



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 115 за 2018 г.



ISSN 2071-2898 (Print)  
ISSN 2071-2901 (Online)

Березин А.В., Марков М.Б.,  
Паротькин С. В., Сысенко А.В.

Алгоритм метода частиц в  
рассеивающей среде

**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Алгоритм метода частиц в рассеивающей среде / А.В.Березин [и др.] // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2018. № 115. 12 с. doi:[10.20948/prepr-2018-115](https://doi.org/10.20948/prepr-2018-115)  
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2018-115>

**Ордена Ленина  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ  
им. М.В. КЕЛДЫША  
Российской академии наук**

**А.В. Березин, М.Б. Марков, С.В. Паротькин, А.В. Сысенко**

**АЛГОРИТМ МЕТОДА ЧАСТИЦ В РАССЕИВАЮЩЕЙ СРЕДЕ**

**Москва – 2018**

**А.В. Березин, М.Б. Марков, С.В. Пароткин, А.В. Сысенко**

e-mail: a\_v\_berezin@mail.ru

## **АЛГОРИТМ МЕТОДА ЧАСТИЦ В РАССЕЙВАЮЩЕЙ СРЕДЕ**

*Рассмотрены особенности численного алгоритма решения кинетического уравнения для электронов в рассеивающей среде и самосогласованном электромагнитном поле. Представлен алгоритм моделирования рассеяния в приближении многократных столкновений на временном шаге. Выполнены расчеты, подтверждающие эффективность метода.*

**Ключевые слова:** метод частиц, электромагнитное поле, уравнение движения, столкновение.

**A.V. Berezin, M.B. Markov, S.V. Parotkin, A.V. Sysenko**

## **THE ALGORITHM OF PARTICLES METHOD IN THE SCATTERING MEDIUM**

*Features of a numerical algorithm for solving the kinetic equation for electrons in a scattering medium and a self-consistent electromagnetic field are considered. An algorithm for simulating scattering in the approximation of multiple collisions at a time step is presented. The calculations confirming the effectiveness of the method are performed.*

**Key words:** method of particles, electromagnetic field, equation of motion, collision.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (грант № 17-01-00301).

### **Содержание**

Введение .....	3
1. Постановка задачи .....	3
2. Алгоритм решения кинетического уравнения методом частиц .....	4
3. Тест с однократным рассеянием .....	8
4. Тест с многократным рассеянием .....	9
Заключение .....	11
Список использованных источников .....	11

## Введение

Развитие алгоритмов численного решения задач для систем квазилинейных кинетических и электродинамических уравнений идет по двум основным направлениям. Первое направление подразумевает разностное решение кинетического уравнения и называется методом дискретных ординат [1-3]. Второе направление основано на методе частиц [4-5] и состоит в переходе к моделированию динамической системы путем построения обобщенного решения кинетического уравнения. Авторам данной работы удалось получить результаты, имеющие определенное практическое значение, в рамках второго подхода [6,7]. Опыт его применения показал, что одной из важных проблем является сочетание моделирования столкновений и переноса заряженных частиц в самосогласованном электромагнитном поле.

Данная работа представляет особенности моделирования столкновений в рамках численного алгоритма решения кинетического уравнения. Метод численного решения уравнений Максвелла подробно рассмотрен в работе [8], а алгоритм, реализующий метод частиц в отсутствие столкновений или в приближении средних потерь энергии, – в [9-11].

