ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 88 за 2017 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Батхин А.Б.

Вычисление обобщённого дискриминанта вещественного многочлена

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Батхин А.Б. Вычисление обобщённого дискриминанта вещественного многочлена // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2017. № 88. 40 с. doi:10.20948/prepr-2017-88
URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2017-88

О р д е н а Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.КЕЛДЫША
Р о с с и й с к о й   а к а д е м и и   н а у к

А. Б. Батхин

Вычисление обобщённого дискриминанта вещественного многочлена

Москва — 2017

УДК 512.62+004.421.6
Александр Борисович Батхин

Вычисление обобщённого дискриминанта вещественного многочлена. Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша, Москва, 2017.

Рассматривается обобщение классического дискриминанта вещественного многочлена, которое определяется с помощью линейного оператора Хана, понижающего степень многочлена на единицу. Исследуется структура обобщённого дискриминантного множества вещественного многочлена, т. е. множество всех значений пространства коэффициентов, при которых многочлен и результат применения к нему оператора Хана имеют общий корень. Структура обобщённого дискриминантного множества многочлена степени n описывается в терминах разбиения числа n. Предлагаются некоторые алгоритмы построения полиномиальной параметризации обобщённого дискриминантного множества в пространстве коэффициентов многочлена. Основные шаги алгоритмов, описанные в работе, реализованы в виде библиотеки в системе компьютерной алгебры `Maple`. Приведены примеры вычисления дискриминантного множества.

Ключевые слова: теория исключения, оператор Хана, обобщённый дискриминант, разбиение, компьютерная алгебра.

Alexander Borisovich Batkhin

Computation of generalized discriminant of a real polynomial

We consider a certain generalization of discriminant of a real polynomial, defined by the linear Hahn operator decreasing degree of the polynomial by one. We study the structure of the generalized discriminant set of the real polynomial i. e. the set of all the values of the polynomial coefficients at which the polynomial and its image of Hahn operator have common root. The structure of the generalized discriminant set of the polynomial of degree n is described by means of partitions of integer number n. Some algorithms of computation of polynomial parametrization of the generalized discriminant set in the coefficient space are proposed. Main steps of described algorithms are implemented as a software library in the computer algebra system `Maple`. Some examples of computations are proposed.

Key words: elimination theory, Hahn operator, generalized discriminant, partition, computer algebra.

Работа поддержана программой IV.1.1 ОМН РАН.

1. Введение

Пусть $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto g(x)$ некоторое заданное гладкое взаимно-однозначное отображение вещественной оси — области определения вещественного многочлена $f(x)$ с произвольными вещественными коэффициентами. Ставится задача сформулировать условия на коэффициенты многочлена, при выполнении которых он имеет корни t_i,t_j, связанные соотношением $g(t_i) = t_j$, а также исследовать в пространстве коэффициентов многочлена структуру алгебраического многообразия, на котором многочлен $f(x)$ имеет по крайней мере пару таких корней.

Такого рода задачи возникают при решении многих прикладных проблем. Например, условие целочисленной соизмеримости (кратности) корней характеристического многочлена матрицы линейной части уравнений движения вблизи положения равновесия выделяет в пространстве коэффициентов многочлена (или параметров уравнений движения) многообразия, на которых имеется резонанс между собственными частотами колебаний. Для многих систем ортогональных многочленов важным является условие на взаимное расположение их корней. Частным случаем такой ситуации является случай кратности корней.

Выполняя исследования устойчивости положения равновесия многопараметрических систем Гамильтона [1; 2], автор обратил внимание, что множества в пространстве коэффициентов вещественного многочлена, на которых корни последнего либо кратные (т. н. дискриминантное множество), либо соизмеримые (т. н. резонансное множество), обладают определённой иерархической структурой. С одной стороны, эта иерархия оказалась тесно связанной со структурой разбиения натурального числа $n = \deg f(x)$, с другой стороны, компоненты различных размерностей таких множеств могли быть описаны с помощью наглядной геометрической конструкции, а именно, каждая компонента следующей размерности получалась как некоторая линейчатая поверхность, где роль направляющей играла одна из компонент меньшей размерности. В данной работе автор попытался несколько расширить полученные конструкции, и её результатом стало определённое обобщение классического объекта — дискриминанта $D(f)$ многочлена $f(x)$. Это обобщение естественным образом включило в себя как классический дискриминант, так и его аналоги, возникающие при использовании q-дифференциального и разностного операторов, имеющих и разработанное исчисление [3—6], и важные приложения [7; 8]. Оказалось возможным перенести конструкции, полученные ранее для исследования дискриминантного [9—11] и резонансного [12—14] множеств, на более общий случай.

Цель данной работы — предложить конструктивный алгоритм вычисления параметрического представления всех компонент g-дискриминантного множества $\mathcal{D}_g(f)$ приведённого вещественного многочлена $f(x)$.

Препринт состоит из введения, четырёх разделов, заключения и трёх списков: литературы, рисунков и некоторых условных обозначений. В разделе 2 даются основные определения и приводятся вспомогательные утверждения. В разделе 3 вводится понятие обобщённого дискриминанта $\mathcal{D}_g(f)$ многочлена и обсуждаются методы его вычисления. Центральная часть работы — это раздел 4, где дано описание иерархической структуры g-дискриминантного множества $\mathcal{D}_g(f)$, указана связь этой структуры с разбиением натурального числа n, описан алгоритм построения параметрического представления компонент этого множества и предложено описание программной библиотеки для системы компьютерной алгебры `Maple`. Наконец, в разделе 5 показано, как можно организовать вычисление параметризации g-дискриминантного множества, когда на коэффициенты исходного многочлена наложены ограничения в виде некоторых полиномиальных соотношений. Приведены примеры работы алгоритма.

Некоторые предварительные результаты работы докладывались на международных конференциях Polynomial Computer Algebra 2016, г. Санкт-Петербург, 18–23 апреля 2016 г. [15], «Геометрический анализ и его приложения», Волгоград, 30 мая – 3 июня 2016 г., ‘‘Computer Algebra’’, Москва, Россия, 29 июня – 2 июля 2016 г., «Актуальные проблемы прикладной математики и информационных технологий — Аль-Хорезми 2016», Бухара, Узбекистан, 9–10 ноября 2016 г., ‘‘Algebraic and geometric methods of analysis’’, Одесса, 31 мая – 5 июня 2017 г.

2. Определения и вспомогательные утверждения

Здесь и далее $f_n(x)$ — это приведённый многочлен n-й степени с вещественными коэффициентами:

$$f_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_n. \tag{2.1}$$

Вещественное n-мерное пространство $\Pi \equiv \mathbb{R}^n$ его коэффициентов $a_1,a_2,\ldots a_n$ назовём **пространством коэффициентов** многочлена (2.1).

Рассмотрим следующую конструкцию, позволяющую некоторым естественным образом обобщить дискриминант многочлена $f_n(x)$.

Пусть $\mathbb{P}$ — пространство многочленов над $\mathbb{R}$ и пусть на $\mathbb{R}$ определён диффеоморфизм (гладкое взаимно однозначное отображение)

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto g(x),$$

который индуцирует оператор

$$\mathcal{E}_g : \mathbb{P} \to \mathbb{P} : f \mapsto f(g(x)).$$

Рассмотрим некоторый линейный оператор $\mathcal{A}$ на $\mathbb{P}$, удовлетворяющий двум условиям.

Условие 1: понижения порядка

$$\deg(\mathcal{A}f_n)(x) = n-1.$$

В частности, $\mathcal{A}x = 1$.

Условие 2: аналог правила Лейбница

$$(\mathcal{A}\,xf_n)(x) = f_n(x) + g(x)(\mathcal{A}f_n)(x).$$

Как показано в [16] для случая обобщённого оператора разделённой разности, условие 1 выполняется, если для диффеоморфизма $g(x)$ имеют место следующие равенства:

$$\deg(g(x)+x) = 1 \quad \text{и} \quad \deg(g^2(x)+xg(x)+x^2) = 2.$$

Здесь рассматривается случай, когда диффеоморфизм g является линейным отображением вида:

$$g(x) \equiv qx+\omega, \quad q,\omega \in \mathbb{R}, q \notin \{-1,0\}. \tag{2.2}$$

Через g^k обозначим k-ю итерацию диффеоморфизма g, $k \in \mathbb{Z}$. Тогда с учётом (2.2) формула k-й итерации диффеоморфизма g имеет вид

$$\begin{aligned} g^k(x) =& q^k x + [k]_q\omega, && \text{при } k \geqslant 0, \\ g^k(x) =& q^{-k}(x-[k]_q\omega), && \text{при } k \leqslant 0, \end{aligned}$$

где $[k]_q$ — так называемые q-аналог числа k (см. далее определение 1).

Диффеоморфизм g имеет неподвижную точку $\omega_0 = \omega/(1-q)$.

Оператор $\mathcal{A}$, индуцированный этим диффеоморфизмом, назовём **оператором Хана** и обозначим символом $\mathcal{A}_{q,\omega}$ [8] (в диссертациях [5; 6] он обозначен $D_{q,\omega}$). Его частный случай при $\omega = 1$ рассмотрен в [4, Ch. 5], где он обозначен $\Delta_{H,q}$.

Оператор $\mathcal{A}_{q,\omega}$ был введён Вольфгангом Ханом (Wolfgang Hahn) [17] в работе 1949 года. Там же показано, что оператор $\mathcal{A}_{q,\omega}$, определённый на $\mathbb{P}$, имеет вид

$$(\mathcal{A}_{q,\omega}f)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \dfrac{f(qx+\omega)-f(x)}{(q-1)x+\omega}, & x \neq \omega_0, \\ f'(\omega_0), & x = \omega_0, \end{cases} \tag{2.3}$$

для всех значений параметров $q \in \mathbb{R}\backslash\{-1,0\}$, $\omega \in \mathbb{R}$ и $(q,\omega) \neq (1,0)$.

Поскольку существенным свойством оператора $\mathcal{A}_{q,\omega}$ является понижение степени многочлена $f(x)$ на единицу (условие 2), то значение $q=-1$ исключено. Если многочлен f зависит от нескольких переменных, то аргумент в левой части (2.3) указывает, относительно какой переменной действует оператор Хана.

Утверждение 1 ([5]). *Пусть f и h — два многочлена, тогда*

1. $(\mathcal{A}_{q,\omega}f)(x) \equiv 0 \Longleftrightarrow f(x) \equiv \text{const}$;
2. $(\mathcal{A}_{q,\omega}(f+h))(x) = (\mathcal{A}_{q,\omega}f)(x) + (\mathcal{A}_{q,\omega}h)(x)$;
3. $(\mathcal{A}_{q,\omega}(fh))(x) = (\mathcal{A}_{q,\omega}f)(x)h(x) + f(g(x))(\mathcal{A}_{q,\omega}h)(x)$;
4. $\left(\mathcal{A}_{q,\omega}\dfrac{f}{h}\right)(x) = \dfrac{(\mathcal{A}_{q,\omega}f)(x)h(x) - f(x)(\mathcal{A}_{q,\omega}h)(x)}{h(x)h(g(x))}$;
5. $f(qx+\omega) = f(x) + ((q-1)x+\omega)(\mathcal{A}_{q,\omega}f)(x)$.

В силу этого утверждения результат применения оператора $\mathcal{A}_{q,\omega}$ к многочлену $f(x)$ назовём его g-**производной**.

Очевидно, что оператор Хана $\mathcal{A}_{q,\omega}$ может рассматриваться как обобщение следующих операторов:

- q-дифференциального оператора Джексона
$$(\mathcal{A}_q f)(x) = \frac{f(qx) - f(x)}{(q-1)x}, \tag{2.4}$$
при $\omega = 0$ и $q \neq 1$;
- разностного оператора $(\Delta_\omega f)(x) = \dfrac{f(x+\omega) - f(x)}{\omega}$ при $q = 1$;
- классического дифференциального оператора d/dx в пределе при $q \to 1$ и $\omega = 0$.

q-аналоги многих математических объектов появились уже в работах Леонарда Эйлера, а затем получили свое развитие в трудах многих математиков (см. исторический обзор в [4]). Разработанное q-исчисление последнее время стало частью более общей конструкции, получившей название «квантовое исчисление» (см., например, [3—6]). Оно находит многочисленные приложения в различных разделах современной математики и теоретической физики [3; 4; 7; 18].

Ниже приведём некоторые определения и обозначения, ставшие стандартными для q-исчисления.

Определение 1. Определим q-**скобку** $[a]_q$ числа a, **сдвинутый** q-**факториал (**q-**символ Похгаммера)** $(a;q)_n$, q-**факториал** $[n]_q!$, q-**биномиальные (гауссовы) коэффициенты** $\binom{n}{k}_q$ следующим образом:

$$[a]_q = \frac{q^a - 1}{q - 1}, \qquad a \in \mathbb{R}\backslash\{0\},0$$

$$(a;q)_n = \prod_{k=0}^{n-1}\left(1 - aq^k\right), \qquad (a;q)_0 = 1,$$

$$[n]_q! = \prod_{k=1}^{n}[k]_q = \frac{(q;q)_n}{(1-q)^n}, \qquad q \neq 1,$$

$$\binom{n}{k}_q = \frac{[n]_q!}{[n-k]_q!\,[k]_q!} = \prod_{i=1}^{k}\frac{q^{n-i+1}-1}{q^i-1} \qquad .$$

При $q \to 1$ все определённые выше объекты становятся классическими.

q-скобка $[a]_q$ обладает следующими очевидными свойствами:

$$[n+k]_q - [k]_q = q^k[n]_q, \quad [n+k]_q - [n]_q = q^n[k]_q. \tag{2.5}$$

Для стандартного бинома $(x-a)^n$ его q-аналогом является произведение

$$\{x;a\}_{n;q} \overset{\text{def}}{=} \prod_{i=0}^{n-1}\left(x - aq^i\right), \quad \{x;t\}_{0;q} = 1, \tag{2.6}$$

которое назовём q-биномом. Введём в рассмотрение его g-аналог

$$\{x;t\}_{n;g} \overset{\text{def}}{=} \prod_{i=0}^{n-1}(x - g^i(t)), \quad \{x;t\}_{0;g} = 1. \tag{2.7}$$

Для доказательства основных результатов работы нам понадобятся несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 1. *g-производные g-бинома* (2.7) *по переменной x и параметру t суть*

$$(\mathcal{A}_{q,\omega}\{x;t\}_{n;g})(x) = [n]_q\{x;t\}_{(n-1);g}, \tag{2.8}$$
$$(\mathcal{A}_{q,\omega}\{x;t\}_{n;g})(t) = -[n]_q\{x;g(t)\}_{(n-1);g}. \tag{2.9}$$

Доказательство. Докажем формулы (2.8) и (2.9) по индукции. При $n = 1$ имеем $(\mathcal{A}_{q,\omega}\{x;t\}_{1;g})(x) = 1$, $(\mathcal{A}_{q,\omega}\{x;t\}_{1;g})(t) = -1$. Теперь представим g-бином $\{x;t\}_{(n+1);g}$ в виде $(x - g^n(t))\{x;t\}_{n;g}$. Тогда, в силу условия 2 на странице 5 или свойства 3 утверждения 1, имеем

$$(\mathcal{A}_{q,\omega}\{x;t\}_{(n+1);g})(x) = \{x;t\}_{n;g} + g(x - g^n(t))(\mathcal{A}_{q,\omega}\{x;t\}_{n;g})(x) =$$
$$= \left(x - g^{n-1}t + [n]_q(qx + \omega - g^n(t)\right)\{x;t\}_{(n-1);g}.$$

С учётом (2.5) множитель, стоящий перед $\{x;t\}_{(n-1);g}$ в последней формуле, может быть преобразован к виду $[n+1]_q(x-g^{n-1}(t))$, что завершает доказательство формулы (2.8).

