



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

**Попов И.В., Повещенко Ю.А.,
Поляков С.В., Рагимли П.И.**

Об одном подходе к
построению консервативной
разностной схемы для
задачи двухфазной
фильтрации

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Об одном подходе к построению консервативной разностной схемы для задачи двухфазной фильтрации / И.В.Попов [и др.] // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2017. № 69. 12 с. doi:[10.20948/prepr-2017-69](https://doi.org/10.20948/prepr-2017-69)
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2017-69>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Российской академии наук**

**И. В. Попов, Ю.А. Повещенко, С. В. Поляков,
П. И. Рагимли**

**Об одном подходе к построению
консервативной разностной схемы
для задачи двухфазной фильтрации**

Москва — 2017

И.В. Попов, Ю.А. Повещенко, С.В. Поляков, П.И. Рагимли

Об одном подходе к построению консервативной разностной схемы для задачи двухфазной фильтрации

Разработан численный метод решения задач двухфазной фильтрации на основе метода адаптивной искусственной вязкости при моделировании уравнения неразрывности. Разработанная разностная схема имеет второй порядок аппроксимации по времени и по пространству. Проведен численный эксперимент для предложенной задачи двухфазной фильтрации. Численные расчеты показали, что предложенный метод хорошо отслеживает разрывы численного решения.

Ключевые слова: разностная схема, адаптивная искусственная вязкость, задача фильтрации, математическое моделирование.

I.V. Popov, Yu.A. Poveschenko, S.V. Polykov, P.I. Rahimli.

One approach to construction of conservative difference scheme for two-phase filtration problem.

A numerical method for solving two-phase filtration problems is developed on the basis of the adaptive artificial viscosity method for the simulation of the continuity equation. The developed difference scheme has a second order of approximation in time and space. Numerical experiments were performed for the proposed two-phase filtration problems. Numerical calculations showed that the proposed method well traces the discontinuities of the numerical solution.

Key words: difference scheme, adaptive artificial viscosity, advection, filtration problem, mathematical modeling.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты №№ 15-01-04620-а, 16-07-00519-а, 16-29-15095-офи-м).

Оглавление

Введение.....	3
Постановка задачи.....	4
Численный алгоритм решения задачи.....	6
Построение разностных схем.....	7
Численный эксперимент.....	9
Заключение.....	11
Список литературы.....	12

Введение

Проблема рационального и эффективного использования существующих и вновь разрабатываемых углеводородных (УВ) месторождений является весьма актуальной. Натурные исследования, связанные с экспериментом в области добычи УВ, имеют высокую стоимость. Поэтому в последнее время активно используются различные математические модели и методы, позволяющие оптимизировать и прогнозировать процесс добычи полезных ископаемых.

Современные математические модели задач фильтрации описаны во многих монографиях, например, в классической работе [1], где изложены основы и методы решения уравнений теории фильтрации. В этой работе в качестве основы при построении математической модели использовалась модель Баклея-Левретта, учитывающая сжимаемость фильтрационных компонент флюида [2].

Отметим, что в последнее время появился запрос к повышению точности предсказательного моделирования. Очевидно он связан с разработкой новых численных методов второго и более высокого порядка аппроксимации, как по времени, так и по пространству. Немаловажным аспектом моделирования является и создание численных методов, эффективно адаптирующихся к вычислениям на современных многопроцессорных комплексах. Целью таких усилий является не только ускорение получения научных результатов, но и возможность получения долгосрочных прогнозов разработки полезных ископаемых.

В данной работе рассматривается одномерная модель двухфазной фильтрации несмешивающихся компонент, подобная представленной в [2]. Для предложенной модели разработан новый разностный метод решения, состоящий из двух этапов. На первом этапе решается уравнение пьезопроводности по известной неявной разностной схеме [4]. На втором этапе решается уравнение неразрывности для доли объема порового пространства воды. Это уравнение представляет собой нелинейное уравнение переноса первого порядка и всегда вызывает определенные трудности при численной реализации. Для решения данного уравнения использована новая явная разностная схема, имеющая второй порядок аппроксимации и точности по времени и пространству. Предложенная схема монотонна, устойчива и консервативна. Для ее монотонизации был применен метод адаптивной искусственной вязкости, представленный в работе [3]. Предложенный итоговый численный подход был эффективно применен к решению задач многофазной фильтрации.

