



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

**Елизарова Т.Г., Широков И.А.,
Попов М.В.**

О возможностях
квазигазодинамической
модели для численного
анализа сверхзвукового
турбулентного течения
межзвездного газа

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Елизарова Т.Г., Широков И.А., Попов М.В. О возможностях квазигазодинамической модели для численного анализа сверхзвукового турбулентного течения межзвездного газа // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2017. № 9. 21 с.
doi:[10.20948/prepr-2017-9](https://doi.org/10.20948/prepr-2017-9)
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2017-9>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Российской академии наук**

Т.Г. Елизарова, И.А. Широков, М.В. Попов

**О ВОЗМОЖНОСТЯХ
КВАЗИГАЗОДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ
ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО АНАЛИЗА
СВЕРХЗВУКОВОГО ТУРБУЛЕНТНОГО ТЕЧЕНИЯ
МЕЖЗВЕЗДНОГО ГАЗА**

Москва — 2017

Т.Г. Елизарова, И.А. Широков, М.В. Попов

**О возможностях квазигазодинамической модели для численного анализа
сверхзвукового турбулентного течения межзвездного газа**

Аннотация

Представлены результаты численного моделирования межзвездного газового облака, впервые выполненные в рамках квазигазодинамического (КГД) алгоритма. Рассмотрены варианты затухающего течения вида вихря Тейлора–Грина и квазистационарного течения с начальным условием в виде случайного соленоидального поля скоростей с подпиткой энергий. Использовались характерные параметры межзвездных газовых облаков, в которых возможно формирование звезд. Результаты показывают возможности КГД-алгоритма для моделирования разреженных крупномасштабных турбулентных облаков, включающих в себя сверхзвуковые зоны течения.

Ключевые слова: квазигазодинамические (КГД) уравнения, турбулентные течения, межзвездный газ

T. G. Elizarova, I. A. Shirokov, M.V. Popov

**On the capabilities of the quasi-gasdynamical model for the numerical simulation
of supersonic turbulent flows of interstellar gas**

Abstract

The results of numerical simulation of interstellar gas clouds, performed in the framework of quasi-gasdynamical (QGD) algorithm for the first time, are presented. The decay of a Taylor–Green vortex and the quasi-stationary flow with initial condition in the form of a random solenoidal velocity field with energy source are considered. The typical parameters of the interstellar gas clouds, in which stars can be formed, were used. The results obtained shows the capabilities of the QGD algorithm for the simulation of sparse large-scale turbulent clouds, which include the supersonic zone of the flow.

Keywords: quasi-gas dynamic (QGD) system, turbulent flows, interstellar gas

Оглавление

Введение	- 3 -
Постановка задачи о вихре Тейлора–Грина	- 5 -
Математическая модель и метод численного решения	- 6 -
Результаты расчетов вихря Тейлора–Грина	- 7 -
Моделирование квазистационарного турбулентного течения	- 14 -
Заключение	- 16 -
Приложение	- 17 -
Литература	- 20 -

Введение

Межзвездные газовые облака состоят в основном из водорода с примесями гелия, OH, CN в плотных областях, и пыли. В зависимости от плотности и температуры водород может быть в атомарном, ионизованном или молекулярном состоянии. В первых двух случаях облако называют диффузионным, в третьем – плотным или темным.

Сжимаемая турбулентность в облаках межзвездного газа является определяющим фактором для процесса звездообразования. Турбулентное движение в таких облаках поддерживается за счет звездных источников энергии (в том числе сверхновых), самогравитации, галактических гравитационных полей, а также является результатом развития гидродинамических неустойчивостей. Возникающие флуктуации плотности и диссипация энергии на мелких масштабах оказывают существенное влияние на процесс образования плотных самогравитирующих областей и последующее формирование протозвезд.

При превышении критического значения плотности начинается гравитационный коллапс. Рассмотрев возмущения в виде плоских волн в бесконечном однородном пространстве, Джинс показал, что для развития гравитационного коллапса длина волны возмущений должна превышать значение [1]

$$L > L_J, \quad L_J = c \sqrt{\frac{\pi}{G\rho}},$$

где c – скорость звука, G – гравитационная постоянная, ρ – плотность. Время коллапса Джинс оценил как время свободного падения

$$\tau_J = \sqrt{\frac{3\pi}{32G\rho}}.$$

Оценка минимальной массы гравитирующего шара имеет вид

$$M_J \sim \rho L_J^3.$$

Такая же оценка для массы получается из вириальной теоремы

$$2T + \Omega < 0,$$

где Ω – средняя по времени полная потенциальная энергия системы, T – средняя по времени полная кинетическая энергия.

Для самосогласованного моделирования процесса звездообразования совместно с расчетом гидродинамических течений необходимо проводить расчет меняющихся гравитационных сил. Величина силы самогравитации определяется через градиент гравитационного потенциала, для нахождения которого на каждом шаге по времени требуется решать уравнение Пуассона для гравитационного потенциала ϕ :

$$\Delta\phi = -4\pi G\rho$$

при произвольном распределении плотности. На расчетной сетке это уравнение эквивалентно системе линейных алгебраических уравнений с разреженной самосопряженной положительно-определенной матрицей. Одним из эффективных методов решения является, например, метод сопряженных градиентов.

Большое значение для поведения газовых облаков и процесса звездообразования имеют магнитные поля. При низких плотностях облака ионизируются внешним излучением. В этом случае магнитное поле препятствует гравитационному взаимодействию как заряженных, так и нейтральных частиц, за счет ионно-нейтральных столкновений. При гравитационном сжатии магнитное поле должно увлекаться веществом, увеличивая свое значение при увеличении плотности. Тем не менее, моделирование поведения облаков в присутствии магнитных полей и учет влияния самогравитации мы оставляем за рамками данной работы.

Отметим, что число Маха в межзвездной среде может достигать значения 50. Физические условия в молекулярных облаках, при которых возникает сверхзвуковая турбулентность, не поддаются лабораторным экспериментальным исследованиям. В настоящее время численное моделирование – это единственный способ исследования межзвездной турбулентности. Статистика такой турбулентности представляет собой важнейшую информацию статистической теории образования звезд.

Известные численные методы, опробованные на стандартных тестах магнитной гидродинамики, могут быть неустойчивы при моделировании сверхзвуковой турбулентности [2]. Увеличение диссипации численного метода с целью повышения устойчивости расчета не всегда решает проблему, поскольку излишняя диссипация приводит к деградации результатов моделирования [3]. Обзор и обсуждение современных численных методов, применимых к моделированию турбулентности, представлены в книге [4]. Например, одним из удачных подходов для астрофизической турбулентности является схема расщепления по физическим процессам [4].

Новым подходом к моделированию течений межзвездного газа является использование КГД-алгоритма [9, 10, 11]. В работах [12, 13, 14, 15] было показано, что КГД-алгоритм является перспективным средством моделирования турбулентных течений при умеренных числах Рейнольдса. В частности, в [12] КГД-алгоритм применялся к расчету вязкого течения (вихря) Тейлора–Грина в свободном пространстве. Рассматривалось течение азота при температуре нормальных условий. В [16, 17] выполнено численное моделирование турбулентного газодинамического течения в присутствии электромагнитного поля для задачи о вихре Орзага–Танга. В процессе эволюции вихря наблюдалось формирование трехмерных ударных волн.

В данной работе авторы используют начальные условия, соответствующие вихрю Тейлора–Грина. В отличие от работы [12], здесь рассматриваются параметры, характерные для межзвездного газа, а также случай сверхзвуковых

начальных условий, что характерно для условий в облаках межзвездного газа. Кроме того, проведено моделирование квазистационарного турбулентного течения со случайным начальным полем скоростей и энергетической подпиткой.

Полученные результаты показывают, что КГД-алгоритм применим к моделированию межзвездной турбулентности. Для дозвукового случая полученные данные качественно аналогичны известным из литературы результатам моделирования распада вихря Тейлора–Грина. Сверхзвуковой случай демонстрирует возможность образования контрастов плотности и ударных волн в межзвездной среде.