## 1. Постановка задачи

Рассмотрим функцию распределения электронов  $f = f(t, \mathbf{r}, \mathbf{p})$  в фазовом пространстве  $(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \mathbb{R}_r^3 \times \mathbb{R}_p^3$ , координат  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  и импульсов  $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z)$ . Эта функция подчиняется уравнениям:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \text{div}_{\mathbf{r}}(\mathbf{v}f) + e \text{div}_{\mathbf{p}}[(\mathbf{E} + [\boldsymbol{\beta}, \mathbf{H}])f] = Q(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}) + \int d\mathbf{p}' \sigma(\mathbf{p}, \mathbf{p}') v' f(\mathbf{p}'), \quad (1)$$

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad \text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad (2)$$

где  $t$  – лабораторное время,  $\mathbf{v}$  – скорость электрона,  $\mathbf{E} = \mathbf{E}(t, \mathbf{r})$  и  $\mathbf{H} = \mathbf{H}(t, \mathbf{r})$  – напряженность электрического и магнитного полей соответственно,  $\text{div}_{\mathbf{r}}$  и  $\text{div}_{\mathbf{p}}$  – дивергенции в координатном и импульсном пространствах соответственно,  $e$  – заряд электрона,  $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{v}/c$ ,  $c$  – скорость света в вакууме,  $\sigma(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$  – дифференциальное макроскопическое сечение рассеяния электронов,  $\mathbf{p}'$  и  $\mathbf{p}$  – импульсы электрона до и после рассеяния соответственно,  $\mathbf{j}$  – плотность тока электронов. Внешний источник электронов задает функция  $Q = Q(t, \mathbf{r}, \mathbf{p})$  в правой части уравнения (1).

## 2. Алгоритм решения кинетического уравнения методом частиц

Дифференциальное уравнение (1) эквивалентно интегральному уравнению:

$$f = \int_0^t d\tilde{t} \int d\tilde{\mathbf{r}} \int d\tilde{\mathbf{p}} \left[ Q(\tilde{t}, \tilde{\mathbf{r}}, \tilde{\mathbf{p}}) + \int d\mathbf{p}' \sigma(\tilde{t}, \tilde{\mathbf{r}}, \tilde{\mathbf{p}}, \mathbf{p}') v' f(\tilde{t}, \tilde{\mathbf{r}}, \mathbf{p}') \right] \times \exp \left\{ - \int_{\tilde{t}}^t dt' \sigma^t v^{s'} \right\} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}^s) \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}^s), \quad (3)$$

где функции  $\mathbf{r}^s = \mathbf{r}^s(t, \tilde{t}, \tilde{\mathbf{r}}, \tilde{\mathbf{p}})$ ,  $\mathbf{p}^s = \mathbf{p}^s(t, \tilde{t}, \tilde{\mathbf{r}}, \tilde{\mathbf{p}})$  являются решениями уравнений движения:

$$\frac{d\mathbf{r}^s}{dt} = \mathbf{v}^s, \quad \frac{d\mathbf{p}^s}{dt} = e \left( \mathbf{E}(t, \mathbf{r}^s) + \frac{1}{c} [\mathbf{v}^s, \mathbf{H}(t, \mathbf{r}^s)] \right) \quad (4)$$

с начальными условиями  $\mathbf{r}^s|_{t=\tilde{t}} = \tilde{\mathbf{r}}$ ,  $\mathbf{p}^s|_{t=\tilde{t}} = \tilde{\mathbf{p}}$ . Подынтегральное выражение в показателе экспоненты имеет вид

$$\frac{d\mathbf{r}^{s'}}{dt} = \mathbf{v}^{s'}, \quad \sigma^t v^{s'} \equiv \sigma^t(t', \mathbf{r}^{s'}, p^{s'}) v(p^{s'}), \quad (5)$$

где  $\mathbf{r}^{s'} = \mathbf{r}^s(t', \tilde{t}, \tilde{\mathbf{r}}, \tilde{\mathbf{p}})$ ,  $\mathbf{p}^{s'} = \mathbf{p}^s(t', \tilde{t}, \tilde{\mathbf{r}}, \tilde{\mathbf{p}})$ .

Эквивалентность уравнений (1) и (3) исследована в [12]. Там же методом последовательных поколений на шаге по времени построены решение уравнения (3) и его статистическая интерпретация.