Подробность изложения материала связана с тем, что эта работа также будет предназначена для использования в качестве методического материала для студентов технических вузов.

Постановка задачи

Рассмотрим течение двухфазного флюида в поровом пространстве в пространственно одномерной постановке на основе закона Дарси. Будем считать, что первой фазой флюида является несжимаемая жидкость – вода. Второй фазой является сжимаемый идеальный газ – метан. Процесс рассматривается в изотермическом приближении [5].

Обозначим долю объема порового пространства воды через S_1 , долю объема порового пространства газа через S_2 . Тогда для рассматриваемых фаз должно быть выполнено условие нормировки

$$S_1 + S_2 = 1.$$

Уравнение неразрывности для указанных фаз имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}(m\rho_i S_i) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_i u_i) = q_i,$$

где m – объемная пористость пласта, которую будем считать постоянной, ρ_i – плотность i -го флюида, $i=1$ соответствует водной фазе, $i=2$ соответствует газовой фазе, u_i – скорость фильтрации i -го флюида, q_i – объемный расход i -го флюида. Будем считать, что при добыче из скважины отбирается только газ $q_2 \neq 0$. Тогда вода остается в пласте, то есть $q_1 = 0$.

Скорость фильтрации без учета силы тяжести определяется из уравнения движения по закону Дарси:

$$u_i = -K \frac{K_i}{\eta_i} \text{grad } p,$$

где K – коэффициент абсолютной проницаемости пласта, $K_i = K_i(S_1)$ – относительная фазовая проницаемость i -го флюида, η_i – динамическая вязкость i -го флюида, p – суммарное давление в пласте. Мы считаем, что капиллярный скачок давления отсутствует.

В итоге получаем следующую систему уравнений

$$m \frac{\partial S_1}{\partial t} + \frac{\partial u_1}{\partial x} = 0,$$

$$m \frac{\partial}{\partial t}(\rho_2 S_2) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_2 u_2) = q_2,$$

$$u_i = -K \frac{K_i}{\eta_i} \text{grad } p, \quad i = 1, 2.$$

Систему уравнений замыкает уравнение состояния газа, которое имеет вид

$$\rho_2 = \frac{pM}{z(p,T)RT},$$

где M – молярная масса газа, $z(p,T)$ – коэффициент сверхсжимаемости (для идеального газа $z = 1$), R – газовая постоянная, T – абсолютная температура, которая постоянна в данной модели ($T = const$). Далее обозначим через

$C_2 = \frac{M}{z(p,T)RT}$, тогда уравнение состояния для газа (в приближении изотермии) будет иметь вид

$$\rho_2 = C_2 p.$$

Объемный источник q_2 будем считать пропорциональным разности давлений в пласте p и атмосферного $p_{атм}$:

$$q_2 = \alpha(p - p_{атм}),$$

где α – параметр.

Для определения давления в пласте используется уравнение пьезопроводности. Для его получения исключим в уравнениях неразрывности из под знака дифференцирования по времени величины S_1 и S_2 . Это достигается суммированием уравнений с соответствующими интегрирующими множителями:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_1}{\partial t} + \frac{1}{m} \frac{\partial u_1}{\partial x} &= 0, \\ \frac{S_2}{\rho_2} \frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \frac{\partial S_2}{\partial t} + \frac{1}{m\rho_2} \frac{\partial}{\partial x} (\rho_2 u_2) &= \frac{q_2}{m\rho_2}. \end{aligned}$$

Тогда будем иметь уравнение вида

$$m(1 - S_1) \frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho_2 u_2) + \rho_2 \frac{\partial u_1}{\partial x} = q_2.$$

Подставляя вместо u_1 и u_2 компоненты градиента давления с соответствующими множителями и учитывая уравнение состояния, получим уравнение пьезопроводности

$$m(1 - S_1) C_2 \frac{\partial p}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} \left(-\rho_2 K \frac{K_2}{\eta_2} \frac{\partial p}{\partial x} \right) - \rho_2 \frac{\partial}{\partial x} \left(-K \frac{K_1}{\eta_1} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + q_2.$$

Заметим далее, что из условия нормировки следует, что $S_2 = 1 - S_1$, то есть независимой неизвестной функцией является только S_1 (влагонасыщенность), которую в дальнейшем будем писать, опуская индекс 1.