Постановка задачи о вихре Тейлора–Грина

Плотность и температура газа, рассмотренного в данной работе, соответствуют плотному молекулярному облаку вблизи пограничного состояния с диффузным, менее плотным облаком. В основном облако состоит из молекулярного водорода с примесями атомарного водорода, пыли и малых долей OH, C, CO, C₂H, CN и пр.

Состояние межзвездного газа определяется следующими параметрами, зависящими от декартовых координат: $\rho(x, y, z, t)$ – плотностью, $u_{x,y,z}(x, y, z, t)$ – скоростью, $p(x, y, z, t)$ – давлением. Облако газа заполняет пространственную область кубической формы $-\pi L \leq x, y, z \leq \pi L$, ребро куба $2\pi L = 1.5 \cdot 10^{16}$ см, что соответствует 1000 астрономическим единицам.

Используем традиционные начальные условия вихря Тейлора–Грина [5, 6, 7, 8]:

$$u_x = U_0 \sin(x/L) \cos(y/L) \cos(z/L), \quad u_y = -U_0 \cos(x/L) \sin(y/L) \cos(z/L), \quad u_z = 0,$$
$$p = p_0 + (\rho_0 U_0^2 / 16) (\cos(2x/L) + \cos(2y/L)) (\cos(2z/L) + 2). \quad (1)$$

Начальное распределение температуры является однородным по пространству: $T = T_0 = 100$ К. Среднюю концентрацию частиц можно оценить как $n_0 = 5 \times 10^3$ см⁻³ со средней массой частицы $m_0 = 2.1 \times 10^{-24}$ г. Отсюда средняя плотность $\rho_0 = 1.05 \cdot 10^{-17}$ кг/м³, молярная масса $1.265 \cdot 10^{-3}$ кг/моль и газовая постоянная $R = 6569$ Дж/(кг·К).

Считаем справедливым уравнение состояния идеального газа:

$$\rho = p / (RT). \quad (2)$$

Тогда начальное давление $p_0 = 6.90 \cdot 10^{-12}$ Па. Введем начальное число Маха как

$$Ma = U_0 / c_{s0},$$

где скорость звука при начальных условиях $c_{s0} = \sqrt{\gamma RT_0} = 831$ м/с, показатель адиабаты $\gamma = 1.05$. Число Рейнольдса

$$Re = \rho_0 U_0 L / \mu_0, \quad (4)$$

где $\mu_0 = 0.43 \cdot 10^{-5}$ кг/(м·с) – вязкость водорода при температуре $T_0 = 100$ К [20, 21].

Расчёты проведены для двух значений числа Маха: $Ma=0.1$ и $Ma=1.5$, то есть в дозвуковом и сверхзвуковом вариантах. При $Ma=0.1$ $U_0=83.1$ м/с, $Re=4844$, $\rho_0=1.05 \cdot 10^{-17}$ кг/м³, $p=6.90 \cdot 10^{-12}$ Па. В сверхзвуковом случае сохраним неизменным число Рейнольдса. Для этого необходимо уменьшить начальную плотность и давление. Таким образом, при $Ma=1.5$ $U_0=1245.76$ м/с, $Re=4844$, $\rho_0=7.00 \cdot 10^{-19}$ кг/м³, $p=4.60 \cdot 10^{-13}$ Па.

Граничные условия являются периодическими, как обычно полагается при моделировании распада вихря Тейлора–Грина.

Математическая модель и метод численного решения

Турбулентное течение газа будем описывать системой квазигазодинамических (КГД) уравнений [11, с. 94]. Эта система определяет эволюцию во времени плотности, скорости и давления газа. Температура определяется из уравнения состояния идеального газа (2).

Коэффициент динамической вязкости μ в газе, входящий в выражения для тензора вязких напряжений Π^{ij} и теплового потока q^i , будем определять через температурную зависимость [19]:

$$\mu = \mu_0 (T / T_0)^\omega, \quad (13)$$

где ω – показатель, описывающий межмолекулярное взаимодействие в газе. В настоящей работе для молекулярного водорода $\omega=0.67$ [19]. Коэффициент второй (объемной) вязкости определим через соотношение [11, с. 71] $\zeta = \mu (5/3 - \gamma)$. Число Прандтля $Pr = 14/19$.

Определим значение релаксационного параметра τ :

$$\tau = \alpha h / c_s, \quad (14)$$

где $c_s = \sqrt{\gamma RT}$ – локальная скорость звука, h – величина шага пространственной сетки. Слагаемые с коэффициентом τ представляют собой подсеточную диссипацию, которая сглаживает пульсации газодинамических величин на масштабах порядка шага сетки. Коэффициент α можно рассматривать как настроенный параметр, определяющий уровень подсеточной диссипации. Для $Ma=0.1$ $\alpha=0.1$, для $Ma=1.5$ $\alpha=0.2$.

Для численного решения начально-краевой задачи с начальными условиями (1) методом конечных разностей используем явную по времени разностную схему с аппроксимацией всех пространственных производных центральными разностями со вторым порядком, а производных по времени с первым порядком. Алгоритм построения разностной схемы такой же, как в

работах [12–13]. Расчет по явной схеме соответствует эволюции газодинамического течения по времени.

Шаг по времени определим из условия Куранта [11, с. 140]: $h_t = \beta h / c_{s0}$, где $\beta = 0.1$ – число Куранта, шаг сетки $h = 1.171875 \times 10^{12}$ м. Отметим, что величина h также входит в выражение релаксационного параметра τ (14). Остальные параметры расчетов следующие: размер сетки 128^3 , шаг сетки $h = 1.171875 \times 10^{12}$ м, c_{s0} – скорость звука при начальных условиях

Хотя расчеты проводятся в размерных переменных, для сравнения с данными литературы авторы приводят результаты в безразмерном виде. При этом в качестве параметров используются L , U_0 и ρ_0 . Таким образом, безразмерное значение времени $t_{dl} = t/t_0$, где $t_0 = L/U_0$, а безразмерное значение удельной кинетической энергии $E_{dl} = E/(\rho_0 U_0^2)$.

Расчет по явной схеме проводится на многопроцессорном вычислительном комплексе К-100 [18], при этом авторы используют технологию распараллеливания вычислений, основанную на декомпозиции расчетной области плоскостями $x = const$. Такая технология использует стандарт передачи сообщений MPI и с успехом применялась в работах [12–13]. Отметим, что программный комплекс обладает полной переносимостью между платформами, поддерживающими язык Си и стандарт MPI.

Результаты расчетов вихря Тейлора–Грина

На рис. 1–6 представлены поверхности уровня z -компоненты завихренности поля скорости, т. е. z -компоненты ротора скорости:

$$V_z = \partial u_y / \partial x - \partial u_x / \partial y$$

Отметим, что величина V_z вычисляется в безразмерном виде. Красный цвет соответствует $V_z = 0.7$, синий $V_z = -0.7$. Кроме того, показаны контуры плотности, числа Маха и давления межзвездного газа в размерном виде.

На рис. 1–3 изображена эволюция вихря Тейлора–Грина для дозвукового случая $Ma = 0.1$. На рис. 1 представлены начальные условия ($t = 0$).