Рассмотрим численную реализацию. Введем прямоугольную декартову разностную сетку в координатном пространстве. По переменной  $x$  сетка имеет вид:

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + \Delta_i; \quad i = 0, \dots, N_x - 1, \quad x_0 = x_{\min}, \quad x_{N_x} = x_{\max}, \\ x_{i+1/2} &= (x_i + x_{i+1}) / 2; \quad i = 0, \dots, N_x - 1, \quad x_{-1/2} = x_0, \quad x_{N_x+1/2} = x_{N_x} \\ \delta_i &= x_{i+1/2} - x_{i-1/2}; \quad i = 0, \dots, N_x, \quad \delta_0 = \Delta_0 / 2, \quad \delta_{N_x} = \Delta_{N_x-1} / 2. \end{aligned}$$

По переменным  $(y, z)$  сетка вводится аналогично. Размещение узлов сетки диктуется свойствами коэффициентов уравнений Максвелла (2). Разрывы коэффициентов размещаются на поверхностях  $x = x_i$ ,  $y = y_j$  и  $z = z_k$ , а значения задаются в точках сетки с дробными индексами. Эти точки совпадают с центрами параллелепипедов, образованных пересечением плоскостей  $x = x_i, x_{i+1}$ ,  $y = y_j, y_{j+1}$  и  $z = z_k, z_{k+1}$ , внутри которых все рассматриваемые функции непрерывны. Сеточные функции  $E^x$ ,  $E^y$  и  $E^z$  определяются в середине соответствующих ребер указанных параллелепипедов. Компоненты напряженности магнитного поля  $H^x$ ,  $H^y$ ,  $H^z$  задаются в центрах граней параллелепипедов. Таким образом, расчетная область делится на декартовы прямоугольные ячейки, внутри каждой ячейки свойства среды не меняются. Более подробно разностная схема рассмотрена в работе [8].

Напряженности электрического и магнитного полей  $\mathbf{E} = \mathbf{E}(t, \mathbf{r})$  и  $\mathbf{H} = \mathbf{H}(t, \mathbf{r})$  на временном шаге  $[t_i, t_{i+1}]$  считаются постоянными. Тогда задача решения кинетического уравнения на шаге  $\Delta_i = t_{i+1} - t_i$  сводится к моделированию движения частицы в постоянном электромагнитном поле с учетом столкновений частиц со средой.

Частица характеризуется координатами центра  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ , импульсом  $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z)$ , количеством электронов  $\omega$  и временем жизни на данном временном шаге  $\Delta \leq \Delta_i$ . Частицы с соответствующими параметрами генерируются в начале шага по времени в соответствии с параметрами заданного источника электронов  $Q(t, \mathbf{r}, \mathbf{p})$ . Импульс частиц определяется заданным энергетическим спектром источника. Количество электронов в частице рассчитывается в соответствии с заданной временной формой источника. Время жизни определяет момент рождения частицы в течение текущего шага по времени. В большинстве расчетов можно считать  $\Delta = \Delta_i$ , то есть частица появляется в момент времени  $t = t_i$ .

Рассмотрим алгоритм моделирования движения частицы.

Для каждой частицы рассчитывается  $\tau$  – время до первого столкновения. Оно определяется по формуле:

$$\tau = -\log(\xi) / \sigma^t v, \quad (6)$$

где  $\xi$  – случайная величина, равномерно распределенная на отрезке  $[0, 1]$ ,  $v$  – модуль скорости электрона,  $\sigma^t$  – макроскопическое сечение рассеяния электронов.

Действительно, вероятность испытать столкновение за время  $\tau$  определяется по формуле:

$$p = \exp\{-\tau\sigma^t v\}. \quad (7)$$

Вероятность  $p$  испытать столкновение за время  $\tau$ , а также  $\xi = 1 - p$  – вероятность не испытать столкновение за время  $\tau$  являются случайными величинами, равномерно распределенными на отрезке  $[0,1]$ . Решая уравнение (7) относительно  $\tau$ , получаем формулу (6).

