(\xi_k^*) \frac{1}{2} \left[\nabla_h^+ u_k^n + \nabla_h^- u_k^n \right], \\ \frac{1}{h} \left[f_{k+1/2}^n - 2f_{k-1/2}^n + f_{k-3/2}^n \right] &= \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial f}{\partial u}(\xi_k^*) \left[\nabla_h^+ u_k^n + \nabla_h^- u_k^n \right] - \frac{\partial f}{\partial u}(\xi_{k-1}^*) \left[\nabla_h^+ u_{k-1}^n + \nabla_h^- u_{k-1}^n \right] \right], \end{aligned}$$

с некоторыми величинами $\xi_k^* = \alpha_k^* u_{k+1/2}^n + (1 - \alpha_k^*) u_{k-1/2}^n$.

Теперь несложно получить следующие выражения для производных

$$\begin{aligned} \nabla_h^- u_k^{n+1} &= \left(1 - \frac{\gamma}{2} \left[p_k + \gamma p_{k-1/2}^2 + q_{k-1/2} \right]\right) \nabla_h^- u_k^n + \\ &+ \frac{\gamma}{2} \left(-p_k + \gamma p_{k+1/2}^2 + q_{k+1/2}\right) \nabla_h^+ u_k^n, \quad k=1; \\ \nabla_h^- u_k^{n+1} &= \left(1 - \frac{\gamma}{2} \left[p_k - p_{k-1} + 2\gamma p_{k-1/2}^2 + 2q_{k-1/2} \right]\right) \nabla_h^- u_k^n + \\ &+ \frac{\gamma}{2} \left(-p_k + \gamma p_{k+1/2}^2 + q_{k+1/2}\right) \nabla_h^+ u_k^n + \frac{\gamma}{2} \left(p_{k-1} + \gamma p_{k-3/2}^2 + q_{k-3/2}\right) \nabla_h^- u_{k-1}^n, \\ &k=2, \dots, N_x - 1. \end{aligned}$$

Здесь введены обозначения $p_k = \frac{1}{a} \frac{\partial f}{\partial u}(\xi_k^*)$, $p_{k-1/2}^2 = \frac{g_{k-1/2}^n}{a^2}$, $q_{k-1/2} = \frac{\mu_{k-1/2}^n}{ah}$.

Отсюда и из принципа максимума следует оценка

$$\begin{aligned} \left| \nabla_h^- u_k^{n+1} \right| &\leq S_k^n \left\| \nabla_h^- u_k^n \right\|_{C(\bar{\omega}_x)}, \quad k=1, \dots, N_x - 1, \quad n=0, \dots, N_t - 1; \\ S_k^n &= 1 - \gamma p_k + \frac{\gamma^2}{2} \left(p_{k+1/2}^2 - p_{k-1/2}^2 \right) + \frac{\gamma}{2} \left(q_{k+1/2} - q_{k-1/2} \right), \quad k=1; \\ S_k^n &= 1 - \gamma (p_k - p_{k-1}) + \frac{\gamma^2}{2} \left[p_{k+1/2}^2 - 2p_{k-1/2}^2 + p_{k-3/2}^2 \right] + \\ &+ \frac{\gamma}{2} \left[q_{k+1/2} - 2q_{k-1/2} + q_{k-3/2} \right], \quad k=2, \dots, N_x - 1. \end{aligned}$$

Для этого должны выполняться условия

$$\begin{aligned} 1 - \frac{\gamma}{2} \left[p_k + \gamma p_{k-1/2}^2 + q_{k-1/2} \right] &> 0, \quad -p_k + \gamma p_{k+1/2}^2 + q_{k+1/2} \geq 0, \quad k=1; \\ 1 - \frac{\gamma}{2} \left[p_k - p_{k-1} + 2\gamma p_{k-1/2}^2 + 2q_{k-1/2} \right] &> 0, \\ -p_k + \gamma p_{k+1/2}^2 + q_{k+1/2} \geq 0, \quad p_{k-1} + \gamma p_{k-3/2}^2 + q_{k-3/2} &\geq 0, \quad k=2, \dots, N_x - 1; \\ \gamma > 0, \quad q_{k-1/2} \geq 0, \quad k=1, \dots, N_x. \end{aligned} \tag{15}$$

которые можно опять свести к достаточным условиям

$$1 - \gamma (p + \gamma p^2 + q) > 0, \quad \pm p + \gamma p^2 + q \geq 0, \quad \gamma > 0, \quad q \geq 0, \tag{15'}$$

Условия (15') будут выполнены, если

$$0 < \gamma \leq \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{4\gamma} \leq q \leq \frac{1-\gamma-\gamma^2}{\gamma}. \quad (12'')$$

Очевидно, что данные условия более жесткие, чем (12').