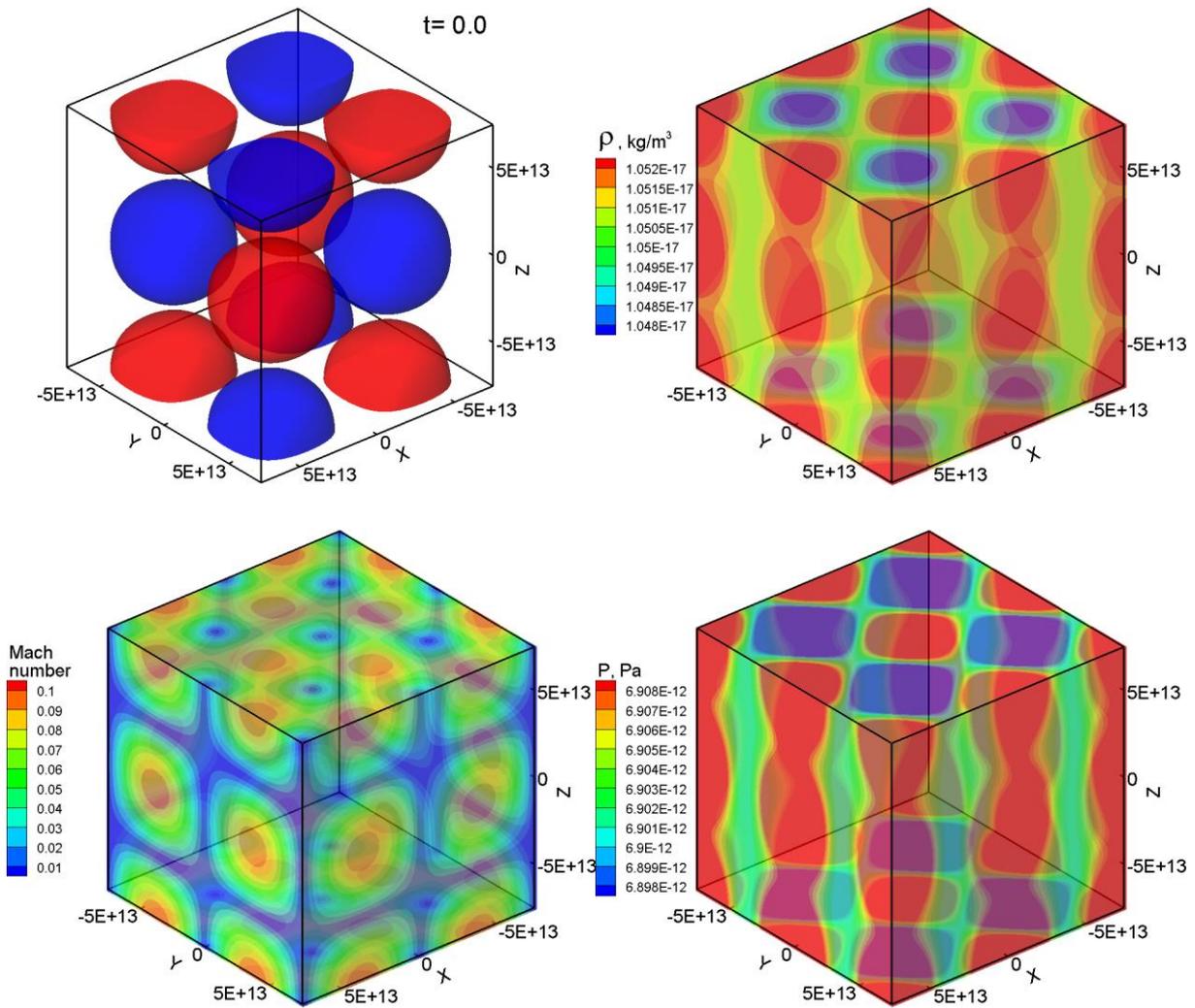


Рис. 1. Начальные условия вихря Тейлора–Грина, $Ma=0.1$

На рис. 2, 3 изображена эволюция течения в расчётной области для $t = 10$ (91 тыс. лет, рис. 2) и $t = 20$ (182 тыс. лет, рис. 3).

