



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

**Данилов А.В., Кропотов А.Н.,
Трифонов О.В.**

Применение метода
конечного поворота и
смещения для
манипулятора
последовательной
структуры с
кинематическими парами
пятого класса

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Данилов А.В., Кропотов А.Н., Трифонов О.В. Применение метода конечного поворота и смещения для манипулятора последовательной структуры с кинематическими парами пятого класса // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2018. № 107. 16 с. doi:[10.20948/prepr-2018-107](https://doi.org/10.20948/prepr-2018-107)
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2018-107>

Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Российской академии наук

Данилов А.В., Кропотов А.Н., Трифонов О.В.

**Применение метода конечного поворота
и смещения для манипулятора
последовательной структуры
с кинематическими парами пятого класса**

Москва — 2018

Данилов А.В., Кропотов А.Н., Трифонов О.В.

Применение метода конечного поворота и смещения для манипулятора последовательной структуры с кинематическими парами пятого класса.

Разработан алгоритм решения обратной задачи кинематики, основанный на применении теорем о конечном угле поворота и смещении для каждой степени подвижности манипулятора, позволяющий оптимально использовать каждую степень подвижности при движении схвата к заданным параметрам положения и ориентации. Решение ОЗК представлено по разработанному алгоритму и с помощью псевдообращенной матрицы Якоби по преобразованию Мура–Пенроуза. Даны сравнительные оценки решений.

Ключевые слова: манипулятор, кинематические пары, обратная задача кинематики, конечный угол поворота, конечное смещение.

Danilov Alexander Vladimirovich, Kropotov Alexander Nikolaevich, Trifonov Oleg Vsevolodovich

The application of the finite rotation and displacement method for a manipulator of a sequential structure with kinematic pairs of the fifth class.

An algorithm for solving the inverse kinematics problem is developed, based on the application of theorems on the finite angle of rotation and displacement for each degree of mobility of the manipulator, which makes it possible to optimally use every degree of mobility when the gripper moves to specified position and orientation parameters. The OZK solution is presented by the developed algorithm and by means of the pseudo-inverse Jacobi matrix with respect to the Moore-Penrose transform. Comparative estimates of the solutions are given.

Key words: manipulator, kinematic pairs, inverse kinematics problem, final angle of rotation, finite displacement.

Оглавление

Введение.....	3
1 Описание метода.....	3
2 Первая часть.....	4
2.1 Кинематическая пара в виде шарнира.....	4
2.2 Кинематическая пара в виде призмы.....	6
3 Вторая часть. Ориентация по продольной оси схвата.....	8
4 Третья часть. Ориентация по поперечной оси схвата.....	9
5 Результаты решения ОЗК предлагаемым методом конечного угла поворота и смещения.....	10
6 Результаты решения ОЗК методом псевдообратной матрицы Якоби.....	13
7 Оценка работы предлагаемого метода.....	14
Заключение.....	15
Список литературы.....	16

Введение

Рассматривается применение нового метода, основанного на теоремах о конечном угле поворота и смещении для каждой степени подвижности манипулятора, позволяющего оптимально использовать каждую степень подвижности при движении схвата к заданным параметрам положения и ориентации при решении обратной задачи кинематики [1].

Для подтверждения теоретических положений [1, 2] выполнены следующие работы:

- разработан алгоритм решения ОЗК согласно принятым положениям,
- написана программа для ЭВМ решения ОЗК по положению и ориентации в соответствии со сформулированными теоремами,
- создан программный комплекс в составе программы решения ОЗК и программы управления манипулятором с подключением Matlab/Simulink [3],
- выбран объект для исследования в виде восьмистепенного манипулятора с кинематическими парами пятого класса,
- для заданных однородных матриц начального и конечного положения схвата проведено моделирование задачи решения ОЗК в составе программного комплекса, получены графики изменения обобщенных координат манипулятора и осуществлена визуализация траектории движения звеньев манипулятора средствами пакета Matlab/Simulink,
- для сравнительного анализа решена ОЗК методом псевдообратной матрицы Якоби для тех же условий, получены графики изменения обобщенных координат манипулятора с помощью пакета Matlab/Simulink,
- получены временные интервалы решения ОЗК для различных конфигураций манипулятора,
- дана оценка применения метода при управлении манипулятором в режиме реального времени.

Быстрая сходимость метода позволяет получать решения ОЗК за малые интервалы времени и использовать его для управления манипулятором в режиме реального времени.

1 Описание метода

Решение ОЗК проводится в прямоугольной декартовой системе координат $x_0y_0z_0$, связанной с нулевым звеном. В методе для решения ОЗК используется пошаговое естественное движение звеньев манипулятора в соответствии с их типами сочленений и с учетом конструктивных ограничений по каждой степени подвижности. Конструктивные ограничения взаимного перемещения звеньев относительно друг друга задаются двумерным массивом $L_n(2, n)$, содержащим соответственно минимальные и максимальные значения взаимного ограничения для всех пар звеньев от 1-го сочленения и до последнего по порядку. Типы сочленений задаются в такой же

последовательности в одномерном массиве $p(n)$, состоящем из единиц и нулей, характеризующих вид кинематической пары (шарнир или призма), 1 – шарнир, 0 – призма. При отклонении рукоятки управления манипулятором задается новое положение схвата. Оно определяется вектором целевого положения \vec{R}_0 схвата и системой координат (E_x, E_y, E_z) ориентации схвата, привязанной к целевой точке. Алгоритм решения состоит из трех частей. В первой части решается задача ОЗК по положению схвата. Во второй и третьей частях определяется ориентация схвата отдельно относительно продольной оси и поперечной. Результат пошагового учета обобщенных координат является решением ОЗК при достижении схватом заданных параметров положения и ориентации. А теперь подробнее рассмотрим метод на примере решения ОЗК для манипулятора, состоящего из восьми звеньев с кинематическими парами пятого класса, представленного на рисунке 1 [1].

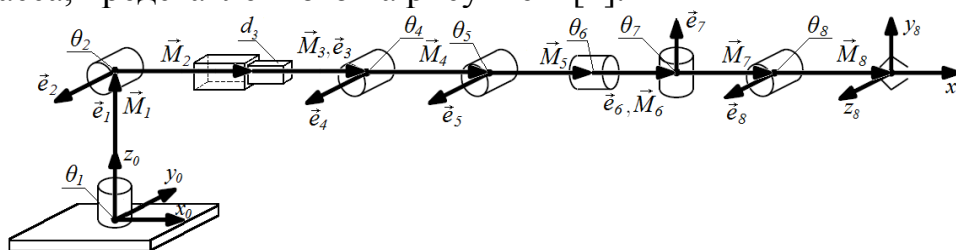


Рис. 1. Манипулятор, построенный с помощью векторов

2 Первая часть

2.1 Кинематическая пара в виде шарнира

Определяются вспомогательные векторы \vec{S}_1 и \vec{K}_1 для звена с номером 1.

$$\vec{S}_1 = \sum_{i=1}^n \vec{M}_i, \quad (1)$$

$$\vec{K}_1 = \vec{S}_1 + \vec{R}_1 = \sum_{i=1}^n \vec{M}_i + \vec{R}_0. \quad (2)$$

В начале решения ОЗК в формуле (2) \vec{R}_1 принимает значение \vec{R}_0 . Значение $p(1)=1$ соответствует сочленению в виде шарнира. Для него движение звена описывается теоремой 1 [1]. Требование теоремы 1 о некопланарности векторов \vec{e}_1 , \vec{S}_1 и \vec{K}_1 определяется по оценке величины определителя:

$$\begin{vmatrix} e_{1x} & e_{1y} & e_{1z} \\ S_{1x} & S_{1y} & S_{1z} \\ K_{1x} & K_{1y} & K_{1z} \end{vmatrix} \geq \varepsilon. \quad (3)$$

Требование теоремы 1 о неколлинеарности \vec{e} , \vec{S} и \vec{K} определяется по оценке величин следующих векторных произведений:

$$\begin{aligned} |\vec{e}_1 \times \vec{S}_1| &\geq \varepsilon, \\ |\vec{e}_1 \times \vec{K}_1| &\geq \varepsilon. \end{aligned} \quad (4)$$

В случае компланарности или коллинеарности векторов \vec{e}_1 , \vec{S}_1 и \vec{K}_1 переходим к сочленению с номером два. Если векторы \vec{e}_1 , \vec{S}_1 и \vec{K}_1 удовлетворяют теореме 1, конечный угол $\Delta\theta_1$ (смотри рисунок 2) определяется следующим образом.

Находим вектор \vec{j} как векторное произведение векторов $\vec{S}_1 = (S_{1x}, S_{1y}, S_{1z})^T$ и $\vec{e}_1 = (e_{1x}, e_{1y}, e_{1z})^T$. Обозначим вспомогательный вектор \vec{S}_1 , повернутый на конечный угол $\Delta\theta_1$, через $\vec{S}_1^{\Delta\theta}$. По условию теоремы 1 векторы \vec{e}_1 , $\vec{S}_1^{\Delta\theta}$ и \vec{K}_1 компланарны. Поэтому, чтобы не определять вектор $\vec{S}_1^{\Delta\theta}$, используем для нахождения вектора $\vec{j}^{\Delta\theta}$ вектор \vec{K}_1 . Находим вектор $\vec{j}^{\Delta\theta}$ как векторное произведение векторов $\vec{K}_1 = (K_{1x}, K_{1y}, K_{1z})^T$ и $\vec{e}_1 = (e_{1x}, e_{1y}, e_{1z})^T$. Конечный угол поворота равен

$$\Delta\theta_1 = \text{atan2}(\vec{j} \times \vec{j}^{\Delta\theta}, \vec{j} \cdot \vec{j}^{\Delta\theta}), \quad (7)$$

где atan2 – функция библиотеки «math.h» языка C++ [4].

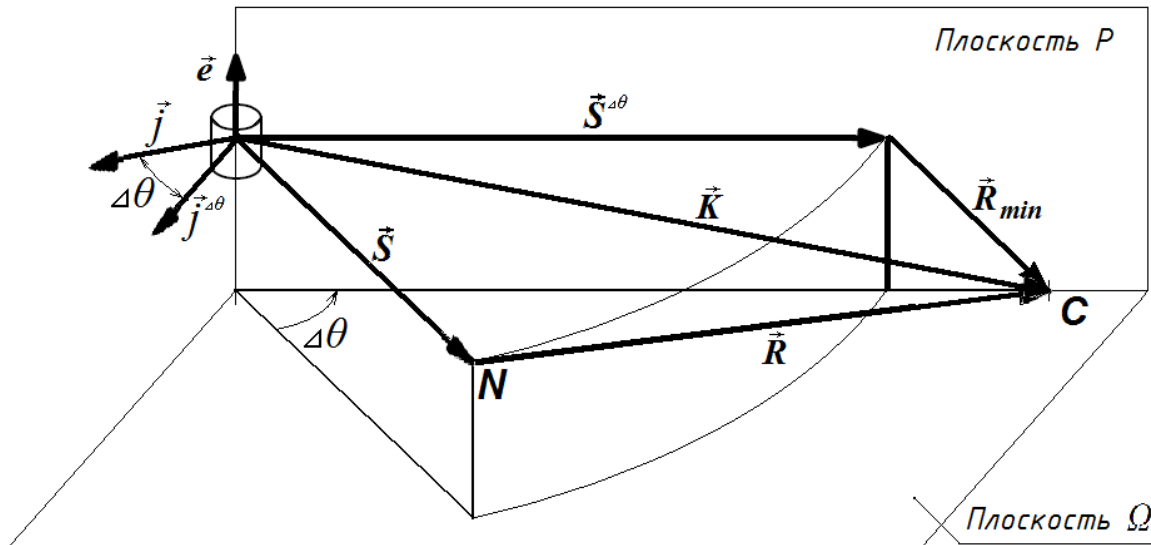


Рис. 2. Определение конечного угла поворота (нижние индексы не показаны)

Вносим приращение обобщенной координаты для 1-го сочленения

$$\theta_1^{\Delta\theta} = \theta_1^0 + \Delta\theta_1. \quad (8)$$

Проверяем принадлежность угла $\theta_1^{\Delta\theta}$ интервалу $L(1,1) \leq \theta_1^{\Delta\theta} \leq L(2,1)$. Если угол $\theta_1^{\Delta\theta}$ не принадлежит указанному интервалу, то приравниваем его к соответствующему значению границы интервала и корректируем приращение $\Delta\theta_1$. Далее, воспользовавшись матрицей сложного поворота, преобразуем координаты векторов, обозначающих звенья и оси согласно рисунку 1 по формулам для $k=1$.

$$\vec{M}_i = M(\vec{e}_k, \Delta\theta) \cdot \vec{M}_i, \text{ где } i = k, \dots, n; \quad (9)$$

$$\vec{e}_i = M(\vec{e}_k, \Delta\theta) \cdot \vec{e}_i, \text{ где } i=k+1, \dots, n; \quad (10)$$

где k – номер вектора шарнира, относительно которого происходит поворот, $n=8$ – количество звеньев манипулятора, $M(\vec{e}_k, \Delta\theta)$ – матрица сложного поворота в декартовых координатах – имеет следующий вид (нижние индексы опущены):

$$M(\vec{e}, \Delta\theta) = \begin{pmatrix} \cos \Delta\theta + (1 - \cos \Delta\theta)e_x^2 & (1 - \cos \Delta\theta)e_x e_y - \sin \Delta\theta \cdot e_z & (1 - \cos \Delta\theta)e_x e_z + \sin \Delta\theta \cdot e_y \\ (1 - \cos \Delta\theta)e_x e_y + \sin \Delta\theta \cdot e_z & \cos \Delta\theta + (1 - \cos \Delta\theta)e_y^2 & (1 - \cos \Delta\theta)e_y e_z - \sin \Delta\theta \cdot e_x \\ (1 - \cos \Delta\theta)e_x e_z - \sin \Delta\theta \cdot e_y & (1 - \cos \Delta\theta)e_y e_z + \sin \Delta\theta \cdot e_x & \cos \Delta\theta + (1 - \cos \Delta\theta)e_z^2 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Находим целевой вектор после поворота на *конечный угол* $\Delta\theta_1$

$$\vec{R}_2 = \vec{K}_1 - \sum_{i=k}^n \vec{M}_i. \quad (12)$$

Сравниваем величину вновь полученного целевого вектора \vec{R}_2 с заданной точностью

$$|\vec{R}_2| \leq \varepsilon. \quad (13)$$

Сравниваем параметры ориентации с заданной точностью

$$|\alpha_1| < \varepsilon, \quad |\alpha_2| < \varepsilon, \quad (14)$$

где $\alpha_1 = \text{atan2}(\vec{M}_n \times \vec{E}_x, \vec{M}_n \cdot \vec{E}_x)$, а $\alpha_2 = \text{atan2}(\vec{e}_n \times \vec{E}_y, \vec{e}_n \cdot \vec{E}_y)$.

Если выполняется (13) и (14) – задача ОЗК решена.

Если выполняется только (13) – переходим ко **второй части** алгоритма.

Если условие (13) не выполняется, меняем нижний индекс на номер больше при $k+1 < n$, а при $k+1 > n$ нижнему индексу присваиваем единицу и возвращаемся к формуле (1).

2.2 Кинематическая пара в виде призмы

Определяются вспомогательные векторы \vec{S}_3 и \vec{K}_3 для звена с номером три.

$$\vec{S}_3 = \sum_{i=3}^n \vec{M}_i, \quad (15)$$

$$\vec{K}_3 = \vec{S}_3 + \vec{R}_3 = \sum_{i=3}^n \vec{M}_i + \vec{R}_3. \quad (16)$$

Для рассматриваемого манипулятора (см. рис. 1) значение $p(3)=0$, что соответствует призме. Для неё движение звена описывается теоремой 2 [1]. В случае принадлежности вектора \vec{R}_3 плоскости e_3 ($|\vec{R}_3 \cdot \vec{e}_3| \leq \varepsilon$) переходим к сочленению с номером четыре, так как согласно теореме 2 о *конечном смещении* смещение в этом случае $\Delta d_3 = 0$. Если вектор \vec{R}_3 удовлетворяет теореме 2, конечное смещение Δd_3 (смотри рисунок 3) определяется следующим образом:

- находим отрезок Δd_3 как проекцию целевого вектора \vec{R}_3 на направление вектора \vec{e}_3 .

$$\Delta d_3 = \text{Pr}_{\vec{e}_3} \vec{R}_3 = (\vec{e}_3 \cdot \vec{R}_3) / |\vec{e}_3|; \quad (17)$$

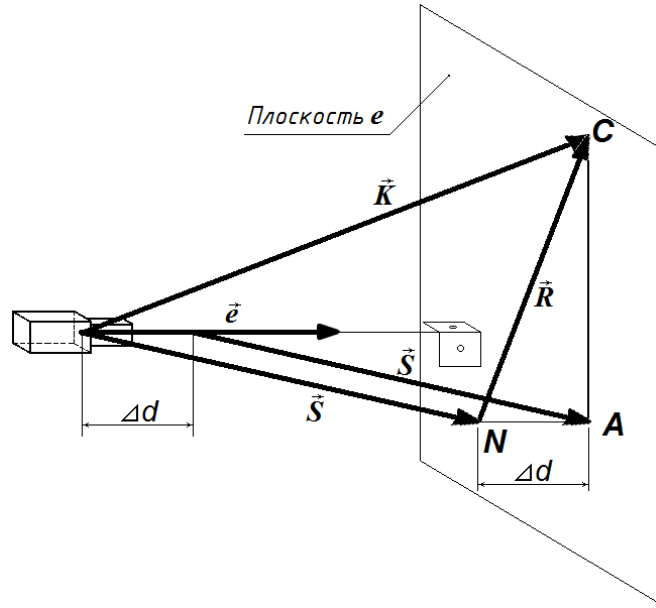


Рис. 3. Конечное смещение вдоль призмы звена

- вносим приращение обобщенной координаты для 3-го сочленения

$$d_3^{\Delta d} = d_3^0 + \Delta d_3; \quad (18)$$

- проверяем принадлежность $d_3^{\Delta d}$ интервалу $L(1,3) \leq d_3^{\Delta d} \leq L(2,3)$. Если $d_3^{\Delta d}$ не принадлежит указанному интервалу, то приравниваем его к соответствующему значению границы интервала и корректируем приращение Δd_3 . Изменяем длину 3-го вектора

$$|\vec{M}_3^{\Delta d}| = |\vec{M}_3^0| + \Delta d_3; \quad (19)$$

- находим целевой вектор после изменения длины 3-го вектора для $k=3$

$$\vec{R}_4 = \vec{K}_3 - \sum_{i=k}^n \vec{M}_i; \quad (20)$$

- сравниваем величину вновь полученного целевого вектора \vec{R}_4 с заданной точностью

$$|\vec{R}_4| \leq \varepsilon; \quad (21)$$

- сравнение параметров ориентации по точности:

$$|\alpha_1| < \varepsilon, \quad |\alpha_2| < \varepsilon; \quad (22)$$

Если выполняется (21) и (22), задача ОЗК решена.

Если выполняется только (21), переходим ко **второй части** алгоритма.

Если условие (21) не выполняется и $k+1 < n$, переходим к сочленению с номером четыре и возвращаемся к формуле (1). Если условие (21) не выполняется и $k+1 > n$, переходим к сочленению с номером один и возвращаемся к формуле (1).

3 Вторая часть. Ориентация по продольной оси схвата

Как сказано выше, ориентация по оси определяется теоремой 3 [1]. Для решения задачи ОЗК по ориентации отсчет ведем от конечного звена манипулятора с номером $n=8$. Если векторы \vec{e}_n , \vec{M}_n и \vec{E}_x компланарны или коллинеарны, переходим к шарниру с индексом на единицу меньше. Если векторы \vec{e}_n , \vec{M}_n и \vec{E}_x удовлетворяют теореме 3, конечный угол $\Delta\theta_n$ (см. рисунок 4) определяется следующим образом:

Находим вектор \vec{j} как векторное произведение векторов $\vec{M}_n = (M_{nx}, M_{ny}, M_{nz})^T$ и $\vec{e}_n = (\vec{e}_{nx}, \vec{e}_{ny}, \vec{e}_{nz})^T$. Находим вектор $\vec{j}^{\Delta\theta}$ как векторное произведение векторов $\vec{E}_x = (E_{xx}, E_{xy}, E_{xz})^T$ и $\vec{e}_n = (\vec{e}_{nx}, \vec{e}_{ny}, \vec{e}_{nz})^T$. Конечный угол поворота равен

$$\Delta\theta_n = \text{atan2}(\vec{j} \times \vec{j}^{\Delta\theta}, \vec{j} \cdot \vec{j}^{\Delta\theta}). \quad (23)$$

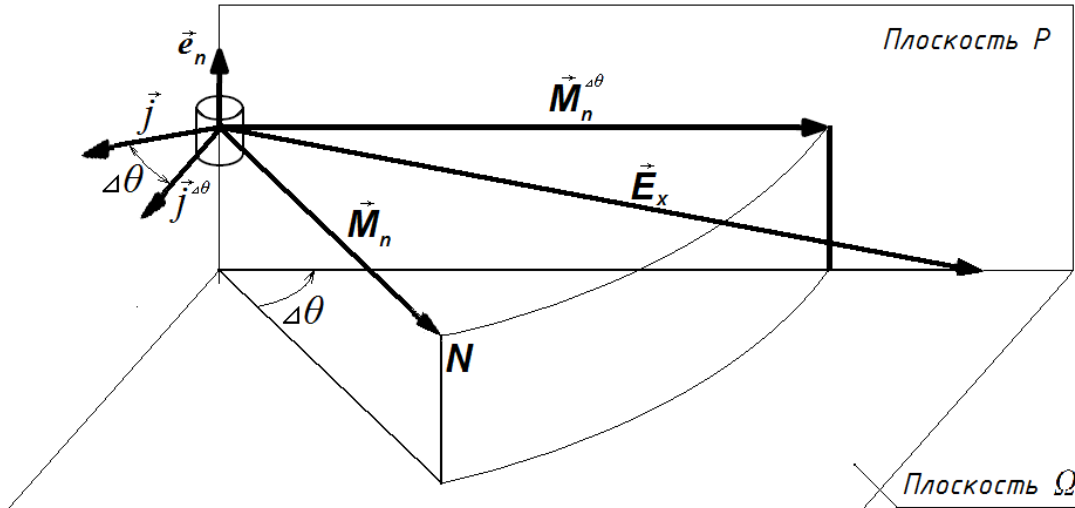


Рис.4. Схема определения угла конечного поворота $\Delta\theta$

Вносим приращение обобщенной координаты для n -го сочленения.

$$\theta_n^{\Delta\theta} = \theta_n^0 + \Delta\theta_n. \quad (24)$$

Проверяем принадлежность угла $\theta_n^{\Delta\theta}$ интервалу $L(1, n) \leq \theta_n^{\Delta\theta} \leq L(2, n)$. Если угол $\theta_n^{\Delta\theta}$ не принадлежит указанному интервалу, то приравниваем его к соответствующему значению границы интервала и корректируем приращение $\Delta\theta_n$. Далее, воспользовавшись матрицей сложного поворота, преобразуем координаты векторов, обозначающих звенья и оси согласно рисунку 1, по формулам для $k=n=8$.

$$\vec{M}_i = M(\vec{e}_k, \Delta\theta) \cdot \vec{M}_i, \text{ где } i=k, \dots, n; \quad (25)$$

$$\vec{e}_i = M(\vec{e}_k, \Delta\theta) \cdot \vec{e}_i, \text{ где } i=k+1, \dots, n; \quad (26)$$

где k – номер вектора шарнира, относительно которого происходит поворот, $n=8$ – количество звеньев манипулятора, $M(\vec{e}_k, \Delta\theta)$ – матрица сложного поворота в декартовых координатах (см. выражение 11).

Находим целевой вектор после поворота

$$\vec{R}_{n-1} = \vec{K}_n - \sum_{i=k}^n \vec{M}_i. \quad (27)$$

Находим углы между векторами \vec{M}_n , \vec{E}_x и \vec{e}_n , \vec{E}_y по формулам

$$\alpha_1 = \text{atan2}(\vec{M}_n \times \vec{E}_x, \vec{M}_n \cdot \vec{E}_x), \quad \alpha_2 = \text{atan2}(\vec{e}_n \times \vec{E}_y, \vec{e}_n \cdot \vec{E}_y). \quad (28)$$

Сравниваем величину вновь полученного целевого вектора \vec{R}_{n-1} с заданной точностью

$$|\vec{R}_{n-1}| \leq \varepsilon. \quad (29)$$

Сравниваем параметры ориентации с заданной точностью

$$|\alpha_1| < \varepsilon, \quad (30)$$

$$|\alpha_2| < \varepsilon. \quad (31)$$

Если выполняются условия 29, 30 и 31, то задача ОЗК решена.

Если не выполняются условия 29, 30 и 31, то переходим к шарниру с номером на единицу меньше и возвращаемся к началу второй части: **ориентация по продольной оси схвата**. Если выполняется условия 30, то переходим к третьей части: **ориентация по поперечной оси схвата**.

4 Третья часть. Ориентация по поперечной оси схвата

Как сказано выше, ориентация по оси определяется теоремой 3.

Если векторы \vec{e}_{n-1} , \vec{e}_n и \vec{E}_y компланарны или коллинеарны, переходим к шарниру с индексом $n-2$. Если вектора \vec{e}_{n-1} , \vec{e}_n и \vec{E}_y удовлетворяют теореме 3 [1], конечный угол $\Delta\theta_{n-1}$ для поперечных векторов ориентации определяется аналогично продольным (смотри рисунок 4) следующим образом:

Находим вектор \vec{j} как векторное произведение векторов $\vec{e}_n = (e_{nx}, e_{ny}, e_{nz})^T$ и $\vec{e}_{n-1} = (\vec{e}_{n-1x}, \vec{e}_{n-1y}, \vec{e}_{n-1z})^T$. Находим вектор $\vec{j}^{\Delta\theta}$ как векторное произведение векторов $\vec{E}_y = (E_{yx}, E_{yy}, E_{yz})^T$ и $\vec{e}_{n-1} = (\vec{e}_{n-1x}, \vec{e}_{n-1y}, \vec{e}_{n-1z})^T$. Конечный угол поворота равен

$$\Delta\theta_{n-1} = \text{atan2}(\vec{j} \times \vec{j}^{\Delta\theta}, \vec{j} \cdot \vec{j}^{\Delta\theta}). \quad (32)$$

Вносим приращение обобщенной координаты для $n-1$ -го сочленения.

$$\theta_{n-1}^{\Delta\theta} = \theta_{n-1}^0 + \Delta\theta_{n-1}. \quad (33)$$

Проверяем принадлежность угла $\theta_{n-1}^{\Delta\theta}$ интервалу $L(1, n-1) \leq \theta_{n-1}^{\Delta\theta} \leq L(2, n-1)$.

Если угол $\theta_{n-1}^{\Delta\theta}$ не принадлежит указанному интервалу, то приравняем его к соответствующему значению границы интервала и корректируем приращение $\Delta\theta_{n-1}$. Далее, воспользовавшись матрицей сложного поворота, преобразуем координаты векторов, обозначающих звенья и оси кинематических пар согласно рисунку 1, по формулам для $k=n-1$.

$$\vec{M}_i = M(\vec{e}_k, \Delta\theta) \cdot \vec{M}_i, \quad \text{где } i=k, \dots, n; \quad (34)$$

$$\vec{e}_i = M(\vec{e}_k, \Delta\theta) \cdot \vec{e}_i, \quad \text{где } i=k+1, \dots, n; \quad (35)$$

где k – номер вектора шарнира, относительно которого происходит поворот, $n=8$ – количество звеньев манипулятора, $M(\vec{e}_k, \Delta\theta_1)$ – матрица сложного поворота в декартовых координатах (смотри выражение 11).

Находим целевой вектор после поворота

$$\vec{R}_{n-2} = \vec{K}_{n-1} - \sum_{i=k}^n \vec{M}_i. \quad (36)$$

Находим углы между векторами \vec{M}_n , \vec{E}_x и \vec{e}_n , \vec{E}_y по формулам

$$\alpha_1 = \text{atan2}(\vec{M}_n \times \vec{E}_x, \vec{M}_n \cdot \vec{E}_x), \quad \alpha_2 = \text{atan2}(\vec{e}_n \times \vec{E}_y, \vec{e}_n \cdot \vec{E}_y). \quad (37)$$

Сравниваем величину вновь полученного целевого вектора \vec{R}_{n-2} с заданной точностью

$$|\vec{R}_{n-2}| \leq \varepsilon. \quad (38)$$

Сравнение параметров ориентации по заданной точности

$$|\alpha_1| < \varepsilon, \quad (39)$$

$$|\alpha_2| < \varepsilon. \quad (40)$$

Если выполняются условия 38, 39 и 40, то задача ОЗК решена.

Если не выполняются условия 38, 39 и 40, то переходим к шарниру с номером на единицу меньше и возвращаемся к началу третьей части: **ориентация по поперечной оси схвата**. Если выполняется условия 40, то переходим к формуле (1).

Достижение указанных параметров заданной точности согласно следующим условиям: $|R| < \varepsilon_{зад}$, $|\alpha_1| < \varepsilon_{зад}$, $|\alpha_2| < \varepsilon_{зад}$ – соответствует решению ОЗК. Третья ось ориентации N_z составляет с осями N_x и N_y правую тройку заданной системы координат ориентации схвата с началом в характерной точке схвата N .

5 Результаты решения ОЗК предлагаемым методом конечного угла поворота и смещения

Зададим начальную и конечную однородные матрицы положения схвата и решим ОЗК разработанным методом.

Однородная матрица начального положения схвата

$$T_{N_0} = \begin{pmatrix} 0,108518 & -0,945588 & 0,306735 & 2,51014 \\ 0,848621 & -0,0725874 & -0,523998 & 2,09768 \\ 0,517751 & 0,317165 & 0,794569 & 0,735127 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (41)$$

Однородная матрица конечного положения схвата

$$T_{N_k} = \begin{pmatrix} 0,951251 & -0,140278 & 0,274669 & 3,5 \\ 0,173648 & -0,492404 & -0,852869 & 0 \\ 0,254887 & 0,858988 & -0,444041 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (42)$$

Однородная матрица положения схвата после решения ОЗК

$$T_{Nk} = \begin{pmatrix} 0,950957 & -0,140914 & 0,275362 & 3,50067 \\ 0,173983 & -0,492377 & -0,852816 & 0,000031 \\ 0,255756 & 0,8589 & -0,443712 & 0,499905 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (43)$$

Результаты решения задачи ОЗК приведены в однородной матрице положения (43), в таблице 1 и на графиках рисунка 5. Траектория движения манипулятора показана на рисунке 6.

Таблица 1

Значения обобщенных координат манипулятора

№ сочленения	Обозначение, размерность	Значения обобщенных координат, град		
		Начальное положение	После решения ОЗК	Приращение Δq
1	Θ_1 , град	10	6,27034	-3,72966
2	Θ_2 , град	15	11,2584	-3,7416
3	d_3 , м	1	0,378443	-0,621557
4	Θ_4 , град	-10	-6,92076	3,07924
5	Θ_5 , град	-105	-89,5188	15,4812
6	Θ_6 , град	-187	-189,231	-2,231
7	Θ_7 , град	235	152,786	-82,214
8	Θ_8 , град	345	281,273	-63,727