В модели также учитывается, что при предельных насыщенностях ($S = S^*$ или $S = S^{**}$), когда первая или вторая фазы не образуют связной системы и потому неподвижны, выполняются соответственно соотношения:

$$K_1(S) = 0, \text{ при } S \leq S^*,$$

$$K_2(S) = 0, \text{ при } S \geq S^{**}.$$

При достижении предельной насыщенности по газу отбор газа прекращался: $\alpha = 0$.

Предложенная математическая модель рассматривается в области $\Omega = \{0 \leq t_0 \leq t \leq T; 0 \leq x \leq L\}$. Неизвестными величинами, подлежащими определению, являются, очевидно, водонасыщенность S и давление p , уравнения для которых имеет следующий окончательный вид:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{K_1}{\eta_1} \text{grad } p \right), \quad (1)$$

$$m(1-S)C_2 \frac{\partial p}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} \left(-\rho_2 K \frac{K_2}{\eta_2} \frac{\partial p}{\partial x} \right) - \rho_2 \frac{\partial}{\partial x} \left(-K \frac{K_1}{\eta_1} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + q_2.$$

Она замыкается следующими начальными и граничными условиями

$$S(x, 0) = S_0(x), \quad p(x, 0) = p_0(x);$$

$$\frac{\partial p}{\partial x}(0, t) = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial x}(L, t) = 0. \quad (2)$$

Численный алгоритм решения задачи

Численный алгоритм решения задачи основан на схеме расщепления по физическим процессам, которая состоит из двух этапов, чередующихся во времени.

На первом этапе решается уравнение пьезопроводности по неявной разностной схеме с целью определения давления на $(n+1)$ -ом временном слое. Схема выбрана неявной в целях снижения ограничений на шаг по времени. Источник (сток) в правой части уравнения берется также в неявном виде

$$q_2 = \alpha \left(p^{n+1} - p_{атм} \right).$$

Неявное задание источника позволяет повысить устойчивость схемы.

На втором этапе решается уравнение неразрывности для доли объема порового пространства воды. Это уравнение является уравнением гиперболического типа. Оказалось целесообразным решать его по явной разностной схеме с адаптивной искусственной вязкостью, разработанной в [6].

По окончании второго этапа, когда найдены давление и доля объема порового пространства воды, определяются все оставшиеся неизвестные.

Построение разностных схем

В данном разделе покажем, как разностная схема [?] адаптируется для решения рассматриваемой задачи. Для этого введём по пространственной переменной x равномерную сетку с шагом $h = \frac{L}{N}$, где N – число узлов:

$x_0 = 0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N = L$. По времени введём также равномерную сетку с

узлами $t_n = n\tau$, $n = 0, 1, \dots$. Шаг сетки τ определим по формуле $\tau = \frac{\gamma \cdot h}{\max_{0 \leq k \leq N} u_k}$,

где γ – коэффициент пропорциональности, называемый числом Куранта.

Далее по аналогии с [4] выпишем разностную схему для уравнения пьезопроводности

$$\begin{aligned} & (m(1-S)C_2)_k^n \frac{p_k^{n+1} - p_k^n}{\tau} = \\ & \frac{1}{h} \left[\left(\rho_2 K \frac{K_2}{\eta_2} \right)_{k+1/2}^n \frac{p_{k+1}^{n+1} - p_k^{n+1}}{h} - \left(\rho_2 K \frac{K_2}{\eta_2} \right)_{k-1/2}^n \frac{p_k^{n+1} - p_{k-1}^{n+1}}{h} \right] + \\ & + \frac{(\rho_2)_k^n}{h} \left[\left(K \frac{K_1}{\eta_1} \right)_{k+1/2}^n \frac{p_{k+1}^{n+1} - p_k^{n+1}}{h} - \left(K \frac{K_1}{\eta_1} \right)_{k-1/2}^n \frac{p_k^{n+1} - p_{k-1}^{n+1}}{h} \right] + \\ & \alpha (p_k^{n+1} - p_{амн}). \end{aligned}$$