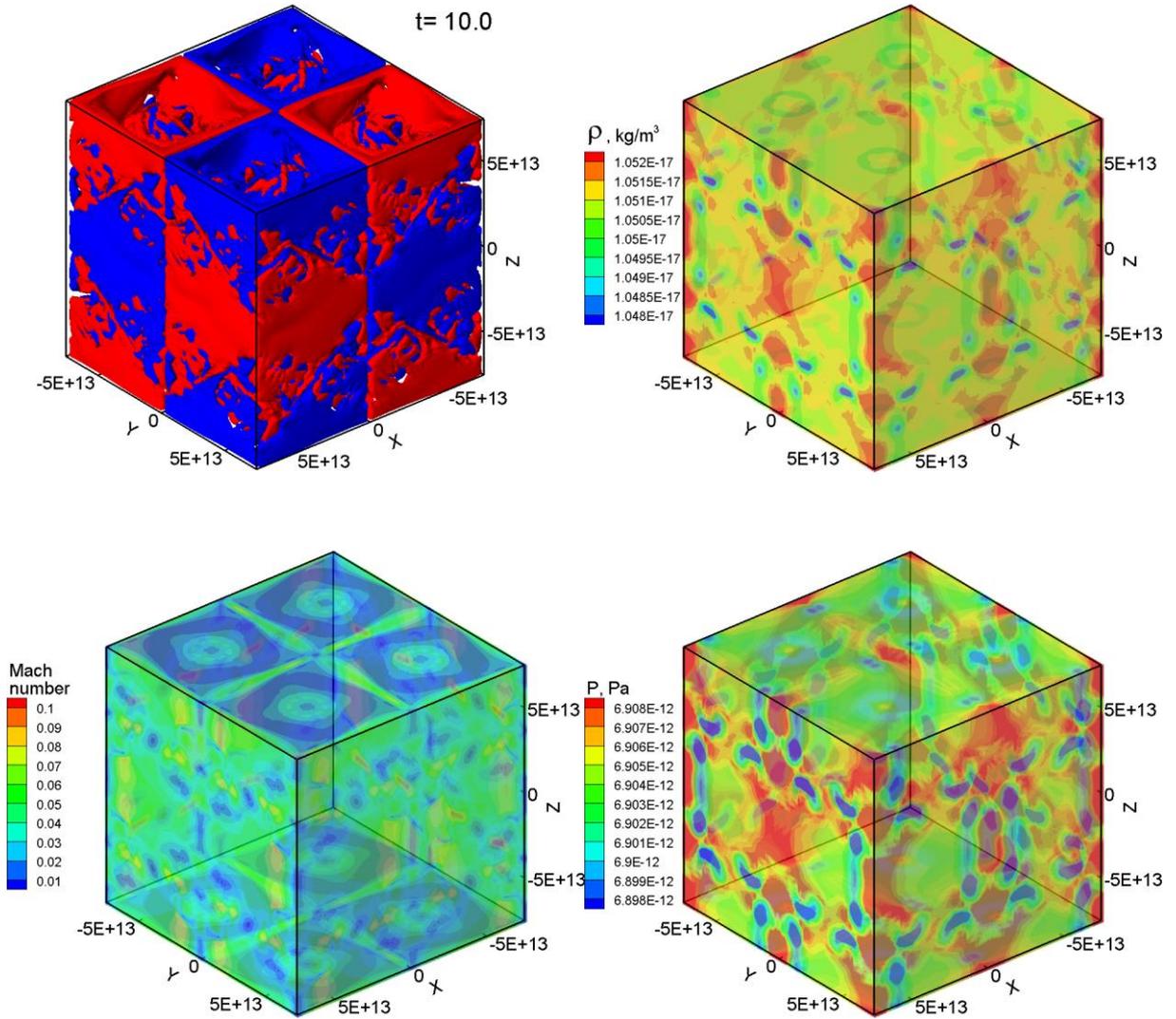


Рис. 2. Эволюция вихря Тейлора–Грина, $Ma=0.1$, $t=10$

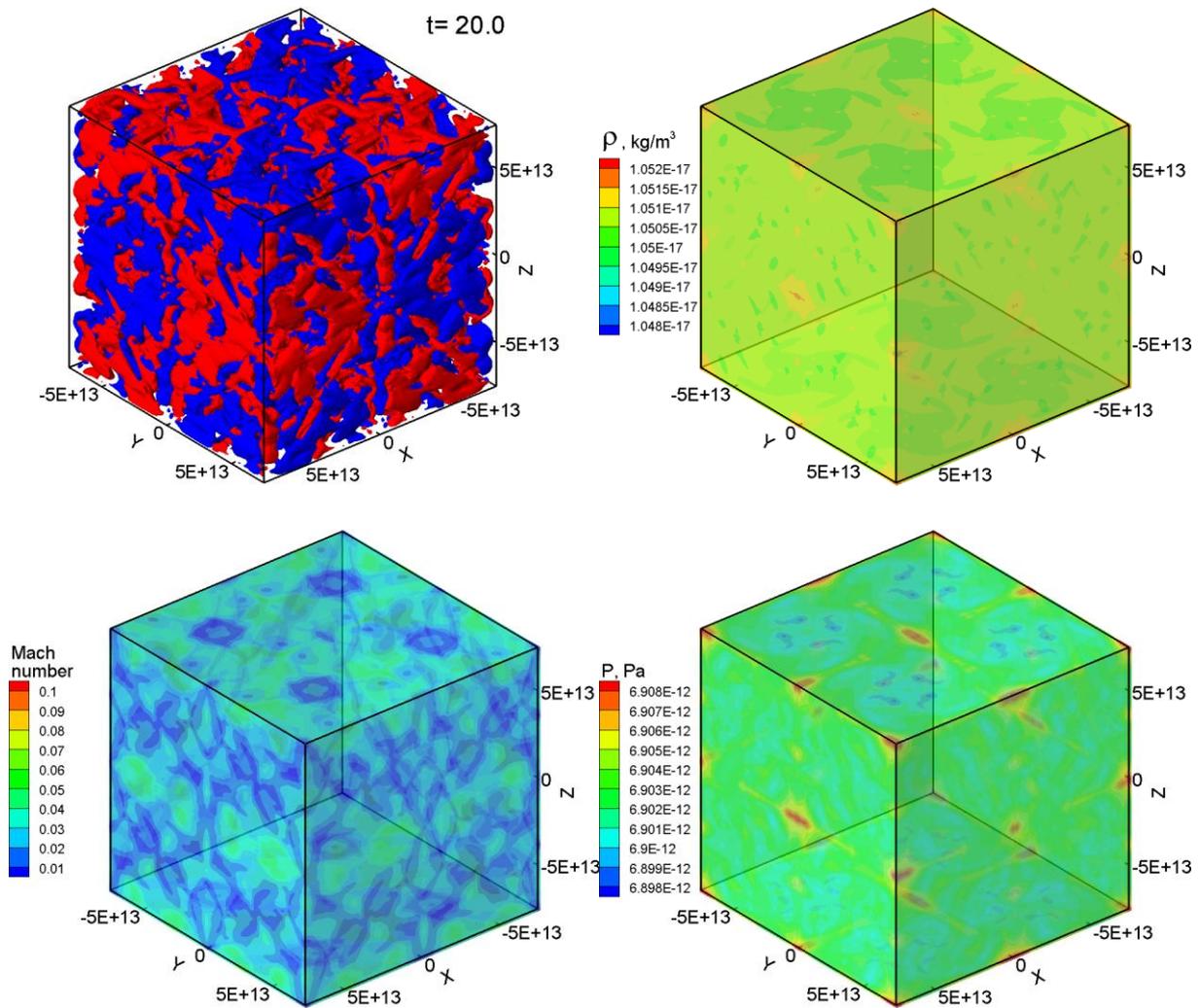


Рис. 3. Эволюция вихря Тейлора–Грина, $Ma=0.1$, $t = 20$

Видно, что регулярное в начальный момент времени распределение скорости (1) становится хаотическим, характерным для турбулентного течения. Наблюдаемые здесь особенности эволюции течения хорошо согласуются с анализом эволюции вихря Тейлора–Грина, приведенным в [5] для $Re > 500$ и в [6, 7, 8].

На рис. 5, 6 изображён результат расчета для сверхзвукового случая, $Ma=1.5$. На рис. 4 приведены начальные условия. Эволюция течения в расчётной области показана для $t=10$ (6 тыс. лет, рис. 5) и $t=20$ (12 тыс. лет, рис. 6).

В целом результат аналогичен дозвуковому случаю (рис. 2, 3). Но для сверхзвуковых начальных условий хаотичная структура турбулентного течения выражена более явно. На рис. 5 можно видеть протяжённые структуры, напоминающие ударные волны.

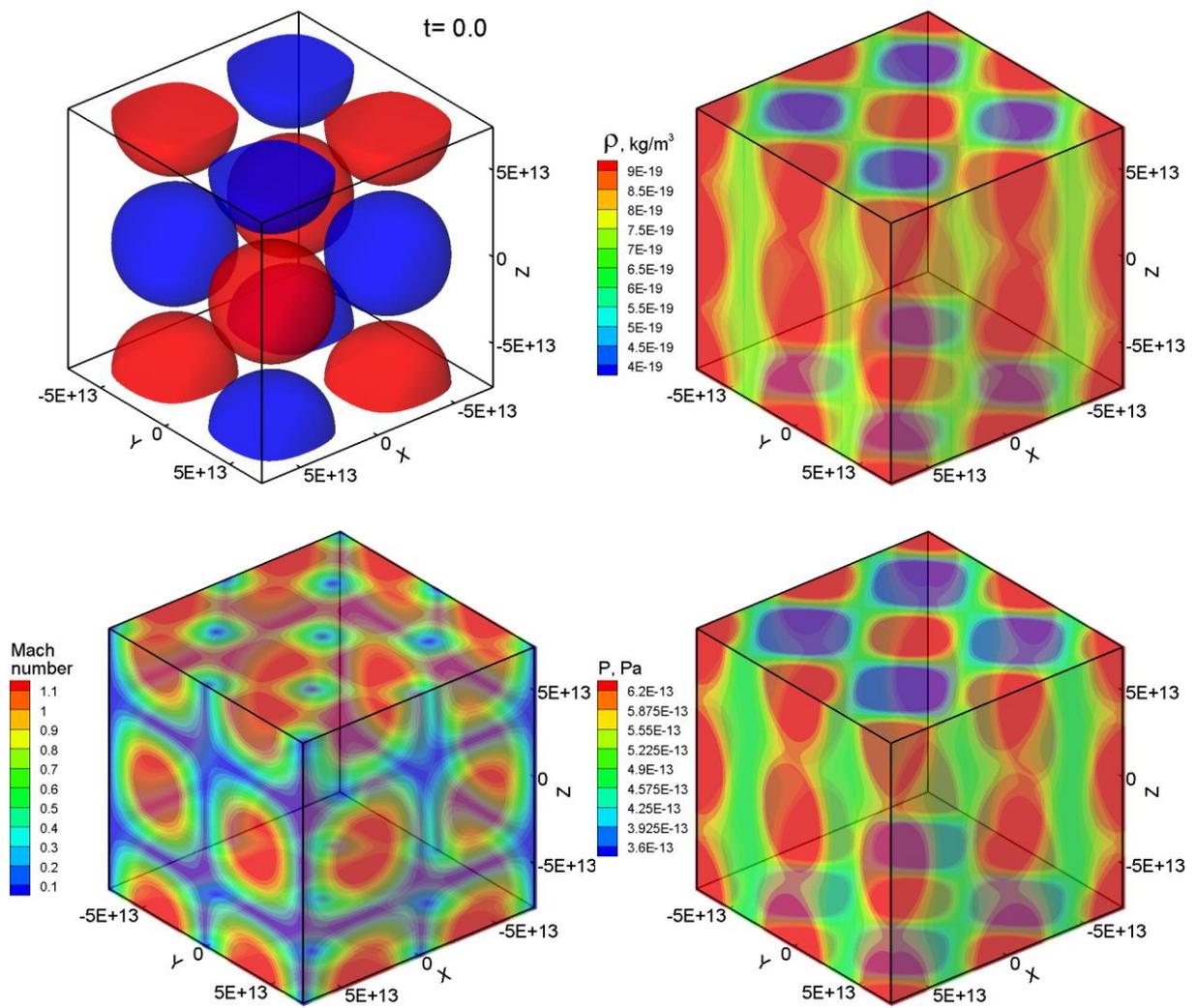


Рис. 4. Начальные условия вихря Тейлора–Грина, $Ma = 1.5$

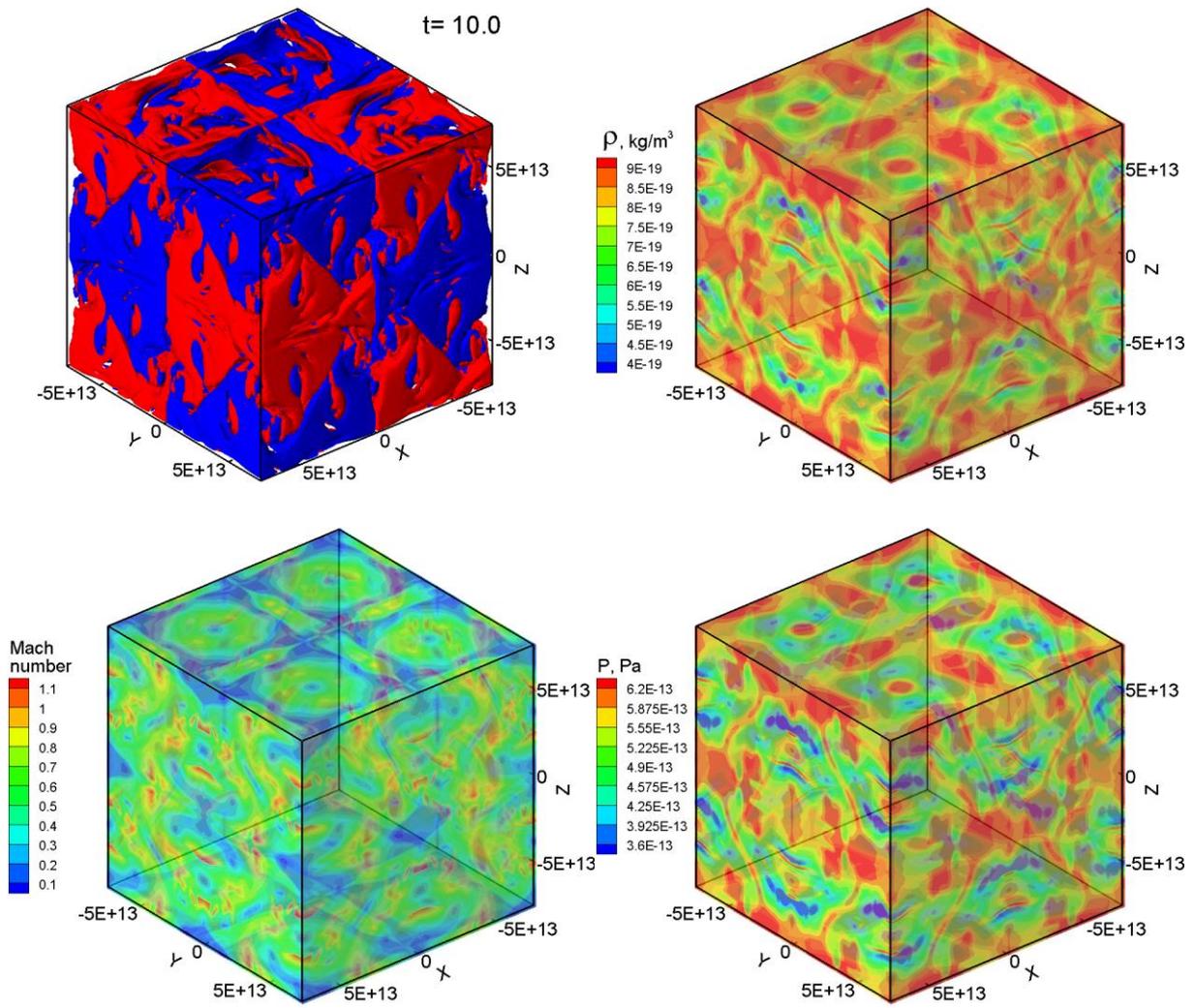


Рис. 5. Эволюция вихря Тейлора–Грина, $Ma = 1.5$, $t = 10$

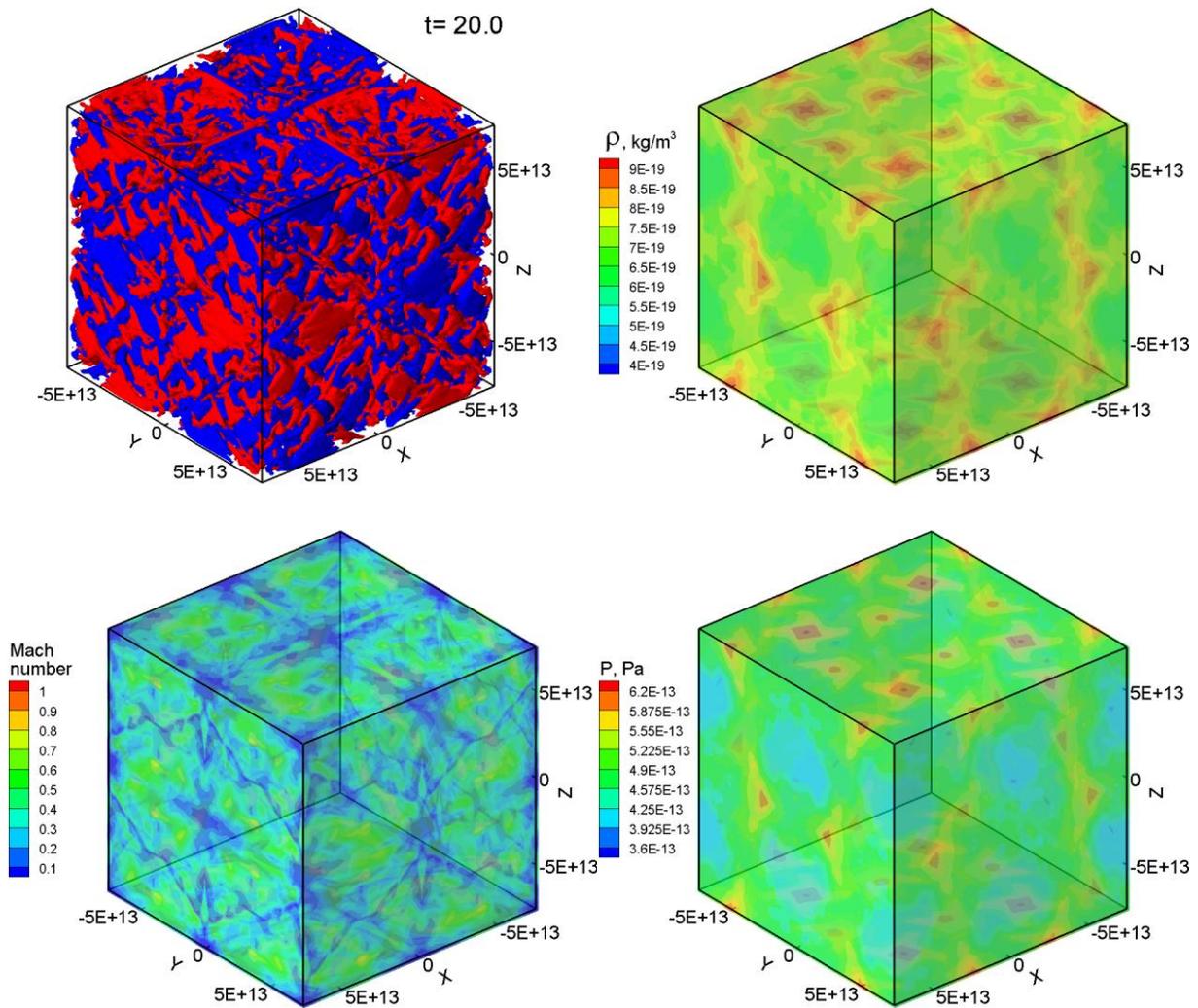


Рис. 6. Эволюция вихря Тейлора–Грина, $Ma = 1.5$, $t = 20$

Рис. 7 демонстрирует зависимость скорости диссипации кинетической энергии от времени, т. е. величины $-dE_{kin}/dt$. Сплошные кривые получены авторами для $Ma = 0.1$ и $Ma = 1.5$, а пунктирная соответствует эталонному результату [6, 7]. Максимальное значение скорости диссипации кинетической энергии определяет область перехода от ламинарного течения к турбулентному. Для $Ma = 0.1$ профиль скорости диссипации очень хорошо соответствует эталонной пунктирной кривой. Для $Ma = 1.5$ наблюдаются значительные колебания, хотя общий характер профиля, положение и величина максимума также соответствуют пунктирной кривой.