Формула (2.9) доказывается аналогично с той лишь разницей, что g-бином $\{x;t\}_{(n+1);g}$ следует представить в виде $(x-t)\{x;g(t)\}_{n;g}$, а диффеоморфизм g в формуле условия 2 применять для параметра t. □

Лемма 2. *k-я g-производная g-бинома $\{x;t\}_{n;g}$ по переменной x равна*

$$(\mathcal{A}^k_{q,\omega}\{x;t\}_{n;g})(x) = \frac{[n]_q!}{[n-k]_q!}\{x;t\}_{(n-k);g}.$$

k-я g-производная g-бинома $\{x;t\}_{n;g}$ по параметру t равна

$$(\mathcal{A}^k_{q,\omega}\{x;t\}_{n;g})(t) = (-1)^k q^{\binom{k}{2}}\frac{[n]_q!}{[n-k]_q!}\{x;g^k(t)\}_{(n-k);g}.$$

Следствие 1. *Для g-бинома* (2.7) *его k-е g-производные по параметру t и переменной x связаны для $k \leqslant n$ соотношением*

$$(\mathcal{A}^k_{q,\omega}\{x;t\}_{n;g})(t) = (-1)^k q^{\binom{k}{2}}\,(\mathcal{A}_{q,\omega}\{x;t\}_{n;g})(x)\big|_{t=g^{-k}(t)}.$$

С помощью g-аналога одного из тождеств Коши для конечных произведений [19, п. 2.6.12] можно доказать следующее тождество.

Лемма 3. *Для любого m, $0 < m \leqslant n$ имеет место равенство*

$$\sum_{k=0}^{m}(-1)^i q^{\binom{i}{2}}\binom{m}{i}_q\{t_2;t_1\}_{k;g}\{x;g^k(t_1)\}_{(n-k);g} \;=\; \{x;t_2\}_{m;g}\{x;g^m(t_1)\}_{(n-m);g}.$$

3. Обобщённый дискриминант и его вычисление

Для многих приложений, связанных с теорией ортогональных многочленов и их различных обобщений, важно уметь определять, при каких условиях на коэффициенты a_i, $i = 1,\ldots,n$, многочлена $f_n(x)$ последний имеет корни, связанные друг с другом соотношением $g(t_i) = t_j$, где g — диффеоморфизм (2.2).

Определение 2. Пару корней t_i, t_j, $i,j = 1,\ldots,n$, $i \neq j$, многочлена $f_n(x)$ назовем g-**связанной**, если $g(t_i) = t_j$ для $g(x)$ вида (2.2).

Рассмотрим следующую задачу:

Описать и исследовать множество в пространстве коэффициентов $\Pi \equiv \mathbb{R}^n$ многочлена $f_n(x)$, на котором этот многочлен имеет по крайней мере пару g-связанных корней.

Определение 3. Множество в Π, на котором многочлен $f_n(x)$ имеет по крайней мере пару g-связанных корней, назовём **g-дискриминантным множеством** многочлена $f_n(x)$ и обозначим $\mathcal{D}_g(f_n)$.

Частные случаи этой задачи для дискриминантного множества $\mathcal{D}(f_n)$ (при $g(x) \equiv x$) [9—11] и резонансного множества $\mathcal{R}_{p:q}(f_n)$ (при $g(x) \equiv qx$) [12—14] многочлена $f_n(x)$ были решены комбинацией методов классической теории исключений и компьютерной алгебры. Ниже приведём более общую конструкцию. По аналогии с классическим дискриминантом определим обобщённый дискриминант $D(f,\mathcal{A})$, индуцированный линейным оператором $\mathcal{A}$.

Замечание 1. *Пусть многочлен $f_n(x)$ имеет простой корень t^*, равный значению ω_0. Поскольку этот корень есть неподвижная точка диффеоморфизма g, то он является g-связанным с самим собой. Строго говоря, в этом случае пары g-связанных корней нет. Следовательно, корень t^* должен иметь кратность не менее двух. Отметим, что аналогичное требование формулировалось автором в [20] для случая соизмеримых корней, чтобы исключить наличие у многочлена $f_n(x)$ простого нулевого корня.*

Определение 4. Определим **обобщённый дискриминант** $D(f;\mathcal{A})$ многочлена $f(x)$, порождённый линейным оператором $\mathcal{A}$, как результант пары многочленов $f(x)$ и $(\mathcal{A}f)(x)$:

$$D(f;\mathcal{A}) = (-1)^{n(n-1)/2}\,\mathrm{Res}_x(f(x),(\mathcal{A}f)(x)).$$

Для оператора $\mathcal{A}_{q,\omega}$ соответствующий обобщённый дискриминант многочлена $f(x)$ будем обозначать для краткости $D_g(f)$.

Пусть t_i, $i = 1,\ldots,n$, — корни многочлена $f_n(x)$. Тогда, по аналогии с известной формулой результанта двух многочленов [21—23], обобщённый дискриминант $D_g(f_n)$ вычисляется по следующей формуле:

$$D_g(f_n) = (-1)^{n(n-1)/2}\prod_{i=1}^{n}(\mathcal{A}_{q,\omega}f_n)(t_i) = \prod_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}(g(t_i)-t_j).$$

Замечание 2. *В работах [18; 24] приведён q-аналог дискриминанта $D(f_n)$ в симметричной форме*

$$D(f_n(x);\mathcal{A}_{q,0}) = q^{\binom{n}{2}}\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}\left(q^{-1/2}t_i - q^{1/2}t_j\right)\left(q^{1/2}t_i - q^{-1/2}t_j\right),$$

который явно не обобщается на случай диффеоморфизма (2.2).

Определение 5. Последовательностью $\mathrm{Seq}_g^{(k)}(t_1)$ g-**связанных корней** длины k назовём конечную последовательность $\{t_i\}$, $i = 1,\ldots,k$, каждый член которой начиная со второго является g-связанным корнем предыдущего члена последовательности: $g(t_i) = t_{i+1}$. Начальный корень t_1 назовём **порождающим корнем** соответствующей последовательности.

g-дискриминантное множество $\mathcal{D}_g(f_n)$ для каждого фиксированного набора параметров (q,ω) состоит из конечного числа многообразий $\mathcal{V}_k$, на каждом из которых многочлен $f_n(x)$ имеет k последовательностей g-связанных корней $\mathrm{Seq}_g^{(l_i)}(t_i)$ длины l_i с различными порождающими корнями t_i, $i = 1,\ldots,k$. Суммарная длина этих последовательностей g-связанных корней равна степени n многочлена $f_n(x)$.

Для описания каждого из многообразий $\mathcal{V}_k$ нужно знать структуру корней наибольшего общего делителя многочленов $f_n(x)$ и $f_n(g(x))$, т. е. многочлена

$$\tilde{f}_g(x) \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{gcd}(f_n(x),f_n(g(x))). \tag{3.1}$$

Пусть $d = \deg \tilde{f}_g > 0$, тогда корни многочлена $\tilde{f}_g(x)$ дают информацию о g-связанных корнях исходного многочлена $f_n(x)$: каждой последовательности длины k g-связанных корней $\mathrm{Seq}_g^{(k)}(t_i)$ многочлена $\tilde{f}_g(x)$ соответствует последовательность длины $k+1$ g-связанных корней $\mathrm{Seq}_g^{(k+1)}(t_i)$ многочлена $f_n(x)$. Структуру корней многочлена удобно определить с помощью субрезультантов пары многочленов $f_n(x)$ и $(\mathcal{A}_{q,\omega} f_n)(x)$, которые могут быть определены по аналогии с классическими субрезультантами (подробнее см. [10; 23; 25—27]).

Для того чтобы получить выражение обобщённого субдискриминанта многочлена $f_n(x)$ через его коэффициенты можно применить любой из методов классической теории исключений. Если заменить производную $f_n'(x)$ многочленом $(\mathcal{A}_{q,\omega} f_n)(x)$, то любой из матричных методов (см. [11; 22; 23; 28]) вычисления результанта пары многочленов позволит получить выражение обобщённого дискриминанта. Покажем это на примере метода Сильвестра.

Пусть t — такой корень многочлена $f_n(x)$, что $f_n(t) = f_n(g(t)) = 0$. Тогда запишем систему, состоящую из двух групп уравнений: n уравнений $t^k f_n(t) = 0$, $k = 0,\ldots,n-1$, и n уравнений $t^k f_n(g(t)) = 0$, $k = 0,\ldots,n-1$. Заменим каждое из уравнений $t^k f_n(g(t)) = 0$ второй группы ему равносильным $t^k(f_n(g(t)) - f_n(t))/(g(t) - t) \equiv t^k(\mathcal{A}_{q,\omega} f_n)(t) = 0$. В силу условия 1 для оператора $\mathcal{A}_{q,\omega}$ многочлен $(\mathcal{A}_{q,\omega} f_n)(t)$ имеет степень $n-1$, и, следовательно, в базисе мономов $\{t^{2n-2},\ldots,t,1\}$ система, состоящая из $(2n-1)$-го уравнения $t^k f_n(t) = 0$, $k = 0,\ldots,n-2$, $t^k(\mathcal{A}_{q,\omega} f_n)(t) = 0$, $k = n-1,\ldots,0$, имеет нетривиальное решение, если определитель соответствующей $(2n-1)\times(2n-1)$ матрицы $\mathbf{M}_{2n-1}$ равен нулю. Матрицу $\mathbf{M}_{2n-1}$ назовём **обобщённой матрицей Сильвестра** многочлена $f_n(x)$ и обозначим её $\mathbf{Sylv}_g(f_n)$.

Определение 6. Пусть $\mathbf{M}_n$ — квадратная матрица размера $n \times n$. Тогда матрица $\mathbf{M}_{n-k}$, $k < [n/2]$, полученная вычёркиванием по k крайних строк и столбцов с обеих сторон исходной матрицы $\mathbf{M}_n$, называется её **k-м иннором** [26, гл. 1]. k-м субрезультантом $\mathrm{Res}_x^{(k)}(f,h)$ многочленов $f(x)$ и $h(x)$ называется определитель k-го иннора матрицы Сильвестра $\mathbf{Sylv}(f,h)$ [25]. Соответственно **k-м обобщённым субдискриминантом** $D_g^{(k)}(f_n)$ многочлена $f_n(x)$ назовём определитель k-го иннора обобщённой матрицы Сильвестра $\mathbf{Sylv}_g(f_n)$.

Поскольку матрица Сильвестра $\mathbf{Sylv}_g(f_n)$ нечётного размера $(2n-1) \times \times (2n-1)$, то она имеет $n-2$ нетривиальных обобщённых дискриминанта, а её $(n-1)$-й субдискриминант равен коэффициенту при старшем мономе многочлена $(\mathcal{A}_{q,\omega} f_n)(x)$, т. е. $[n]_q$.

Пример 1. Субдискриминанты кубического многочлена $f_3(x)$.

Рассмотрим приведённый кубический многочлен

$$f_3 = x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3. \tag{3.2}$$

Его g-производная имеет вид

$$(\mathcal{A}_{q,\omega} f_3)(x) = [3]_q x^2 + ([2]_q a_1 + (2q+1)\omega)x + \omega^2 + \omega a_1 + a_2,$$

а её коэффициенты при x^i обозначим соответственно a_i', $i = 0,1,2$. Тогда обобщённая матрица Сильвестра $\mathbf{Sylv}_g(f_3)$ есть

$$\begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & 1 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & 0 & a_0' & a_1' & a_2' \\ 0 & a_0' & a_1' & a_2' & 0 \\ a_0' & a_1' & a_2' & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

Её 1-й и 2-й инноры получаются путём вычёркивания строк и столбцов матрицы по соответствующим пунктирным линиям.

Кубика (3.2) имеет три обобщённых субдискриминанта

$$
\begin{aligned}
&D_g^{(1)}(f_3) = [3]_q,\\
&D_g^{(1)}(f_3) = qa_1^2 + 2\omega(q-1)a_1 - [3]_q a_2 - 3\omega^2,\\
&D_g^{(0)}(f_3) = -\omega^2 q^2 a_1^4 + \omega q^2(q-1)a_1^3 a_2 - q^2[2]_q^2 a_1^3 a_3 - 2\omega^3 q(q-1)a_1^3 +\\
&\quad + q^3 a_1^2 a_2^2 + 3\omega^2 q(q^2+1)a_1^2 a_2 - \omega q(q-1)(2q+1)(q+2)a_1^2 a_3 -\\
&\quad - \omega^4(q^2-4q+1)a_1^2 - \omega q(q-1)[3]_q a_1 a_2^2 +\\
&\quad + q[3]_q(q^2+4q+1)a_1 a_2 a_3 + \omega^3(q-1)(2q^2+q+2)a_1 a_2 -\\
&\quad - \omega^2(q+2)(2q+1)(q-1)^2 a_1 a_3 + 2\omega^5(q-1)a_1 - q^2[2]_q^2 a_2^3 -\\
&\quad - \omega^2[3]_q^2 a_2^2 + \omega(q-1)(2q+1)(q+2)[3]_q a_2 a_3 - 2\omega^4[3]_q a_2 -\\
&\quad - [3]_q^3 a_3^2 + \omega^3(q-1)(2q+1)(q+2)a_3 - \omega^6.
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

Приведённые формулы содержат только примитивную часть выражения субдискриминантов, т. е. они сокращены на наибольший общий делитель всех мономов. Эти выражения существенно сложнее соответствующих выражений для классических субдискриминантов (см [10; 11, п. 4]). □

Пусть многочлен $f_n(x)$ имеет последовательность g-связанных корней длины k с порождающим корнем t: $f_n(x) = u(x)\{x;t\}_{k;q}$. Здесь многочлен $u(x)$ степени $n-k$ не имеет ни одного корня, g-связанного с t. Тогда с учётом (2.5) получим

$$f_n(g(x)) = u(g(x))\prod_{i=0}^{k-1}\big(g(x)-g^i(t)\big) = u(g(x))(g(x)-t)q^{k-1}\{x;t\}_{(k-1);q}.$$

Следовательно, многочлен $\tilde{f}_g$ в формуле (3.1) имеет последовательность g-связанных корней длины $k-1$ с порождающим корнем t.

В силу приведённых выше рассуждений, а также пункта а) теоремы 3.3 из [23] имеет место следующая

Теорема 1. *Многочлен $f_n(x)$ имеет ровно $n-d$ различных последовательностей g-связанных корней, т. е.* $\deg \tilde{f}_g(x) = d$*, тогда и только тогда, когда в последовательности i-х обобщённых субдискриминантов $D_g^{(i)}(f_n)$ первым отличным от нуля является субдискриминант $D_g^{(d)}(f_n)$ с номером d.*

В терминах инноров матрицы Сильвестра $\mathbf{Sylv}_g(f_n)$ можно получить выражение для наибольшего общего делителя многочленов $f_n(x)$ и $(\mathcal{A}_{q,\omega}f_n)(x)$. Пусть в условиях теоремы 1 первый отличный от нуля обобщённый дискриминант имеет номер d, $0 < d < n-1$. Обозначим через $\mathbf{M}_d^{(i)}$, $i = 1,\ldots,d$, d-й иннор модифицированной обобщённой матрицы Сильвестра $\mathbf{Sylv}_g(f_n)$, в которой столбец с номером $2n-1-d$ заменён её столбцом с номером $2n-1-d+i$, а через $M_d^{(i)}$ — определитель этого иннора. Тогда по аналогии с пунктом б) теоремы 3.3 [23] можно доказать следующее утверждение.

Утверждение 2. *Если в последовательности обобщённых субдискриминантов $D_g^{(i)}(f_n)$, $i=0,\ldots,n-1$, первым отличным от нуля является субдискриминант с номером d, то*

$$\mathrm{gcd}\,(f_n(x),(\mathcal{A}_{q,\omega}f_n)(x)) = D_g^{(d)}x^d + M_d^{(1)}x^{d-1}+\cdots+M_d^{(i)}. \tag{3.5}$$

Пример 2 (продолжение примера 1)**.** Вычисление g-связанных корней кубического многочлена $f_3(x)$.

Пусть первый отличный от нуля субдискриминант кубики (3.2) имеет номер 1: $D_g^{(1)}(f_3)\neq 0$. Тогда согласно утверждению 2 g-связанный корень t_1 является корнем многочлена

$$\tilde{f}_3 \equiv D_g^{(1)}(f_3)x + M_1^{(1)}(f_3), \tag{3.6}$$

где $M_1^{(1)}(f_3)$ — определитель 1-го иннора матрицы (3.3), в которой четвёртый столбец заменён её пятым столбцом:

$$M_1^{(1)}(f_3) = \omega q^2a_1^2+q^2a_1a_2+\omega^2\left(q^2-2q-1\right)a_1-\omega(2q+1)a_2-[3]_q^2a_3-\omega^3(2q+1). \tag{3.7}$$

Поскольку в этом случае многочлен $f_3(x)$ делится без остатка на g-бином $\{x,t_1\}_{2;g}$, то его простой корень t_2 находится из частного $f_3(x)/\{x,t_1\}_{2;g}$.

Если $D_g^{(0)}(f_3) = D_g^{(1)}(f_3) = 0$, то в этом случае НОД многочлена $f_3(x)$ и его g-производной является квадратным трёхчленом с парой g-связанных корней:

$$\tilde{f}_3 \equiv \mathrm{gcd}(f_3,(\mathcal{A}_{q,\omega}f_3)) = [3]_qx^2+((q+1)a_1+(2q+1)\omega)x+\omega^2+\omega a_1+a_2.$$

Очевидно, что его g-дискриминант $D_g^{(0)}(\tilde{f}_3)$ равен нулю, а тогда из утверждения (2) и формулы (3.5) находим выражение для корня t_1:

$$t_1 = -\frac{qa_1+(q+2)\omega}{[3]_q!}.$$

В этом случае кубика (3.2) есть g-бином $\{x,t_1\}_{3;g}$. $\square$

Замечание 3. *Для поставленной выше задачи (точнее, даже для более общей задачи, когда диффеоморфизм g есть некоторый многочлен) можно предложить решение, основанное на преобразовании Чирнгауза [21, § 136] . Пусть* *многочлен $f_n(x)$ имеет корни t_i, $i = 1,\ldots,n$. Тогда существует многочлен $F(x)$, корни которого имеют вид $g(t_i)$, $i = 1,\ldots,n$. Этот многочлен является результантом исходного $f_n(z)$ и многочлена $x - g(z)$ относительно переменной z: $F(x) = \mathrm{Res}_z(f_n(z),x - g(z))$. Тогда равенство нулю результанта пары многочленов $f_n(x)$ и $F(x)$ относительно переменной x обеспечивает выполнение условия, что для хотя бы одного корня t_i есть g-связанный с ним корень $g(t_i)$.*

У такого подхода есть два недостатка. Во-первых, для многообразия, определяемого уравнением $\mathrm{Res}_x(f_n(x),F(x)) = 0$, получить представление о его структуре выглядит довольно сложной задачей. Во-вторых, указанный выше результант будет равен нулю, если у многочлена $f_n(x)$ один из простых корней равен ω_0, т. е., как следует из замечания 1, пары g-связанных корней в этом случае может и не быть вовсе.

4. Параметризация g-дискриминантного множества $\mathcal{D}_g(f_n)$

4.1. Компоненты множества $\mathcal{D}_g(f_n)$. Множество $\mathcal{D}_g(f_n)$ состоит из алгебраических многообразий $\mathcal{V}_l$ размерностей l, $1 \leqslant l \leqslant n-1$. Общее число этих многообразий, а также число различных многообразий $\mathcal{V}_l$, имеющих фиксированную размерность l, зависит от числа различных разбиений степени n многочлена $f_n(x)$.

Определение 7. Разбиением λ натурального числа n называется всякая конечная неубывающая последовательность натуральных чисел $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_k$, для которой

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = n.$$

Каждое из разбиений запишем в виде $\lambda = [1^{n_1}2^{n_2}3^{n_3}\ldots]$, где n_i — число повторений слагаемого i в разбиении, т. е. $\sum_{i=1}^{k} i n_i = n$.

Основными числовыми функциями, связанными с разбиениями числа n, являются (см. [29; 30]):

- функция $p(n)$ — определяет число всех разбиений числа n,
- функция $p_k(n)$ — определяет число всех разбиений n на сумму k слагаемых,
- функция $q(n)$ — определяет число всех разбиений n на различные слагаемые,
- функция $q_k(n)$ — определяет число всех разбиений n на сумму k различных слагаемых.

Очевидно, что $p(n) = \sum\limits_{k=1}^{n} p_k(n)$ и $q(n) = \sum\limits_{k=1}^{n} q_k(n)$.

Рассмотрим разбиение $\lambda = [1^{n_1}2^{n_2}\ldots i^{n_i}\ldots]$ натурального числа n. Величина i в разбиении λ задаёт длину последовательности g-связанных корней для соответствующего порождающего корня t_i, а n_i — число различных порождающих корней, задающих последовательность корней длины i. Тогда $l = \sum_i n_i$ есть число различных порождающих корней многочлена $f_n(x)$ для фиксированного набора параметров (q,ω) и $\sum_i in_i = n$. Любое разбиение λ числа n определяет некоторую структуру g-связанных корней многочлена, и этой структуре соответствует в пространстве коэффициентов Π некоторое алгебраическое многообразие $\mathcal{V}_l^i$, $i = 1, \ldots ,p_l(n)$, размерности l по числу различных порождающих корней t_i. Число таких многообразий размерности l равно $p_l(n)$, а общее число многообразий всех возможных размерностей равно $p(n) - 1$, поскольку разбиению $[1^n]$ соответствует ситуация, когда все порождающие корни многочлена $f_n(x)$ задают последовательности корней длины 1, т. е. среди всех корней многочлена $f_n(x)$ нет ни одной пары g-связанных корней.

Замечание 4. *В силу того что исходный многочлен $f_n(x)$ вещественный, комплексные корни его образуют пары — сам комплексный корень t_i и ему комплексно сопряженный $\bar{t}_i$. Если порождающий комплексный корень t_i задает последовательность корней длины k, то и сопряжённый ему корень $\bar{t}_i$ задает последовательность корней такой же длины, в которой каждый корень является комплексно сопряжённым соответствующему корню из последовательности корней, задаваемых корнем t_i. Значит, в разбиении λ, которое соответствует такой структуре корней, будет два равных слагаемых. Следовательно, на алгебраическом многообразии $\mathcal{V}_l$ размерности l в Π многочлен $f_n(x)$ имеет только вещественные корни, если соответствующее ему разбиение числа n есть разбиение, состоящее из l различных слагаемых. Число таких разбиений для фиксированного l есть значение функции $q_l(n)$, а общее число компонент g-дискриминантного множества $\mathcal{D}_g(f_n)$, на которых все корни вещественны, задаётся функцией $q(n) = \sum\limits_{k=1}^{n} q_k(n)$.*

4.2. Иерархическая структура множества $\mathcal{D}_g(f_n)$. Рассмотрим начальное разбиение $\left[n^1\right]$, которое соответствует случаю, когда имеется единственная последовательность g-связанных корней длины n, задаваемая порождающим корнем t_1. Тогда многочлен $f_n(x;t_1) \equiv \{x;t_1\}_{n;g}$ и его коэффициенты a_i выражаются через элементарные симметрические многочлены $\sigma_i(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ [30; 31], вычисленные на последовательности g-связанных корней $g^j(t_1)$, $j = 0,\ldots,n-1$,

$$a_i = (-1)^i \sigma_i \left(t_1, g(t_1), \ldots, g^{n-1}(t_1)\right), i = 1, \ldots, n. \tag{4.1}$$

В силу однородности симметрических многочленов σ_i коэффициенты a_i являются многочленами степени i параметра t_1. В общем случае выражения для коэффициентов a_i, $i = 1, \ldots, n$, из формулы (4.1) находятся с помощью производящей функции

$$\prod_{i=0}^{n-1} \bigl(x - g^i(t_1)\bigr) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i.$$

Коэффициенты a_i являются функциями параметров q, ω и корня t_1. Их можно рассматривать как вариант обобщённых чисел Стирлинга первого рода (см. [32, п. 3.5]).

Определение 8. Пусть определены последовательность чисел $\mathbf{b} = (b_0, b_1, \ldots)$ и некоторый обобщённый бином степени n вида:

$$\{x\}_{n,\mathbf{b}} = \prod_{i=0}^{n-1} (x - b_i), \quad \{x\}_{0,\mathbf{b}} = 1.$$

Раскрывая скобки и группируя выражения по возрастающим степеням x, получим

$$\{x\}_{n,\mathbf{b}} = \sum_{k=0}^{n} s(n,k;\mathbf{b}) x^k, \quad n = 0,1,\ldots$$

Очевидно, что $s(0,0;\mathbf{b}) = s(n,k;\mathbf{b}) = 0$ для $k > n$. Коэффициенты $s(n,k;\mathbf{b})$ назовём **обобщёнными числами Стирлинга первого рода**.

Согласно теореме 3.8 из [32] модули $|s(n,k;\mathbf{b})|$ можно вычислить с помощью рекуррентного соотношения

$$|s(n,k;\mathbf{b})| = |s(n-1,k-1;\mathbf{b})| + b_{n-1}|s(n-1,k;\mathbf{b})|, \quad k = 1, \ldots, n, \tag{4.2}$$

с начальными условиями

$$|s(0,0;\mathbf{b})| = 1, \quad |s(n,0;\mathbf{b})| = \prod_{i=0}^{n-1} b_i. \tag{4.3}$$

Наконец, отметим, что

$$|s(n,k;\mathbf{b})| = s(n,k;-\mathbf{b}) = (-1)^{n-k} s(n,k;\mathbf{b}).$$

Для вычисления коэффициентов a_i с помощью обобщённых чисел Стирлинга первого рода рассмотрим в качестве последовательности **b** последовательность i-х итераций параметра t_1: $\mathbf{b} = \bigl(t_1, g(t_1), \ldots, g^{n-1}(t_1)\bigr)$. Для применения рекуррентного соотношения (4.2) нужно вычислить второе из начальных условий (4.3), которое для диффеоморфизма g в силу (2.2) имеет вид

$$|s(n,0;\mathbf{b})| = \prod_{i=0}^{n-1} g^i(t_1) = \prod_{i=0}^{n-1} \bigl(q^i t_1 + [i]_q \omega\bigr) \equiv (-1)^n \{0, t_1\}_{n;g}.$$

Покажем, что последнее произведение является однородным полиномом степени n от параметров t_1, ω, коэффициенты которого выражаются через так называемые q-числа Стирлинга первого рода $s(n,k)_q$ [33], [4, п. 5.2] (или $s(n,k;q)$ в обозначениях [32, п. 3.5]), которые по определению суть коэффициенты g-бинома $\{x,0\}_{n;g}$ при k-х степенях переменной x. Действительно, используя второе из соотношений (2.5) при $k = -n$, имеем $[n]_q/q^n = -[-n]_q$. Тогда

$$\prod_{i=0}^{n-1} \left(q^i t_1 + [i]_q \omega\right) = q^{\binom{n}{2}} \omega^n \prod_{i=0}^{n-1} \left(\frac{t_1}{\omega} - [-i]_q\right) = \sum_{i=0}^{n} \tilde{s}(n,i)_q t_1^i \omega^{n-i},$$

где $\tilde{s}(n,i)_q \equiv q^{\binom{n}{2}} s(n,i)_{1/q}$. Некоторые значения для q-чисел Стирлинга $s(n,k)_q$, $n = 0, \ldots, 5$, приведены в [4].

Для частных случаев оператора Хана (2.3) выражение для a_i может быть получено с помощью того или иного обобщения биномиальной теоремы. Так, при $(q,\omega) \to (1,0)$ коэффициенты a_i выражаются через классические биномиальные коэффициенты, при $q = 1$ — через числа Стирлинга первого рода $s(n,k)$, при $\omega = 0$ — через q-биномиальные (гауссовы) коэффициенты $\binom{n}{i}_q$.

Согласно теореме 1 в этом случае $\deg \tilde{f}_g(x) = n - 1$, т. е. в последовательности обобщённых субдискриминантов $D_g^{(i)}(f_n)$, $i = 0, \ldots, n-1$, первый отличный от нуля обобщённый субдискриминант есть $D_g^{(n-1)}(f_n)$. Первые $n-1$ субдискриминанты задают идеал, нули которого представляют собой одномерное многообразие (кривую) $\mathcal{V}_1$ в пространстве коэффициентов Π. Эта кривая не имеет особых точек, поскольку в силу её параметрического представления (4.1) $a_i \sim t_1^i$ и, следовательно, производные da_i/dt_1 одновременно в нуль не обращаются.

Рассмотрим следующую конструкцию. Выберем на кривой $\mathcal{V}_1$ пару точек, соответствующих значениям параметра t_1 и $g(t_1)$, и проведём через них прямую. Покажем, что на этой прямой многочлен $f_n(x)$ имеет одну последовательность g-связанных корней длины $n-1$ и одну цепочку корней длины 1, т. е. простой корень. Действительно, рассмотрим вспомогательный многочлен

$$h(x;t_1,v) \stackrel{\text{def}}{=} f_n(x;t_1) + v\frac{f_n(x;g(t_1)) - f_n(x;t_1)}{g(t_1) - t_1}. \qquad (4.4)$$

Тогда с учетом леммы 1 получим, что

$$h(x;t_1,v) = (x - t_1 - v[n]_q) \prod_{j=1}^{n-1} \left(x - g^j(t_1)\right).$$

Выбирая $v = (t_1 - t_2)/[n]_q$, получим, что $h(x; t_1,t_2) = (x - t_2) \prod_{j=1}^{n-1} \big(x - g^j(t_1)\big)$, т. е. многочлен $h(x; t_1,t_2)$ имеет один простой корень t_2 и последовательность корней $\mathrm{Seq}_g^{(n-1)}(g(t_1))$. Очевидно, что структура корней в этом случае соответствует разбиению $\left[1^1 (n-1)^1\right]$.