Для моделирования движения частицы в среде рассчитывается величина  $T$  – время прямолинейного движения частицы. Оно определяется как минимум из следующих величин:

- 1) время жизни частицы на данном временном шаге  $\Delta$ ;
- 2) время до первого столкновения  $\tau$ ;
- 3) время до пересечения границы ячейки  $\Delta_g$ .

Движение частицы моделируется внутри ячейки разностной сетки. Это связано как с методом расчета электромагнитных полей, влияющих на движение электронов, так и со способом расчета электрического тока, создаваемого частицей. Внутри ячейки свойства среды не меняются. Это позволяет упростить моделирование столкновений частицы со средой. Если за время  $\Delta$  частица окажется в другой ячейке, ее движение разбивается на два участка – до границы и после. Время до пересечения границы ячейки  $\Delta_g$  определяется исходя из текущего положения частицы  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  и ее скорости в предположении прямолинейного движения частицы.

Если для частицы возможны несколько типов столкновений, то величина  $\tau$  определяется по формуле (6) для каждого типа независимо. Далее вычисляется минимальное значение. Одновременно определяется тип столкновения.

После этого с шагом  $T$  решается система уравнений движения частицы (4).

Напряженность электромагнитного поля, действующего на частицу, определяется методом «облако в ячейке». На каждом временном шаге по восьми ближайшим узлам производится линейная интерполяция полей в точку, где находится частица. Это соответствует использованию в методе крупных частиц интерполяционной функции:

$$W^{ijk}(x,y,z) = W_x^i(x) * W_y^j(y) * W_z^k(z),$$

где  $W_x^i(x) = \begin{cases} 0, & i < I \\ (x_{i+1} - x)/dx, & i = I \\ (x - x_{i-1})/dx, & i = I + 1 \\ 0, & i > I + 1 \end{cases}$  – интерполяционная функция  $i$ -го узла сетки в

точку  $x$ :  $x_I \leq x \leq x_{I+1}$ . Интерполяционные функции для  $y$  и  $z$  строятся аналогично.

Для учета силы Лоренца строится центрированная по времени явная разностная схема. При ее построении используется тот факт, что магнитное поле не меняет модуля скорости частицы.

На первом этапе определяется модуль импульса по формуле:

$$\mathbf{p} = \mathbf{p} - \frac{e}{mc} \mathbf{E}T, \quad p = \sqrt{\left(\frac{p_x + p_x}{2}\right)^2 + \left(\frac{p_y + p_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{p_z + p_z}{2}\right)^2}.$$

Затем система уравнений движения (4) аппроксимируется центрированной по времени разностной схемой:

$$\frac{p_x - p_x}{T} = -\frac{e}{mc} \left( E_x + \frac{1}{\sqrt{1+p^2}} \left( -H_y \frac{p_z + p_z}{2} + H_z \frac{p_y + p_y}{2} \right) \right),$$

аналогично для  $p_y$  и  $p_z$ . Из этих соотношений находятся величины  $p_x, p_y$  и  $p_z$  – значения импульса в следующий момент времени.

Расчет траектории движения частицы происходит по явной разностной схеме:

$$\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r} - \mathbf{v}T,$$

где  $\mathbf{v} = c \mathbf{p} / \sqrt{1+p^2}$ .

Время жизни частицы на данном временном шаге изменяется по формуле  $\Delta = \Delta - T$ .

После решения уравнений движения моделируются столкновения. При этом рассчитывается новый импульс частицы. Координаты частицы не меняются. Если частица в столкновении погибает, она выбывает из рассмотрения. Если в столкновении рождается новая частица, она включается в рассмотрение с параметрами  $\mathbf{r}$ ,  $\omega$  и  $\Delta$ , полученными от столкнувшейся частицы и импульсом  $\mathbf{p}$ , рассчитанным при моделировании столкновения.



Моделирование частицы продолжается, пока время жизни на данном временном шаге  $\Delta > 0$ . После этого частица заносится в список обработанных, с параметром  $\Delta$ , равным следующему шагу по времени  $\Delta = \Delta_{i+1}$ .