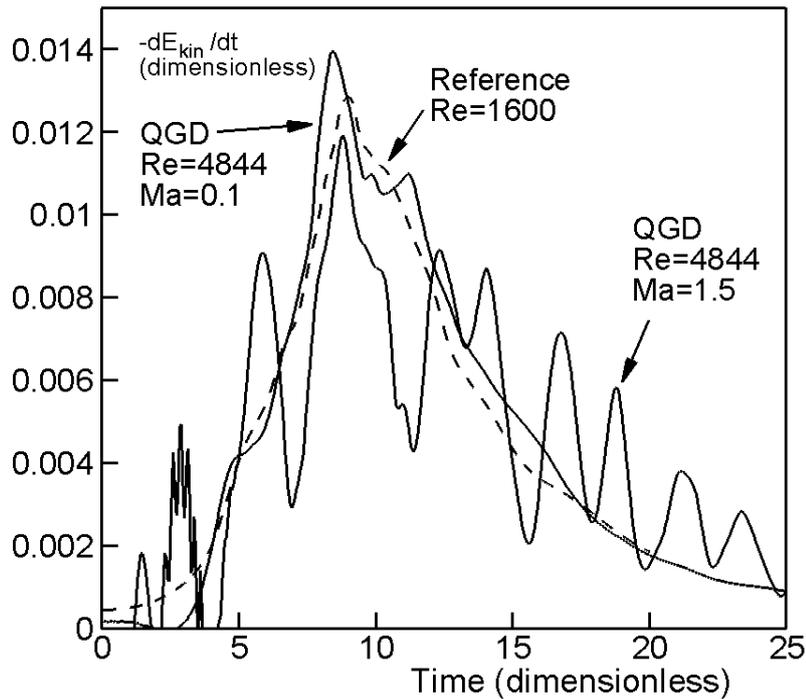


Рис. 7. Профиль скорости диссипации кинетической энергии для вихря Тейлора–Грина

Моделирование квазистационарного турбулентного течения

Для инициирования турбулентности задается распределение скорости со случайными амплитудами в каждой ячейке и со степенным спектром мощности в диапазоне волновых чисел $0 \leq k \leq 2\pi$, так чтобы среднеквадратичное значение числа Маха составляло

$$M^{rms} = \sqrt{\frac{1}{N^3} \sum_{i,j,k} M_{i,j,k}} \approx 0.65,$$

где N – число ячеек сетки вдоль каждой координатной оси, i, j, k – сеточные индексы. При моделировании нами использован параметр регуляризации КГД системы $\alpha = 0.41$, подобранный экспериментально.

Для вычисления начального соленоидального поля скоростей, применялось преобразование Фурье к компонентам скорости, действительная и мнимая часть которого имеет вид

$$\text{Re}(v_n) = r_n \cos \theta_n, \quad \text{Im}(v_n) = r_n \sin \theta_n, \quad (3)$$

где r_n – амплитуда, задаваемая случайным образом в соответствии с Гауссовым распределением с выбранным стандартным отклонением σ , которое связано с кинетической энергией и полной массой вещества в расчетной области:

$$\sigma = \sqrt{\frac{2E_{kin}}{M}},$$

где E_{kin} – кинетическая энергия, M – масса. Фаза θ_n выбирается случайным образом в интервале $[0, 2\pi)$.

Применяя к (3) условие бездивергентности $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, которое в пространстве Фурье выглядит как $\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} = 0$, где \mathbf{k} – волновой вектор, получаем систему из двух уравнений, связывающие волновые векторы и Фурье компоненты скоростей [22]:

$$k_x r_x \cos \theta_x + k_y r_y \cos \theta_y + k_z r_z \cos \theta_z = 0,$$

$$k_x r_x \sin \theta_x + k_y r_y \sin \theta_y + k_z r_z \sin \theta_z = 0,$$

из которых следует

$$\theta_y = \theta_x \pm \arccos \left\{ \frac{(k_z r_z)^2 - (k_x r_x)^2 - (k_y r_y)^2}{2k_x r_x k_y r_y} \right\}, \quad (16)$$

$$\theta_z = \theta_x \pm \arccos \left\{ \frac{(k_y r_y)^2 - (k_x r_x)^2 - (k_z r_z)^2}{2k_x r_x k_z r_z} \right\}. \quad (17)$$

Только одна из возможных четырех комбинаций знаков задает соленоидальное поле. Правильная комбинация подбирается экспериментально.

Из-за каскадного переноса энергии от крупных масштабов к мелким, для поддержания турбулентного движения необходимо производить подпитку энергией, передавая её низшим модам возмущений. Для этого в уравнения для компонент импульса добавляется источник. Он представляет собой функцию координат, которая вычисляется так, чтобы среднее число Маха по расчетной области примерно сохранялось. Например, в каждой ячейке

$$p_x(x, y, z) \rightarrow p_x(x, y, z) + a [\sin(ky + \varphi_1(k)) + \sin(kz + \varphi_2(k))],$$

где a – амплитуда, подбираемая исходя из желаемого результирующего среднего числа Маха, $k=1, 2$ – волновые числа, соответствующие низшим модам возмущений, $\varphi_{1,2}(k)$ – фазы, задаваемые для каждой моды случайным образом, x, y, z – координаты, нормированные на 2π . Далее в Приложении мы приводим процедуры, реализованные на Фортране, примененные нами для задания начальных условий и энергетической подпитки.

В результате моделирования была получена характерная квази-стационарная картина турбулентности, возникающая в межзвездном газовом облаке (рис. 8). Слева показано число Маха, цвет поверхностей соответствует значениям 0.15 (серый), 0.5 (зеленый) и 1 (красный). Справа показано характерное распределение безразмерной плотности в логарифмическом масштабе, красный цвет соответствует плотным образованиям с безразмерным значением 0.16, темно-серый: -0.16. Расчет проведен на сетке 120^3 ячеек.

Граничные условия периодические. Для исследования возможности и параметров звездообразования в таких облаках необходимо осуществлять расчет самогравитации совместно с гидродинамическим моделированием, а также учесть влияние магнитных полей. Данные вопросы являются предметом дальнейшей работы.