Таким образом, коэффициенты вспомогательного многочлена (4.4) задают в пространстве Π двумерное многообразие $\mathcal{V}_2$, представляющее собой линейчатую поверхность. Оно образовано секущими, которые пересекают кривую $\mathcal{V}_1$ в точках, соответствующих таким значениям t_1' и t_1'' параметра t_1, что $t_1'' = g\,(t_1')$, где $t_1' \neq \omega_0$. Для $t_1' = \omega_0$ секущая превращается в касательную к кривой $\mathcal{V}_l$. При $(q,\omega) \to (1,0)$ эта линейчатая поверхность становится касательной развёртывающейся поверхностью, параметризация которой задаётся формулой (20) из [11].

Описанную выше процедуру теперь можно повторить для многообразия $\mathcal{V}_2$ и получить параметрическое представление части многообразия $\mathcal{V}_3$, на котором имеется последовательность корней длины $n-2$ и пара простых корней, т. е. ему соответствует разбиение $\left[1^2 (n-2)^1\right]$. Продолжая последовательно эту процедуру, в итоге придём к параметрическому представлению многообразия $\mathcal{V}_{n-1}$ наибольшей размерности. На нем имеется одна последовательность g-связанных корней длины 2, а остальные корни простые, т. е. ему соответствует разбиение $\left[1^{n-2} 2^1\right]$. Очевидно, что в силу замечания 4 полученная параметризация описывает только ту часть многообразия $\mathcal{V}_l$, $3 \leqslant l < n$, на которой все корни многочлена $f_n(x)$ вещественные.

Приведённые выше рассуждения позволяют сформулировать основной результат.

Теорема 2. *Пусть в пространстве* Π *имеется многообразие* $\mathcal{V}_l$, $\dim \mathcal{V}_l = l$, *на котором многочлен* $f_n(x)$ *имеет* l *различных последовательностей* g*-связанных корней, причем последовательность корней* $\mathrm{Seq}_g^{(m)}(t_1)$ *имеет длину* $m > 1$. *Другие корни* $(l-1)$*-е последовательности не являются* g*-связанными со всеми корнями последовательности* $\mathrm{Seq}_g^{(m)}(t_1)$.

Пусть $\mathbf{r}_l(t_1, \ldots, t_l)$ *— параметризация многообразия* $\mathcal{V}_l$, *тогда формула*

$$\mathbf{r}_l(t_1, \ldots, t_l, t_{l+1}) = \mathbf{r}_l(t_1, \ldots, t_l) + \frac{t_{l+1} - t_1}{[m]_q} (\mathcal{A}_{q,\omega} \mathbf{r}_l)(t_1) \tag{4.5}$$

задаёт параметризацию части многообразия $\mathcal{V}_{l+1}$, *на котором имеется последовательность корней* $\mathrm{Seq}_g^{(m-1)}(g(t_1))$, *простой корень* t_{l+1}, *а остальные последовательности корней такие же, как на исходном многообразии* $\mathcal{V}_l$.

Пусть один из корней, например u_1, многочлена $u(x)$ в условии теоремы 2 простой, т. е. $u(x) = (x - u_1)\tilde{u}(x)$. Тогда на части многообразия $\mathcal{V}_{l+1}$ исходный многочлен имеет пару комплексно-сопряжённых корней. Чтобы получить параметрическое представление этой части многообразия $\mathcal{V}_{l+1}$, следует сделать такую замену параметров:

$$t_{l+1} \to v_1 + iv_2, \quad u_1 \to v_1 - iv_2.$$

Эта замена параметров приведёт к тому, что многочлен $f_n(x)$ на части многообразия $\mathcal{V}_{l+1}$, где есть пара комплексно-сопряжённых корней, можно будет представить в виде

$$f_n(x) = \tilde{u}(x) \left((x - v_1)^2 + v_2^2\right) \{x,t\}_{(m-1);g}. \tag{4.6}$$

Если поменять знак перед слагаемым v_2^2 в правой части формулы (4.6), то получим факторизацию многочлена $f_n(x)$ на той части многообразия $\mathcal{V}_{l+1}$, где имеется пара простых вещественных корней $v_1 \pm v_2$. Таким образом, для получения параметризации всего многообразия $\mathcal{V}_{l+1}$ следует использовать подстановку

$$t_{l+1} \to v_1 + \sqrt{v_2}, \quad u_1 \to v_1 - \sqrt{v_2}, \tag{4.7}$$

которая, в итоге, позволит записать многочлен $f_n(x)$ на всем многообразии $\mathcal{V}_{l+1}$ в виде

$$f_n(x) = \left((x - v_1)^2 + v_2\right) \tilde{u}(x) \left\{x,g^j(t_1)\right\}_{(m-1);g}.$$

Итак, для всех многообразий $\mathcal{V}_l \subset \mathcal{D}_g(f_n)$ размерности l, $l > 2$, соответствующих разбиениям вида $\left[1^{l-1}(n-l+1)^1\right]$, параметризация строится с помощью следующего следствия.

Следствие 2. *Для того чтобы получить параметрическое представление многообразия $\mathcal{V}_l \subset \mathcal{D}_g(f_n)$ размерности l, $l > 2$, на котором многочлен $f_n(x)$ имеет две последовательности g-связанных корней равной длины, необходимо $l-1$ раз применить преобразование* (4.5) *к параметризации* (4.1)*, а затем к каждой из различных $[(l-1)/2]$ пар параметров t_i, $i = 2, \ldots, l$, применить преобразование* (4.7)*. Здесь $[x]$ — целая часть числа x.*

Осталось рассмотреть процедуру получения параметризации тех многообразий $\mathcal{V}_l$, соответствующие разбиения которых не охватываются описанными выше. Пусть многочлен $f_n(x)$ имеет по крайней мере две последовательности g-связанных корней длины k_i и k_j. Каждая из этих последовательностей задаётся порождающим корнем t_i и t_j соответственно. Если положить $t_j = g^i(t_i)$, то получим одну последовательность g-связанных корней длины $t_i + t_j$ с порождающим корнем t_i. Таким образом, комбинируя две последовательности связанных корней, получим параметризацию многообразия, размерность которого на единицу меньше размерности исходного.

В [11; 13] показано, что, последовательно применяя описанные выше преобразования к параметрическому представлению одномерного многообразия $\mathcal{V}_1$, можно получить параметризацию любой компоненты дискриминантного $\mathcal{D}(f_n)$ и резонансного $\mathcal{R}_q(f_n)$ множеств многочлена $f_n(x)$. Такой набор действий выглядит достаточно трудоёмким, поскольку для большинства многообразий $\mathcal{V}_l$, $l = 1, \ldots, n-1$, требует многократного применения указанных преобразований. Здесь покажем, что можно существенно сократить количество выполняемых действий.

Вновь рассмотрим многочлен вида $f_n(x;t_1) \equiv \{x;t_1\}_{n;q}$, структура корней которого соответствует разбиению $\left[n^1\right]$. Применяя леммы 2 и 3, получим, что для любого k, $0 < k \leqslant n$, имеет место тождество

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}_q \frac{[n-i]_q!}{[n]_q!} \left(\mathcal{A}^i_{q,\omega} f_n\right)(t_1)\{t_2;t_1\}_{i;g} = f_k(x;t_2) \cdot f_{n-k}(x;g^k(t_1)), \qquad (4.8)$$

где $(\mathcal{A}^0_{q,\omega} f)(x) \equiv f(x)$. Следовательно, формула (4.8) позволяет перейти от многочлена со структурой корней, соответствующей разбиению $\left[n^1\right]$, к многочлену, структура корней которого задаётся разбиениями $\left[k^1(n-k)^1\right]$ или $\left[(n/2)^2\right]$, если $k = n/2$. В последнем случае требуется применение дополнительного преобразования из следствия 2.

Очевидно, что формула (4.8) позволяет сформулировать более общий вариант теоремы 2.

Теорема 3. *Пусть в пространстве* Π *имеется многообразие* $\mathcal{V}_l$, $\dim \mathcal{V}_l = l$, *на котором многочлен* $f_n(x)$ *имеет* l *различных последовательностей* g*-связанных корней, причём последовательность корней* $\mathrm{Seq}_g^{(m)}(t_1)$ *имеет длину* $m > 1$. *Другие корни* $(l-1)$*-е последовательности не являются* g*-связанными со всеми корнями последовательности* $\mathrm{Seq}_g^{(m)}(t_1)$.

Пусть $\mathbf{r}_l(t_1, \ldots, t_l)$ *— параметризация многообразия* $\mathcal{V}_l$, *тогда для* $0 < k < m$ *формула*

$$\mathbf{r}_l(t_1, \ldots, t_l, t_{l+1}) = \mathbf{r}_l(t_1, \ldots, t_l) + \\ + \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i}_q \frac{[m-i]_q!}{[m]_q!} \left(\mathcal{A}^i_{q,\omega} \mathbf{r}_l\right)(t_1)\{t_{l+1};t_1\}_{i;g} \qquad (4.9)$$

задает параметризацию части многообразия $\mathcal{V}_{l+1}$, *на котором имеется две последовательности корней* $\mathrm{Seq}_g^{(m-k)}(g^k(t_1))$ *и* $\mathrm{Seq}_g^{(k)}(g(t_{l+1}))$, *а остальные последовательности корней такие же, как на исходном многообразии* $\mathcal{V}_l$.

4.3. Алгоритм вычисления параметризации множества $\mathcal{D}_g(f_n)$. Введём две основные операции, которые позволят последовательно перейти от параметрического представления одномерного многообразия $\mathcal{V}_1$ к параметризации всех других компонентов g-дискриминантного множества $\mathcal{D}_g(f_n)$.

1. Назовём операцию перехода от многообразия $\mathcal{V}_l$ к многообразию $\mathcal{V}_{l+1}$ в теореме 3 **«ПОДЪЁМ»** порядка k. Эта операция позволяет получить параметризацию многообразия, размерность которого на единицу больше размерности исходного. Если на нем многочлен $f_n(x)$ имеет только вещественные корни, то получим полную параметризацию этого многообразия, если имеются комплексные корни, то применим следующую операцию.
2. Операцию, основанную на замене (4.7), назовем **«ПРОДОЛЖЕНИЕ»**. Эта операция позволяет получить параметризацию всего многообразия $\mathcal{V}_{l+1}$, полученного в результате операции «ПОДЪЁМ», в случае, когда на последнем имеются комплексно-сопряжённые корни.

Опишем алгоритм получения параметрического представления алгебраических многообразий $\mathcal{V}_l^k$, $l = 1,\dots,n-1$, $k = 1,\dots,p_l(n)$, составляющих g-дискриминантное множество $\mathcal{D}_g(f_n)$.

Шаг I. Вначале строим параметрическое представление одномерного многообразия $\mathcal{V}_1$ по формулам (4.1).

Шаг II. Последовательно применяем к нему операцию «ПОДЪЁМ» порядка k, $k = 1,\dots,[n/2]$, получаем параметризации многообразий $\mathcal{V}_2^k$, соответствующих разбиениям $\left[k^1(n-k)^1\right]$.

Шаг III. Последовательно используем операцию «ПОДЪЁМ» соответствующего порядка до тех пор, пока не получим параметрическое представление всех компонент $\mathcal{V}_l$, $l = 1,\dots,n-1$, g-дискриминантного множества $\mathcal{D}_g(f_n)$.

Шаг IV. Применяем операцию «ПРОДОЛЖЕНИЕ» к параметризациям тех компонент, на которых многочлен $f_n(x)$ имеет комплексно-сопряжённые корни.

Поскольку на каждом шаге алгоритма мы остаёмся в рамках полиномиальных параметризаций, то имеет место следующее

Утверждение 3. *g-дискриминантное множество $\mathcal{D}_g(f_n)$ вещественного многочлена $f_n(x)$ для фиксированных значений параметров (q,ω) оператора Хана* (2.3) *допускает полиномиальную параметризацию каждого из составляющих его алгебраических многообразий $\mathcal{V}_l^k$, $l = 1,\dots,n-1$, $k = 1,\dots,p_l(n)$.*

4.4. Программная реализация. Для организации вычисления g-дискриминантного множества $\mathcal{D}_g(f_n)$ был реализован набор процедур для системы компьютерной алгебры `Maple`. Этот набор процедур собран в виде программной библиотеки `gDiscrSet`, в которую вошли следующие процедуры.

• Процедура `gSubDiscrim` позволяет вычислить одним из трех матричных методов выражение k-го обобщённого субдискриминанта $D_g(f_n)$ многочлена $f_n(x)$ относительно переменной x. Методом, используемым по умолчанию, является метод Сильвестра, описанный выше. Помимо этого метода, можно использовать метод Безу, основанный на построении матрицы Безу в симметричной форме и вычислении её соответствующих главных миноров, а также метод Кронекера, в реализации которого используется ганкелева матрица, построенная из коэффициентов разложения рациональной функции $(\mathcal{A}_{q,\omega}f_n)(x)/f_n(x)$ на бесконечности. Подробнее о матричных методах вычисления результанта пары многочленов см. [11; 23; 28]. Входными аргументами процедуры являются: многочлен $f_n(x)$, имя переменной x, относительно которой вычисляется субдискриминант, порядок субдискриминанта k и, опционально, название метода. Процедура `gSubDiscrim` использует пакет `LinearAlgebra`.

• Процедура `MkParV1` вычисляет параметрическое представление многообразия $\mathcal{V}_1$ по формуле (4.1). При этом для частных случаев оператора Хана (2.3) используется процедура вычисления q-биномиальных коэффициентов из пакета `QDifferenceEquations`. Входными аргументами процедуры являются степень многочлена n, имя параметра (по умолчанию t_1), имя левых частей в формуле (4.1) (по умолчанию a).

• Процедура `ProcUp` реализует операцию «ПОДЪЕМ» k-го порядка с помощью формулы (4.9) для параметрического представления многообразия $\mathcal{V}_l$, на котором многочлен $f_n(x)$ имеет последовательность g-связанных корней длины m, $1 < m \leqslant n$. Её входными параметрами являются параметризация многообразия V_l, длина m последовательности g-связанных корней, порядок k операции.

• Процедура `ProcCont` осуществляет продолжение параметризации многообразия $\mathcal{V}_{l+1}$, полученной с помощью процедуры `ProcUp`, в случае, когда на этом многообразии имеются комплексно-сопряжённые корни. Входными параметрами процедуры являются параметризация, полученная в результате применения процедуры `ProcUp`, длина последовательности g-связанных комплексно-сопряжённых корней, номера параметров, которые соответствуют этим корням.

Также в библиотеку включены некоторые вспомогательные процедуры, обеспечивающие вычисление диффеоморфизма g, оператора Хана $\mathcal{A}_{q,\omega}$ и их итераций.

Пример 3 (продолжение примеров 1 и 2)**.** g-дискриминантное множество кубики (3.2).

В качестве примера работы алгоритма рассмотрим структуру g-дискриминантного множества $\mathcal{D}_g(f_3)$ кубического многочлена (3.2). Все вычисления проводились в `Maple` с помощью библиотеки `gDiscrSet`, описанной в подпункте 4.4.

Поскольку $p(3) - 1 = 2$, то g-дискриминантное множество $\mathcal{D}_g(f_3)$ состоит из двух компонент $\mathcal{V}_1(f_3)$ и $\mathcal{V}_2(f_3)$, соответствующих разбиениям $\left[3^1\right]$ и $\left[1^1 2^1\right]$. Их праметризации получаются последовательным применением процедур `MkParV1` и `ProcUpk` библиотеки `gDiscrSet`.

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_1(f_3) : \{a_1 = -[3]_q t_1 - \omega(q+2), a_2 x = q[3]_q t_1^2 + 2\omega[3]_q t_1 + \omega[2]_q,\\ a_3 = -t_1\left(q^3 t_1^2 + \omega(2q+1)t_1 + \omega^2[2]_q\right)\},\end{aligned} \tag{4.10}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_2(f_3) : \{a_1 = -[2]_q t_1 - t_2 - \omega, a_2 \ = q t_1^2 + [2]_q t_1 t_2 + \omega(t_1 + t_2),\\ a_3 = -t_1 t_2\left(q t_1 + \omega\right)\}.\end{aligned} \tag{4.11}$$

В силу того что на многообразии $\mathcal{V}_1(f_3)$ нет комплексных корней, имеем $\mathcal{V}_1(f_3) \subset \mathcal{V}_2(f_3)$. При этом на многообразии $\mathcal{V}_1$ многочлен $f_3(x) \equiv \{x; t_1\}_{3;q}$, а на многообразии $\mathcal{V}_2$ — $f_3(x) \equiv \{x; t_1\}_{2;q} \cdot \{x; t_2\}_{1;q}$. Многообразия $\mathcal{V}_2(f_3)$ и $\mathcal{V}_1(f_3)$ показаны на рис. 1.

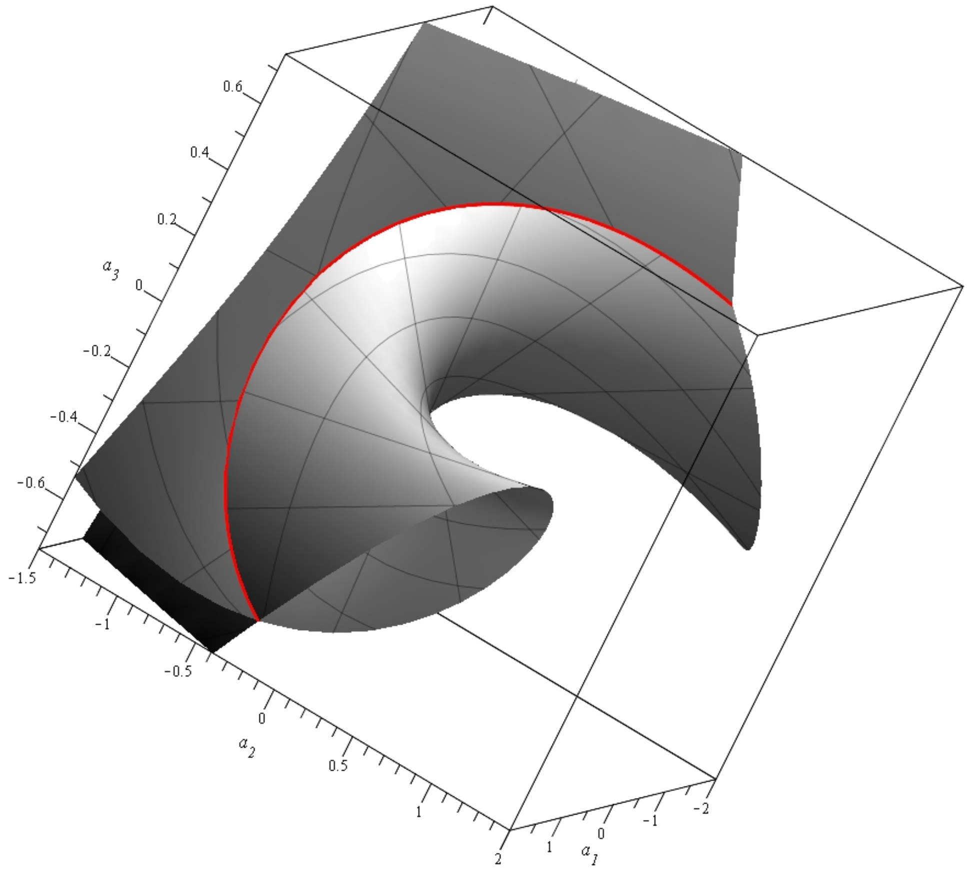


Рис. 1. g-Дискриминантное множество $\mathcal{D}_g(f_3)$ для значений $q = 0.8$ и $\omega = 1$. Красным цветом показана кривая самопересечения $\mathcal{V}_1(f_3)$.

Используя утверждение 2 и пример 2, покажем, что многообразие $\mathcal{V}_2(f_3)$ бирационально эквивалентно плоскости $\mathbb{R}^2$. Действительно, из формулы (3.6) g-связанный корень t_1 есть

$$t_1 = -\frac{M_1^{(1)}(f_3)}{D_g^{(1)}(f_3)},$$

где $M_1^{(1)}(f_3)$ и $D_g^{(1)}(f_3)$ согласно (3.7) и (3.4) соответственно суть полиномы от коэффициентов a_1,a_2,a_3. Таким образом, t_1 есть рациональная функция от коэффициентов, а простой корень t_2 находится после этого из параметризации (4.11): $t_2 = -[2]_q t_1 - \omega$.

Для каждого фиксированного значения $t_1 \equiv z_1$ параметризация (4.11) определяет прямую, пересекающую кривую $\mathcal{V}_1(f_3)$ в двух точках, задаваемых значениями параметра $t_1 = z_1$ и $t_1 = g^{-1}(z_1)$. Значит, многообразие $\mathcal{V}_2(f_3)$ представляет собой линейчатую развёртывающуюся поверхность [34] со скрученной кубикой (4.10) в качестве направляющей. Эта поверхность самопересекается по своей направляющей $\mathcal{V}_1(f_3)$, которая, в свою очередь, является множеством особых точек поверхности $\mathcal{V}_2(f_3)$. На плоскости (t_1,t_2) кривой $\mathcal{V}_1(f_3)$ соответствует пара прямых $g(t_2) - t_1 = 0$ и $t_2 - g^2(t_1) = 0$, пересекающихся в точке $\mathcal{P} = (\omega_0,\omega_0)$, где ω_0 — неподвижная точка отображения (2.2) (см. рис. 2).

Зафиксируем один из двух параметров q или ω и рассмотрим $\mathcal{V}_2(f_3)$ как однопараметрическое семейство поверхностей в $\mathbb{R}^3$. В каждом из двух случаев выясним, имеет ли такое однопараметрическое семейство огибающую поверхность и, если имеет, то каков её вид.

Необходимыми условиями существования огибающей [35, п. 6.9] являются принадлежность параметризации классу C^1 и равенство нулю смешанного произведения трёх касательных векторов, полученных дифференцированием параметризации поверхности $\mathbf{r}(t_1,t_2,\alpha)$ по каждому из параметров t_1,t_2,α, где α есть либо q, либо ω:

$$h(\mathbf{r}) \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbf{r}_{t_1},\mathbf{r}_{t_2},\mathbf{r}_\alpha) = 0. \tag{4.12}$$

Здесь $(\cdot, \cdot ,\cdot)$ — смешанное произведение, а частное дифференцирование по соответствующей переменной обозначено её нижним индексом.

Достаточными условиями существования огибающей [35, п. 6.11] и её гладкого касания семейством являются следующие:

1. гладкость параметризации класса C^2;
2. выполнение условия (4.12);
3. $[\mathbf{r}_{t_1},\mathbf{r}_{t_2}] \neq 0$ в точке касания огибающей, где $[\cdot,\cdot]$ — векторное произведение;
4. $|h_{t_1}(\mathbf{r})| + |h_{t_2}(\mathbf{r})| \neq 0$ в точке касания огибающей;

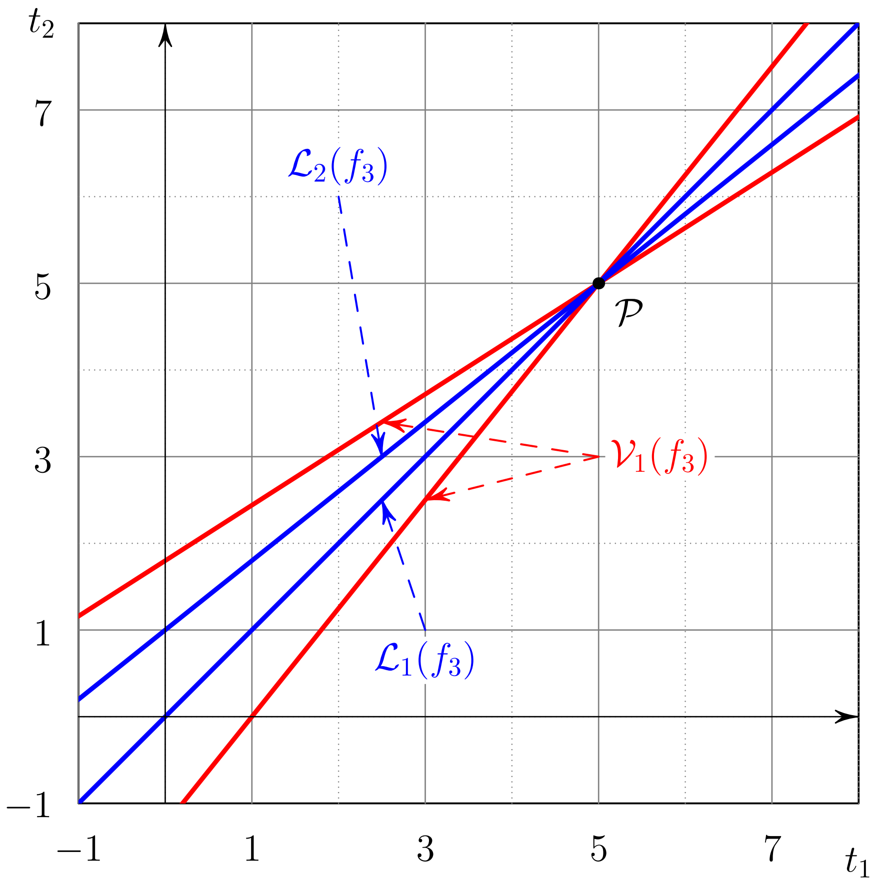


Рис. 2. Плоскость (t_1,t_2), бирационально эквивалентная обобщённой дискриминантной поверхности $\mathcal{V}_2(f_3)$. Изображение соответствует значениям параметров $q = 0.8$ и $\omega = 1$. Красным прямым соответствует кривая самопересечения $\mathcal{V}_1(f_3)$. Синим прямым $\mathcal{L}_{1,2}$ — кривые касания поверхностей $\mathcal{V}_2(f_3)$ и $\mathcal{D}(f_3)$.

5. и, наконец, невырожденность матрицы

$$H(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} h_{t_1}(\mathbf{r}) & h_{t_2}(\mathbf{r}) & h_\alpha(\mathbf{r}) \\ (\mathbf{r}_{t_1},\mathbf{r}_{t_1}) & (\mathbf{r}_{t_1},\mathbf{r}_{t_2}) & (\mathbf{r}_{t_1},\mathbf{r}_\alpha) \\ (\mathbf{r}_{t_2},\mathbf{r}_{t_1}) & (\mathbf{r}_{t_2},\mathbf{r}_{t_2}) & (\mathbf{r}_{t_2},\mathbf{r}_\alpha) \end{pmatrix}$$

в точке касания огибающей, где $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение.

Рассмотрим выполнение указанных выше условий для двух случаев однопараметрических семейств g-дискриминантных поверхностей.

Случай $q = \mathrm{const}$**,** $q \neq -1{,}0$**.** Тогда

$$h(\mathbf{r}) = (t_1 - t_2)(g(t_1) - t_1)(g(t_1) - t_2).$$

Условия $t_1 = t_2$ и $g(t_1) = t_2$ соответствуют ситуации, когда кубический многочлен имеет пару кратных корней, т. е. в этом случае огибающая семейства $\mathcal{V}_2(f_3)$ при фиксированном параметре q является дискриминантной поверхностью. При условии $g(t_1) = t_1$ имеем ситуацию, когда секущая прямая, проведённая к кривой $\mathcal{V}_1(f_3)$, становится касательной, но при этом достаточное условие 3 не выполнено.

Случай $\omega = \text{const}$. Тогда

$$h(\mathbf{r}) = t_1(t_1 - t_2)(g(t_1) - t_1)(g(t_1) - t_2).$$

Условия $t_1 = t_2$, $g(t_1) = t_2$ и $g(t_1) = t_1$ аналогичны предыдущему случаю, а при $t_1 = 0$ достаточное условие 3 не выполнено.

Итак, в каждом из двух случаев огибающей семейства однопараметрических поверхностей является дискриминантная поверхность $\mathcal{D}(f_3)$ (см. рис. 3). Её параметризация получается из (4.11) при $(q,\omega) \to (1,0)$. Непосредственным вычислением можно показать, что дискриминантная поверхность, как огибающая семейства, имеет ребро возврата (касп) при условии $t_1 = t_2$. Параметризация каспа получается из (4.10) при $(q,\omega) \to (1,0)$.

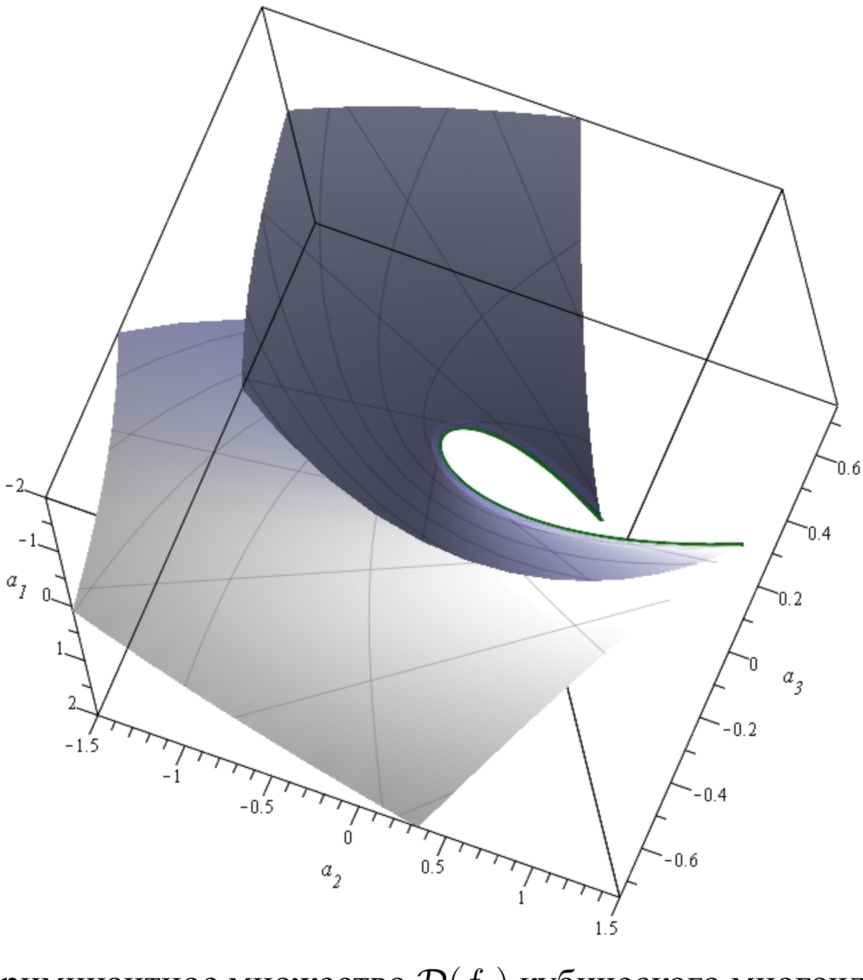


Рис. 3. Дискриминантное множество $\mathcal{D}(f_3)$ кубического многочлена. Зелёным цветом выделено ребро возврата (касп) $\mathcal{V}_1(f_3)$.

Дискриминантная поверхность $\mathcal{D}(f_3)$ делит пространство коэффициентов

Π на две области с разным числом вещественных корней: в области Π_1 многочлен $f_3(x)$ имеет три вещественных корня, в области Π_2 — один вещественный и пару комплексно-сопряжённых корней. Поскольку на многообразии $\mathcal{V}_2(f_3)$ кубика (3.2) имеет только вещественные корни, то множество $\mathcal{D}_g(f_3)$ для любых значений параметров (q,ω) целиком содержится в области Π_1 и только может касаться дискриминантного множества $\mathcal{D}(f_3)$. Нетрудно видеть, что поверхности $\mathcal{V}_2(f_3)$ и $\mathcal{D}(f_3)$ касаются друг друга вдоль пары кривых, на которых третий корень, не соизмеримый ни с одним с двух других корней, совпадает с одним из корней этой пары. Следовательно, на плоскости (t_1,t_2) кривые касания соответствуют прямым $t_2 = t_1$ и $t_2 = g(t_1)$, которые пересекаются в точке (ω_0,ω_0) (см. рис. 2). В силу вышеизложенного, параметрическое представление кривых $\mathcal{L}_{1,2}$, по которым дискриминантная поверхность $\mathcal{D}(f_3)$ касается резонансной поверхности $\mathcal{V}_2(f_3)$, получается из (4.11) подстановками $t_2 = t_1$ и $t_2 = g(t_1)$ соответственно:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_1: &\quad \{a_1 = -2t_1 - g(t_1), \quad a_2 = t_1(2g(t_1) + t_1), \qquad a_3 = -t_1^2 g(t_1)\},\\
\mathcal{L}_2: &\quad \{a_1 = -t_1 - 2g(t_1), \quad a_2 = (2t_1 + g(t_1))g(t_1), \quad a_3 = -t_1[g(t_1)]^2\}.
\end{aligned}$$

Взаимное расположение дискриминантной $\mathcal{D}(f_3)$ и g-дискриминантной $\mathcal{D}_g(f_3)$ поверхностей вместе с кривыми особых точек и кривыми касания показано на рис. 4. □

5. Параметризация при ограничениях на коэффициенты

В прикладных задачах, в которых возникает необходимость исследовать обобщённый дискриминант $D_g(f_n)$, часто пространство параметров многочлена $f_n(x)$ не совпадает с пространством его коэффициентов. Далее рассмотрим два способа получения описания множества $\mathcal{D}_g(f_n)$ в этом случае. Для определённости будем считать, что все коэффициенты a_i, $i = 1,\ldots,n$, приведённого многочлена $f_n(x)$ являются полиномами от некоторого набора параметров $\mathbf{s} = (s_1,\ldots,s_k) \in \mathbb{R}^k$, $0 < k < n$, которые назовём **параметрами задачи**. Переход от параметров задачи $\mathbf{s}$ к пространству коэффициентов Π многочлена $f_n(x)$ задаётся отображением

$$S : \mathbb{R}^k \to \Pi : \mathbf{s} \mapsto \mathbf{a}(\mathbf{s}),$$

матрица Якоби которого $J_S = \left[\dfrac{\partial a_i}{\partial s_j}\right]$, $i = 1,\ldots,n$, $j = 1,\ldots,k$, может иметь ранг m, $0 \leqslant m \leqslant k$. Далее считаем, что ранг m матрицы J_S принимает наибольшее значение, что соответствует условию невырожденности отображения S.

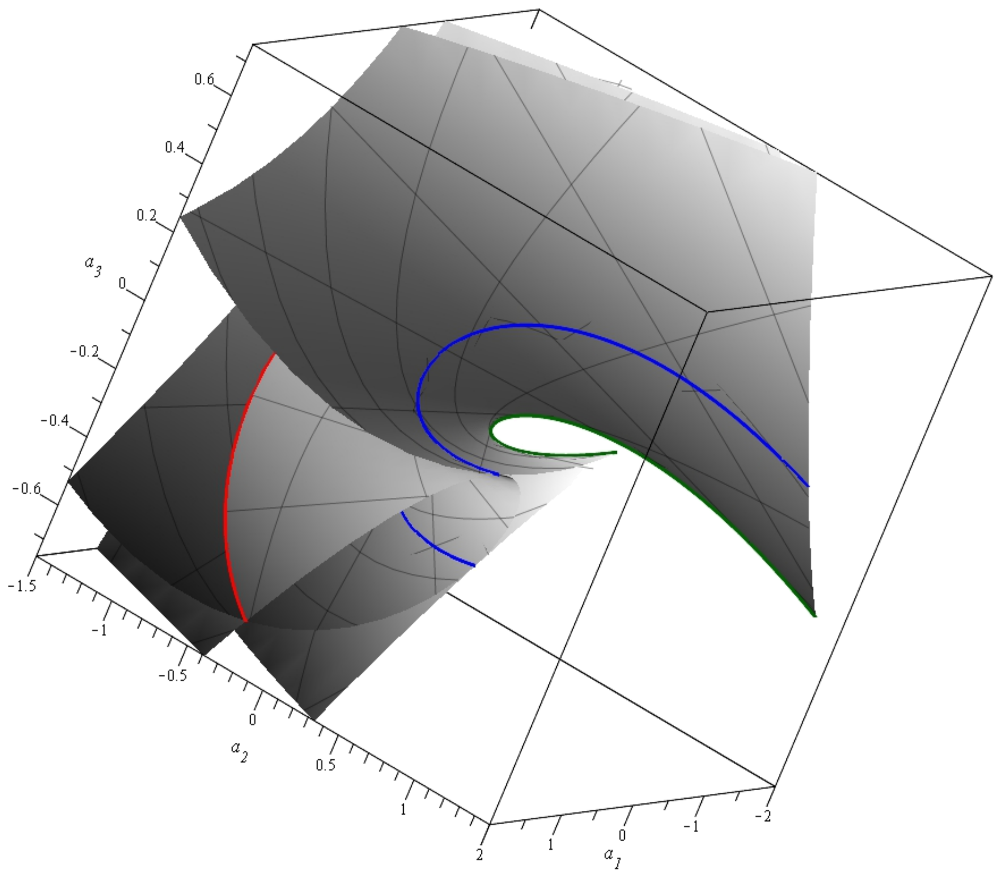


Рис. 4. Взаимное расположение дискриминантной $\mathcal{D}(f_3)$ и g-дискриминантной $\mathcal{D}_g(f_3)$ поверхностей для значений $q = 0.8$ и $\omega = 1$. Зелёным цветом выделено ребро возврата (касп), красным цветом показана кривая самопересечения $\mathcal{V}_1(f_3)$, синим цветом показаны кривые касания $\mathcal{L}_{1,2}$.

5.1. Вычисление с помощью элиминационного идеала. Выберем некоторую компоненту $\mathcal{V}_l$ размерности l g-дискриминантного множества $\mathcal{D}_g(f_n)$. Тогда с помощью алгоритма, описанного в подпункте 4.3, можно вычислить параметрическое представление этого многообразия в виде

$$a_i = r_i(t_1, \ldots, t_l), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Составляем полиномиальный идеал

$$\mathcal{J}_l = \{a_i(s_1, \ldots, s_k) - r_i(t_1, \ldots, t_l), i = 1, \ldots, n\},$$

состоящий из n многочленов от $k + l$ переменных. Этот идеал в пространстве **s** параметров задаёт некоторое алгебраическое многообразие, компоненты которого могут иметь размерности от 0 до $l - (n - k)$, если последняя величина неотрицательна. Для того чтобы получить его параметрическое представление, нужно вычислить элиминационный идеал [36, Ch. 3, § 1]. Эта задача решается с помощью вычисления базиса Грёбнера, если указать при этом такой лексикографический порядок, чтобы в первую очередь были исключены переменные $s_1,\dots,s_k$. В большинстве систем компьютерной алгебры это может быть достаточно легко выполнено. Например, в системе Maple при использовании команды `Basis` из пакета `Groebner` следует указать лексикографический порядок `lexdeg(`$[s_1,\dots,s_k]$`,`$[t_1,\dots,t_l]$`)`. В системе Mathematica при использовании процедуры `GroebnerBasis` — указать опцию `MonomialOrder -> EliminationOrder`. Если элиминационный идеал вычислен, то его первые многочлены зависят только от параметров t_i, $i=1,\dots,l$, а параметры s_i, $i=1,\dots,k$, входят в остальные многочлены таким образом, что позволяет выразить их в виде рациональных функций от t_i. Число независимых параметров t_i равно гильбертовой размерности идеала, и поэтому нужно среди l параметров t_i выбрать $l-(n-k)$ независимых, а остальные выразить через них. Обозначим эти независимые параметры через $\tilde{t}_i$, $i=1,\dots,l-(n-k)$. В итоге получим выражение исходных параметров s_i, $i=1,\dots,k$ от $l-(n-k)$ независимых параметров $\tilde{t}_i$, а следовательно, и выражение для коэффициентов a_i, $i=1,\dots,n$, через них.

5.2. Вычисление с помощью g-производных. Данный способ основан на теореме 2 и следствии 2. Пусть многочлен $f_n(x)$ имеет последовательность g-связанных корней длины $m>1$. Тогда, согласно указанным выше теореме 2 и следствию 2, его g-производная по переменной x имеет последовательность g-связанных корней длины $m-1$. Следовательно, для того чтобы найти параметризацию многообразия $\mathcal{V}_l$, которое соответствует разбиению $\left[m^1 1^{(n-m)}\right]$, необходимо решить относительно коэффициентов a_i, $i=1,\dots,n$, систему уравнений

$$\left\{\left(\mathcal{A}^i_{q,\omega} f_n\right)(x)=0, \quad i=0,\dots,m-1\right\}. \tag{5.1}$$

Для этого можно опять использовать технику вычисления элиминационного базиса, описанную в предыдущем подпункте 5.1.

Наиболее эффективно этот способ работает в том случае, если некоторые из коэффициентов a_i многочлена $f_n(x)$ принимают постоянные значения. В этом случае система (5.1) представляет собой систему линейных алгебраических уравнений относительно тех коэффициентов a_i, значения которых не фиксированы. Её решение можно записать в виде рациональных выражений от параметра t. Этот параметр является порождающим для последовательности g-связанных корней соответствующей длины, а полученное решение позволяет задавать параметризацию многообразия, на котором многочлен $f_n(x)$ имеет такую последовательность связанных корней. Кроме того, с помощью этой параметризации и преобразования (4.5) теоремы 2 можно получить параметризацию многообразия, следующего в иерархии компонент g-дискриминантного множества.

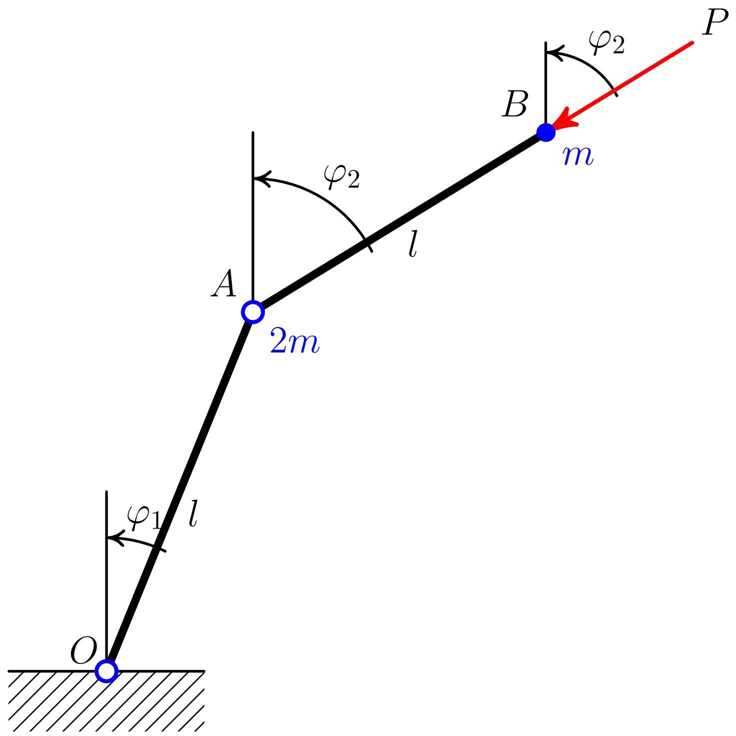


Рис. 5. Двойной маятник состоит из жёстких невесомых стержней длины l, соединённых вязкоупругими шарнирами O и A. Грузы массами $2m$ и m соответственно располагаются в шарнире A и на конце стержня AB. Постоянная следящая сила P приложена к свободному концу вдоль стержня AB.

5.3. Пример: двойной маятник со следящей силой. В работах [37; 38] рассматривалась задача об устойчивости в линейном приближении двойного маятника с вязкоупругими шарнирами под действием следящей силы. Механическая система на рис. 5 состоит из двух жёстких невесомых стержней длины l, соединённых вязкоупругими шарнирами O и A. Масса последнего равна $2m$. Шарниры имеют одинаковые коэффициенты упругости, но различные коэффициенты вязкости. Следящая сила P приложена к свободному концу B массы m и направлена вдоль плеча AB. Линеаризованные уравнения движения в переменных $\varphi_{1,2}, \dot{\varphi}_{1,2}$ имеют характеристический многочлен $\chi(\lambda)$ вида [38]

$$\chi(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda^4 + \frac{1}{2}(\gamma_1 + 6\gamma_2)\lambda^3 + \frac{1}{2}(\gamma_1\gamma_2 - 2p + 7)\lambda^2 + \frac{1}{2}(\gamma_1 + \gamma_2)\lambda + \frac{1}{2}, \tag{5.2}$$

где $\gamma_{1,2}$ и p — некоторые неотрицательные параметры, выражающиеся через физические характеристики системы (см. [37]).

В [38, пп. 3.5.3, 8.3.1] исследовались особенности границы множества устойчивости положения равновесия системы при малых значениях параметров $\gamma_{1,2}$. Здесь рассмотрим более общую задачу.

Задача. *Описать q-дискриминантное (резонансное) множество $\mathcal{D}_q(\chi)$ характеристического многочлена* (5.2)*, т. е. множество в пространстве параметров $\widetilde{\Pi} = (\gamma_1,\gamma_2,p)$, на котором многочлен* (5.2) *имеет по крайней мере пару соизмеримых корней $\lambda_j = q\lambda_i$, $i \neq j$, $q \notin \{-1,0\}$.*

Для решения задачи вместо оператора Хана $\mathcal{A}_{q,\omega}$ используем его частный случай — q-производную Джексона (2.4), получающуюся при $\omega = 0$ и обозначаемую далее $\mathcal{A}_q$.