Перепишем теперь полученное разностное уравнение в трехточечном виде

$$A_k p_{k-1}^{n+1} - C_k p_k^{n+1} + B_k p_{k+1}^{n+1} = -F_k^n,$$

где

$$A_k = \frac{\tau}{h^2} \frac{1}{(m(1-S)C_2)_k^n} \left(\rho_2 K \frac{K_2}{\eta_2} \right)_{k-1/2}^n + \frac{\tau}{h^2} \left(\frac{\rho_2}{m(1-S)C_2} \right)_k^n \left(K \frac{K_1}{\eta_1} \right)_{k-1/2}^n,$$

$$B_k = \frac{\tau}{h^2} \frac{1}{(m(1-S)C_2)_k^n} \left(\rho_2 K \frac{K_2}{\eta_2} \right)_{k+1/2}^n + \frac{\tau}{h^2} \left(\frac{\rho_2}{m(1-S)C_2} \right)_k^n \left(K \frac{K_1}{\eta_1} \right)_{k+1/2}^n,$$

$$C_k = -(1 + A_k + B_k), \quad F_k^n = -p_k^n.$$

В точках, где производится отбор газа, выполняются равенства

$$C_k = - \left(1 + A_k + B_k - \frac{\tau \cdot \alpha}{(mS_2C_2)_k^n} \right), \quad F_k^n = -p_k^n + \frac{\tau \cdot \alpha}{(mS_2C_2)_k^n} p_{атм}.$$

Полученная трехдиагональная система линейных уравнений решается методом прогонки [4]. В результате получается распределение давления на $(n+1)$ -ом временном слое.

Отметим, что приведенная выше неявная разностная схема устойчива при любом положительном числе Куранта.

Выпишем далее разностную схему для уравнения неразрывности в потоковой форме:

$$\begin{aligned} \frac{S_k^{n+1} - S_k^n}{\tau} + \frac{K}{m\eta_1} \frac{1}{h} [W_{k+1/2}^n - W_{k-1/2}^n] &= 0, \\ W_{k+1/2}^n &= -\frac{p_{k+1}^{n+1} - p_k^{n+1}}{h} K_1(S_{k+1/2}^n) - \\ &- \frac{\tau}{2} \left[\left(\frac{\partial K_1(S_{k+1/2}^n)}{\partial S} \right)^2 \left(\frac{p_{k+1}^{n+1} - p_k^{n+1}}{h} \right)^2 \frac{S_{k+1}^n - S_k^n}{h} \right] - \\ &- \mu_{k+1/2}^n \frac{S_{k+1}^n - S_k^n}{h}. \end{aligned}$$

Здесь $\mu_{k+1/2}^n$ – адаптивная искусственная вязкость, которая используется для обеспечения монотонности и повышения устойчивости разностной схемы

Подробное описание построения и свойств разностной схемы для уравнения неразрывности приводится в [6]. Здесь перечислим лишь основные свойства для предложенной разностной схемы:

1. Схема имеет второй порядок по времени и по пространству.
2. Схема монотонна и устойчива при выполнении условий:

$$0 < \gamma < 0.5\sqrt{2}, \quad \max [0, 0.5 - \gamma] \leq \frac{\mu}{h \max_{0 \leq k \leq N} u_k} < 0.5 - \gamma^2.$$

Учитывая абсолютную устойчивость неявной разностной схемы для уравнения пьезопроводности, временной шаг для общего алгоритма расчета определяется по уравнению неразрывности. Соответственно, устойчивость и сходимость к дифференциальному решению общего алгоритма определяется процедурой решения уравнения неразрывности.

Численный эксперимент

Численная реализация рассмотренной математической модели фильтрации была протестирована на модельной задаче. Для этого были взяты следующие данные: объемная пористость пласта равна $m = 0.1$, температура в пласте $T = 320\text{ K}$, начальное давление в пласте $p = 7 \cdot 10^6\text{ Па}$, давление в точке отбора $p_{атм} = 1 \cdot 10^5\text{ Па}$, плотность газа $\rho_2 \approx 42.118 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, коэффициент проницаемости $K = 0.2\text{ Дарси}$ (то есть $2 \cdot 10^{-13}\text{ м}^2$), относительные фазовые проницаемости соответственно воды и газа были равны:

$$K_1 = K_1(S_1) = \begin{cases} 0, & S_1 \leq 0.2 \\ 2.78 \cdot (S_1 - 0.2)^2, & 0.2 < S_1 < 0.8, \\ 1.0008, & S_1 \geq 0.8 \end{cases}$$

$$K_2 = K_2(S_2) = \begin{cases} 0.798, & S_1 \geq 0.2 \\ 1.33 \cdot (0.8 - S_1)^2, & 0.2 < S_2 < 0.8, \\ 0, & S_1 \geq 0.8 \end{cases}$$

динамическая вязкость 1-го флюида (вода)

$$\eta_1 = 0.4 \cdot 10^{-2}\text{ Пуаз} = 0.4 \cdot 10^{-3} \frac{\text{Н} \cdot \text{с}}{\text{м}^2}, \text{ динамическая вязкость 2-го флюида}$$

$$(\text{газ}) \quad \eta_2 = 0.0155 \cdot 10^{-2}\text{ Пуаз} = 1.55 \cdot 10^{-4} \frac{\text{Н} \cdot \text{с}}{\text{м}^2}, \text{ начальные доли объема}$$

порового пространства для воды и газа соответственно равны $S = 0.6$ и $1 - S = 0.4$. Размер расчетной области $L = 4\text{ км}$, точка отбора располагается посередине расчетной области $\ell = 2\text{ км}$.

Перейдем к анализу полученных численных результатов. На рисунках 1 и 2 представлены результаты расчетов распределений давления, плотности газа, водо- и газонасыщенности, а также скоростей водной и газовой фаз соответственно на моменты времени 100 и 296 часов с начала отбора газа. Полученные результаты показывают, что разработанный численный алгоритм устойчив на больших временах. Рассчитанные на его основе распределения характеристик флюида и окружающей среды адекватно описывают моделируемый физический процесс. Также можно отметить, что разработанная численная процедура дает решения, обладающие высокой гладкостью, что было трудно достижимо при использовании классических схем с разностями против потока для решения уравнения неразрывности.

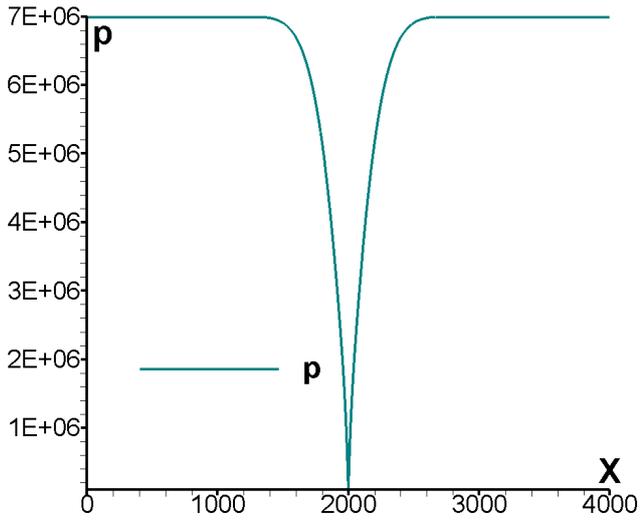


Рис. 1а

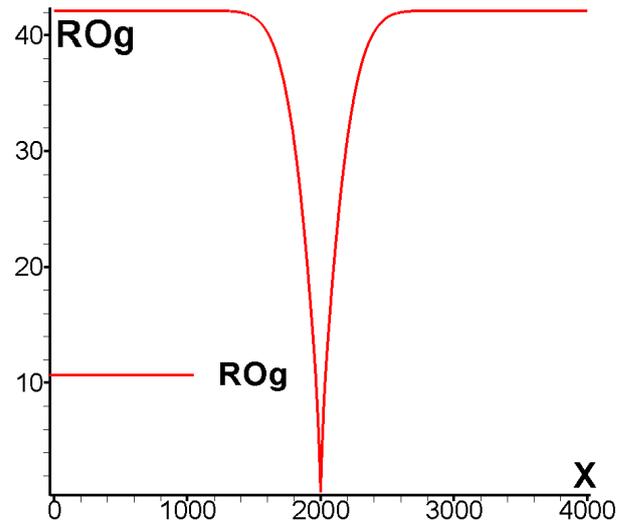


Рис. 1б

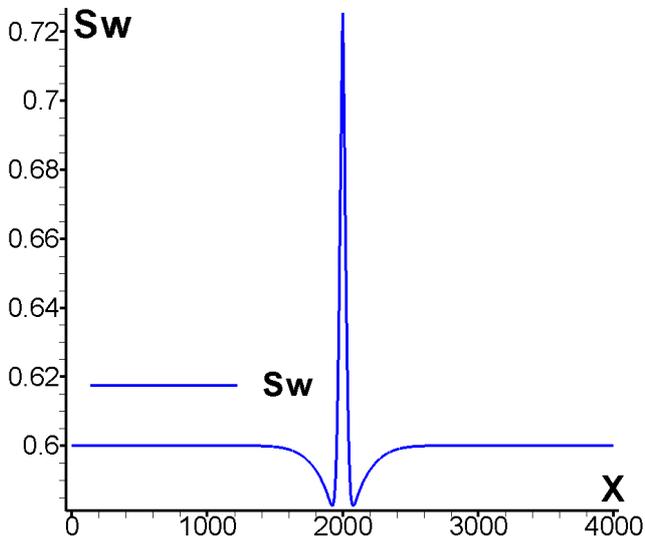


Рис. 1в

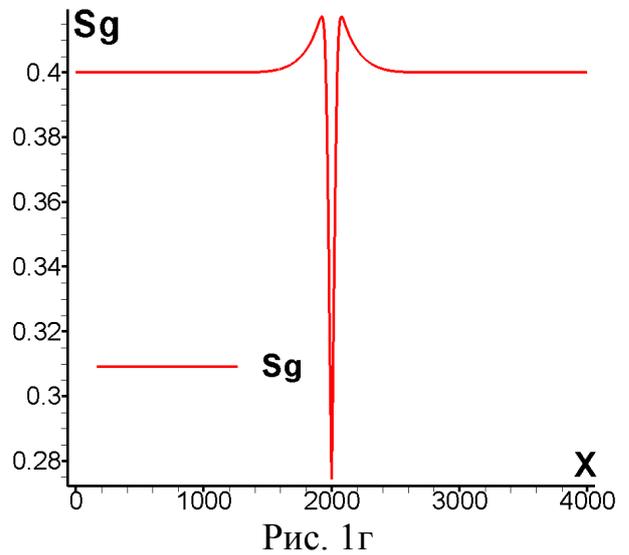


Рис. 1г

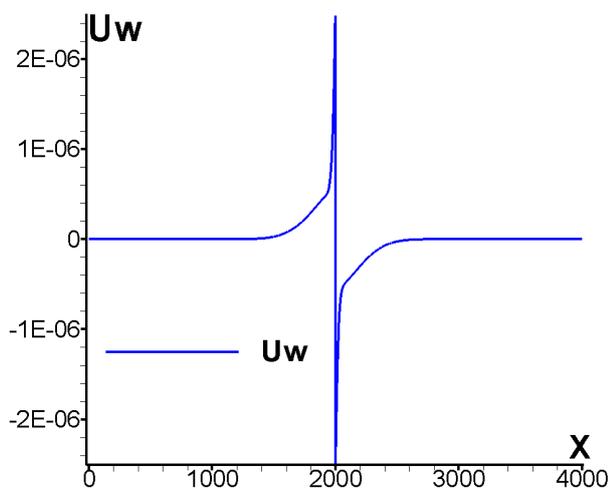


Рис. 1д

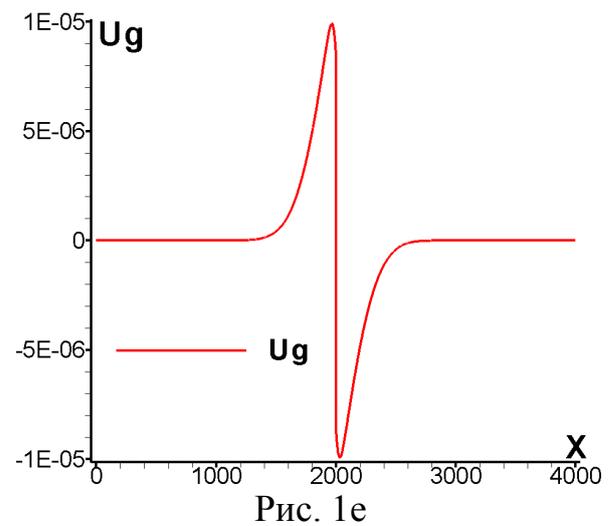


Рис. 1е

Рис. 1. Распределения давления (а), плотности газа (б), влаго- и газонасыщенности (в, г), а также скорости воды (д) и газа (е) при $t=100$ часов.

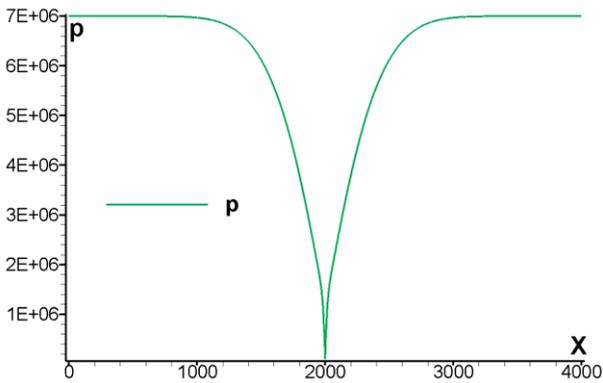


Рис. 2а

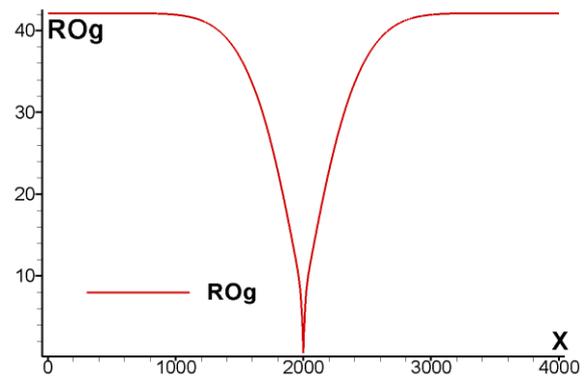


Рис. 2б

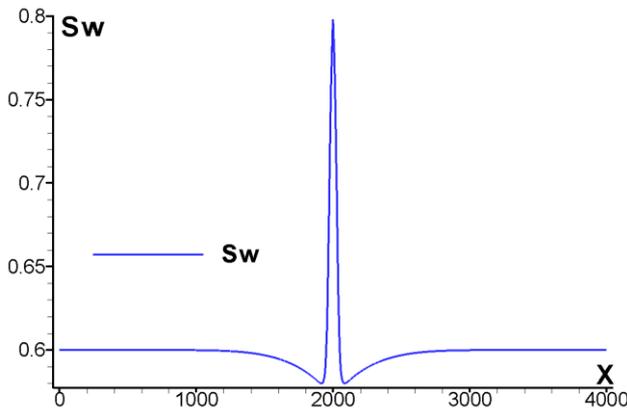


Рис. 2в

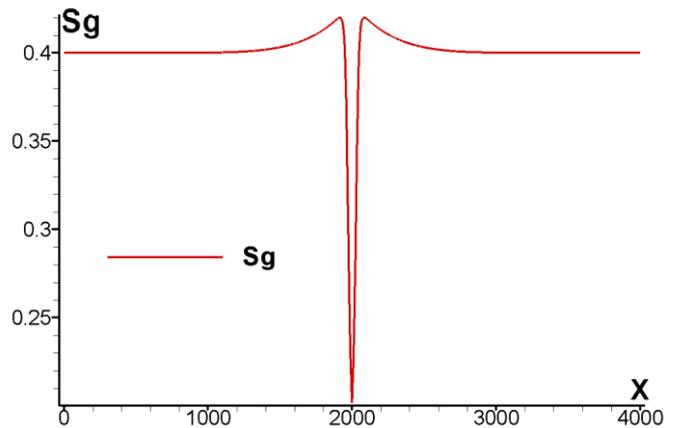


Рис. 2г

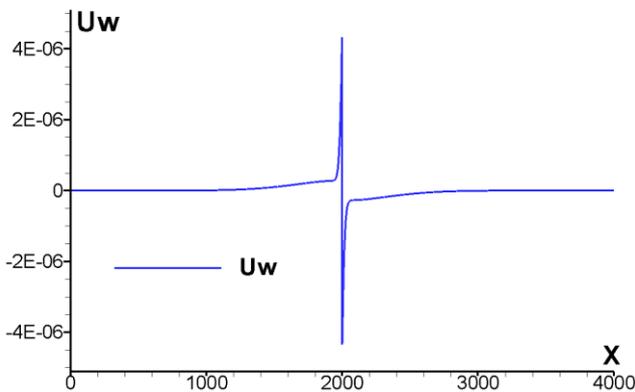


Рис. 2д

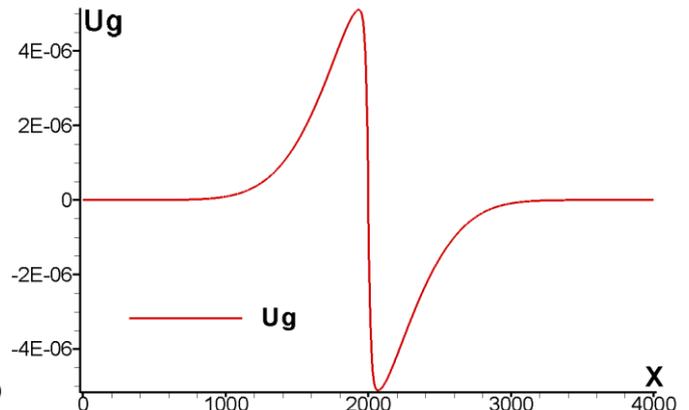


Рис. 2е

Рис. 2. Распределения давления (а), плотности газа (б), влаго- и газонасыщенности (в, г), а также скорости воды (д) и газа (е) $t=296$ часов.

Заключение

Для рассмотренной модели фильтрации построена разностная схема, для уравнения неразрывности имеющая второй порядок аппроксимации по времени и пространству. Показано, что разностная схема обладает монотонностью, консервативностью и хорошо отслеживает разрывы решения в виде сингулярных особенностей в депрессионной воронке вблизи зоны отбора газа. Предложенный численный метод может быть использован для моделирования

и прогноза состояния газонасыщенных пластов, а так же может быть эффективно применен для многопроцессорных вычислительных комплексов.

Список литературы

1. Азис. Х., Сеттари Э. Математическое моделирование пластовых систем. – Москва – Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004, 416 стр.
2. Колдоба А.В., Повещенко Ю.А., Самарская Е.А., Тишкин В. Ф. Методы математического моделирования окружающей среды. — М.: Наука, 2000, 254 с.
3. Попов И. В., Фрязинов И. В. Метод адаптивной искусственной вязкости численного решения уравнений газовой динамики // М., Красанд, 2015.
4. Самарский А.А. Теория разностных схем. – 3-е изд., испр. – М.: Наука, 1989 - 616 с.
5. Сивухин Д.В. Общий курс физики. т. 2. – М.: Наука, 1979. – 552 с.
6. Попов И.В. Построение разностной схемы повышенного порядка аппроксимации для нелинейного уравнения переноса с использованием адаптивной искусственной вязкости // Препринты ИПМ им.М.В.Келдыша. 2017. № 68. 21 с.