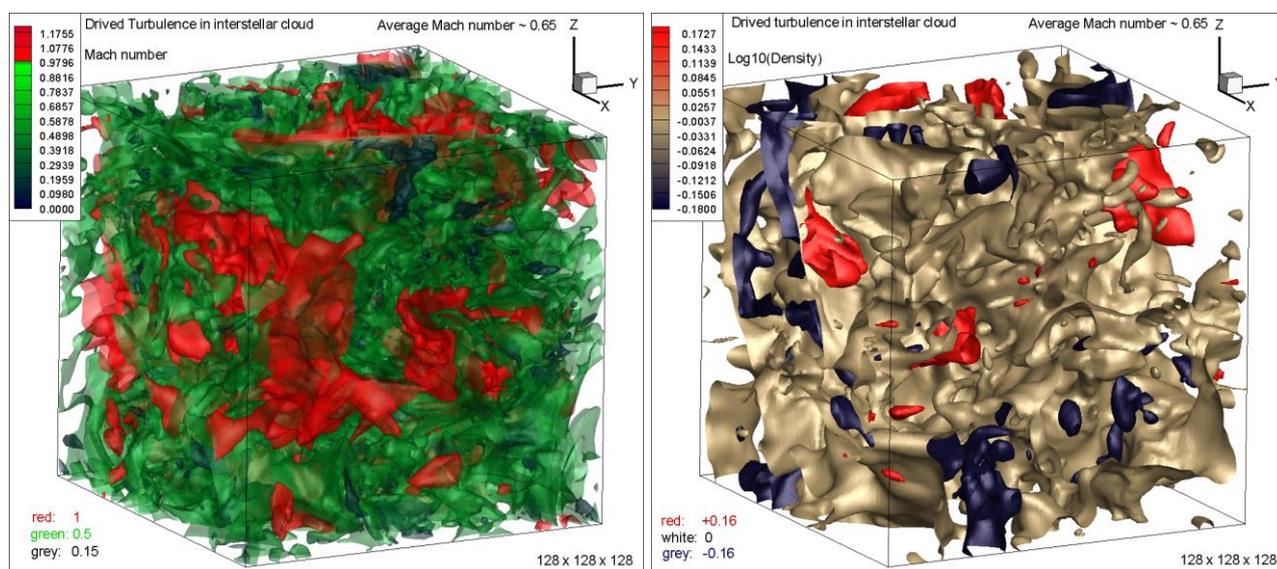


Рис. 8. Стационарная картина турбулентности межзвездного газового облака с подпиткой энергией

Заключение

Мы представили первые результаты трехмерного моделирования межзвездного газового облака с использованием квазигазодинамического подхода. Была рассмотрена как модельная постановка с начальными условиями в виде вихря Тейлора–Грина, так и более реалистичные начальные условия с заданием соленоидального поля скоростей и с подпиткой энергией, что является одним из общепринятых подходов в данной задаче. Для модели были выбраны характерные параметры межзвездных газовых облаков, в которых возможно формирование звезд. В результате моделирования получены характерная диссипация кинетической энергии для вихря Тейлора–Грина и стационарное турбулентное движение в случае подпитки энергией межзвездного газового облака. Данные результаты являются хорошей демонстрацией возможностей квазигазодинамического метода, впервые примененного для моделирования подобных разреженных крупномасштабных облаков. В дальнейшем планируется дополнить модель более реалистичной физикой (магнитные поля и самогравитация) и исследовать процесс звездообразования на подробной расчетной сетке.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 16-01-00048а в части разработки численного метода, гранта РФФИ 16-02-00656 в части разработки физической модели турбулентности, а также программы Президиума РАН №7.

Приложение

Реализация начальных условий турбулентности и энергетической подпитки на языке Фортран

```
! -----  
!   Описание шестнадцати волновых векторов  
! -----  
integer*4 rank, nbox, in, jn, kn, ig, jg, kg  
integer*4 imo, nmode  
parameter (nmode=16)  
integer*4 mode(3,nmode)  
data   mode/      ! 16 Волновых векторов  
R      1,1,1,  
R      -1,1,1,  
R      1,-1,1,  
R      1,1,-1,  
R      0,0,1,  
R      0,1,0,  
R      1,0,0,  
R      0,1,1,  
R      1,0,1,  
R      1,1,0,  
R      0,-1,1,  
R      -1,0,1,  
R      -1,1,0,  
R      0,0,2,  
R      0,2,0,  
R      2,0,0/  
  
! -----  
!   Описание набора случайных фаз, заданных в интервале [0, 2pi),  
!   обеспечивающих хорошую изотропию. Фазы задаются для x, y и z компонент  
!   скоростей для каждой из 16 мод  
! -----  
real*8 phax(nmode)  
data phax/  
R      4.8827171 , 4.5501628 , 3.6897256 , 5.7606730, 2.0264773,  
R      0.83200777, 1.9374901 , 0.014175551, 5.1355696, 2.7778759,  
R      2.0290945 , 0.66376913, 1.8051250 , 3.3130596, 1.0506331,  
R      1.7523085/  
C  
real*8 phay(nmode)  
data phay/  
R      1.4011313, 5.7180996 , 3.8207288, 1.0026506, 2.2681668,  
R      2.8144622, 0.99058449, 2.9458065, 3.9271564, 0.89623797,  
R      1.8535780, 2.8460610 , 1.6346333, 3.4661922, 5.5859957,  
R      1.5948143/  
C  
real*8 phaz(nmode)  
data phaz/  
R      5.6059551, 4.1390905, 6.2273364, 5.9263325, 3.5187488,  
R      5.4222918, 5.7706189, 4.9518018, 4.4614434, 5.2936754,  
R      5.5074186, 2.3949680, 4.5948687, 2.2385154, 3.1959155,  
R      4.4706650/  
  
! -----  
!   Описание набора случайных амплитуд для каждой моды  
! -----  
real*8 amp(nmode,3)  
data amp/
```

```
0.075595722, -1.3572438, 0.37845582, -0.38310400, ! X
0.11698084, -1.1607968, 0, -0.028096508, ! X
0, 0, -0.23279878, 0, ! X
0, -0.87953436, -0.60458595, 0, ! X
1.0322379, 0.53098691, -0.24294342, -0.83271527, ! Y
-0.60710335, 0, -0.27813554, 0, ! Y
-1.1801908, 0, 0, 0.97667843, ! Y
0, -0.69450939, 0, -0.60800761, ! Y
1.0182580, -0.96607661, 0.21195602, -0.60592365, ! Z
0, 0.31490606, 0.10941788, 0, ! Z
0, -1.5361234, 0, 0, ! Z
0.81321216, 0, -0.36861938, -0.37148938/ ! Z
```

```
! -----
! Выбор знаков в выражениях (16)-(17)
! -----
```

```
real*8 sign1(4)
data sign1/1.0,-1.0,-1.0, 1.0/

real*8 sign2(4)
data sign2/-1.0,-1.0, 1.0, 1.0/

real*8 aa, phayu, phazz, k1
```

```
! -----
! Процедура вычисление начальных условий турбулентности
! -----
```

```
ig=1
jg=1
kg=1

nbox = Nx-4 ! число ячеек расчетной области по оси x, за вычетом хостовых
aa = 2.D0*Pi/DBLE(nbox)

! цикл по ячейкам сетки
do k=3,Nz-2
do j=3,Ny-2
do i=3,Nx-2

v_x(i,j,k) = 0.0 ! массивы скоростей
v_y(i,j,k) = 0.0
v_z(i,j,k) = 0.0

! цикл по чктырем первым волновым векторам
! k=(1,1,1), (-1,1,1), (1,-1,1) и (1,1,-1)
do imo=1,4
1 k1 = mode(1,imo)*(i+ig-3) +
mode(2,imo)*(j+jg-3) + mode(3,imo)*(k+kg-3)

v_x(i,j,k) = v_x(i,j,k) + amp(imo,1)*DCOS(aa*k1 + phax(imo))

1 phayu = phax(imo) + sign1(imo)
2 *DCOS((amp(imo,3)**2-amp(imo,1)**2-amp(imo,2)**2)
/2.D0/amp(imo,1)/mode(1,imo)/mode(2,imo)/amp(imo,2))

v_y(i,j,k) = v_y(i,j,k) + amp(imo,2)*DCOS(aa*k1 + phayu)

1 phazz = phax(imo) + sign2(imo)
2 *DCOS((amp(imo,2)**2-amp(imo,1)**2-amp(imo,3)**2)
/2.D0/amp(imo,1)/mode(1,imo)/mode(3,imo)/amp(imo,3))
```

```
v_z(i,j,k) = v_z(i,j,k) + amp(imo,3)*DCOS(aa*k1 + phazz)
```

```
enddo !imo
```

```
! ЦИКЛ ПО ОСТАЛЬНЫМ ВОЛНЫМ ВЕКТОРАМ
```

```
do imo=5,nmode
```

```
1 k1 = mode(1,imo)*(i+ig-3) + mode(2,imo)*(j+jg-3) +  
mode(3,imo)*(k+kg-3)
```

```
v_x(i,j,k) = v_x(i,j,k) + amp(imo,1)*DCOS(aa*k1 + phax(imo))
```

```
v_y(i,j,k) = v_y(i,j,k) + amp(imo,2)*DCOS(aa*k1 + phay(imo))
```

```
v_z(i,j,k) = v_z(i,j,k) + amp(imo,3)*DCOS(aa*k1 + phaz(imo))
```

```
enddo
```

```
QP(i,j,k,1)=1.D0 ! массив безразмерной плотности
```

```
! нормировка на желаемое среднее число маха Mach_set:
```

```
QP(i,j,k,2)=v_x(i,j,k)/2.84832d0*Mach_set ! компоненты скорости
```

```
QP(i,j,k,3)=v_y(i,j,k)/2.84832d0*Mach_set
```

```
QP(i,j,k,4)=v_z(i,j,k)/2.84832d0*Mach_set
```

```
QP(i,j,k,8)=QP(i,j,k,1)**gamma ! массив безразмерного давления
```

```
enddo
```

```
enddo
```

```
enddo
```

```
! -----  
! процедура энергетической подпитки  
! -----
```

```
subroutine DRIVING
```

```
integer ii, i0, it, kk, seed
```

```
integer i ,j, k
```

```
real*8 x, y, z, ph(6,2), t_turn, a
```

```
real*8 rn,tmp,tmp2
```

```
real*8 XXX(Nx,Ny,Nz,3)
```

```
real*8,parameter::drive=0.019D0
```

```
a=0.2D0*drive ! эмпирическое число Маха для подпитки энергией
```

```
k0 = (2.D0*Pi)/((Nx-4)*dx) ! нормирование координат на  $2\pi$ .
```

```
t_turn=0.5D0/drive ! оценка времени оборота для низшей моды
```

```
it=INT(time/t_turn) ! целое число времен оборота t/t_turn
```

```
seed = 1111111+333333*it
```

```
do kk=1,2 ! для каждого волнового числа ...
```

```
do ii=1,6 ! задаем шесть ...
```

```
call srand(seed)
```

```
call random_number(rn)
```

```
ph(ii,kk) = 2.D0*Pi*rn ! случайных фаз
```

```
end do
```

```
end do
```

```
do kk=1,2 ! волновые числа 1 и 2
```

```
! цикл по ячейкам сетки
```

```
do K=3,Nz-2
```

```
do J=3,Ny-2
```

```
do I=3,Nx-2
```

```
x=I*dx*k0 ! от 0 до  $2\pi$ 
```

```
y=J*dy*k0
```

```
z=K*dz*k0
```

```
! компоненты импульса
```

```
QU(I,J,K,2) = QU(I,J,K,2) + a*(DSIN(kk*y+ph(1,kk))
```

```
1 +DSIN(kk*z+ph(2,kk)))
```

```
QU(I,J,K,3) = QU(I,J,K,3)+a*(DSIN(kk*z+ph(3, kk))
1      +DSIN(kk*x+ph(4, kk)))
QU(I,J,K,4) = QU(I,J,K,4)+a*(DSIN(kk*x+ph(5, kk))
1      +DSIN(kk*y+ph(6, kk)))

      enddo
      enddo
      enddo

enddo !kk
end subroutine DRIVING
```

Литература

1. J. H. Jeans, *The Universe around Us*, New York, The University press (1929).
2. Д. О. Устюгов, С. Д. Устюгов, Моделирование радиационного разлета лазерной плазмы во внешнем магнитном поле, *Матем. моделирование*, 21:11 (2009), 33–46.
3. Д. О. Устюгов, С. Д. Устюгов, Эволюция лазерной плазмы во внешнем магнитном поле, *Матем. моделирование*, 20:8 (2008), 74–86.
4. О. М. Белоцерковский, А. М. Опарин, В. М. Чечеткин. *Турбулентность. Новые Подходы*. Москва: Наука, 2003.
5. M. Brachet, D. Meiron, S. Orszag, B. Nickel, R. Morf, and U. Frisch, Small-scale structure of the Taylor–Green vortex, *J. Fluid Mech.* 130 (1983), pp. 411–452.
6. German Aerospace Center. Available at <http://www.dlr.de/as/>
7. W.M. van Rees, A. Leonard, D.I. Pullin, and P. Koumoutsakos, A comparison of vortex and pseudo-spectral methods for the simulation of periodic vortical flows at high Reynolds numbers, *J. Comput. Phys.* 230 (2011), pp. 2794–2805.
8. D. Fauconnier, *Development of a dynamic finite difference method for large-eddy simulation*, Ph.D. thesis, Ghent University, 2008. ISBN 978-90-8578-235-3. NUR 978,928. Wettelijk depot: D/2008/10.500/55.
9. Б.Н. Четверушкин. *Кинетические схемы и квазигазодинамическая система уравнений*. Москва: Макс Пресс. 2004.
10. Ю.В. Шеретов. *Динамика сплошных сред при пространственно-временном осреднении*. Москва–Ижевск, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». 2009.
11. Т.Г. Елизарова. *Квазигазодинамические уравнения и методы расчета вязких течений*. Москва: Научный мир. 2007. – 352 с.
12. I. A. Shirokov and T. G. Elizarova, Simulation of laminar–turbulent transition in compressible Taylor–Green flow basing on quasi-gas dynamic equations, *J. of Turbulence*, 15, Issue 10 (2014), pp. 707–730. <http://dx.doi.org/10.1080/14685248.2014.927581>
13. I.A. Shirokov, T.G. Elizarova. Application of Quasi-Gas Dynamic Equations to Numerical Simulation of Near-Wall Turbulent Flows. *Computational*

- Mathematics and Modeling. December 2016, pp. 1–23.
<http://dx.doi.org/10.1007/s10598-016-9344-z>
14. Т.Г. Елизарова, П.Н. Никольский. Численное моделирование ламинарно-турбулентного перехода в течении за обратным уступом. Вестник Московского университета, серия 3. Физика. Астрономия. 2007. № 4, с. 14–17.
 15. T.G. Elizarova and V.V. Seregin, Filtered simulation method for turbulent heat and mass transfer in gas dynamic flows, in Proceedings of the 6th International Symposium on Turbulence, Heat and Mass Transfer, Rome, 14–18 September, K. Hanjalic, Y. Nagano, S. Jakirlic, eds., Begell House Inc., 2009, pp. 383–386.
 16. Т.Г. Елизарова, М.В. Попов. Численное моделирование трехмерных течений квазинейтрального газа на основе сглаженных уравнений магнитной гидродинамики. ЖВМиМФ. 2015, т. 55, N 8, С.1363–1379.
<http://link.springer.com/article/10.1134/S0965542515080084>
 17. M.V. Popov, T.G. Elizarova. Smoothed MHD equations for numerical simulations of ideal quasi-neutral gas dynamic flows. Computer Physics Communications. 196 (2015) 348–361
<http://dx.doi.org/10.1016/j.cpc.2015.07.003>
 18. K-100 System, Keldysh Institute of Applied Mathematics RAS, Moscow; Available at <http://www.kiam.ru/MVS/resources/k100.htm>
 19. G.A. Bird, Molecular Gas Dynamics and the Direct Simulation of Gas Flows, Clarendon Press, Oxford, 1998.
 20. Таблицы физических величин. Справочник под ред. акад. И.К. Кикоина. М.: Атомиздат, 1976, 1008 с.
 21. Физические величины. Справочник. А.П. Бабичев, Н. А. Бабушкина, А.М. Братковский и др.; под ред. И.С. Григорьева, Е.З. Мейлихова. М.: Энергоатомиздат, 1991, 1232 с.
 22. R.K. Crockett, Simulations of magnetized supersonic turbulence in the interstellar medium, Ph.D Thesis, 2005.