Получим теперь оценки для величин S_k^n :

$$S_k^n \leq 1 + \gamma |p_k| + \gamma^2 \frac{1}{2} \left(p_{k+1/2}^2 + p_{k-1/2}^2 \right) + \frac{\gamma}{2} \left(q_{k+1/2} - q_{k-1/2} \right), \quad k = 1;$$

$$S_k^n \leq 1 + \gamma (|p_k| + |p_{k-1}|) + \frac{\gamma^2}{2} \left[p_{k+1/2}^2 + 2p_{k-1/2}^2 + p_{k-3/2}^2 \right] +$$

$$+ \frac{\gamma}{2} \left[q_{k+1/2} - 2q_{k-1/2} + q_{k-3/2} \right], \quad k = 2, \dots, N_x - 1.$$

Отсюда с учетом ограниченности производной $\frac{\partial f}{\partial u}$ на любом конечном интервале изменения u получим, что величины S_k^n ограничены сверху

$$S_k^n \leq S_0 = 1 + 2\gamma + 2\gamma^2 + \frac{\gamma}{ah} h^2 \mu_{\bar{x},k}, \quad k = 1, \dots, N_x - 1, \quad n = 0, \dots, N_t - 1. \quad (16)$$

Здесь $\mu_{\bar{x},k}$ – оператор второй разностной производной от искусственной вязкости. Заметим, что если выбирать вязкость так, чтобы этот оператор был равен нулю, то оценка градиента не будет зависеть от величины искусственной вязкости.

В итоге при условиях (12'') оказывается ограниченным не только разностное решение, полученное по схеме (5'), (6)-(8), (14), но и его градиент:

$$\left\| \nabla_h^- u_k^{n+1} \right\|_{C(\bar{\omega}_x)} \leq S_0^{n+1} \left\| \nabla_h^- u_k^n \right\|_{C(\bar{\omega}_x)}, \quad n = 0, \dots, N_t - 1. \quad (17)$$

Заметим, оценки (16), (17) можно улучшить, убрав экспоненциальный рост, однако это потребует более высокой гладкости начальных данных и функции $f(u)$.

4. Исследование аппроксимации и сходимости схемы

Определим сначала погрешность аппроксимации модифицированной схемы (5'), (6)-(8), (14) на точном решении v_k^n задачи (1)-(3), взятом в узлах сетки (x_k, t_n) . По определению данная величина в точке (x_k, t_n) равна

$$\psi(x_k, t_n) \equiv \psi_k^n = \frac{v_k^{n+1} - v_k^n}{\tau} + \frac{1}{h} \left[W_{k+1/2}^n[v] - W_{k-1/2}^n[v] \right] - M_h[\mu_k, v_k^n], \quad (18)$$

где $W_{k\pm 1/2}^n[v] = f\left(v_{k\pm 1/2}^n\right) - \frac{\tau}{2} g\left(v_{k\pm 1/2}^n\right) \nabla_h^\pm v_k^n$.

Разложим значения точного решения v_k^{n+1} , v_{k+1}^n , v_{k-1}^n в ряды Тейлора в точке (x_k, t_n) до четвертого порядка по времени и пространству:

$$v_k^{n+1} = v_k^n + \tau \frac{\partial v}{\partial t}(x_k, t_n) + \frac{\tau^2}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(x_k, t_n) + \frac{\tau^3}{6} \frac{\partial^3 v}{\partial t^3}(x_k, t_n) + O(\tau^4),$$

$$v_{k\pm 1}^n = v_k^n \pm h \frac{\partial v}{\partial x}(x_k, t_n) + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x_k, t_n) \pm \frac{h^3}{6} \frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(x_k, t_n) + O(h^4),$$

и выпишем некоторые их комбинации

$$\frac{v_k^{n+1} - v_k^n}{\tau} = \frac{\partial v}{\partial t}(x_k, t_n) + \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(x_k, t_n) + \frac{\tau^2}{6} \frac{\partial^3 v}{\partial t^3}(x_k, t_n) + O(\tau^3);$$

$$\frac{1}{2}(v_{k\pm 1}^n - v_k^n) = \pm \frac{h}{2} \frac{\partial v}{\partial x}(x_k, t_n) + \frac{h^2}{4} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x_k, t_n) \pm \frac{h^3}{12} \frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(x_k, t_n) + O(h^4),$$

$$\nabla_h^- v_k^n = \frac{\partial v}{\partial x}(x_k, t_n) - \frac{h}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x_k, t_n) + \frac{h^2}{6} \frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(x_k, t_n) - \frac{h^3}{24} \frac{\partial^4 v}{\partial x^4}(x_k, t_n) + O(h^4),$$

$$\nabla_h^+ v_k^n = \frac{\partial v}{\partial x}(x_k, t_n) + \frac{h}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x_k, t_n) + \frac{h^2}{6} \frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(x_k, t_n) + \frac{h^3}{24} \frac{\partial^4 v}{\partial x^4}(x_k, t_n) + O(h^4),$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \left[\mu_{k+1/2} \nabla_h^+ v_k^n - \mu_{k-1/2} \nabla_h^- v_k^n \right] &= \frac{\mu_{k+1/2} + \mu_{k-1/2}}{2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x_k, t_n) + \frac{h^2}{24} \frac{\partial^4 v}{\partial x^4}(x_k, t_n) \right) + \\ &+ \frac{\mu_{k+1/2} - \mu_{k-1/2}}{h} \left(\frac{\partial v}{\partial x}(x_k, t_n) + \frac{h^2}{6} \frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(x_k, t_n) \right) + O(h^3). \end{aligned}$$