Данный алгоритм позволяет моделировать рассеяние в приближении многократных столкновений на временном шаге [12].

### 3. Тест с однократным рассеянием

Алгоритм решения кинетических уравнений проверен в следующем тесте. В полном кинетическом уравнении (1) полагалось, что:

1)  $\mathbf{E} = 0$  и  $\mathbf{H} = 0$ ;

2)  $Q(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}) = \delta(t) \delta(z) \delta(\mathbf{p}_x) \delta(\mathbf{p}_y) \delta(\mathbf{p}_z - \mathbf{p}_0)$ ;

3) в интеграле столкновений присутствует только 1 процесс столкновений.

Программно устанавливалось условие, запрещающее первичным частицам испытывать больше одного столкновения. Для вторичных частиц столкновения запрещались. Таким образом, функция распределения первичных частиц  $f_1$  удовлетворяет следующему уравнению:

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + v_z \frac{\partial f_1}{\partial z} + v_z \sigma f_1 = \delta(t) \delta(z) \delta(v_x) \delta(v_y) \delta(v_z - v_0).$$

Его решение:

$$f_1 = \delta(v_x) \delta(v_y) \delta(v_z - v_0) \delta(z - v_0 t) \exp\left(-\int_0^z \sigma(z') dz'\right).$$

Следовательно, полный выход первичных частиц из однородного материала толщиной  $h$  равен  $\exp(-\sigma h)$ . Для всех рассмотренных процессов рассеяния различие между расчетом и аналитическим решением оказалось не хуже 1% при числе столкновений порядка  $10^5$ .

Функция распределения вторичных частиц  $f_2$  удовлетворяет следующему уравнению:

$$\frac{\partial f_2}{\partial t} + v_z \frac{\partial f_2}{\partial z} = v_0 \sigma(v_0, v) \delta(z - v_0 t) \exp\left(-\int_0^z \sigma(z') dz'\right).$$

Следовательно, функция распределения вторичных частиц по скоростям или энергиям пропорциональна дифференциальному сечению рассеяния  $\sigma(v_0, v)$  или  $\sigma(\varepsilon_0, \varepsilon)$ , где  $\varepsilon_0, \varepsilon$  – энергии, соответствующие скоростям  $v_0, v$ .

Соответствующим образом нормированное дифференциальное сечение  $\sigma(\varepsilon_0, \varepsilon)$  [13] сравнивалось с функцией распределения вторичных частиц, рассчитанной методом частиц. В качестве примера на рис. 1 показана функция распределения по энергии электронов, рождающихся при образовании пар гамма-квантами с энергией 10 МэВ.