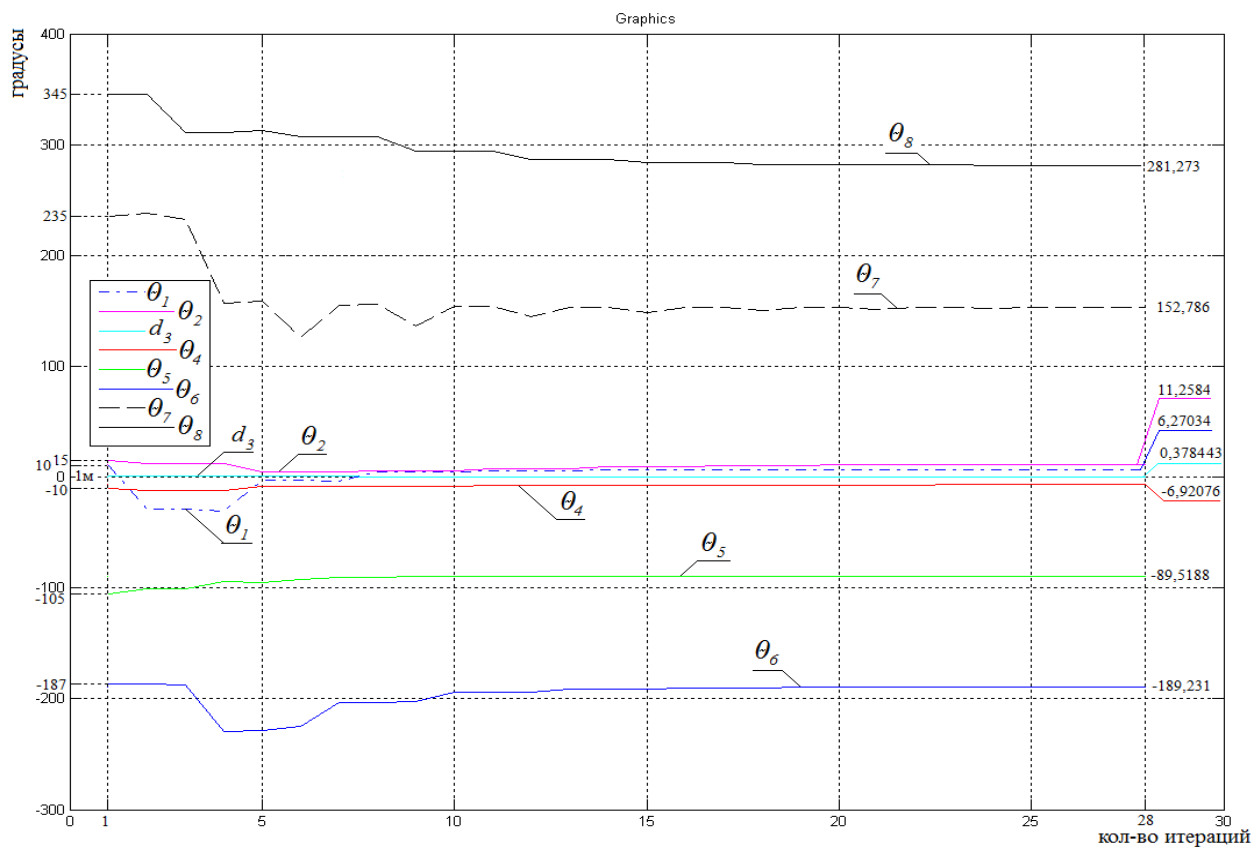


Рис. 5. Графики изменения обобщенных координат

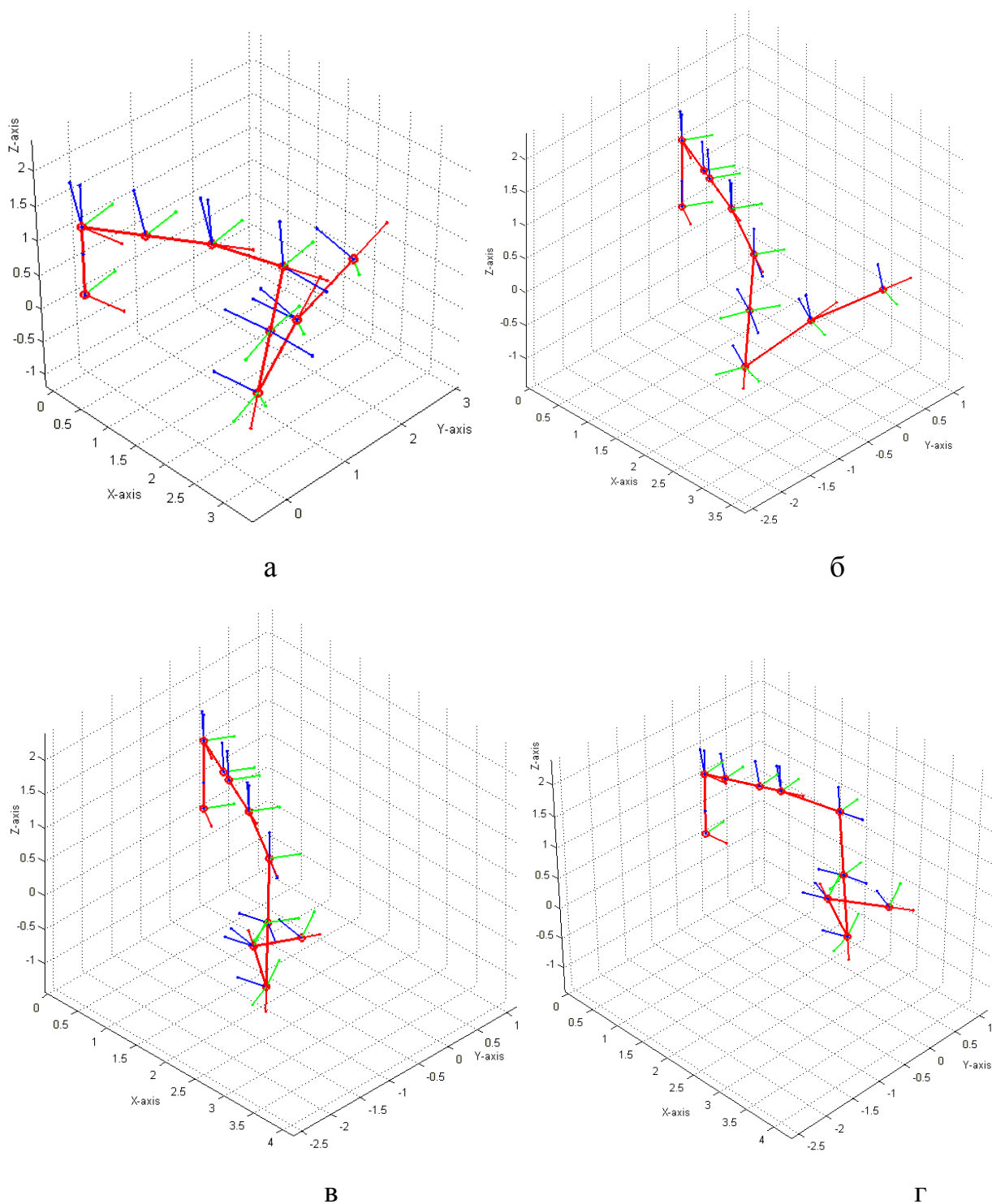


Рис. 6. Визуализация решения ОЗК: а – начальное положение, б и в – промежуточные положения, г – конечное положение

Сравнивая заданную конечную матрицу положения (42) с полученной в результате решения ОЗК (43), можно убедиться в высокой точности результата, полученного за 28 итераций.

6 Результаты решения ОЗК методом псевдообратной матрицы Якоби

Для обоснования и сравнения представленного метода решена ОЗК с помощью обратной матрицы Якоби для заданных начальных и конечных матриц положения схвата (смотри 41 и 42). Так как число сочленений манипулятора больше шести, используется псевдообратная матрица Якоби, полученная преобразованием Мура–Пенроуза [5]. В этом случае решение ОЗК ищется на основе уравнения:

$$\Delta \vec{q} = J^+ \cdot \Delta \vec{s}, \quad (44)$$

где $\Delta \vec{q}$ – вектор приращения обобщенных координат, $\Delta \vec{s}$ – вектор приращения положения и ориентации схвата, J^+ – псевдообратная матрица Якоби, равная

$$J^+ = J^T \cdot (J \cdot J^T)^{-1}, \quad (45)$$

где J – матрица Якоби.

Для определения матрицы J^+ в пакете MatLab/Simulink выбрана функция `pinv` [6], которая использует псевдообращение с помощью преобразования Мура–Пенроуза. Результаты решения задачи ОЗК методом псевдообратной матрицы Якоби приведены в однородной матрице положения (46), в таблице 2 и на графиках рисунка 7.

Однородная матрица положения схвата после решения ОЗК при разбиении траектории движения схвата на 150 отрезков.

$$T_{Nk} = \begin{pmatrix} 0,997305 & 0,0703258 & 0,0209038 & 3,49237 \\ -0,0153539 & 0,478674 & -0,877858 & 0,009791 \\ -0,0717422 & 0,875172 & 0,478464 & 0,497193 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (46)$$

Таблица 2

Значения обобщенных координат манипулятора

№ сочленения	Обозначение	Значения обобщенных координат, рад		
		Начальные значения	После решения ОЗК	Приращение Δq
1	Θ_1 , град	10	-9,95028	-19,95028
2	Θ_2 , град	15	14,0724	-0,9276
3	d_3 , м	1	1,26457	0,26457
4	Θ_4 , град	-10	-22,1141	-12,1141
5	Θ_5 , град	-105	-128,972	-12,8867
6	Θ_6 , град	-187	-164,887	22,113
7	Θ_7 , град	235	206,888	-28,112
8	Θ_8 , град	345	318,851	-26,149