Далее на примере $f(v)$ разложим в ряды выражения $f\left(v_{k\pm 1/2}^n\right)$ и $g\left(v_{k\pm 1/2}^n\right)$:

$$\begin{aligned}
f\left(v_{k\pm 1/2}^n\right) &= f\left(\frac{1}{2}v_{k\pm 1}^n + \frac{1}{2}v_k^n\right) = f\left(v_k^n + \frac{1}{2}(v_{k\pm 1}^n - v_k^n)\right) = f(v_k^n) + \\
&+ \frac{\partial f}{\partial v}(v_k^n) \frac{v_{k\pm 1}^n - v_k^n}{2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(v_k^n) \frac{1}{2} \left[\frac{v_{k\pm 1}^n - v_k^n}{2}\right]^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial v^3}(v_k^n) \frac{1}{6} \left[\frac{v_{k\pm 1}^n - v_k^n}{2}\right]^3 + \dots = \\
&= f(v_k^n) + \frac{\partial f}{\partial v}(v_k^n) \left[\pm \frac{h}{2} \frac{\partial v}{\partial x}(x_k, t_n) + \frac{h^2}{4} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x_k, t_n) \pm \frac{h^3}{12} \frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(x_k, t_n) \right] + \\
&+ \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(v_k^n) \frac{1}{2} \left[\pm \frac{h}{2} \frac{\partial v}{\partial x}(x_k, t_n) + \frac{h^2}{4} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x_k, t_n) \right]^2 + \\
&+ \frac{\partial^3 f}{\partial v^3}(v_k^n) \frac{1}{6} \left[\pm \frac{h}{2} \frac{\partial v}{\partial x}(x_k, t_n) \right]^3 + O(h^4).
\end{aligned} \tag{19}$$

Учитывая приведенные разложения и опуская зависимости функции v и ее производных от (x_k, t_n) и функций f , g и их производных от v_k^n , можно переписать погрешность аппроксимации в точке (x_k, t_n) в следующем виде

$$\begin{aligned}
\psi_k^n &= \left[\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \right] + \frac{\tau}{2} \left[\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - g \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial g}{\partial v} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] + \frac{\tau^2}{6} \frac{\partial^3 v}{\partial t^3} + \\
&+ \frac{\partial f}{\partial v} \frac{h^2}{6} \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \frac{h^2}{4} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^3 f}{\partial v^3} \frac{h^2}{24} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^3 - \frac{\mu_{k+1/2}^+ + \mu_{k-1/2}^-}{2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{h^2}{24} \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} \right) - \\
&- \frac{\mu_{k+1/2}^- - \mu_{k-1/2}^+}{h} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{h^2}{6} \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} \right) + O(\tau^3 + h^3 + \tau h^2).
\end{aligned}$$

В полученном выражении учтем, что v – точное решение задачи, и выполняется следующее равенство

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial f}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(g \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{\partial g}{\partial v} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + g \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.$$

Тогда обе квадратные скобки равны нулю, и выражение для погрешности аппроксимации принимает следующий окончательный вид

$$\begin{aligned}
\psi_k^n = & \frac{\tau^2}{6} \frac{\partial^3 v}{\partial t^3} + \frac{h^2}{2} \left(\frac{1}{3} \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{12} \frac{\partial^3 f}{\partial v^3} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^3 \right) - \\
& - \frac{\mu_{k+1/2}^+ + \mu_{k-1/2}^-}{2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{h^2}{24} \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} \right) - \frac{\mu_{k+1/2}^- - \mu_{k-1/2}^+}{h} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{h^2}{6} \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} \right) + \\
& + O(\tau^3 + h^3 + \tau h^2).
\end{aligned} \tag{20}$$

Проанализируем выражение (20). Очевидно, что при отсутствии искусственной вязкости погрешность аппроксимации схемы (5)-(8) имеет второй порядок по h и τ .

При наличии искусственной вязкости погрешность аппроксимации определяется величинами $\mu_{k\pm 1/2}$. В частности, если положить $\mu_{k\pm 1/2} \equiv \alpha h^p$, $p \geq 1$, получается схема, аппроксимирующая уравнение (1) с порядком $O(\tau^2 + h^q)$, где $q = \min(p, 2)$. При этом положительная константа α выбирается из второго условия монотонности (12''):

$$\frac{1}{4\gamma} \leq \alpha h^{p-1} \leq \frac{1-\gamma-\gamma^2}{\gamma}. \tag{12*}$$

Анализ условия (12*) показывает, что в случае $p=1$ погрешность аппроксимации схемы будет иметь первый порядок, а параметр α будет определяться лишь числом Куранта γ . Если же $p=2$, то погрешность аппроксимации схемы будет иметь второй порядок, а параметр α будет существенно зависеть от h и γ .

Рассмотрим теперь сходимость схемы (5'), (6)-(8), (14) в одном специальном частном случае. Предположим, что граничная функция является неотрицательной и постоянной, а начальная функция обращается в ноль на правом конце отрезка $[0, L]$:

$$\varphi(t) \equiv \varphi_0 \geq 0, \quad t > 0; \quad \psi(L) = 0. \tag{21}$$

Тогда, следуя обзору [8], можно утверждать, что любое решение (классическое или обобщенное) рассматриваемой задачи будет локализовано на отрезке $[0, L]$ для любого момента времени. Асимптотика обобщенного решения описывается так называемой N-волной, а норма обобщенного решения удовлетворяет оценке

$$\|u(x, t) - M_u\|_C \leq C_u t^{-1/(n-1)}, \quad x \in [0, L], \quad t > 0. \tag{22}$$

Здесь подразумевается, что функция $u(x, t)$ имеет конечное число точек разрыва, которое определяется числом точек перегиба функции $f(u)$ и числом точек разрыва начального профиля $\psi(x)$. При этом функция $f(u)$ должна принадлежать классу $C^n[-M_u - \delta, M_u + \delta]$, $n \geq 2$, $\delta > 0$ малое число. Константа $M_u > 0$ совпадает по модулю со значением функции $u(x, t)$ вблизи одной из точек разрыва, где модуль $u(x, t)$ максимален. Константа $C_u > 0$ зависит от свойств нелинейности $f(u)$ и начального профиля $\psi(x)$.

Пространственная производная обобщенного решения $\frac{\partial u}{\partial x}$ вне точек разрыва удовлетворяет следующей задаче:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} \right) &= 0, \quad (x, t) \in \Omega; \\ \frac{\partial u}{\partial x}(x, 0) &= \frac{d\psi}{dx}(x), \quad x \in [0, L]; \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) &= 0, \quad t > 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Для пространственной производной обобщенного решения $\frac{\partial u}{\partial x}$ справедлива оценка аналогичная (22):

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) - M_{\nabla u} \right\|_C \leq C_{\nabla u} t^{-1/(m-1)}, \quad x \neq x_*, \quad t \neq t_*. \quad (24)$$

Здесь x_* – точка разрыва или точка градиентной катастрофы [9], t_* – момент градиентной катастрофы.

В итоге можно сказать (см. [8]), что для достаточно гладкой $f(u)$, имеющей только изолированные нули, и кусочно-непрерывной и кусочно-гладкой $\psi(x)$ искомая функция $u(x, t)$ ограничена во всех точках, включая точки разрыва, и во все моменты времени, в том числе в моменты градиентной катастрофы. Производная $\frac{\partial u}{\partial x}(x, t)$ в любой фиксированный момент времени, не совпадающий с моментом градиентной катастрофы, существует и ограничена во всех точках области за исключением точек разрыва.

Перейдем теперь к анализу вопроса сходимости предложенной схемы (5'), (6)-(8), (14) в случае отсутствия точек разрыва у начального профиля $\psi(x)$. В этой ситуации главной проблемой остается только градиентная катастрофа,

которая возникает в точках перегиба $f(u)$. Будем считать, что величина временного отрезка $[0, T]$ выбрана так, что решение не доходит до момента градиентной катастрофы ни в одной точке отрезка $[0, L]$. При этих предположениях существует классическое решение исходной задачи $u(x, t)$, которое ограничено вместе со своей частной производной $\frac{\partial u}{\partial x}$.

При рассмотрении сходимости схемы (5'), (6)-(8), (14) введем погрешность $z(x_k, t_n) = z_k^n = u_k^n - v_k^n$ численного решения в каждой точке сетки (x_k, t_n) и выпишем задачу для погрешности. Для этого соотношения (18) домножим на -1 и заменим величины v_k^n на величины $u_k^n - z_k^n$. Тогда получим

$$\frac{z_k^{n+1} - z_k^n}{\tau} - \frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{\tau} - \frac{1}{h} \left[W_{k+1/2}^n [u - z] - W_{k-1/2}^n [u - z] \right] + M_h [\mu_k, u_k^n - z_k^n] = -\psi_k^n.$$

Если к последнему равенству прибавить разностное уравнение

$$\frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{\tau} + \frac{1}{h} \left[W_{k+1/2}^n [u] - W_{k-1/2}^n [u] \right] - M_h [\mu_k, u_k^n] = 0,$$

эквивалентное уравнению (5'), то в результате несложных преобразований получим итоговое уравнение для погрешности

$$\frac{z_k^{n+1} - z_k^n}{\tau} + \frac{1}{h} \left[W_{k+1/2}^n [u] - W_{k+1/2}^n [u - z] - \left(W_{k-1/2}^n [u] - W_{k-1/2}^n [u - z] \right) \right] + M_h [\mu_k, z_k^n] = -\psi_k^n, \quad k = 1, \dots, N_x - 1, \quad n = 0, \dots, N_t - 1; \quad (25)$$

$$W_{k\pm 1/2}^n [u] = f\left(u_{k\pm 1/2}^n\right) - \frac{\tau}{2} g\left(u_{k\pm 1/2}^n\right) \nabla_h^\pm u_k^n,$$

$$W_{k\pm 1/2}^n [u - z] = f\left(u_{k\pm 1/2}^n - z_{k\pm 1/2}^n\right) - \frac{\tau}{2} g\left(u_{k\pm 1/2}^n - z_{k\pm 1/2}^n\right) \nabla_h^\pm (u_k^n - z_k^n), \quad (26)$$

$$M_h [\mu_k, z_k^n] = \frac{1}{h} \left[\mu_{k+1/2} \nabla_h^+ z_k^n - \mu_{k-1/2} \nabla_h^- z_k^n \right].$$

Начальные и граничные условия дифференциальной задачи в разностном варианте задаются точно. Поэтому их аналоги для погрешности принимают вид

$$z_k^0 = 0, \quad k = 0, \dots, N_x; \quad (7')$$

$$z_0^n = 0, \quad n = 0, \dots, N_t; \quad z_{N_x}^n = z_{N_x-1}^n, \quad n = 0, \dots, N_t. \quad (8')$$

Получим теперь оценку для погрешности. Для этого перепишем (25) в виде

$$z_k^{n+1} = z_k^n - \frac{\tau}{h} \left[W_{k+1/2}^n [u] - W_{k+1/2}^n [u-z] - \left(W_{k-1/2}^n [u] - W_{k-1/2}^n [u-z] \right) \right] + \quad (25')$$

$$+ \tau M_h [\mu_k, z_k^n] - \tau \psi_k^n, \quad k = 1, \dots, N_x - 1.$$

Учитывая непрерывность и ограниченность первых и вторых производных функций $f(u)$ и $g(u)$ на конечном интервале, а также ограниченность разностного (в силу выполнения условий устойчивости) и дифференциального (в силу сделанных предположений) решений, для $W_{k\pm 1/2}^n [u] - W_{k\pm 1/2}^n [u-z]$ можем записать:

$$\begin{aligned} W_{k\pm 1/2}^n [u] - W_{k\pm 1/2}^n [u-z] &= \\ &= \frac{\partial f}{\partial u} \left(w_{k\pm 1/2}^n \right) z_{k\pm 1/2}^n - \frac{\tau}{2} \left[\frac{\partial g}{\partial u} \left(\bar{w}_{k\pm 1/2}^n \right) z_{k\pm 1/2}^n \nabla_h^\pm u_k^n + g \left(v_{k\pm 1/2}^n \right) \nabla_h^\pm z_k^n \right] = \\ &= \left[\frac{\partial f}{\partial u} \left(w_{k\pm 1/2}^n \right) - \frac{\tau}{2} \frac{\partial g}{\partial u} \left(\bar{w}_{k\pm 1/2}^n \right) \nabla_h^\pm u_k^n \right] z_{k\pm 1/2}^n - \frac{\tau}{2} g \left(v_{k\pm 1/2}^n \right) \nabla_h^\pm z_k^n, \end{aligned}$$

где $w_{k\pm 1/2}^n = \left(1 - \theta_{k\pm 1/2}^n \right) u_{k\pm 1/2}^n + \theta_{k\pm 1/2}^n v_{k\pm 1/2}^n$, $\bar{w}_{k\pm 1/2}^n = \left(1 - \bar{\theta}_{k\pm 1/2}^n \right) u_{k\pm 1/2}^n + \bar{\theta}_{k\pm 1/2}^n v_{k\pm 1/2}^n$, $\theta_{k\pm 1/2}^n, \bar{\theta}_{k\pm 1/2}^n$ – числовые параметры из интервала $(0,1)$. Тогда

$$\begin{aligned} &\frac{1}{h} \left[W_{k+1/2}^n [u] - W_{k+1/2}^n [u-z] - \left(W_{k-1/2}^n [u] - W_{k-1/2}^n [u-z] \right) \right] = \\ &= \frac{1}{h} \left\{ \left[\frac{\partial f}{\partial u} \left(w_{k+1/2}^n \right) - \frac{\tau}{2} \frac{\partial g}{\partial u} \left(\bar{w}_{k+1/2}^n \right) \nabla_h^+ u_k^n \right] z_{k+1/2}^n - \right. \\ &\quad \left. - \left[\frac{\partial f}{\partial u} \left(w_{k-1/2}^n \right) - \frac{\tau}{2} \frac{\partial g}{\partial u} \left(\bar{w}_{k-1/2}^n \right) \nabla_h^- u_k^n \right] z_{k-1/2}^n \right\} - \\ &\quad - \frac{\tau}{2h} \left[g \left(v_{k+1/2}^n \right) \nabla_h^+ z_k^n - g \left(v_{k-1/2}^n \right) \nabla_h^- z_k^n \right]. \end{aligned} \quad (26)$$

Далее из (25') и (26) можем записать

$$\begin{aligned}
z_k^{n+1} &= z_k^n - \frac{\tau}{h} \left[F_{k+1/2}^n - F_{k-1/2}^n \right] z_k^n - \frac{\tau h}{2} \left[F_{k+1/2}^n \nabla_h^+ z_k^n + F_{k-1/2}^n \nabla_h^- z_k^n \right] + \\
&+ \frac{\tau}{h} \left[G_{k+1/2}^n \nabla_h^+ z_k^n - G_{k-1/2}^n \nabla_h^- z_{k-1}^n \right] - \tau \psi_k^n, \\
F_{k\pm 1/2}^n &= \frac{\partial f}{\partial u} \left(w_{k\pm 1/2}^n \right) - \frac{\tau}{2} \frac{\partial g}{\partial u} \left(\bar{w}_{k\pm 1/2}^n \right) \nabla_h^\pm u_k^n, \\
G_{k\pm 1/2}^n &= \frac{\tau}{2} g \left(v_{k\pm 1/2}^n \right) + \mu_{k\pm 1/2}.
\end{aligned} \tag{27}$$

В соотношениях (27) можем выделить в явном виде число Куранта:

$$\begin{aligned}
z_k^{n+1} &= z_k^n - \gamma h \nabla_h \bar{F}_k^n z_k^n - \gamma \frac{h^2}{2} \left[\bar{F}_{k+1/2}^n \nabla_h^+ z_k^n + \bar{F}_{k-1/2}^n \nabla_h^- z_k^n \right] + \\
&+ \gamma h \left[G_{k+1/2}^n \nabla_h^+ z_k^n - G_{k-1/2}^n \nabla_h^- z_{k-1}^n \right] - \tau \psi_k^n, \\
\bar{F}_{k\pm 1/2}^n &= \frac{1}{a} \frac{\partial f}{\partial u} \left(w_{k\pm 1/2}^n \right) - \gamma \frac{h}{2a^2} \frac{\partial g}{\partial u} \left(\bar{w}_{k\pm 1/2}^n \right) \nabla_h^\pm u_k^n, \\
\nabla_h \bar{F}_k^n &= \frac{1}{h} \left[\bar{F}_{k+1/2}^n - \bar{F}_{k-1/2}^n \right], \quad \bar{G}_{k\pm 1/2}^n = \gamma \frac{1}{2a^2} g \left(v_{k\pm 1/2}^n \right) + \frac{\mu_{k\pm 1/2}}{ah}.
\end{aligned} \tag{27'}$$

Приведем далее (27') к "трехточечному" виду в правой части

$$\begin{aligned}
z_k^{n+1} &= \left(1 - \gamma h \left(1 - \frac{h}{2} \right) \nabla_h \bar{F}_k^n - \gamma \left(\bar{G}_{k+1/2}^n + \bar{G}_{k-1/2}^n \right) \right) z_k^n + \\
&+ \gamma \left(\frac{h}{2} \bar{F}_{k-1/2}^n + \bar{G}_{k-1/2}^n \right) z_{k-1}^n + \gamma \left(-\frac{h}{2} \bar{F}_{k+1/2}^n + \bar{G}_{k+1/2}^n \right) z_{k+1}^n - \tau \psi_k^n.
\end{aligned} \tag{27''}$$

Пользуясь опять оценками принципа максимума из (27'') получим неравенство для норм

$$\begin{aligned}
\|z^{n+1}\|_{C(\bar{\omega}_x)} &\leq (1 + \gamma C_0) \|z^n\|_{C(\bar{\omega}_x)} + \tau \|\psi^n\|_{C(\bar{\omega}_x)}, \\
C_0 &= h \|\nabla_h \bar{F}^n\|_{C(\bar{\omega}_x)} + 2h \|\bar{F}^n\|_{C(\bar{\omega}_x)} + 2 \|\bar{G}^n\|_{C(\bar{\omega}_x)}.
\end{aligned} \tag{28}$$

При этом должны выполняться условия (12'), а также дополнительные условия

$$1 - \gamma h \left(1 - \frac{h}{2} \right) \nabla_h \bar{F}_k^n - \gamma \left(\bar{G}_{k+1/2}^n + \bar{G}_{k-1/2}^n \right) > 0, \quad k = 1, \dots, N_x - 1. \tag{29}$$

Условия (29) будут выполнены, если будут равномерно ограничены величины $\bar{F}_{k\pm 1/2}^n$ и $\bar{G}_{k\pm 1/2}^n$. Очевидно, что последнее обеспечивается, если будут ограничены производные $\frac{\partial f}{\partial u}$ и $\frac{\partial g}{\partial u}$ на любом конечном интервале изменения u , искусственная вязкость будет взята в виде $\mu = \alpha ah^p$, а шаги по пространству и времени будут удовлетворять неравенствам

$$0 < h \leq h_0 < 0.5, \quad 0 < \gamma \leq \gamma_0 < C_0^{-1}. \quad (30)$$

Из оценки (28) при условиях (12"), (12*), (30) следует равномерная сходимость предложенной схемы. Сформулируем этот результат в виде следующего утверждения.

Утверждение 4. При условии ограниченности производных $\frac{\partial f}{\partial u}$, $\frac{\partial g}{\partial u}$ на любом конечном интервале изменения u и выполнении условий (12"), (12*), (30) разностная схема (5'), (6)-(8), (14) с постоянной искусственной вязкостью $\mu = \alpha ah^p$, $p \geq 1$, будет сходиться в сеточной норме $C(\bar{\omega}_x) \times C(\bar{\omega}_t)$ к точному решению задачи (1)-(3) с порядком $O(\tau^2 + h^q)$, где $q = \min(p, 2)$.

В заключение данного пункта заметим, что если вязкость будет адаптивной (то есть будет вводиться локально в точках потенциальной неустойчивости разностного решения), то и в этом случае результат Утверждения 4 сохранится.

5. Некоторые численные результаты

Для иллюстрации свойств сходимости построенной разностной схемы ниже приводится таблица 1 сравнения численного решения с точным на примере автомодельной функции $u(x, t) = \frac{x}{t}$, $L = 1$, $\gamma = 0.5$, $\tau = \frac{\gamma h}{a}$. Как видно из результатов, представленных в таблице 1, порядок аппроксимации построенной разностной схемы равен 2. Однако при недостаточном сеточном разрешении на решениях простого вида (ступенька и т.д.) порядок точности может быть и выше ввиду монотонности разностного решения вблизи точек разрыва или градиентной катастрофы. Такая ситуация типична для разностных схем с искусственной вязкостью, аппроксимирующих уравнения нелинейного переноса.

Сходимость по сетке

Номер сетки k	Число узлов сетки N_x	Ошибка $\Delta_k \equiv \ z_h\ _C$	Оценка порядка аппроксимации схемы $p_k = \log_2 \frac{\Delta_{k-1}}{\Delta_k}$
1	101	$2.2587 \cdot 10^{-5}$	-
2	201	$4.64986 \cdot 10^{-7}$	5.6
3	401	$3.31885 \cdot 10^{-8}$	3.8
4	801	$8.27448 \cdot 10^{-9}$	2.0
5	1601	$1.5115 \cdot 10^{-9}$	2.5
6	3201	$3.77609 \cdot 10^{-10}$	2.0
7	6401	$8.72779 \cdot 10^{-11}$	2.1
8	12801	$2.09799 \cdot 10^{-11}$	2.0

Для исследования свойств схемы в случае расчета решения вблизи точек градиентной катастрофы был выбран начальный импульс вида $u(0, x) = \sin(\pi x)$, заданный на отрезке $[0, 1]$. Вне этой области значение функции было равно нулю. Расчеты проводились на отрезке $[0, 2]$ с числом Куранта равным 0.5. Полученное численное решение представлено на рис. 1 и 2. Расчеты приведены с шагом 50 по времени. Из расчетов видно, что с наступлением градиентной катастрофы без использования искусственной вязкости решение осциллирует. При использовании искусственной вязкости численное решение "перешагивает" момент градиентной катастрофы и переходит на новую ветвь.

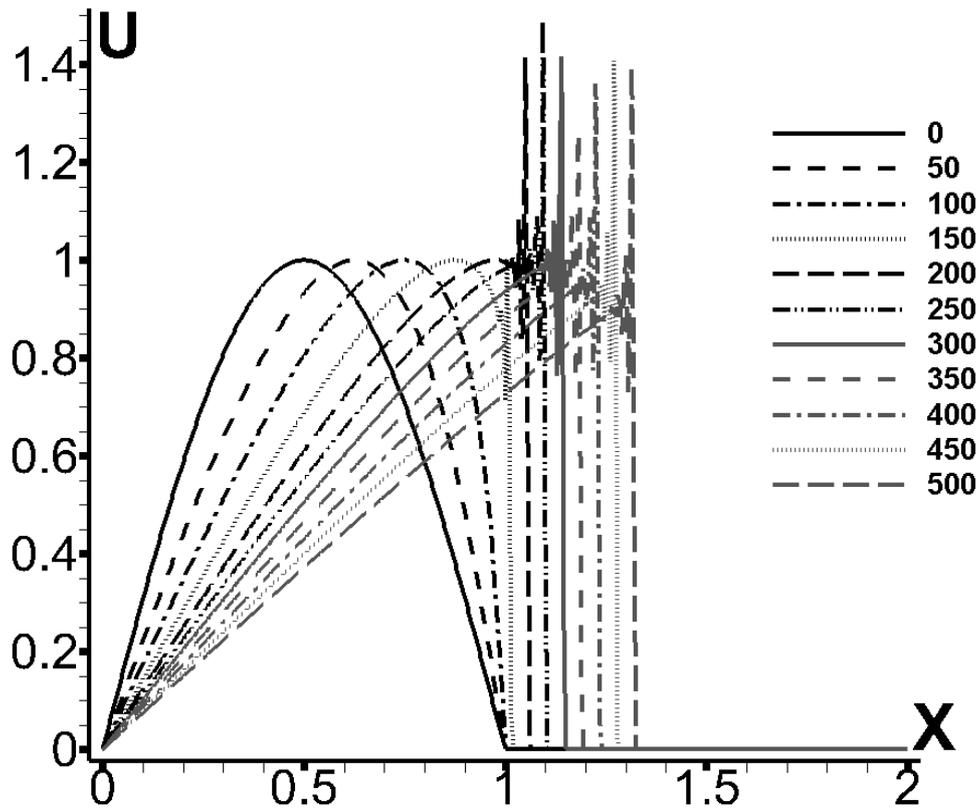


Рис. 1. Расчет без искусственной вязкости.

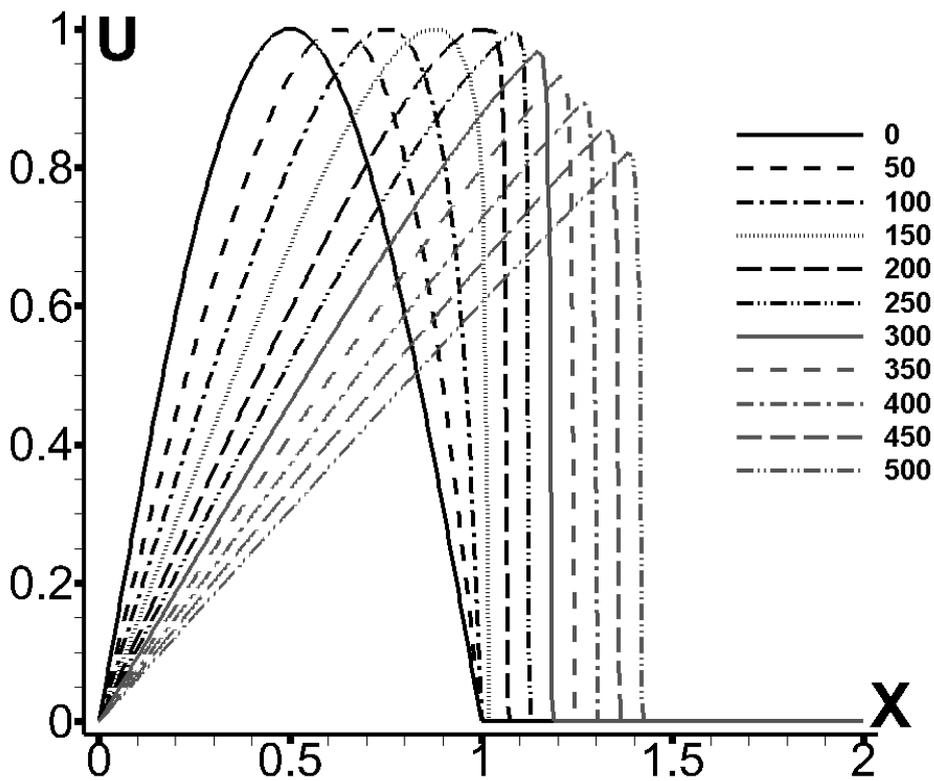


Рис. 2. Расчет с искусственной вязкостью.

Заключение

Предложена разностная схема для нелинейного уравнения переноса с функцией общего вида, имеющей второй порядок аппроксимации по времени и первый или второй порядок по пространству. Теоретически и численно показано, что разностная схема сходится к решению дифференциальной задачи в равномерной норме со скоростью, соответствующей порядку аппроксимации. Использование искусственной вязкости необходимо для обеспечения монотонности, устойчивости и сходимости схемы.

Список литературы

1. Годунов С.К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Математический сборник. 1959. № 47. С. 271–306.
2. Попов И.В., Фрязинов И.В. О методе адаптивной искусственной вязкости // Математическое моделирование. 2010. Т. 22. № 7. С. 121-128.
3. Попов И. В., Фрязинов И. В. Метод адаптивной искусственной вязкости численного решения уравнений газовой динамики. М.: Красанд, 2015.
4. Рихтмайер Р., Мортон К. Разностные методы решения краевых задач. М.: Мир, 1972.
5. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1989.
6. Калиткин Н.Н. Численные методы. М.: Наука, 1978.
7. Калиткин Н.Н. Численные методы. СПб.: БЧВ-Петербург, 2001.
8. Кружков С.Н., Петросян Н.С. Асимптотическое поведение решений задачи Коши для нелинейных уравнений первого порядка // УМН. 1987. Т. 42. Вып. 5(257). С. 3-40.
9. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1978.