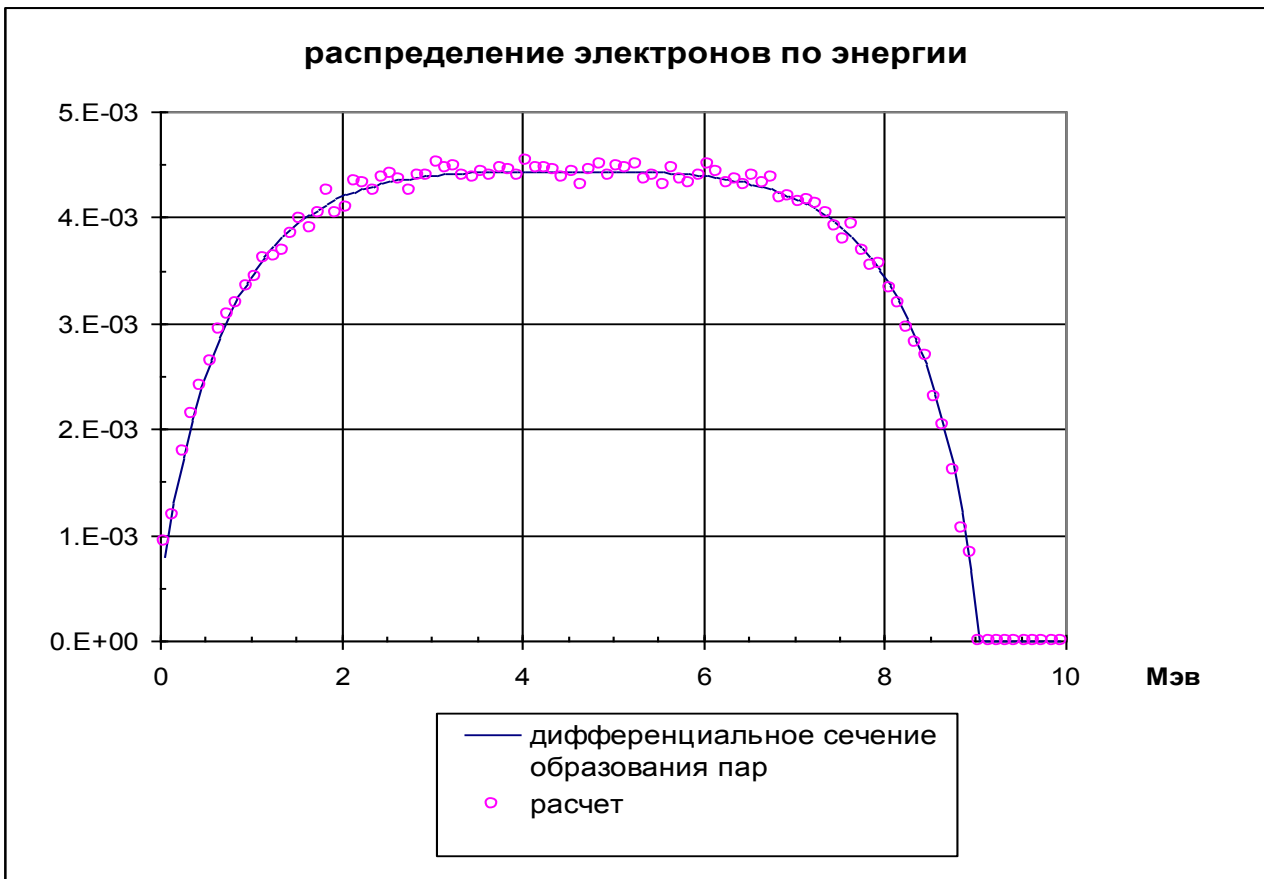


Рис. 1 – Сравнение расчета с аналитическим решением для однократного рассеяния

#### 4. Тест с многократным рассеянием

Рассмотрим проверку моделирования упругого рассеяния, столкновений с возбуждением внутренних степеней свободы молекул и ударной ионизации в присутствии постоянного внешнего электрического поля. В рамках проверки сравнивалось аналитическое решение стационарного однородного по пространственным переменным кинетического уравнения

$$-\frac{e\mathbf{E}}{m} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = I[f] + Q(t, \mathbf{v})$$

с решением нестационарного уравнения

$$\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{e\mathbf{E}}{m} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = I[f] + Q(t, \mathbf{v}),$$

полученного методом частиц при  $t \rightarrow \infty$ . Столкновения различных типов рассматривались по отдельности. Сечения подбирались специально, так, чтобы стало возможно аналитическое решение.

Рассмотрим в качестве примера упругое рассеяние электронов на молекулах газа с сечением, не зависящим от энергии. Стационарное распределение электронов по энергиям в этом случае имеет вид распределения Дрювестейна [14]:

$$f_0 = \frac{a^{3/2}}{2\pi\Gamma(3/4)} \sqrt{\varepsilon} \exp(-a^2 \varepsilon^2), \quad a^2 = \frac{1.5\delta\sigma^2}{\xi^2 (E/p)^2},$$

где  $\delta = 10^{-5}$  – доля энергии, передаваемой электроном молекуле при столкновении,  $\sigma = 1$  – сечение упругого рассеяния [ $10^{-15}$  см<sup>2</sup>],  $E/p = 1$  – отношение электрического поля к давлению газа [СГС/атм],  $\xi = 0.01$ .