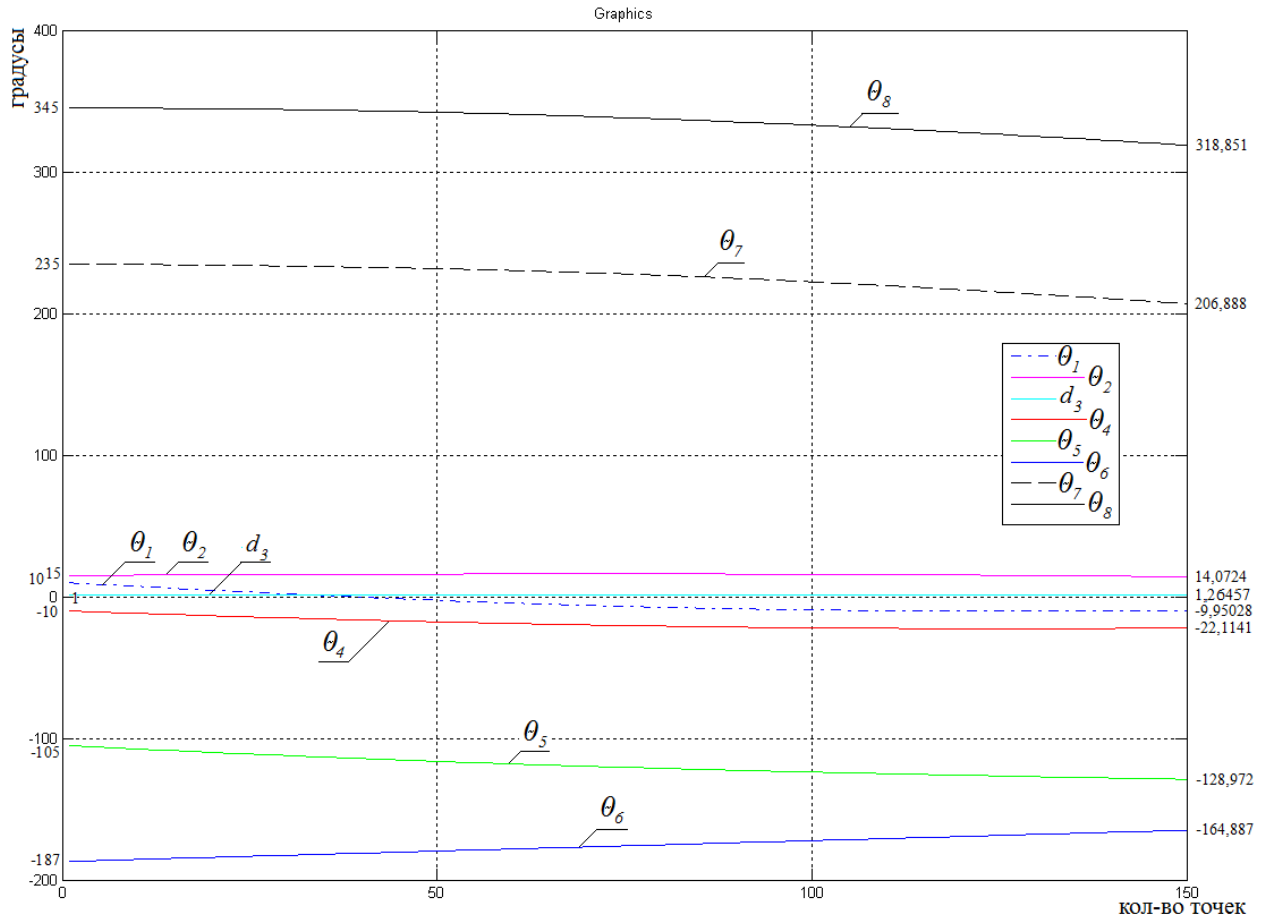


Рис. 7. Графики изменения обобщенных координат

Сравнивая заданную конечную однородную матрицу положения (43) с полученной в результате решения ОЗК (46), можно убедиться в удовлетворительной точности результата, достигнутого по положению при разбиении на 150 точек. Чтобы достигнуть такого же результата по ориентации, надо увеличить число точек на траектории почти в два раза.

7 Оценка работы предлагаемого метода

Для решения ОЗК в среднем требуется 22-24 итерации для восьмистепенного манипулятора, показанного на рисунке 1. Среднее время решения ОЗК равно 0,1 мкс, что в 20 раз быстрее метода Якоби при 150 точках. Данная оценка времени решения ОЗК проводилась при частоте процессора, равной 2,8 ГГц. ОЗК решалась для заданной точности $\epsilon_{\text{зад}} = 0,001$ по каждому параметру, что соответствует 1 мм по положению и 3,44 минуты по ориентации.

Заключение

Разработанный метод решения обратной задачи кинематики (ОЗК) для манипуляторов последовательной структуры с произвольным количеством звеньев, связанных кинематическими парами пятого класса, с помощью конечного угла поворота и смещения [1] на примере решения ОЗК для восьмистепенного манипулятора показал быструю сходимость и высокую точность, что очень важно и актуально для управления указанными манипуляторами в режиме реального времени.

Особенностью метода является использование массива малых отклонений обобщенных координат для выхода манипулятора из положения «вытянутого» манипулятора при задании движения схвата строго в противоположном направлении.

При многократном использовании метода для заданного конечного положения манипулятора и заданных различных векторов перемещения и ориентации схвата получены совпадения по положению и ориентации, удовлетворяющие заданной точности, что говорит о хорошей устойчивости метода и его работоспособности при решении ОЗК.

Метод не требует большого объема подготовительных работ при его применении для указанных манипуляторов.

Список литературы

1. Данилов А.В., Кропотов А.Н., Трифонов О.В. Общий подход к решению обратной задачи кинематики для манипулятора последовательной структуры с помощью конечного поворота и смещения // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2018. № 81, doi:10.20948/prepr-2018-81.
2. Беклемишев Н.Д., Платонов А.К., Соколов С.М., Трифонов О.В. Алгоритмы управления движением схвата манипулятора. // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2017. № 47. doi:10.20948/prepr-2017-47.
3. Дьяконов В.П. MatLab 6.5 SP1/7 + Simulink 5/6. Основы применения. Серия «Библиотека профессионала». – М.: СОЛОН-Пресс, 2005. – 800 с.: ил.
4. The C++ Resources Network, 2016. Standard C++ Library Reference, “cmath” (math.h) Library. URL: <http://www.cplusplus.com/reference/cmath/> (дата обращения: 15.03.2018)
5. The Moore-Penrose Pseudoinverse. URL:<http://www.math.ucla.edu/~laub/33a.2.12s/mppseudoinverse.pdf> (дата обращения: 20.01.2018)
6. Moore-Penrose pseudoinverse - MatLab pinv. URL:<https://www.mathworks.com/help/matlab/ref/pinv.html> (дата обращения: 29.01.2018)