



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 102 за 2018 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Боровин Г.К., Лапшин В.В.

Автоколебания при
управлении движением
прыгающего аппарата

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Боровин Г.К., Лапшин В.В. Автоколебания при управлении движением прыгающего аппарата // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2018. № 102. 19 с. doi:[10.20948/prepr-2018-102](https://doi.org/10.20948/prepr-2018-102)
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2018-102>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Российской академии наук**

Г.К. Боровин, В.В.Лапшин

**Автоколебания при управлении
движением прыгающего аппарата**

Москва — 2018

Боровин Г.К., Лапшин В.В.

Автоколебания при управлении движением прыгающего аппарата

Аналитически исследована плоская задача управления вертикальным и горизонтальным движением одноногого прыгающего аппарата с учетом весомости ноги. В конструкции телескопической ноги используется упругий элемент, который в основном обеспечивает движение аппарата и осуществляет рекуперацию энергии. Сервопривод в телескопическом звене ноги используется только для компенсации необратимых потерь энергии на преодоление трения и при ударах в момент приземления и отрыва от опорной поверхности. Показано наличие устойчивых периодических решений (автоколебаний), которые позволяют использовать разомкнутую систему управления вертикальным движением аппарата (поддержание заданной высоты прыжков). Управление горизонтальным движением аппарата осуществляется только за счет отработки в течение фазы полета необходимого значения переднего выноса ноги в момент приземления. Для управления движением аппарата достаточно применения позиционных сервоприводов, обеспечивающих выход в заданное конечное положение.

Ключевые слова: прыгающий аппарат, прыгающий робот, автоколебания, управление движением

Gennady Konstantinovich Borovin, Vladimir Vladimirovich Lapshin

Self-oscillation when controlling the movement of a hopping vehicle

The planar problem of controlling the vertical and horizontal motion of a one-legged hopping vehicle with due regard for the weight of the leg is analytically investigated. The design of the telescopic leg uses an elastic element, which basically ensures the movement of the vehicle and carries out energy recuperation. The servomotor in the telescopic leg link is used only to compensate for irreversible energy losses for overcome friction and collisions at the moments of landing and detachment from the supporting surface. It is shown that there are stable periodic solutions (self-oscillations) that allow the use of an open control system for vertical movement of the vehicle (maintaining a given height of jumps). Control of the horizontal movement of the device is carried out only by working out during the phase of the flight the required value of the forward carrying of the leg at the moment of landing. To control the movement of the vehicle, it is enough positional servomotors that provide an output to a given end position.

Key words: hopping vehicle, hopping robot, self-oscillation, motion

Введение

Исследование движения шагающих машин показало, что при увеличении скорости движения энергетически выгодно переходить от ходьбы к бегу [1]. Однако при беге мала продолжительность опорной фазы движения и велики пиковые значения усилий и мощностей, развиваемых приводами в шарнирах ног. Режим работы приводов приближается к импульсному режиму. Такой режим работы не характерен и энергетически невыгоден для традиционных электромеханических и гидравлических сервоприводов. Вместе с тем при движении прыгающего аппарата в опорной фазе приводы в степенях подвижности ног сначала тормозят корпус, поглощая его кинетическую и потенциальную энергию, а затем разгоняют корпус, сообщая ему энергию, необходимую для реализации предстоящей фазы полета. Для осуществления такого режима движения целесообразно использовать упругие элементы, обеспечивающие рекуперацию энергии [2-7]. В качестве упругих элементов могут быть использованы обычные или пневматические пружины. Сервопривод (электромеханический, гидравлический или пневматический) в опорной фазе необходим лишь для подкачки энергии, теряемой в течение каждого прыжка на трение и при ударах. Использование упругих элементов позволяет создать бегающие аппараты с малыми энергозатратами. Вместе с тем требуют решения вопросы управления движением аппаратов с таким специфическим приводом, при котором движение аппарата в опорной фазе в основном формируется неуправляемым упругим элементом. В [5-7] показано, что задача управления движением таких прыгающих аппаратов разделяется на независимые подзадачи (контуры управления):

- управление вертикальным движением (поддержание заданной высоты прыжков);
- управление горизонтальным движением (вперед, вбок и разворотом по углу рысканья);
- стабилизация движения по углам тангажа и крена; адаптация к неровностям местности (этот контур управления необходим только для многоногих аппаратов).

Различные аспекты конструирования, математического моделирования и управления движением таких аппаратов обсуждаются в [8-19]. При этом используемые алгоритмы управления строятся эмпирически аналогично алгоритмам, предложенным Рейбертом [5], без аналитического обоснования этих алгоритмов управления.

В данной работе исследуется задача управления движением плоского одноногого прыгающего аппарата с весомой ногой. Полученные ранее результаты для четырехногого аппарата с невесомыми ногами [6, 7, 18] обобщены на случай аппарата с весомой ногой. Аналитически исследованы разомкнутая и замкнутая системы стабилизации вертикального движения

аппарата с линейным упругим элементом в телескопической ноге и задача управления горизонтальным движением аппарата (вперед-назад). Теоретически обоснована обнаруженная Рейбертом [5] возможность использования разомкнутой системы управления вертикальным движением аппарата. Показано, что вертикальное движение аппарата является автоколебательным и имеется асимптотически устойчивое периодическое решение при фиксированной величине смещения сервопривода подкачки энергии в систему в течение опорной фазы. При изменении величины этого смещения изменяются параметры асимптотически устойчивого периодического решения (высота прыжков). Показано, что для управления горизонтальным движением аппарата достаточно в течение фазы полета обеспечить необходимый передний вынос ноги в момент приземления. Таким образом, управление горизонтальным и вертикальным движением аппарата можно осуществить без использования сервоприводов, отслеживающих траекторию движения. Достаточно иметь в качестве приводов позиционные сервоприводы, обеспечивающие выход в заданное конечное положение.

1 Конструктивная схема аппарата

Аппарат состоит из корпуса и телескопической ноги (рис. 1). Массу корпуса обозначим m , массу ноги – m_L . Точка B подвеса ноги к корпусу совпадает с центром масс корпуса. Момент инерции корпуса относительно его центра масс равен J .

Положение корпуса аппарата в абсолютной системы координат $O\eta\zeta$ (ось $O\zeta$ – вертикальная) определяется координатами точки B корпуса $\bar{R} = (\eta, \zeta)$ и углом наклона корпуса к горизонту θ (рис. 1).

Положение ноги относительно корпуса определяется углом φ между отрицательным направлением оси Bz и телескопическим звеном ноги, а также длиной ноги L (расстоянием от точки подвеса ноги к корпусу B до стопы S) (рис. 1). Массу ноги обозначим m_L , расстояние от стопы до центра масс ноги – ρ , момент инерции ноги относительно центра масс – J_L .

Усилие, развиваемое телескопическим звеном ноги, обозначим F , а момент, создаваемый двигателем между корпусом и телескопическим звеном ноги, обозначим M .

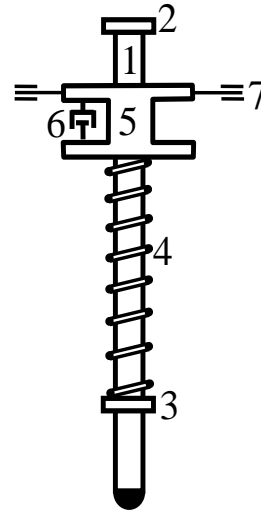
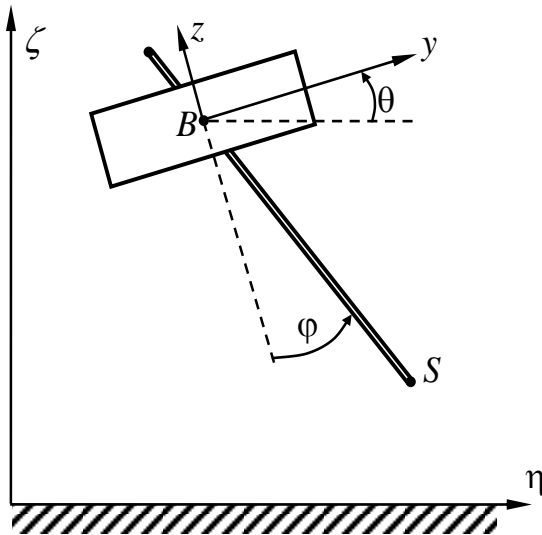


Рис. 1. Конструктивная схема аппарата Рис. 2. Схема телескопического звена ноги

Контакт ноги с опорной поверхностью имеет точечный характер. Конец ноги будем называть стопой. Взаимодействие ноги с опорной поверхностью сводится к силе реакции опорной поверхности.

На рис. 2 приведена конструктивная схема телескопического звена ноги. На несущую конструкцию ноги 1 с упорами 2 и 3 надеты пружина 4 и муфта 5, которая может перемещаться вдоль ноги. Концы пружины 4 закреплены на упоре 3 и муфте 5. Длина муфты δ может изменяться с помощью сервопривода 6. К муфте крепится ось 7 шарнира φ поворота ноги относительно корпуса. Концы пружины закреплены на нижнем упоре 3 и муфте 5. Верхний упор 2 ограничивает область перемещений муфты 5, т.е. ограничивает длину ноги. Масса муфты 5 входит в массу корпуса аппарата.

Длиной ноги L является расстояние от оси 7 до стопы. Максимальная длина ноги ограничена величиной L_0 , соответствующей положению муфты 5 на верхнем упоре 2. Предполагается, что при выходе муфты на упор имеет место абсолютно неупругий удар.

Величина усилия F , развиваемого телескопическим звеном ноги, определяется силой, развиваемой пружиной 4, и трением муфты 5 о несущую конструкцию ноги 1 (рис. 2). Предположим, что трение сводится к сухому трению, тогда

$$F = k(L_* + \delta - L) - F_{\text{тр}} \text{sign } \dot{L}, \quad (1)$$

где k – коэффициент упругости пружины, $F_{\text{тр}}$ – величина силы сухого трения, L_* – длина ноги при нерастянутой пружине и $\delta = 0$.

В дальнейшем значение δ длины муфты 5 будем называть поджатием пружины. Пределы изменения δ ограничены

$$\delta_{\min} \leq \delta \leq \delta_{\max}. \quad (2)$$

В силу (1), изменяя величину поджатия пружины δ , можно изменять величину усилия, развиваемого телескопическим звеном ноги.

2 Способ перемещения аппарата и управления его движением

Опорная поверхность является горизонтальной плоскостью $\zeta_G = 0$, где $\zeta_G(\eta)$ – уравнение опорной поверхности.

Движение аппарата заключается в чередовании двух фаз – опорной и фазы полета. Фазу полета и следующую за ней опорную фазу будем называть прыжком. Номер прыжка обозначим через n . Обозначим t_0^n момент начала фазы полета n -го прыжка, t_1^n – момент начала опорной фазы n -го прыжка, t_2^n – момент окончания n -го прыжка. При этом $t_0^{n+1} = t_2^n$.

При управлении движением аппарата предполагается, что в результате обработки информационной системой показаний с датчиков известны скорости корпуса аппарата $\dot{\eta}, \dot{\zeta}$ в опорной фазе, угол наклона корпуса к горизонту θ и скорость его изменения $\dot{\theta}$, координата y_2 , масса противовеса m_2 , координаты и скорости в степенях подвижности ног $\varphi, L, \dot{\varphi}, \dot{L}$. Минимальный состав измерений при этом должен содержать θ, y_2, φ, L . Желательно также непосредственное измерение скоростей $\dot{\theta}, \dot{\varphi}, \dot{L}$. В противном случае скорости определяются в результате обработки нескольких последовательных измерений координаты. Для определения скоростей $\dot{\eta}, \dot{\zeta}$ точки B корпуса в опорной фазе достаточно провести обработку этих измерений.

Водитель аппарата задает желаемый режим движения аппарата: высоту прыжков (продолжительность фазы полета) и режим движения в горизонтальном направлении. Роль водителя могут выполнять и более высокие уровни системы управления движением автоматического аппарата.

Задача управления движением аппарата решается в предположении, что малы угол наклона корпуса к горизонту θ и угол отклонения ноги от конструктивной вертикали φ , малы отклонения центра масс аппарата от точки B , вызываемые перемещением противовеса m_2 . В опорной фазе привод поворота ноги относительно корпуса отключен и момент в этом шарнире тождественно равен нулю. В опорной фазе противовес m_2 неподвижен в относительной системе координат и сохраняется значение его координаты y_2 , отработанное сервоприводом в предшествующей фазе полета аппарата.

Задача управления движением аппарата разделяется на три независимых подзадачи (контур управления):

1. управление вертикальным движением аппарата (поддержание заданной высоты прыжков),
2. управление горизонтальным движением аппарата,
3. стабилизация движения по углу наклона корпуса к горизонту (поддержание горизонтальной ориентации корпуса).

Управление вертикальным движением аппарата (обеспечение заданной высоты прыжков) осуществляется за счет использования привода поджатия пружины. В фазе полета нога полностью распрямлена $L = L_0$ или муфта 5 находится на верхнем упоре 2 ноги (рис. 2). В начале опорной фазы вертикальная скорость корпуса отрицательна. Корпус сначала тормозится до нулевой скорости по координате ζ (фаза торможения), а затем разгоняется до скорости, необходимой для реализации следующего прыжка (фаза разгона). Обозначим через T_1 продолжительность фазы полета, T_0 – продолжительность опорной фазы движения, T_T – продолжительность фазы торможения, T_p – продолжительность фазы разгона, $T_0 = T_T + T_p$.

В фазе торможения аппарат сжимает пружину ноги, накапливая в ней энергию, которая в фазе разгона идет на увеличение потенциальной и кинетической энергии корпуса. При движении по горизонтальной поверхности, если не подкачивать энергию в пружины за счет их поджатия, то из-за потерь энергии на трение и при ударах вертикальная скорость $\dot{\zeta}$ в момент отрыва от опорной поверхности (или высота прыжков) будет уменьшаться от прыжка к прыжку. В момент максимального сжатия ноги, изменяя исходное значение величины поджатия пружины, можно компенсировать потери энергии в текущей опорной фазе и ошибки отработки программного движения по вертикальной координате на предыдущих прыжках. В фазе полета сервопривод поджатия пружины возвращается в исходное положение δ_0 .

Изменение величины поджатия пружины осуществляется сервоприводом за время T_δ , существенно меньшее продолжительности опорной фазы $T_\delta \ll T_0$. При построении алгоритмов управления движением будем предполагать, что изменение величины поджатия пружин осуществляется мгновенно в момент смены фаз торможения и разгона.

При управлении горизонтальным движением аппарата и движением по углу наклона корпуса к горизонту предполагается, что аппарат по вертикали осуществляет установившееся периодическое движение с заданной водителем высотой прыжков H_D .

Управление горизонтальным движением аппарата (движением по координате η) осуществляется за счет изменения переднего выноса ноги в начале опорной фазы (отработки соответствующего значения угла φ в течение предшествующей фазы полета). Изменение переднего выноса ноги относительно корпуса в начале опорной фазы позволяет изменять среднее

значение проекции силы реакции опорной поверхности на ось $O\eta$, обеспечивая требуемое движение по координате η .

Стабилизация движения корпуса аппарата может осуществляться разными способами за счет:

1. работы двигателя поворота ноги относительно корпуса [5];
2. изменения в фазе полета положения противовеса, установленного на корпусе, что позволяет изменять положение центра масс корпуса и среднее в течение последующей опорной фазы значение момента силы реакции в точке опоры ноги относительно центра масс аппарата [6, 7, 18];
3. управления установленным на корпусе маховиком;
4. изменения программного движения ноги относительно корпуса в фазе полета [18, 20, 21].

Перейдем к подробному рассмотрению алгоритмов управления движением центра масс аппарата, т.е. первых двух контуров управления.

3 Управление вертикальным движением аппарата

В рамках сделанных предположений в линейном приближении движение аппарата по вертикальной координате ζ описывается следующими уравнениями. В фазе полета аппарат движется по баллистической траектории

$$\ddot{\zeta} = -g \quad \text{при} \quad t \in [t_0^n, t_1^n] \quad (3)$$

и на фазовой плоскости $(\zeta, \dot{\zeta})$ переходит из положения $(L_0, \dot{\zeta}_0)$ в положение $(L_0, \dot{\zeta}_1)$, причем $\dot{\zeta}_1 = -\dot{\zeta}_0$.

В момент приземления имеет место абсолютно неупругий удар стопы об опорную поверхность. Скорость стопы гасится до нулевой скорости, а скорость корпуса аппарата не изменяется

$$\dot{\zeta}_1^+ = \dot{\zeta}_1^- = \dot{\zeta}_1, \quad (4)$$

где $\dot{\zeta}_1^-, \dot{\zeta}_1^+$ – скорость корпуса до и после удара.

В опорной фазе аппарат движется под действием силы тяжести и силы F , развиваемой упругим элементом ноги

$$m\ddot{\zeta} = k(L_* + \delta - \zeta) - F_{\text{уп}} \text{sign} \dot{\zeta} - mg, \quad (5)$$

В момент отрыва от опорной поверхности имеет место абсолютно неупругий удар корпуса об упор 2 ноги. Из закона сохранения количества движения при этом следует

$$\dot{\zeta}_2^+ = \mu \dot{\zeta}_2^- = \dot{\zeta}_0^{n+1}, \quad (6)$$

где $\dot{\zeta}_2^-$ – скорость до удара, $\dot{\zeta}_2^+$ – скорость после удара корпуса о верхний упор ноги, $\dot{\zeta}_0^{n+1}$ – скорость аппарата в начале следующей фазы полета

$$\mu = \frac{m}{m + m_L}. \quad (7)$$

Целью управления движением аппарата является поддержание заданной водителем высоты прыжков H_D (или величины изменения вертикальной координаты ζ в фазе полета). В силу (3) желаемая высота прыжков H_D однозначно определяет желаемую вертикальную скорость аппарата в начале фазы полета $\dot{\zeta}_D = \sqrt{2gH_D}$ и желаемую продолжительность фазы полета $T_1^D = \sqrt{\frac{2H_D}{g}}$.

Значения величины поджатия пружины для фаз торможения и разгона неодинаковы:

$$\delta = \begin{cases} \delta_0 & \text{в фазе торможения,} \\ \delta_p & \text{в фазе разгона.} \end{cases} \quad (8)$$

Значения величины поджатия пружины для фаз торможения и разгона неодинаковы: $\delta = \delta_0$ в фазе торможения, $\delta = \delta_p$ в фазе разгона. Изменяя величину исходного поджатия пружины на величину $\delta_* = \delta_p - \delta_0$, можно управлять вертикальным движением аппарата, обеспечивая подкачку энергии в систему и компенсируя потери энергии на трение и удары. В фазе полета сервопривод поджатия пружины возвращается в исходное положение δ_0 .

3.1 Замкнутая система управления

Замкнутая система стабилизации вертикального движения аппарата по рассогласованию между фактической вертикальной скоростью аппарата в момент приземления $\dot{\zeta}_1$ и желаемой величиной этой скорости в начале фазы полета $\dot{\zeta}_D$ определяет величину смещения привода поджатия пружины δ_* , необходимую для компенсации потерь энергии в течение текущей опорной фазы и ошибок отработки программного движения на предыдущем прыжке.

Движение аппарата по вертикальной координате ζ в опорной фазе описывается линейным дифференциальным уравнением (5) с постоянными коэффициентами. В фазе торможения и в фазе разгона имеют место интегралы энергии. Изменение механической энергии аппарата в течение каждой из этих фаз равно работе силы трения. Механическая энергия аппарата при этом складывается из кинетической энергии корпуса, потенциальной энергии силы тяжести и потенциальной энергии деформации упругого элемента ноги. В итоге имеем следующие соотношения: для фазы торможения

$$\begin{aligned} & \frac{m\dot{\zeta}_1^2}{2} + mg(L_0 - \zeta_{\min}) + \frac{k}{2}(L_* + \delta_0 - L_0)^2 - \\ & - \frac{k}{2}(L_* + \delta_0 - \zeta_{\min})^2 = F_{\text{тр}}(L_0 - \zeta_{\min}) \quad , \end{aligned} \quad (9)$$

а для фазы разгона

$$\begin{aligned} & \frac{m[\dot{\zeta}_2^-]^2}{2} + mg(L_0 - \zeta_{\min}) + \frac{k}{2}(L_* + \delta_p - L_0)^2 - \\ & - \frac{k}{2}(L_* + \delta_p - \zeta_{\min})^2 = -F_{\text{тр}}(L_0 - \zeta_{\min}) \quad , \end{aligned} \quad (10)$$

где ζ_{\min} – минимальное значение вертикальной координаты корпуса в опорной фазе.

Значение ζ_{\min} определяется из (9)

$$\zeta_{\min} = L_0 + \alpha - \sqrt{\alpha^2 + \frac{m\dot{\zeta}_1^2}{k}} \quad , \quad (11)$$

где

$$\alpha = L_* + \delta_0 - L_0 + \frac{F_{\text{тр}} - mg}{k} \quad . \quad (12)$$

Вычитая (9) из (10), получаем

$$[\dot{\zeta}_2^-]^2 - [\dot{\zeta}_1]^2 = \frac{2k}{m}(\delta_* - \frac{2F_{\text{тр}}}{k})(L_0 - \zeta_{\min}) \quad , \quad (13)$$

где ζ_{\min} – минимальное значение координаты ζ в фазе опоры, которое определяется соотношением (11)

Используя модель удара (6) и соотношение (7), получаем из (13), что для обеспечения требуемой высоты прыжка H_D в следующей фазе полета (или требуемой скорости $\dot{\zeta}_D$ в начале следующей фазы полета) необходимо и достаточно в момент смены фаз торможения и разгона изменить исходное поджатие пружины δ_0 на величину

$$\delta_* = \frac{(m + m_L)^2[\dot{\zeta}_D]^2 - m^2[\dot{\zeta}_1]^2 + 4F_{\text{тр}}m(L_0 - \zeta_{\min})}{2km(L_0 - \zeta_{\min})} \quad . \quad (14)$$

Если допустимые значения поджатия упругого элемента ноги сервоприводом не ограничены и $\delta_p = \delta_0 + \delta_*$, то аппарат выходит на программное движение по вертикали в течение одной опорной фазы. В силу ограничений (2) на величину поджатия пружины значение δ_p выбирается из условий

$$\delta_p = \max[\delta_{\min} , \min[\delta_{\max} , \delta_0 + \delta_*]] \quad , \quad (15)$$

и аппарат выходит на установившееся периодическое движение по вертикальной координате с заданной водителем высотой прыжков за конечное число прыжков.

3.2 Разомкнутая система управления

При использовании разомкнутой системы стабилизации вертикального движения прыгающего аппарата величина поджатия упругого элемента ноги не изменяется на каждом прыжке, а задается водителем и остается неизменной для серии прыжков в течение достаточно продолжительного промежутка времени. Покажем, что при этом в вертикальном направлении аппарат асимптотически выходит на установившееся периодическое движение.

Отметим, что

$$[\dot{\zeta}_1^n]^2 = [\dot{\zeta}_0^n]^2 = 2gH_n,$$

где H_n – высота n -го прыжка. Тогда из (6), (13) имеем

$$H_{n+1} = f(H_n) = \mu^2 H_n + \frac{d}{2g} \sqrt{\alpha^2 + \frac{2mgH_n}{k}} - \frac{d\alpha}{2g}, \quad (16)$$

где

$$d = \frac{2km}{(m + m_L)^2} \left(\delta_* - \frac{2F_{\text{тр}}}{k} \right).$$

Периодическому вертикальному движению аппарата соответствует фиксированная высота прыжков

$$H_{n+1} = H_n = H > 0,$$

или неподвижная точка отображения (16). Уравнение $H = f(H)$ имеет два решения $H = 0$ и

$$H = H_D = \frac{d}{2g(1 - \mu^2)} \left(\frac{md}{k(1 - \mu^2)} - 2\alpha \right). \quad (17)$$

Отметим, что высота прыжков всегда положительна и решение (17) соответствует реальному периодическому движению аппарата тогда и только тогда, когда

$$d > \frac{2\alpha k}{m} (1 - \mu^2) \quad \text{или} \quad \delta_* > \frac{2F_{\text{тр}}}{k} + \frac{1 - \mu^2}{\mu^2} \alpha. \quad (18)$$

Покажем, что если условие (18) выполнено (или $H_D > 0$), то периодическое вертикальное движение аппарата с высотой прыжков H_D (предельный цикл) асимптотически устойчиво, а стационарное решение $H = 0$ неустойчиво.

Сначала определим, при каких условиях высота прыжков возрастает

$$H_{n+1} = f(H_n) > H_n.$$

Это имеет место тогда и только тогда, когда

$$\frac{d}{2g} \sqrt{\alpha^2 + \frac{2mgH_n}{k}} > (1 - \mu^2 H_n) + \frac{d\alpha}{2g}.$$

Возводя это неравенство в квадрат, упрощая его и учитывая, что высота прыжков положительна $H_n > 0$, получаем, что высота прыжков возрастает при $0 < H_n < H_D$.

Отсюда сразу получаем, что решение, соответствующее стационарной точке $H = 0$, является неустойчивым.

Если $H_n < H_D$, то $f(H_n)$ является монотонно возрастающей функцией. Следовательно,

$$H_{n+1} = f(H_n) < f(H_D) = H_D,$$

или

$$H_{n+1} < H_D.$$

Таким образом, если высота прыжков была меньше чем H_D , то затем, возрастая от прыжка к прыжку, она будет все время оставаться меньше, чем H_D . Тогда существует предел H_n при $n \rightarrow \infty$ и его значение не превосходит H_D . Покажем, что этот предел в точности равен H_D

$$\begin{aligned} H_{n+1} - H_n &= f(H_n) - H_n = \frac{d}{2g} \sqrt{\alpha^2 + \frac{2mgH_n}{k}} - (1 - \mu^2)H_n - \frac{d\alpha}{2g} = \\ &= \frac{\frac{d^2}{4g^2} \left(\alpha^2 + \frac{2mgH_n}{k} \right) - \left((1 - \mu^2)H_n + \frac{d\alpha}{2g} \right)^2}{\frac{d}{2g} \sqrt{\alpha^2 + \frac{2mgH_n}{k}} + (1 - \mu^2)H_n + \frac{d\alpha}{2g}}. \end{aligned}$$

Упрощая выражение в числителе и учитывая (17), имеем

$$H_{n+1} - H_n = \frac{(1 - \mu^2)^2 H_n (H_D - H_n)}{\frac{d}{2g} \sqrt{\alpha^2 + \frac{2mgH_n}{k}} + (1 - \mu^2)H_n + \frac{d\alpha}{2g}}.$$

Тогда

$$H_{n+1} - H_n > \frac{(1 - \mu^2)^2 H_n (H_D - H_n) g}{d\alpha} > 0.$$

При $n \rightarrow \infty$ H_{n+1} и H_n стремятся к одному и тому же пределу, и $(H_{n+1} - H_n) \rightarrow 0$. Тогда из последнего неравенства следует, что при $n \rightarrow \infty$ $(H_D - H_n) \rightarrow 0$ или $H_n \rightarrow H_D$.

Таким же образом можно доказать, что если $H_n > H_D$, то $H_{n+1} < H_n$ и $H_n \rightarrow H_D$ при $n \rightarrow \infty$.

В результате получаем, что при фиксированной величине смещения привода поджатия пружины δ_* , удовлетворяющей условию (18), имеют место автоколебания, т.е. существует асимптотически устойчивый стационарный (периодический) режим движения с высотой прыжков H_D , определяемой соотношением (17). Стационарное же решение $H = 0$ является неустойчивым.

Если (18) не выполнено, то уравнение $H = f(H)$ имеет единственное решение $H = 0$. Аналогично выше изложенному можно показать, что в этом случае всегда $0 < H_{n+1} < H_n$ и $H_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, т.е. высота прыжков постоянно уменьшается, пока аппарат не остановится.

При выполнении условия (18) в вертикальном направлении аппарат совершает автоколебательное движение с устойчивым периодическим решением. Для стабилизации аппарата в вертикальном направлении достаточно в опорной фазе обрабатывать фиксированную величину смещения сервопривода поджатия упругого элемента. Для каждого достаточно большого значения δ_* существует устойчивый периодический режим движения (предельный цикл), отвечающий заданной величине поджатия упругого элемента ноги. Для изменения высоты прыжков достаточно изменить величину δ_* , и аппарат перейдет на новое устойчивое периодическое движение по вертикали.

Такая система управления вертикальным движением является разомкнутой, т.е. не использует обратной связи, содержащей информацию об отклонении фактического движения от программного. Экспериментально такой закон управления был обнаружен и использован М. Рэйбертом в [5].

3.3 Периодическое движение аппарата в вертикальном направлении

Остановимся подробнее на периодическом режиме движения аппарата по вертикальной координате. В этом случае $\zeta_2^+ = \mu\zeta_2^- = -\dot{\zeta}_1 = \dot{\zeta}_D = \sqrt{2gH_D}$, где H_D определяется соотношением (17). Из уравнения (5) с учетом этих краевых условий получаем:

- в фазе торможения при $t \in [t_1^n, t_1^n + T_T]$

$$\zeta_D(t) = -\beta \cos \sqrt{\frac{k}{m}}(t - t_1^n - T_T) + \alpha + L_0, \quad (19)$$

- в фазе разгона при $t \in [t_1^n + T_T, t_1^n + T_0]$

$$\zeta_D(t) = -\left(\delta_* - \frac{2F_{\text{тр}}}{k} + \beta\right) \cos \sqrt{\frac{k}{m}}(t - t_1^n - T_T) + \alpha + L_0 + \delta_* - \frac{2F_{\text{тр}}}{k}, \quad (20)$$

где значение α определяется соотношением (12),

$$\alpha = \beta = \sqrt{\alpha^2 + 2gH_D \frac{m}{k}},$$

продолжительности по времени в фазе торможения и разгона равны

$$T_T = \sqrt{\frac{m}{k}} \arccos \frac{\alpha}{\beta}, \quad T_P = \sqrt{\frac{m}{k}} \arccos \frac{\alpha + \delta_* - \frac{2F_{\text{тр}}}{k}}{\beta + \delta_* - \frac{2F_{\text{тр}}}{k}}.$$

Сила, развиваемая телескопическим звеном ноги, равна

$$F_D(t) = m(g + \ddot{\zeta}_D). \quad (21)$$

При отсутствии возмущений аппарат по вертикальной координате совершает колебательное движение. Период колебаний $T_C = T_0 + T_1$, где $T_0 = T_T + T_p$, зависит от высоты прыжков H_D или от величины поджатия пружины δ_* .

4 Управление горизонтальным движением аппарата

В рамках сделанных предположений (см. п.2) линеаризованные уравнения горизонтального движения в опорной фазе имеют вид

$$\ddot{\eta}_* = b(\tau)\eta_*, \quad (22)$$

где $\eta_* = \eta - \eta_1^n - \Delta^n$; $\tau = t - t_1^n$; $b(\tau) = \frac{F_D(t)}{m\zeta_D(t)}$; $F_D(t), \zeta_D(t)$ – известные функции времени (19)–(21), соответствующие номинальному периодическому движению аппарата по вертикальной координате; η_1^n – значение координаты η при $t = t_1^n$ (в момент приземления), Δ^n – передний вынос ноги (расстояние вдоль оси $O\eta$ от стопы до точки подвеса ноги к корпусу) в момент приземления

$$\Delta^n = \eta_s^n - \eta_1^n, \quad (23)$$

где η_s^n – координата стопы ноги в опорной фазе n -го прыжка.

Управление движением по координате η осуществляется за счет варьирования значений переднего выноса ног в момент приземления.

Рассмотрим фундаментальную систему решений уравнения (22) $f_1(\tau), f_2(\tau)$ с начальными условиями $f_1(0) = 1, \dot{f}_1(0) = 0, f_2(0) = 0, \dot{f}_2(0) = 1$. Тогда

$$\eta_*(0) = -\Delta^n, \quad \dot{\eta}_*(0) = \dot{\eta}_1^n, \quad \eta_*(\tau) = -\Delta^n f_1(\tau) + \dot{\eta}_1^n f_2(\tau),$$

а в конце опорной фазы n -го прыжка

$$\eta_2^n = \eta_1^n + \Delta^n(1 - f_1(T_0)) + \dot{\eta}_1^n f_2(T_0), \quad \dot{\eta}_2^{n-} = -\Delta^n \dot{f}_1(T_0) + \dot{\eta}_1^n \dot{f}_2(T_0).$$

В момент приземления имеет место абсолютно неупругий удар стопы об опорную поверхность. Скорость стопы гасится до нулевой скорости, а скорость корпуса аппарата не изменяется

$$\dot{\eta}_1^+ = \dot{\eta}_1^- = \dot{\eta}_1,$$

где $\dot{\eta}_1^-, \dot{\eta}_1^+$ – скорость корпуса до и после удара.

В момент отрыва от опорной поверхности имеет место абсолютно неупругий удар корпуса об упор 2 ноги. Из закона сохранения количества движения при этом следует

$$\dot{\eta}_2^+ = \mu \dot{\eta}_2^- = \dot{\eta}_0^{n+1},$$

где $\dot{\eta}_2^-$ – скорость до удара, $\dot{\eta}_2^+$ – скорость после удара корпуса о верхний упор ноги, $\dot{\eta}_0^{n+1}$ – скорость аппарата в начале следующей фазы полета, значение μ определяется соотношением (7).

В фазе полета центр масс аппарата движется по баллистической траектории и с точностью до перемещений центра масс аппарата в относительной системе координат, вызываемых перемещением ноги относительно корпуса, имеем $\dot{\eta}(t) = -\dot{\eta}_0^n = \text{const}$ при $t \in [t_0^n, t_1^n]$.

В результате получаем

$$\begin{aligned} \eta_0^{n+1} &= \eta_0^n + \dot{\eta}_0^n T_1 + \Delta^n (1 - f_1(T_0)) + \dot{\eta}_0^n f_2(T_0) \quad , \\ \dot{\eta}_0^{n+1} &= \mu \left[-\Delta^n \dot{f}_1(T_0) + \dot{\eta}_0^n \dot{f}_2(T_0) \right] \quad . \end{aligned} \quad (24)$$

Рассмотрим два способа управления горизонтальным движением аппарата по координате η .

Управление по скорости. Целью такого управления является обеспечение задаваемой водителем скорости движения $\dot{\eta}_D$ в предстоящей фазе полета, т.е. требуется, чтобы $\dot{\eta}_0^{n+1} = \dot{\eta}_D$. Это обеспечивается за счет выноса точки постановки ноги на опорную поверхность вдоль оси $O\eta$ на величину Δ^n . Расчет необходимого значения Δ^n осуществляется в начале фазы полета n -го прыжка. Из (24) получаем, что для обеспечения требуемого значения скорости необходимо и достаточно, чтобы

$$\Delta^n = K_1 \dot{\eta}_D + K_2 \dot{\eta}_0^n, \quad (25)$$

где

$$K_1 = -\frac{1}{\mu \dot{f}_1(T_0)} \quad , \quad K_2 = \frac{\dot{f}_2(T_0)}{\dot{f}_1(T_0)}.$$

Управление по положению. В этом случае за счет выбора значений Δ для двух предстоящих прыжков n -го и $(n+1)$ -го обеспечивается к моменту начала $(n+2)$ -го прыжка смещение в горизонтальном направлении на расстояние S_D и скорость $\dot{\eta}_D$, т.е. требуется, чтобы $\eta_0^{n+2} = \eta_0^n + S_D$, $\dot{\eta}_0^{n+2} = \dot{\eta}_D$.

Из (24) и аналогичных соотношений для $(n+1)$ -го прыжка следует, что для этого необходимо и достаточно, чтобы

$$\Delta^n = K_3 S_D + K_4 \dot{\eta}_D + K_5 \dot{\eta}_0^n \quad , \quad \Delta^{n+1} = K_6 S_D + K_7 \dot{\eta}_D + K_8 \dot{\eta}_0^n, \quad (26)$$

где

$$\begin{aligned}
K_3 &= -\frac{\mu \dot{f}_1(T_0)}{K} \quad , \quad K_4 = \frac{f_1(T_0) - 1}{K} \quad , \\
K_5 &= \frac{\mu}{K} \left[(1 + \mu \dot{f}_2(T_0))(T_1 + f_2(T_0))\dot{f}_1(T_0) + \mu(1 - f_1(T_0))(\dot{f}_2(T_0))^2 \right] \quad , \\
K_6 &= -\mu \dot{f}_2(T_0)K_3 \quad , \quad K_7 = K_1 - \mu \dot{f}_2(T_0)K_4 \quad , \\
K_8 &= \mu \dot{f}_2(T_0)(K_5 - K_2) \quad , \\
K &= \mu \dot{f}_1(T_0) \left[(\mu \dot{f}_2(T_0) - 1)(1 - f_1(T_0)) + (T_1 + f_2(T_0))\mu \dot{f}_1(T_0) \right] \quad .
\end{aligned}$$

Значения коэффициентов K_j ($j=1,2,\dots,8$) в законах управления (25), (26) являются функциями конструктивных параметров аппарата и желаемой высоты прыжков H_D . Значения этих коэффициентов вычисляются заранее, и необходимость пересчета их величины возникает только при изменении желаемой высоты прыжков H_D . На каждом прыжке необходимое значение Δ^n вычисляется по одной из формул (25) или (26) в зависимости от способа управления, что требует малого объема вычислений. Подставляя полученное значение Δ^n в (23), определим необходимые значения координаты η_s^n – точки постановки ноги на опорную поверхность в начале опорной фазы n -го прыжка. Затем, учитывая, что в силу малости значения угла φ в шарнире поворота ноги относительно корпуса, в момент приземления $\zeta_s^n - \zeta_1^n \approx L = L_0$, и линеаризуя матрицу перехода от абсолютной к относительной системе координат, получаем в силу малости углов θ и φ

$$\varphi_1^n = \frac{\Delta^n - L_0 \theta_1^n}{L_0} \quad (27)$$

Полученное значение угла φ_1^n реализуется соответствующим сервоприводом в фазе полета с заданным запасом по времени до расчетного момента окончания фазы полета.

Отметим, что в формуле (27) используется значение угла θ в момент приземления $\theta(t_1^n) = \theta_1^n$, а вычисления производятся в начале фазы полета. Метод определения $\theta(t_1^n) = \theta_1^n$ на основе соответствующих измерений $\theta_0^n, \dot{\theta}_0^n$ с учетом влияния движения переноса ноги на ориентацию корпуса в данной работе не рассматривается. Возможные способы построения этого алгоритма обсуждаются в п. 2.

Заключение

Аналитически исследована задача управления вертикальным и горизонтальным движением плоского одноногого прыгающего аппарата с упругим элементом в телескопическом звене ноги. Показана возможность использования разомкнутой системы управления вертикальным движением аппарата, обусловленная наличием устойчивого периодического режима

движения (автоколебаний). Параметры этого устойчивого решения (высоту прыжков) можно менять за счет варьирования величины подкачиваемой в систему энергии. Управление горизонтальным движением аппарата осуществляется за счет отработки необходимого значения переднего выноса ноги в момент приземления. Для управления движением аппарата достаточно применение позиционных приводов, обеспечивающих требуемое конечное положение.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант № 16-01-00521).

Библиографический список

1. Okhotsimsky D., Platonov A., Kiril'chenko A., Lapshin V., Tolstousova V. Walking machines // *Advances in Mechanics*. 1992. Vol. 15. № 1–2. P. 39-70.
2. Seifert H.S. The Lunar pogo stick // *Journal Spacecraft Rockets*. 1967. Vol. 4, No. 7. P. 941–943.
3. Kaplan M.H., Seifert H.S. Hopping transporter for Lunar exploration // *Journal Spacecraft Rockets*. 1969. Vol. 6, No. 8. P. 917–922.
4. Бордюг Б.А., Ларин В.Б., Тимошенко А.Г. Задачи управления шагающим аппаратом. Киев: Наукова думка, 1985. 263 с.
5. Reibert M.H. Legged robots that balance. Cambridge, Massachusetts, London: MIT press, 1986. 233 p.
6. Лапшин В.В. Управление движением аппарата с упругими элементами в телескопических звеньях ног // *Известия РАН. МТТ*. 1989. № 2. С. 46–53.
7. Lapshin V.V. Control of motion of a robot with elastic elements in the telescopic leg sections // *Mechanics of Solids*. 1989. Vol. 24. No. 2. P. 42-49.
8. Buehler M. Dynamics locomotion with one, four and six-legged robots // *Journal of Robotics Society of Japan*. 2002. Vol. 20. No. 3. P. 15-20.
9. Cherouvin N., Papadopoulos E. Energy saving passive-dynamic gait for a one-legged hopping robot // *Robotica*. 2006. Vol. 24. P. 491-498.
10. Ahmadi M., Buehler M. Controlled passive dynamic running with the ARL-monopod II // *IEEE Transactions on Robotics*. 2006. Vol. 22. P. 974-986.
11. Hurst J., Rizzi A. Series compliance for an efficient running gait // *IEEE Robotics and Automation Magazine*. 2008. Vol. 15. P. 42-51.
12. Фернандес Р., Акинфиев Т., Армада М. Управление высотой прыжка одноногого резонансного робота // *Автоматика и телемеханика*. 2009. № 1. С. 74-84.
13. Fernandes R., Akinfiev T., Armada A. Control of the hop height of a one-legged resonance robot // *Automation and Remote Control*. 2009. Vol. 70. No. 1. P. 64–73
14. Poulakakis I., Grizzle J. The spring loaded inverted pendulum as the hybrid zero dynamics of an asymmetric hopper // *IEEE Transactions on Automatic Control*. 2009. Vol. 54. P. 1179-1793.

15. Raibert M., Blankespoor K., Nelson G., Playter R. BigDog, the Rough-Terrain Quadruped Robot // Proceedings of the 17th World Congress, Seoul, Korea. P. 10822-10825.
16. Karseen D., Wisse M. Running with improved disturbance rejection by using non-linear leg springs // The International Journal of Robotics Research. 2011. Vol. 30. No. 13. P. 1587-1595.
17. Miller B., Schmitt J., Clark J.E. Quantifying disturbance rejection of SLIP-like running systems // The International Journal of Robotics Research. 2012. Vol. 31. No. 5. P. 573-587.
18. Лапшин В.В. Механика и управление движением шагающих машин. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2012. 199 с.
19. Spröwitz A., Tulea A., Vespignani M., Ajallooeian M., Bardi E., Ijspeert A.J. Towards dynamic trot gait locomotion: design, control and experiments with Cheetah-cub, a compliant quadruped robot // The International Journal of Robotics Research. 2013. Vol. 32. No. 8. P. 932-950.
20. Лапшин В.В. Управление движением прыгающего аппарата в фазе полета // Изв. АН СССР. МТТ. 1984. № 1. С. 159-165.
21. Lapshin V.V. Motion control of a legged machine in the support less phase of hop // The International Journal of Robotics Research. 1989. Vol. 10. No. 4. P. 327-337.

Оглавление

Введение	3
1. Конструктивная схема аппарата.....	4
2. Способ перемещения аппарата и управления его движением	6
3. Управление вертикальным движением аппарата	8
3.1. Замкнутая система управления	9
3.2. Разомкнутая система управления.....	11
3.3. Периодическое движение аппарата в вертикальном направлении	13
4. Управление горизонтальным движением аппарата	14
Заключение	16
Библиографический список	17