Решение задачи разобьём на две части. Вначале, используя метод подпункта 5.2, получим параметризацию резонансного множества приведённой квартики — многочлена 4-й степени — при фиксированном значении его свободного члена, равном $1/2$, и произвольных значениях остальных коэффициентов:

$$f_4(x) \stackrel{\text{def}}{=} x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + \frac{1}{2}. \tag{5.3}$$

Затем с помощью полученной параметризации и метода, описанного в подпункте 5.1, получим параметризацию q-дискриминантного множества $\mathcal{D}_q(\chi)$ в пространстве исходных параметров $\widetilde{\Pi}$ задачи.

Число 4 — степень многочлена f_4 — имеет пять разбиений: $\left[4^1\right]$, $\left[1^13^1\right]$, $\left[2^2\right]$, $\left[1^22^1\right]$ и $\left[1^4\right]$. Первым четырём из них соответствуют компоненты q-дискриминантного множества $\mathcal{D}_q(\chi)$ — множества в пространстве Π коэффициентов многочлена $f_4(x)$. Повторяя рассуждения подпункта 5.1, легко видеть, что их размерности равны соответственно 0,1,1,2. Обозначим эти компоненты $\mathcal{V}_0(f_4), \mathcal{V}_1^1(f_4), \mathcal{V}_1^2(f_4), \mathcal{V}_2(f_4)$ соответственно.

На компоненте $\mathcal{V}_0(f_4)$ многочлен (5.3) становится q-биномом $\{x; t_1\}_{4;q}$ (2.6), свободный член которого $q^6t_1^4 = 1/2$. Следовательно, компонента $\mathcal{V}_0(f_4)$ состоит из двух точек $\mathcal{T}_1^{\pm}$, задаваемых значениями параметра $t_1 = \pm 2^{-1/4}q^{-3/2}$ при условии $q > 0$. Координаты этих точек суть

$$\mathcal{T}_1^{\pm} : \left\{ a_1 = \pm\frac{[2]_q\left(q^2+1\right)}{2^{1/4}q^{3/2}}, \quad a_2 = \frac{[3]_q\left(q^2+1\right)}{q^2\sqrt{2}}, \quad a_3 = \frac{a_1}{\sqrt{2}} \right\}. \tag{5.4}$$

Эти точки являются особыми точками 2-го порядка многообразия $\mathcal{V}_2(f_4)$.

Для вычисления параметризации многообразия $\mathcal{V}_1^1(f_4)$ составим систему линейных алгебраических уравнений относительно параметров a_1,a_2,a_3:

$$\left\{ f_4(x) = 0, \quad (\mathcal{A}_q f_4)(x) = 0, \quad \left(\mathcal{A}_q^2 f_4\right)(x) = 0 \right\}.$$

В её решении переменную x заменим параметром t_1, и оно примет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_1^1(f_4) : \Bigg\{ a_1 = &-[3]_q t_1 - \frac{1}{2(qt_1)^3}, a_2 = [3]_q\left(qt_1^2 + \frac{1}{2q^3t_1^2}\right), \\ &a_3 = -(qt_1)^3 - \frac{[3]_q}{2q^2t_1} \Bigg\}. \end{aligned} \tag{5.5}$$

На этом многообразии многочлен (5.3) имеет вид

$$f_4(x)|_{\mathcal{V}_1^1(f_4)} = \{x; t_1\}_{3;q} \cdot \left(x - \frac{1}{2(qt_1)^3}\right).$$

Многообразие $\mathcal{V}_1^1(f_4)$ является однопараметрическим семейством особых точек 1-го порядка многообразия $\mathcal{V}_2(f_4)$. Из параметризации (5.5) видно, что многообразие $\mathcal{V}_1^1(f_4)$ состоит из двух гладких кривых $\mathcal{L}_1^{\pm}$, взаимно симметричных относительно оси Oa_2. Каждая из этих кривых определяется соответственно положительными или отрицательными значениями параметра t_1 и проходит через соответствующую особую точку $\mathcal{T}_1^{\pm}$. При $q \neq 1$ кривые $\mathcal{L}_1^{\pm}$ не имеют особых точек.

Теперь к параметризации (5.5) применим преобразование (4.5) теоремы 2 и получим такую параметризацию многообразия $\mathcal{V}_2(f_4)$, что многочлен (5.3) на нём будет раскладываться на два множителя

$$f_4(x)|_{\mathcal{V}_2(f_4)} = \{x; t_1\}_{2,q} \left(x^2 - \frac{\left(2q^2t_1^4 - 1\right) t_2' + \left(q^3 + 1\right) t_1}{2q^3t_1^4} x + \frac{1}{2qt_1^2} \right). \qquad (5.6)$$

Выполним следующую упрощающую замену параметра t_2'

$$t_2' = \frac{4q^3t_1^4t_2 - \left(q^3 + 1\right) t_1}{2q^2t_1^4 - 1},$$

которая приводит квадратный трёхчлен в разложении (5.6) к наиболее простому виду. В этом случае параметризация многообразия $\mathcal{V}_2(f_4)$ примет вид

$$\mathcal{V}_2(f_4) : \left\{ a_1 = -\,[2]_q t_1 - 2t_2, \quad a_2 = qt_1^2 + 2[2]_q t_1 t_2 + \frac{1}{2qt_1^2}, \right. \\ \left. a_3 = -\,2qt_1^2 t_2 - \frac{[2]_q}{2qt_1} \right\}, \qquad (5.7)$$

а многочлен $f_4(x)$ перепишется следующим образом:

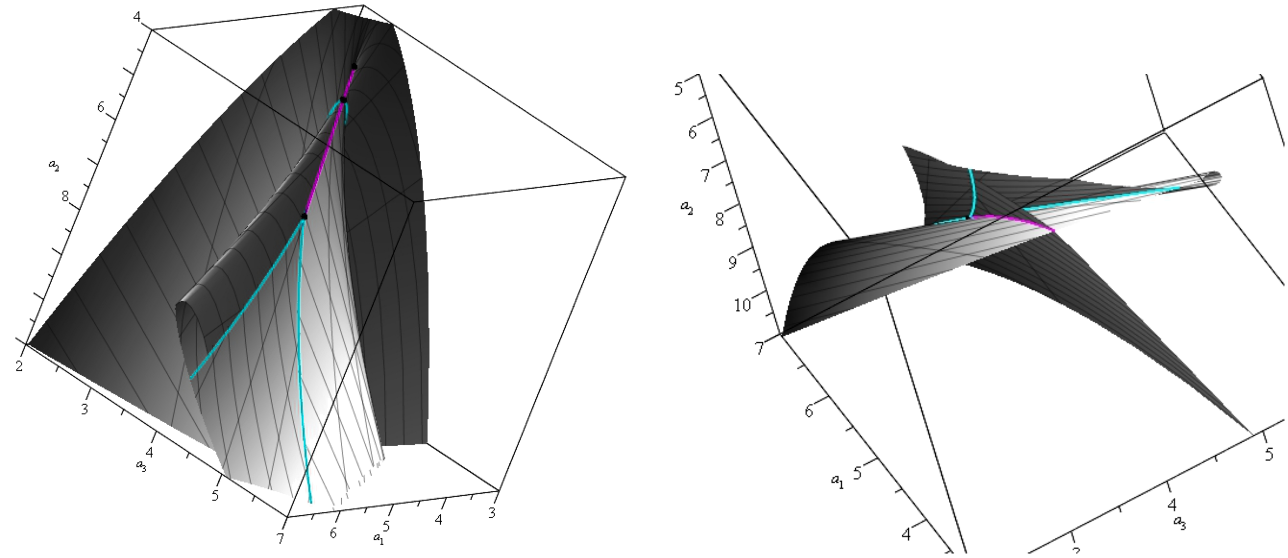
$$f_4(x)|_{\mathcal{V}_2(f_4)} = \{x; t_1\}_{2;q} \cdot \left(x^2 - 2t_2x + \frac{1}{2qt_1^2} \right). \qquad (5.8)$$

Как следует из теоремы 2, многообразие $\mathcal{V}_2(f_4)$ представляет собой объединение двух линейчатых поверхностей $\mathcal{S}^{\pm}$, образованных секущими, пересекающими соответствующие кривые $\mathcal{L}_1^{\pm}$ при значениях параметра t_2, равных,

$$t_2' = \frac{2t_1^4 + q}{4qt_1^3}, \quad t_2'' = \frac{2q^5t_1^4 + 1}{4q^3t_1^3}.$$

Следовательно, кривые $\mathcal{L}_1^{\pm}$ являются кривыми самопересечения поверхностей $\mathcal{S}^{\pm}$. Поверхности $\mathcal{S}^{\pm}$ взаимно симметричны относительно оси Oa_2. Очевидно, что при $q \to 1$ имеем $t_2' \to t_2''$, секущие становятся касательными, а кривые $\mathcal{L}_1^{\pm}$ — кривыми возврата.

На рисунках 6 с разных ракурсов показаны участки поверхности S^+ вместе с кривыми $\mathcal{L}_1^+$ (голубым цветом), $\mathcal{L}_2^+$ (пурпурным цветом) и особыми точками $\mathcal{T}_i^+$, $i = 1{,}2{,}3$. Описание кривой $\mathcal{L}_2^+$ и точек $\mathcal{T}_{2,3}^{\pm}$ дано ниже.



а) **б)**

Рис. 6. Участок поверхности $\mathcal{S}^+$. Голубым цветом показана кривая $\mathcal{L}_1^+$, пурпурным цветом показана кривая $\mathcal{L}_2^+$, чёрным цветом показаны особые точки $\mathcal{T}_1^+$, $\mathcal{T}_2^+$, $\mathcal{T}_3^+$.

Наконец, чтобы получить параметризацию многообразия $\mathcal{V}_1^2(f_4)$, на котором $f_4(x)$ имеет две последовательности q-связанных корней, нужно, согласно замечанию 4, подобрать такое значение параметра t_2, чтобы квадратный трёхчлен в разложении (5.8) стал q-биномом. Для этого необходимо, чтобы q-дискриминант трёхчлена $x^2 - 2t_2x + 1/\left(2qt_1^2\right)$, равный $\left(8(qt_1t_2)^2 - (q+1)^2\right) / \left(2qt_1^2\right)$, обнулялся. Это достигается при $t_2^{\pm} = \pm[2]_q / \left(2\sqrt{2}qt_1\right)$. Покажем, что $\mathcal{V}_1^2(f_4)$ состоит из трёх кривых $\mathcal{L}_2^{\pm}$ и $\mathcal{L}_3$.

Подставим значение t_2^+ в (5.7) и получим, что коэффициенты a_i, $i = 1{,}2{,}3$, выражаются через рациональное выражение от параметра t_1: $t_1 + 1/\left(\sqrt{2}qt_1\right)$. Это выражение принимает значения на двух интервалах $\left(-\infty; -2^{3/4}/\sqrt{q}\right]$ и $\left[2^{3/4}/\sqrt{q}; +\infty\right)$.

Параметризация кривых $\mathcal{L}_2^{\pm}$ имеет вид:

$$\mathcal{L}_2^{\pm}:\left\{a_1=-\,[2]_q\left(t_1+\frac{1}{\sqrt{2}qt_1}\right),a_2=qt_1^2+\frac{[2]_q^2}{\sqrt{2}q}+\frac{1}{2qt_1^2},\right.$$
$$\left.a_3=-\,\frac{[2]_q}{\sqrt{2}}\left(t_1+\frac{1}{\sqrt{2}qt_1}\right)\right\},\tag{5.9}$$

где знаку «$-$» соответствует интервал $(-\infty;-2^{3/4}/\sqrt{q}]$ изменения параметра t_1, а знаку «$+$» — интревал $[2^{3/4}/\sqrt{q};+\infty)$. Заметим, что кривые $\mathcal{L}_2^{\pm}$ взаимно симметричны относительно оси Oa_2. Структура параметризации (5.9) этих кривых такова, что каждая из них имеет точку остановки $\mathcal{T}_2^{\pm}$, соответствующую значению параметра $t_1=\pm 2^{-1/4}q^{-1/2}$ с координатами

$$\mathcal{T}_2^{\pm}:\left\{a_1=\pm\frac{q+1}{\sqrt{q}}2^{3/4},\quad a_2=\frac{q^2+4q+1}{q\sqrt{2}},\quad a_3=\frac{a_1}{\sqrt{2}}\right\}.\tag{5.10}$$

При этом каждая из поверхностей $\mathcal{S}^{\pm}$ самопересекается по кривой $\mathcal{L}_2^{\pm}$.

При подстановке значения t_2^- в (5.7) получим, что коэффициенты a_i, $i=1,2,3$, выражаются через рациональное выражение от параметра t_1: $t_1-1/\left(\sqrt{2}qt_1\right)$. Параметризация кривой $\mathcal{L}_3$ имеет вид:

$$\mathcal{L}_3:\left\{a_1=-\,[2]_q\left(t_1-\frac{1}{\sqrt{2}qt_1}\right),a_2=qt_1^2-\frac{[2]_q^2}{\sqrt{2}q}+\frac{1}{2qt_1^2},\right.$$
$$\left.a_3=-\,\frac{[2]_q}{\sqrt{2}}\left(t_1-\frac{1}{\sqrt{2}qt_1}\right)\right\}.\tag{5.11}$$

Поверхности $\mathcal{S}^{\pm}$ пересекаются по кривой $\mathcal{L}_3$.

Многочлен $f_4(x)$ на многообразии $\mathcal{V}_1^2(f_4)$ раскладывается на произведение двух q-биномов

$$f_4(x)|_{\mathcal{V}_1^2(f_4)}=\{x;t_1\}_{2;q}\cdot\left\{x;\frac{1}{\sqrt{2}qt_1}\right\}_{2;q}.$$

Кривые $\mathcal{L}_1^{\pm}$ и $\mathcal{L}_2^{\pm}$ пересекаются в следующих точках: в особых точках $\mathcal{T}_1^{\pm}$ и в точках $\mathcal{T}_3^{\pm}$ с координатами

$$\mathcal{T}_3^{\pm}=\left\{a_1=\pm\frac{[2]_q^2}{2^{1/4}q},\quad a_2=\frac{\sqrt{2}[3]_q}{q},\quad a_3=\frac{a_1}{\sqrt{2}}\right\}.\tag{5.12}$$

Точки $\mathcal{T}_3^{\pm}$ интересны тем, что на них многочлен (5.3) имеет последовательность q-связанных корней длины 3 с порождающим корнем $t_1 = \pm 2^{-1/4}/q$ и простым корнем $t_2 = \pm 2^{-1/4}$, который совпадает со вторым корнем последовательности. Таким образом, этот набор корней соответствует двум разным разбиениям: $\left[1^1 1^3\right]$ и $\left[2^2\right]$.

На рисунке 7 показаны поверхности $\mathcal{S}^+$ и $\mathcal{S}^-$, пересекающиеся по кривой $\mathcal{L}_3$ (показана жёлтым цветом). Видны участки кривых $\mathcal{L}_1^+$ и $\mathcal{L}_2^+$, а также некоторые из особых точек.

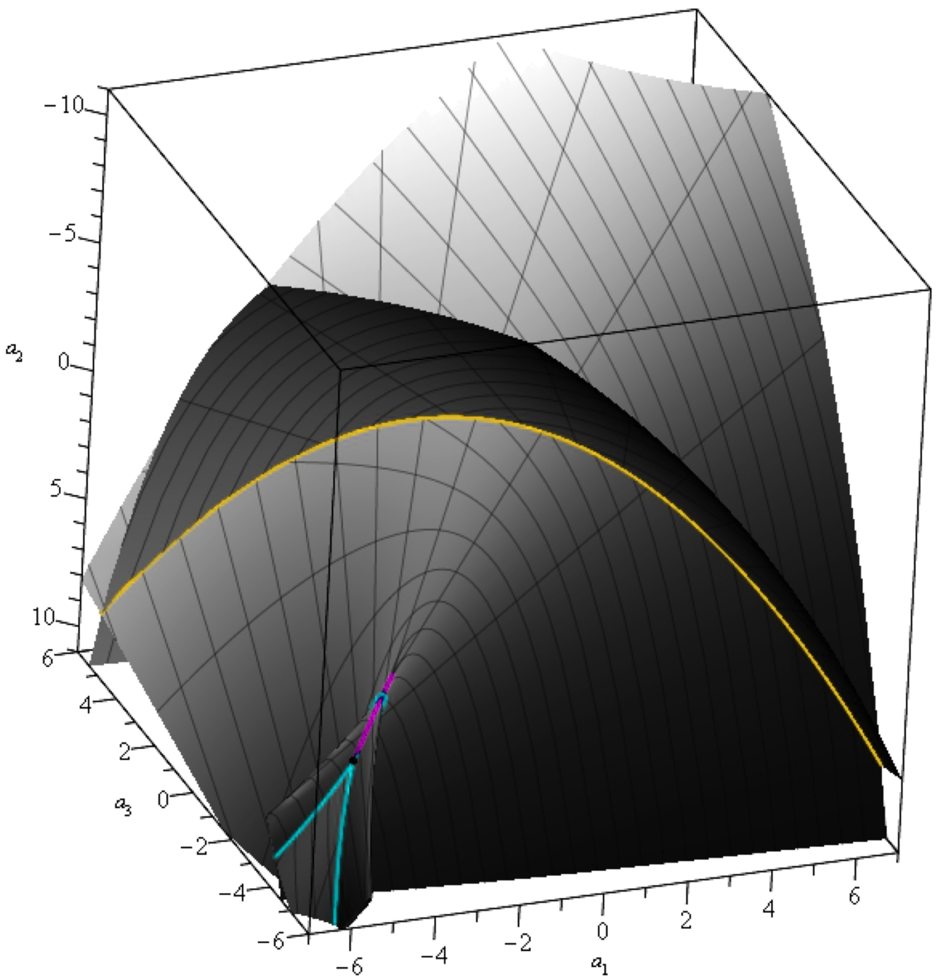


Рис. 7. Поверхности $\mathcal{S}^{\pm}$, пересекающиеся по кривой $\mathcal{L}_3$ (жёлтый цвет). Голубым цветом показана кривая $\mathcal{L}_1^+$, пурпурным цветом показана кривая $\mathcal{L}_2^+$.

Отметим, что при $q \to 1$ все точки $\mathcal{T}_1^{\pm}$, $\mathcal{T}_2^{\pm}$ и $\mathcal{T}_3^{\pm}$ сливаются в пару особых точек — точек возврата на кривых $\mathcal{L}_1^{\pm}$ и $\mathcal{L}_2^{\pm}$. Кривые $\mathcal{L}_1^{\pm}$ превращаются в пределе в рёбра возврата на поверхностях $\mathcal{S}^{\pm}$.

Итак, параметризация компоненты размерности 2 q-дискриминантного множества $\mathcal{D}_q(f_4)$, состоящей из поверхностей $\mathcal{S}^{\pm}$, задаётся формулой (5.7). Особые точки порядка 1 представляют собой гладкие кривые $\mathcal{L}_1^{\pm}$, $\mathcal{L}_2^{\pm}$, $\mathcal{L}_3$ и задаются соответственно формулами (5.5), (5.9) и (5.11). Особые точки порядка 2 определяются формулами (5.4), (5.10) и (5.12).

Преобразование S, задающее переход от коэффициентов a_1,a_2,a_3 многочлена (5.3) к коэффициентам γ_1,γ_2,p характеристического многочлена (5.2), невырождено и, следовательно, обратимо:

$$\gamma_1 = \frac{2}{5}(6a_3 - a_1),\ \gamma_2 = \frac{2}{5}(a_1 - a_3),\ p = -\frac{2}{25}\left(a_1^2 - 7a_1a_3 + 6a_3^2\right) - a_2 + \frac{7}{2}. \quad (5.13)$$

Подставляя в (5.13) координаты точек $\mathcal{T}^{\pm}_{1,2,3}$, параметризации кривых $\mathcal{L}^{\pm}_{1,2}$ и параметризации поверхностей $\mathcal{S}^{\pm}$, получим параметрическое представление этих объектов в пространстве $\widetilde{\Pi}$ параметров задачи.

6. Заключение

g-дискриминантное множество $\mathcal{D}_g(f_n)$ многочлена $f_n(x)$ является обобщением дискриминантного множества $\mathcal{D}(f_n)$ для случая, когда некоторая пара корней t_i, t_j оказывается g-связанной, т. е. $t_j = g(t_i)$, где $g(x) = qx + \omega$, $q \notin \{-1{,}0\}$. Показано, что g-дискриминантное множество $\mathcal{D}_g(f_n)$ состоит из конечного набора алгебраических многообразий $\mathcal{V}_l$ размерностей от 1 до $n-1$, число которых определяется числом $p(n)$ разбиений степени n многочлена $f_n(x)$. Каждое из многообразий $\mathcal{V}_l$ выделяется соответствующей системой уравнений, состоящей из обобщённых субдискриминантов $D_g^{(k)}(f_n)$, и допускает полиномиальную параметризацию.

Предложены и реализованы в системе компьютерной алгебры Maple алгоритмы вычисления параметрического представления всех компонент g-дискриминантного множества $\mathcal{D}_g(f_n)$. Работа алгоритмов продемонстрирована на ряде примеров.

Благодарности

Автор выражает благодарность профессору А.Ю. Утешеву за ценное замечание касательно преобразования Чирнгауза и профессору А.Д. Брюно за полезное обсуждение работы.

Список литературы

1. *Батхин А. Б.*, *Брюно А. Д.*, *Варин В. П.* Множества устойчивости многопараметрических гамильтоновых систем // Прикл. мат. мех. 2012. Т. 76, № 1. С. 80—133. ISSN 0032-8235.

2. *Батхин А. Б.* Граница множества устойчивости одной многопараметрической системы Гамильтона // Вестник ВолГУ. Серия 1. Математика. Физика. 2014. 5 (24). С. 6—23. ISSN 2222-8896. DOI: `10.15688/jvolsu1.2014.5.1`. URL: `http://mp.jvolsu.com/index.php/en/component/attachments/download/336`.
3. *Kac V.*, *Cheung P.* Quantum Calculus. New York, Heidelber, Berlin : Springer-Verlag, 2002. 112 p.
4. *Ernst T.* A Comprehensive Treatment of q-Calculus. Basel Heidelberg New York Dordrecht London : Springer-Verlag, 2012. 491 c. DOI: `10.1007/978-3-0348-0431-8`.
5. *Aldwoah K. A.* Generalized time scales and associated difference equations : PhD thesis / Aldwoah K. A. Cairo University, 2009.
6. *Brito da Cruz A. M. C.* Symmetric Quantum Calculus : PhD thesis / Brito da Cruz Artur Migual C. Universidade de Aveiro, 2012.
7. *Гаспер Д.*, *Рахман М.* Базисные гипергеометрические ряды: Пер. с англ. М. : «Мир», 1993. 349 с.
8. *Koekoek R.*, *Lesky P. A.*, *Swarttouw R. F.* Hypergeometric Orthogonal Polynomials and Their q-Analogues. Berlin Heidelberg : Springer-Verlag, 2010. 578 p. DOI: `10.1007/978-3-642-05014-5`.
9. *Батхин А. Б.* Структура дискриминантного множества вещественного многочлена // Чебышевский сборник (Тула). 2015. Т. 16, № 2. С. 23—34. ISSN 2226-8383. URL: `http://mi.mathnet.ru/cheb388`.
10. *Батхин А. Б.* Параметризация дискриминантного множества вещественного многочлена // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. 2015. № 76. ISSN 2071-2898. URL: `http://www.keldysh.ru/papers/2015/prep2015_76.pdf`.
11. *Батхин А. Б.* Параметризация дискриминантного множества вещественного многочлена // Программирование. 2016. Т. 42, № 2. С. 8—21.
12. *Батхин А. Б.* О структуре резонансного множества вещественного многочлена // Чебышевский сборник (Тула). 2016. Т. 17, № 3. С. 5—17. ISSN 2226-8383. DOI: `10.1234/XXXX-XXXX-2016-3-5-17`. URL: `http://mi.mathnet.ru/cheb494`.
13. *Батхин А. Б.* Структура резонансного множества вещественного многочлена // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. 2016. № 29. ISSN 2071-2898. DOI: `10.20948/prepr-2016-29`. URL: `http://www.keldysh.ru/papers/2015/prep2016_29.pdf`.

14. *Батхин А. Б.* Резонансное множество многочлена и проблема формальной устойчивости // Вестник ВолГУ. Серия 1. Математика. Физика. 2016. 4 (35). С. 5—23. ISSN 2222-8896. DOI: 10.15688/jvolsu1.2016.4.1.

15. *Batkhin A. B.* On the structure of discriminant set of real polynomial // International Conference Polynomial Computer Algebra '2016 / ed. by N. N. Vassiliev. St. Petersburg, Russia : VVM Publisher, 2016. P. 21–24.

16. *Magnus A. P.* Associated Askey-Wilson polynomials as Laguerre Hahn orthogonal polynomials // Orthogonal Polynomials and their Applications. Proceedings of an International Symposium held in Segovia, Spain, Sept. 22–27, 1986. Vol. 1329 / ed. by M. Alfaro [et al.]. Berlin Heidelberg New York London Paris Tokyo : Springer-Verlag, 1988. P. 261–278. (Lecture Notes in Mathematics).

17. *Hahn W.* Über Orthogonalpolynome, die q-Differenzengleichungen genügen // Mathematische Nachrichten. 1949. Jg. 2. S. 4–34.

18. *Ismail M. H. E.* q-discriminants and Vertex Operators // Advances in Applied Mathematics. 2001. Vol. 27. P. 482–492. DOI: 10.1006/aama.2001.0745.

19. *Гульден Я.*, *Джексон Д.* Перечислительная комбинаторика: Пер. с англ. / под ред. В. Е. Тараканов. Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. 504 с.

20. *Батхин А. Б.* Выделение областей устойчивости нелинейной системы Гамильтона // Автоматика и телемеханика. 2013. Т. 8. С. 47—64. URL: http://mi.mathnet.ru/at6084.

21. *Сушкевич А. К.* Основы высшей алгебры. 4-е изд. М.-Л. : ОГИЗ ГИТТЛ, 1941. 460 с.

22. *Gelfand I. M.*, *Kapranov M. M.*, *Zelevinsky A. V.* Discriminants, Resultants, and Multidimensional Determinants. Boston : Birkhäuser, 1994. 523 p. ISBN 0-8176-3660-9.

23. *Калинина Е. А.*, *Утешев А. Ю.* Теория исключения: Учеб. пособие. СПб. : Изд-во НИИ химии СПбГУ, 2002. 72 с.

24. *Ismail M. H. E.* Difference equations and quantized discriminants for q-orthogonal polynomials // Advances in Applied Mathematics. 2003. Vol. 30. P. 562–589. DOI: 10.1016/S0196-8858(02)00547-X.

25. *Бохер М.* Введение в высшую алгебру / пер. А. Г. Курош ; предисл. П. С. Александров. М.-Л. : ГТТИ, 1933. 292 с.

26. *Джури Э.* Инноры и устойчивость динамических систем. М., 1979. 304 с.

27. *Basu S.*, *Pollack R.*, *Roy M.-F.* Algorithms in Real Algebraic Geometry. Berlin Heidelberg New York : Springer-Verlag, 2006. ix+662. (Algorithms and Computations in Mathematics 10).

28. *Gathen J.*, *Lücking T.* Subresultants revisited // Theoretical Computer Science. 2003. Vol. 297, issue 1–3. P. 199–239. DOI: `10.1016/S0304-3975(02)00639-4`.

29. *Эндрюс Г.* Теория разбиений. М. : Наука, 1982. 256 с.

30. *Макдональд И.* Симметрические функции и многочлены Холла. М. : Мир, 1985. 222 с.

31. *Прасолов В. В.* Многочлены. М. : МЦНМО, 2014. 336 с.

32. *Charalambides C. A.* Combinatorial methods in discrete distributions. Hoboken, New Jersey : John Wiley & Sons, Inc., 2005. 415+xiv.

33. *Cigler J.* Operatormethoden für q-Identitäten // Monatshefte für Mathematik. 1979. Jg. 88, Nr. 2. S. 87–105.

34. *Фиников С. П.* Теория поверхностей. М. : ГТТИ, 1934. 203 с.

35. *Залгаллер В. А.* Теория огибающих. М. : Наука, 1975.

36. *Cox D.*, *Little J.*, *O'Shea D.* Ideals, Varieties, and Algorithms. An Introduction to Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra. 3rd ed. New York : Springer-Verlag, 2007. 551+xv. (Undergraduate Texts in Mathematics).

37. *Herrmann G.*, *Jong I.-C.* On the destabilizing effect of damping in nonconservative elastic systems // Trans. AMSE, J. Appl. Mech. 1965. Vol. 32. P. 592–597.

38. *Майлыбаев А. А.*, *Сейранян А. П.* Многопараметрические задачи устойчивости. Теория и приложения в механике. М. : Физматлит, 2009. 400 с.

Список рисунков

Список некоторых условных обозначений

$\mathcal{A}_q$ — q-дифференциальный оператор Джексона, стр. 6

$\mathcal{A}_{q,\omega}$ — оператор Хана, стр. 5

$\mathcal{D}_g(f_n)$ — g-дискриминантное множество, стр. 9

$D_g(f)$ — обобщённый дискриминант, стр. 9

$D_g^{(k)}(f_n)$ — k-й обобщённый субдискриминант многочлена $f_n(x)$, стр. 11

ω_0 — неподвижная точка отображения g, стр. 5

Π — пространство коэффициентов многочлена, стр. 4

$(a;q)_n$ — q-символ Похгаммера, стр. 6

$[a]_q$ — q-скобка, стр. 6

$\binom{n}{k}_q$ — q-биномиальные коэффициенты, стр. 6

$\{x;a\}_{n;g}$ — g-бином, стр. 7

$\{x;a\}_{n;q}$ — q-бином, стр. 7

$\mathrm{Res}_x(f(x),h(x))$ — результант многочленов $f(x)$ и $h(x)$ относительно переменной x, стр. 14

$\mathrm{Seq}_g^{(k)}(t_1)$ — последовательность g-связанных корней, стр. 10

$\mathbf{Sylv}_g(f_n)$ — обобщённая матрица Сильвестра многочлена $f_n(x)$ и его g-производной $(\mathcal{A}_{q,\omega}f_n)(x)$, стр. 10

Оглавление