На рис. 2 показано распределение Дрювестейна вместе с функцией распределения электронов по энергии, вычисленной методом частиц.

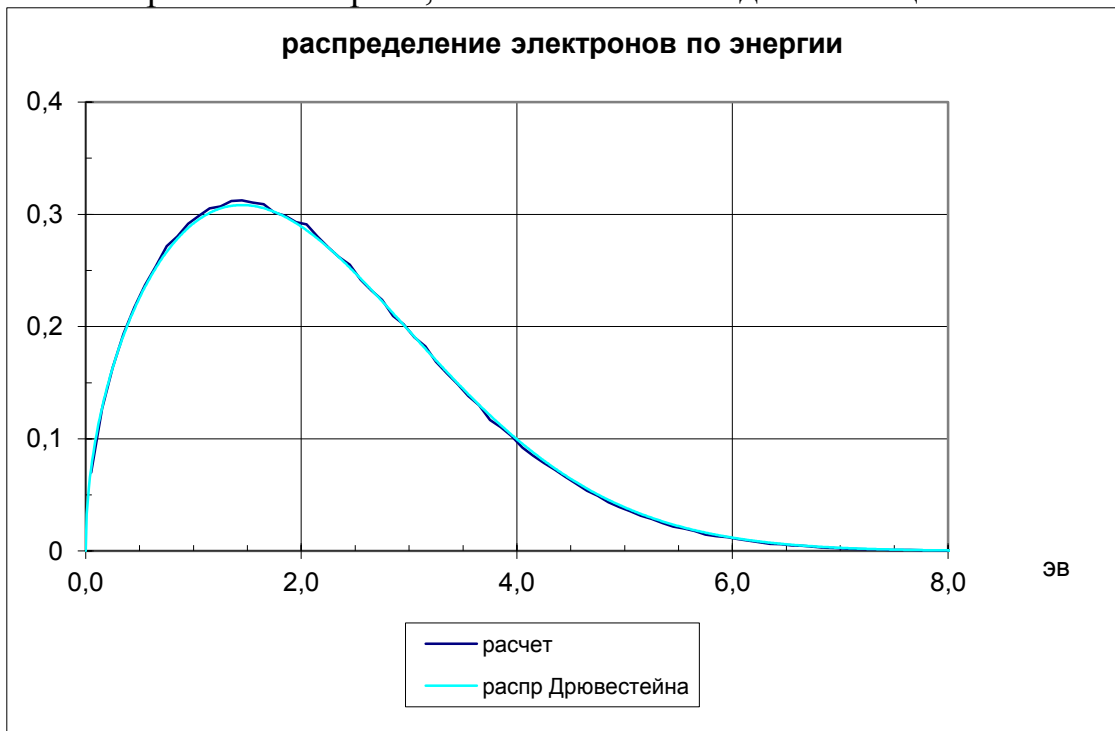


Рис. 2 – Сравнение расчета с аналитическим решением для многократного рассеяния

## Заключение

Применимость приближения однократного рассеяния на шаге по времени является препятствием для решения большинства практически важных задач. Расчеты, выполненные на основе данного приближения, показали следующее [6]. Для электронов малой, порядка единиц электронвольт, энергии основным столкновительным процессом в газовой среде является упругое рассеяние. Его сечение на два порядка превосходит сечения всех неупругих процессов. В результате исследование, например, процесса пробоя газа во внешнем электрическом поле требует усреднения процесса упругого рассеяния. В противном случае расчет сводится к моделированию броуновского движения, на фоне которого сложно выделить процесс ионизации.

Проблемы возникают также при рассмотрении каскада высокоэнергетичных частиц с существенно различающимися временами жизни. Шаг по времени в такой задаче определяется сечением ионизационных столкновений электронов, причем каждое из них в среднем сопровождается незначительным изменением импульса. