ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 86 за 2017 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Моисеев Т.Е., Мышецкая Е.Е., Тишкин В.Ф.

О близости решений невозмущённых и гиперболизированных уравнений теплопроводности для разрывных начальных данных

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Моисеев Т.Е., Мышецкая Е.Е., Тишкин В.Ф. О близости решений невозмущённых и гиперболизированных уравнений теплопроводности для разрывных начальных данных // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2017. № 86. 15 с. doi:10.20948/prepr-2017-86
URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2017-86

О р д е н а   Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Р о с с и й с к о й   а к а д е м и и   н а у к

Т.Е. Моисеев, Е.Е. Мышецкая, В.Ф. Тишкин

О близости решений невозмущённых и гиперболизированных уравнений теплопроводности для разрывных начальных данных

Москва — 2017

Моисеев Т.Е., Мышецкая Е.Е., Тишкин В.Ф.

О близости решений невозмущённых и гиперболизированных уравнений теплопроводности для разрывных начальных данных

В настоящей работе исследуется влияние добавки в виде второй производной по времени с малым параметром ε в уравнение теплопроводности для случая разрывных периодических начальных данных. Показано, что за исключением начальных моментов времени, погрешность гиперболизации стремится к нулю как корень квадратный от величины добавки.

Ключевые слова: квазигидродинамическая система, гиперболизация, параболические уравнения

Tikhon Evgenievich Moiseev, Elena Evgenievna Myshetskaya, Vladimir Fedorovich Tishkin

On the proximity of solutions of unperturbed and hyperbolized heat equations for discontinuous initial data

In this paper we investigate the effect of the additive in the form of a second time derivative with a small parameter ε in the heat equation for discontinuous periodic initial data. It is shown that, with the exception of the initial instants of time, the error of hyperbolization tends to zero as the square root of the value of the additive.

Key words: quasihydrodynamic system, hyperbolization, parabolic equations

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ 17-71-30014.

Оглавление

Введение

Особенностью квазигидродинамической системы уравнений, полученной в работах [1-7], является наличие в уравнениях второй производной по времени с малым параметром в качестве коэффициента.

Появление такого члена меняет тип уравнений динамики вязкого газа и позволяет строить явные схемы с условиями устойчивости, характерными для уравнений гиперболического типа. Логическая простота таких схем делает их особенно эффективными при использовании современных вычислительных систем с массовым параллелизмом. Схемы такого типа успешно использовались при решении ряда прикладных задач [2-4], при этом в расчётах удавалось одновременно использовать до 10^5 вычислительных ядер без существенной потери эффективности.

В то же время добавленный член имеет сингулярный характер. В связи с этим представляет интерес определить, насколько решение гиперболизированных уравнений отличается от решения исходной параболической задачи. В частности, как ведут себя разрывы в обобщённых решениях гиперболических задач и какой вклад наличие таких разрывов вносит в погрешность гиперболизации.

Вопрос о близости решений сингулярно возмущённых и невозмущённых уравнений впервые исследован в работах А.Н.Тихонова [8-10]. В работах [11-14] исследовался вопрос о величине такой погрешности при замене линейного параболического уравнения на гиперболическое с гладкими согласованными начальными и граничными условиями. Показано, что такая погрешность пропорциональна $\varepsilon \| \partial^2 u / \partial t^2 \|$. В случае наличия разрывов эта величина может оказаться неограниченной.

В работах [15-17] показано, что для задачи Коши с периодическими начальными данными разность решений исходной и гиперболизованной задачи стремится к нулю при стремлении ε к нулю, если ряды для модулей коэффициентов Фурье начальных данных сходятся. Это условие, однако, не выполняется для негладких и, тем более, разрывных начальных данных. В этой же работе показано, что если в начальных данных присутствуют достаточно высокие гармоники, то отклонение от исходного решения может достигать конечной величины.

В настоящей работе исследуется влияние разрывов в начальных данных. В этом случае невозможно задать величину $\partial u / \partial t,$ согласованную с решением исходной задачи, и при сингулярном возмущении образуется пограничный слой по временной переменной. Показано, что толщина такого слоя не превышает $8\sqrt{\varepsilon}\ln 1/\varepsilon$ и для моментов времени, превышающих это значение, разница между решениями не превосходит $C\sqrt{\varepsilon}\ln 1/\varepsilon,$ где константа C зависит только от начальных данных.

Постановка задачи

Рассмотрим задачу Коши для уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (1)$$
$$u(x,0)=u_o(x)$$

с периодической функцией $u_o(x)$

$$u_0(x)=u_0(x+2\pi).$$

Функцию $u_o(x)$ будем предполагать ограниченной:

$$|u_o(x)|\le M \qquad (2)$$

на интервале $-\pi\le x\le\pi,$ имеющей не больше конечного числа разрывов первого рода, а на интервалах непрерывности — имеющей ограниченную производную, причём в точках разрыва $u_o(x)$ имеет ограниченные односторонние производные. Будем также считать, что в точках разрыва значения $u_o(x)$ удовлетворяют условию

$$u_o(x_{\text{разр}})=\frac{1}{2}\left(u_o(x^+_{\text{разр}})+u_o(x^-_{\text{разр}})\right).$$

В этих предположениях $u_o(x)$ разлагается в ряд Фурье

$$u_o(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx$$

и коэффициенты ряда удовлетворяют неравенствам

$$|a_n|<\frac{A}{n}, \qquad |b_n|<\frac{A}{n}. \qquad (3)$$

Не ограничивая общности, будем далее предполагать, что функция $u_o(x)$ является нечётной, когда $a_n=0$ и

$$u_o(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx. \qquad (4)$$

Решение задачи (1) в этом случае задаётся сходящимся рядом:

$$u(x,t) = \sum_{n+1}^{\infty} b_n e^{-n^2 t} \sin nx. \tag{5}$$

Одновременно рассмотрим возмущённую задачу с малым параметром ε:

$$\begin{aligned}
&\varepsilon \frac{\partial^2 u_г}{\partial t^2} + \frac{\partial u_г}{\partial t} = \frac{\partial^2 u_г}{\partial x^2} \\
&u_г(x,0) = u_0(x) \\
&\frac{\partial u_г}{\partial t}(x,0) = 0.
\end{aligned} \tag{6}$$

Не ограничивая общности, будем предполагать, что $\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}$ не является целым числом. Обобщённое решение (6) представляется в этом случае в виде ряда:

$$u_г(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(\frac{\lambda_{2n} e^{\lambda_{1n} t} - \lambda_{1n} e^{\lambda_{2n} t}}{\lambda_{2n} - \lambda_{1n}} \right) \sin nx, \tag{7}$$

где

$$\lambda_{1n} = \frac{-1 + \sqrt{1 - 4\varepsilon n^2}}{2\varepsilon}; \quad \lambda_{2n} = \frac{-1 - \sqrt{1 - 4\varepsilon n^2}}{2\varepsilon}.$$

Оценка разности решений

Л е м м а 1.

Пусть $f(t) = te^{-\frac{t}{\alpha}}$. *Тогда при* $t > \beta\alpha \ln\frac{1}{\varepsilon}$, $f(t) < \beta\alpha\varepsilon^{\beta} \ln\frac{1}{\varepsilon}$ *при положительных* α *и* β, *и таких* ε, *что* $\ln\frac{1}{\varepsilon} > \frac{1}{\beta}$.

Оценим разность решений задач (1) и (6):

$$\begin{aligned}
&\delta u(x,t) = u_г(x,t) - u(x,t) = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(\frac{\lambda_{2n} e^{\lambda_{1n} t} - \lambda_{1n} e^{\lambda_{2n} t}}{\lambda_{2n} - \lambda_{1n}} - e^{-n^2 t} \right) \sin nx.
\end{aligned}$$

Определим число n^* соотношениями

$$n^* < \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}; \qquad n^*+1 > \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}. \tag{8}$$

В этом случае λ_{1n} и λ_{2n} будут действительными при $n \le n^*$ и комплексными при $n > n^*$. Представим $\delta u(x,t)$ в виде

$$\begin{aligned}
\delta u(x,t) &= \sum_{n=1}^{n^*} b_n \left(\frac{\lambda_{2n} e^{\lambda_{1n} t} - \lambda_{1n} e^{\lambda_{2n} t}}{\lambda_{2n} - \lambda_{1n}} - e^{-n^2 t} \right) \sin nx + \\
&+ \sum_{n=n^*+1}^{\infty} b_n \left(\frac{\lambda_{2n} e^{\lambda_{1n} t} - \lambda_{1n} e^{\lambda_{2n} t}}{\lambda_{2n} - \lambda_{1n}} \right) \sin nx - \sum_{n=n^*+1}^{\infty} b_n e^{-n^2 t} \sin nx = \\
&= \sum_{n=1}^{n^*} b_n \left(e^{\lambda_{1n} t} - e^{-n^2 t} \right) \sin nx + \\
&+ \sum_{n=1}^{n^*} b_n \frac{\lambda_{1n}}{\lambda_{2n} - \lambda_{1n}} \left(e^{\lambda_{1n} t} - e^{\lambda_{2n} t} \right) \sin nx + \\
&+ \sum_{n=n^*+1}^{\infty} b_n e^{-\frac{t}{2\varepsilon}} \left(\cos \frac{\sqrt{4\varepsilon n^2 - 1}\, t}{2\varepsilon} \right) \sin nx + \\
&+ \sum_{n=n^*+1}^{\infty} b_n e^{-\frac{t}{2\varepsilon}} \left(\frac{\sin \left(\frac{\sqrt{4\varepsilon n^2 - 1}}{2\varepsilon} t \right)}{\sqrt{4\varepsilon n^2 - 1}} \right) \sin nx - \\
&- \sum_{n=n^*+1}^{\infty} b_n e^{-n^2 t} \sin nx.
\end{aligned} \tag{9}$$

Оценим каждый член в последнем равенстве.

$$\begin{aligned}
S_1 &= \left| \sum_{n=1}^{n^*} b_n \left(e^{\lambda_{1n} t} - e^{-n^2 t} \right) \sin nx \right| = \\
&= \left| \sum_{n=1}^{n^*} b_n e^{-n^2 t} \left(e^{-\frac{t}{2\varepsilon} + \frac{t}{2\varepsilon}\sqrt{1-4\varepsilon n^2} + n^2 t} - 1 \right) \sin nx \right| = \\
&= \left| \sum_{n=1}^{n^*} b_n e^{-n^2 t} \left(e^{-\frac{4\varepsilon n^2 t}{2\varepsilon(\sqrt{1-4\varepsilon n^2}+1)} + n^2 t} - 1 \right) \sin nx \right| =
\end{aligned}$$

$$=\left|\sum_{n=1}^{n^*} b_n e^{-n^2 t}\left(e^{\frac{-4\varepsilon n^2+2\varepsilon n^2+2\varepsilon n\sqrt{1-4\varepsilon n^2}}{2\varepsilon(\sqrt{1-4\varepsilon n^2})+1}t}-1\right)\sin nx\right|=$$

$$=\left|\sum_{n=1}^{n^*} b_n e^{-n^2 t}\left(e^{\frac{n^2(\sqrt{1-4\varepsilon n^2}-1)}{\sqrt{1-4\varepsilon n^2}+1}t}-1\right)\sin nx\right|=$$

$$=\left|\sum_{n=1}^{n^*} b_n e^{-n^2 t}\left(e^{\frac{-4\varepsilon n^4 \mathrm{t}}{(1+\sqrt{1-4\varepsilon n^2})^2}}-1\right)\sin nx\right|.$$

Учитывая неравенство $e^x - 1 > x$ и (3), получим

$$S_1 \le \sum_{n=1}^{n^*}\frac{A}{n}e^{-n^2 t}\cdot\frac{4\varepsilon n^4 t}{(1+\sqrt{1-4\varepsilon n^2})^2}\le$$
$$\le 4\varepsilon A\sum_{n=1}^{n^*} e^{-n^2 t} n^3 t,$$

т.к. $x^2 e^{-x} \le \dfrac{4}{e^2}$ и, используя неравенство $\sum_{n+1}^{n^*}\dfrac{1}{n} < \ln n^* + 1,$ получим с учетом (8)

что, для моментов времени, таких, что $t \ge 8\sqrt{\varepsilon}\ln\dfrac{1}{\varepsilon},$ для S_1 имеем оценку

$$S_1 \le \frac{2\sqrt{\varepsilon}A}{e^2\ln\frac{1}{\varepsilon}}\left(\ln\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}+1\right).$$

Для оценки следующего члена в (9) введём число n^{**} посредством соотношений

$$1-4\varepsilon(n^{**})^2 \ge 1-\sqrt{\varepsilon} \quad \text{и} \quad 1-4\varepsilon(n^{**}+1)^2 < 1-\sqrt{\varepsilon}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} S_2 \le &\left|\sum_{n=1}^{n^{**}} b_n \frac{\lambda_{1n}}{\lambda_{2n}-\lambda_{1n}}\left(e^{\lambda_{1n}t}-e^{\lambda_{2n}t}\right)\sin nx\right| + \\ &+\left|\sum_{n=n^{**}+1}^{n^*} b_n \frac{\lambda_{1n}}{\lambda_{2n}-\lambda_{1n}}\left(e^{\lambda_{1n}t}-e^{\lambda_{2n}t}\right)\sin nx\right|. \end{aligned} \qquad (10)$$

Оценим отдельно каждое слагаемое в (10)

$$S_{21} \le \left| \sum_{n=1}^{n^{**}} b_n \frac{\lambda_{1n}}{\lambda_{2n} - \lambda_{1n}} \left(e^{\lambda_{1n}t} - e^{\lambda_{2n}t} \right) \sin nx \right| \le$$

$$\le A \sum_{n=1}^{n^{**}} \frac{1}{n} \left| \frac{\lambda_{1n}}{\lambda_{2n} - \lambda_{1n}} \right| = \frac{A}{2} \sum_{n=1}^{n^{**}} \frac{1}{n} \frac{1 - \sqrt{1 - 4\varepsilon n^2}}{\sqrt{1 - 4\varepsilon n^2}} =$$

$$= \frac{A}{2} \sum_{n=1}^{n^{**}} \frac{4\varepsilon n}{\sqrt{1 - 4\varepsilon n^2}\,(1 + \sqrt{1 - 4\varepsilon n^2})} \le 2A\varepsilon \sum_{n=1}^{n^{**}} \frac{n}{\sqrt{1 - 4\varepsilon n^2}},$$

т.к. $n \le n^{**}$, то при $\varepsilon < 1, \sqrt{1 - 4\varepsilon n^2} > \sqrt{1 - \sqrt{\varepsilon}} \ge 1 - \sqrt{\varepsilon}$ и

$$S_{21} \le \frac{2A\varepsilon}{1 - \sqrt{\varepsilon}} \sum_{n=1}^{n^{**}} n = \frac{2A\varepsilon}{1 - \sqrt{\varepsilon}} \left(\frac{n^{**}(n^{**} + 1)}{2} \right).$$

Если $\varepsilon < 1/4$, то, $1 - \sqrt{\varepsilon} > 1/2$ и, т.к. $\frac{n^{**} + 1}{2} < n^{**}$ и $(n^{**})^2 < \frac{1}{4\sqrt{\varepsilon}}$,

получаем

$$S_{21} \le A\sqrt{\varepsilon}.$$

Далее, если $n^{*} \ge n \ge n^{**} + 1,$ то

$$\sqrt{1 - 4\varepsilon n^2} < \sqrt{1 - 4\varepsilon (n^{**} + 1)^2} \le \sqrt{1 - \sqrt{\varepsilon}} < 1 - \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2}$$

и

$$\lambda_{1n} = \frac{-1 + \sqrt{1 - 4\varepsilon n^2}}{2\varepsilon} \le -\frac{1}{4\sqrt{\varepsilon}}.$$

Далее

$$\frac{e^{\lambda_{1n}t} - e^{\lambda_{2n}t}}{\lambda_{1n} - \lambda_{2n}} = -t \frac{e^{\lambda_{1n}t} - e^{\lambda_{2n}t}}{\lambda_{1n}t - \lambda_{2n}t} = -te^{\xi_n t},$$

где

$$\lambda_{2n} \le \xi_n \le \lambda_{1n} \le -\frac{1}{4\sqrt{\varepsilon}}.$$

В этом случае

$$S_{22} = \left| \sum_{n=n^{**}+1}^{n^*} b_n \frac{\lambda_{1n}}{\lambda_{2n} - \lambda_{1n}} \left(e^{\lambda_{1n} t} - e^{\lambda_{2n} t} \right) \sin nx \right| \le$$

$$\le \frac{At}{2\varepsilon} \sum_{n=n^{**}+1}^{n^*} \frac{1}{n} e^{\xi_n t} \le \frac{Ate^{-\frac{t}{4\sqrt{\varepsilon}}}}{2\varepsilon} \sum_{n=n^{**}+1}^{n^*} \frac{1}{n} \le$$

$$\le \frac{Ate^{-t/(4\sqrt{\varepsilon})}}{2\varepsilon} \left(\ln \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}} + 1 \right).$$

В соответствии с леммой 1 при $\varepsilon < \frac{1}{\sqrt{e}}$ и $t > 8\sqrt{\varepsilon} \ln \frac{1}{\varepsilon}$, получим

$$S_{22} \le 4A\varepsilon\sqrt{\varepsilon} \left(1 - \ln 2 + \frac{1}{2} \ln \frac{1}{\varepsilon} \right).$$

Оценим теперь

$$S_3 = \left| e^{-\frac{t}{2\varepsilon}} \sum_{n=n^*+1}^{\infty} b_n \left(\cos \frac{\sqrt{4\varepsilon n^2 - 1}\, t}{2\varepsilon} \right) \sin nx \right| \le$$

$$\le e^{-\frac{t}{2\varepsilon}} \left| \sum_{n=n^*+1}^{\infty} b_n \left(\cos \frac{n\,t}{\sqrt{\varepsilon}} \right) \sin nx \right| + e^{-\frac{t}{2\varepsilon}} \left| \sum_{n=n^*+1}^{\infty} b_n \left(\cos \frac{\sqrt{4\varepsilon n^2 - 1}}{2\varepsilon} - \cos \frac{n\,t}{\sqrt{\varepsilon}} \right) \sin nx \right| =$$

$$+2e^{-\frac{t}{2\varepsilon}} \left| \sum_{n=n^*+1}^{\infty} b_n \sin \left(\left(\frac{\sqrt{4\varepsilon n^2 - 1}}{2\varepsilon} + \frac{n}{\sqrt{\varepsilon}} \right) t \right) \sin \left(\left(\frac{\sqrt{4\varepsilon n^2 - 1}}{2\varepsilon} - \frac{n}{\sqrt{\varepsilon}} \right) t \right) \sin nx \right| \le$$

$$\le \frac{1}{2} e^{-t/(2\varepsilon)} \left| \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \left(n(x + \frac{t}{\sqrt{\varepsilon}}) \right) - \sum_{n=1}^{n^*} b_n \sin \left(n(x + \frac{t}{\sqrt{\varepsilon}}) \right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \left(n(x - \frac{t}{\sqrt{\varepsilon}}) \right) - \sum_{n=1}^{n^*} b_n \sin \left(n(x - \frac{t}{\sqrt{\varepsilon}}) \right) \right| +$$

$$+ 2\,\mathrm{e}^{-t/(2\varepsilon)} \mathrm{A} \sum_{n=n^*+1}^{\infty} \frac{1}{n} \left| \sin \left(\left(\frac{\sqrt{4\varepsilon n^2 - 1}}{2\varepsilon} - \frac{n}{\sqrt{\varepsilon}} \right) t \right) \right| \le$$

$$\le \frac{1}{2} e^{-t/(2\varepsilon)} \left| u_0(x + \frac{t}{\sqrt{\varepsilon}}) \right| + 2\sum_{n=1}^{n^*} \frac{A}{n} + \frac{1}{2} e^{-t/(2\varepsilon)} \left| u_0(x - \frac{t}{\sqrt{\varepsilon}}) \right| +$$

$$+ 2A\mathrm{e}^{-t/(2\varepsilon)} \sum_{n=n^*+1}^{\infty} \frac{1}{n} \left| \sin \left(\frac{\sqrt{4\varepsilon n^2 - 1} - 2\sqrt{\varepsilon} n}{2\varepsilon} t \right) \right| \le$$

$$\le e^{-t/(2\varepsilon)}(M + A(\ln n^* + 1)) + 2A\mathrm{e}^{-t/(2\varepsilon)} \sum_{n=n^*+1}^{\infty} \frac{1}{n}\left|\sin\frac{-1}{2\varepsilon(\sqrt{4\varepsilon n^2 - 1} + 2\sqrt{\varepsilon}n)}t\right| \le$$

$$\le e^{-t/(2\varepsilon)}(M + A(\ln\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}} + 1)) + 2A\mathrm{e}^{-t/(2\varepsilon)} \sum_{n=n^*+1}^{\infty} \frac{t}{4n^2\varepsilon\sqrt{\varepsilon}}.$$

Так как

$$\sum_{n=n^*+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n^*} < \frac{2}{n^* + 1} < 4\sqrt{\varepsilon},$$

то

$$S_3 \le e^{-t/(2\varepsilon)}\left(M + A(\ln\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}} + 1)\right) + 2A\frac{\mathrm{e}^{-t/(2\varepsilon)}t}{\varepsilon}.$$

Согласно лемме 1 при $\varepsilon < 1/\sqrt{e}$ и $t > 4\varepsilon \ln 1/\varepsilon$

$$S_3 \le \varepsilon^4\left(M + A(1 - \ln 2 + \frac{1}{2}\ln\frac{1}{\varepsilon}) + 8A\varepsilon^2 \ln\frac{1}{\varepsilon}\right).$$

Переходим к оценке

$$S_4 = \left|\sum_{n=n^*+1}^{\infty} b_n e^{-\frac{t}{2\varepsilon}}\left(\frac{\sin\left(\frac{\sqrt{4\varepsilon n^2 - 1}}{2\varepsilon}t\right)}{\sqrt{4\varepsilon n^2 - 1}}\right)\sin nx\right|.$$

Так как $\left|\dfrac{\sin x}{x}\right| \le 1,$ то

$$S_4 \le \left|\sum_{n=n^*+1}^{\infty} b_n e^{-\frac{t}{2\varepsilon}}\left(\frac{\sin\left(\frac{\sqrt{4\varepsilon n^2 - 1}}{2\varepsilon}t\right)}{\sqrt{4\varepsilon n^2 - 1}}\right)\sin nx\right| \le$$

$$\le \left|b_{n^*+1}te^{-t/(2\varepsilon)}\right| + \left|\sum_{n=n^*+2}^{\infty} b_n e^{-t/(2\varepsilon)}\frac{1}{\sqrt{4\varepsilon n^2 - 1}}\right| \le$$

$$\le \left|\frac{A}{n^*+1} 2\varepsilon \frac{t}{2\varepsilon} e^{-t/(2\varepsilon)}\right| + \left|\sum_{n=n^*+2}^{\infty} b_n e^{-t/(2\varepsilon)} \frac{1}{\sqrt{4\varepsilon n^2 - 1}}\right| \le$$

$$\le \left|2\sqrt{\varepsilon} A \cdot 2\varepsilon \frac{1}{e}\right| + \left|\sum_{n=1}^{\infty} b_{n+n^*+1} e^{-t/(2\varepsilon)} \frac{1}{\sqrt{4\varepsilon(n+n^*+1)^2 - 1}}\right| \le$$

$$\le \frac{4}{e}\varepsilon\sqrt{\varepsilon}A + \left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A}{n+n^*+1} e^{-t/(2\varepsilon)} \frac{1}{\sqrt{4\varepsilon n^2 + 8\varepsilon n(n^*+1) + 4\varepsilon(n^*+1)^2 - 1}}\right| \le$$

$$\le \frac{4}{e}\varepsilon\sqrt{\varepsilon}A + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A}{n} e^{-t/(2\varepsilon)} \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}n} \le \frac{4}{e}\varepsilon\sqrt{\varepsilon}A + \frac{Ae^{-t/(2\varepsilon)}}{2\sqrt{\varepsilon}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \le$$

$$\le \frac{4}{e}\varepsilon\sqrt{\varepsilon}A + \frac{Ae^{-t/(2\varepsilon)}}{\sqrt{\varepsilon}}.$$

Таким образом, при $t > 2\varepsilon \ln 1/\varepsilon$

$$S_4 \le A\sqrt{\varepsilon}\left(\frac{4}{e}\varepsilon + 1\right).$$

Наконец,

$$S_5 = \left|-\sum_{n=n^*+1}^{\infty} b_n e^{-n^2 t} \sin nx\right| \le A \sum_{n=n^*+1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-n^2 t} \le$$

$$\le \frac{A}{n^*+1} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(n+n^*)^2 t} = \frac{A}{n^*+1} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(n^2+2nn^*+(n^*)^2)t} =$$

$$= \frac{A}{n^*+1} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 t} e^{-2nn^* t} e^{-(n^*)^2 t} \le$$

$$\le A \frac{e^{-(n^*)^2 t}}{n^*+1} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 t} \le A \frac{e^{-\frac{(n^*+1)^2}{2}t}}{n^*+1} \int_0^{\infty} e^{-n^2 t} dn \le 4A \frac{\varepsilon e^{-\frac{t}{8\varepsilon}}}{\sqrt{t}} \frac{\sqrt{\pi}}{4}.$$

При t > 8ε ln 1/ε и ε < 1/3

$$S_5 \le \frac{A\varepsilon\sqrt{\pi}}{8 \ln 1/\varepsilon}.$$

В результате получаем оценку

$$\delta(x,t) \le \frac{2A\sqrt{\varepsilon}}{e^2 \ln\frac{1}{\varepsilon}}\left(\ln\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}+1\right)+A\sqrt{\varepsilon}+4A\varepsilon\sqrt{\varepsilon}\left(1-\ln 2+\frac{1}{2}\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)+$$

$$+\varepsilon^4\left(M+A(1-\ln 2+\frac{1}{2}\ln\frac{1}{\varepsilon})+8A\varepsilon^2\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)+A\sqrt{\varepsilon}\left(\frac{4}{e}\varepsilon+1\right)+\frac{A\varepsilon\sqrt{\pi}}{8\ln 1/\varepsilon},$$

В частности, при $\varepsilon < 0.01 \quad \delta(x,t) < 2.1A\sqrt{\varepsilon}+M\varepsilon^4$.

Таким образом, доказана

Т е о р е м а.

Для значений времени $t > 8\sqrt{\varepsilon}\ln 1/\varepsilon$ *и* $\varepsilon < 0.01$ *разность решений задач (1) и (6) по модулю не превышает*

$$\delta(x,t) < 2.1A\sqrt{\varepsilon}+M\varepsilon^4,$$

где константы М и А определяются формулами (2) и (3) соответственно.

Отметим, что, если $1/(2\sqrt{\varepsilon}) = \mathrm{n}_0$ представляет собой целое число, это не меняет результата, поскольку в этом случае для кратных корней в формуле (9) появляется член

$$b_{n_0}e^{-t/2\varepsilon}(1+t/2\varepsilon),$$

который имеет при наложенном на t условии более высокий порядок малости.

Ниже приведены результаты расчётов с $\varepsilon = 2\cdot 10^{-4}$ и $\varepsilon = 2\cdot 10^{-5}$ для начальной функции

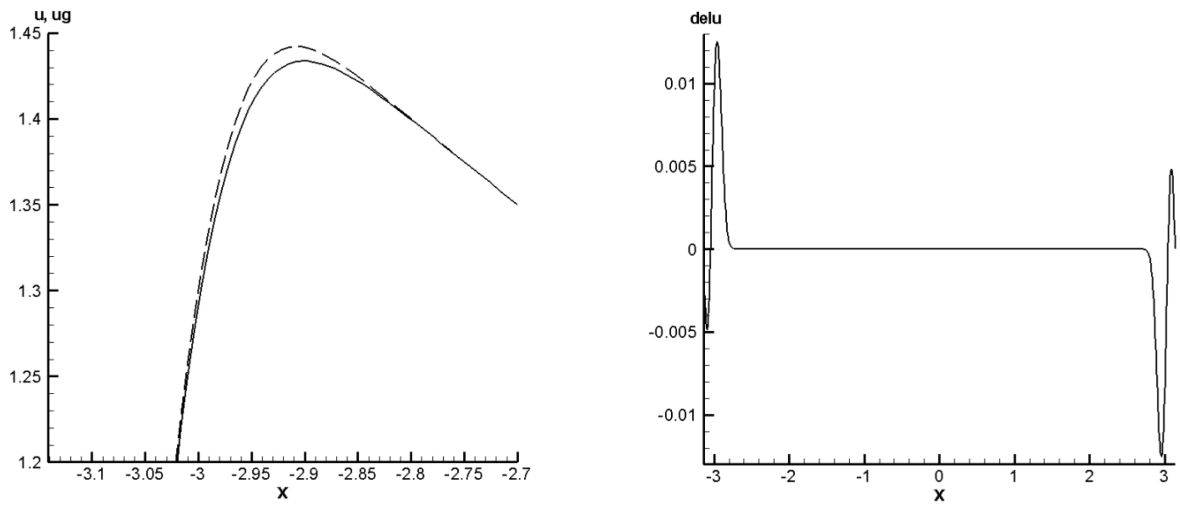
$$u_0(x) = -x \quad \text{для} \quad -\pi < x < \pi$$
$$u_0(\pi) = 0$$

на моменты времени t = 0.0044429, 0.0148096, 0.0014050, 0.0046832.

Значения решений задач (1) и (6) получались суммированием рядов (5) и (7) соответственно, при этом. При увеличении числа суммированных членов вдвое результат не менялся. В таблице приведены значения максимальной погрешности гиперболизации и оценка, полученная в настоящей работе. Из этих расчётов видно, что оценки выполняются с большим запасом и, возможно, могут быть уточнены.

Таблица 1

N, ε	t	$\delta_{\text{теор}} = 2.1A\sqrt{\varepsilon} + M\varepsilon^4$	$\delta_{\text{расч}} =$ $= \max \lvert u_г(i) - u(i) \rvert$
N=40000,	$t = 0.1\sqrt{\varepsilon}\pi = 0.0044429$	$\delta_{\text{m}} = 0.059397$	$\delta_{\text{m1}} = 0.0125258$
ε=2.E-4	$t = \sqrt{\varepsilon}\pi / 3 = 0.0148096$	$\delta_{\text{m}} = 0.059397$	$\delta_{\text{m1}} = 0.0035375$
N=40000,	$t = 0.1\sqrt{\varepsilon}\pi = 0.0014050$	$\delta_{\text{m}} = 0.018783$	$\delta_{\text{m1}} = 0.0037264$
ε =2.E-5	$t = \sqrt{\varepsilon}\pi / 3 = 0.0046832$	$\delta_{\text{m}} = 0.018783$	$\delta_{\text{m1}} = 0.0011005$



a) b)

Рис. 1.

На рис.1 приведены графики решения: a) задачи (1) − сплошная линия, и задачи (6) − пунктирная линия (увеличенный фрагмент); b) − график погрешности.

Заключение

Таким образом, отличие решений исходной и возмущённой задачи имеет место только в начальный момент времени, когда экспоненциально затухающая амплитуда разрыва остаётся достаточно большой.

Список литературы

1. Четверушкин Б.Н. Кинетические схемы и квазигазодинамическая система уравнений // М.: Макс Пресс, 2004.
2. Давыдов А.А., Четверушкин Б.Н., Шильников Е.В. Моделирование течений несжимаемой жидкости и слабосжимаемого газа на многоядерных гибридных вычислительных системах // ЖВМ и МФ. 2010. Т. 50. № 12. С. 2275-2284.
3. Четверушкин Б.Н., Д'Асчензо Н., Савельев В.И. Кинетические согласованные уравнения магнитной газовой динамики и их использование в высокопроизводительных вычислениях // Доклады РАН. 2014. Т. 457. № 5. С. 520-529.
4. Chetverushkin B.N., D'Aschenzo N., Ishanov S., Saveliev V. Hyperbolic type explicit kinetic scheme of magneto gas dynamic for high performance computing system // Russ J. Numer. Anal. and Math. Modeling. 2015. V. 30. № 1. P. 27-36.
5. Д'Асчензо Н., Савельев В.И., Четверушкин Б.Н. Об одном алгоритме решения параболических и эллиптических уравнений // ЖВМ и МФ. 2015. Т. 55. № 8. С. 1320-1328.
6. Злотник А.А., Четверушкин Б.Н. О параболичности квазигидродинамической системы уравнений, её гиперболической 2-го порядка модификации и устойчивости малых возмущений для них // ЖВМ и МФ. 2008. Т. 48. № 3. С. 445-472.
7. Елизарова Т.Г. Квазигазодинамические уравнения и методы расчёта вязких течений // М.: Науч. мир, 2007.
8. Тихонов А.Н. О зависимости решений дифференциальных уравнений от малого параметра // Матем. сборник. Нов. сер. 1948. Т. 22. № 2. С. 193-204.
9. Тихонов А.Н. О системах дифференциальных уравнений, содержащих параметры // Матем. сборник. Нов. сер. 1950. Т. 27. № 1. С. 47-156.
10. Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Волосов В.М. О зависимости решений дифференциальных уравнений от параметров // Труды 3-го Всесоюзн. матем. съезда. 1956. Т. 2. С. 96-97.
11. Репин С.И., Четверушкин Б.Н. Оценка разности приближённых решений задачи Коши для параболического диффузионного уравнения и гиперболического уравнения с малым параметром // Доклады РАН. 2013. Т. 451. № 3. С. 255-258.
12. Мышецкая Е.Е., Тишкин В.Ф. Оценки влияния гиперболизации для уравнения теплопроводности // ЖВМ и МФ. 2015. Т. 55. № 8. С. 1299-1304.
13. Мышецкая Е.Е., Тишкин В.Ф. Оценки влияния гиперболизации для уравнения теплопроводности // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2015. № 16. 12 с.

14. Сурначёв М.Д., Тишкин В.Ф., Четверушкин Б.Н. О законах сохранения для гиперболизированных уравнений // Дифференциальные уравнения. 2005. Т. 52. № 7. С. 859-865.
15. Ильин А.А., Рыков Ю.Г. О близости траекторий для модельных квазигазодинамических уравнений // Доклады РАН. 2016. Т. 470. № 4. С. 380-383.
16. Ильин А.А., Рыков Ю.Г. Об одном модельном уравнении с малым параметром при старшей производной по времени, возникающем при анализе некоторых квазигазодинамических систем уравнений // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2012. № 12. 9 с.
17. Ильин А.А., Рыков Ю.Г. Об одной модельной системе с малым параметром при старшей производной по времени, возникающей при анализе некоторых квазигазодинамических систем уравнений // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2012. № 75. 9 с.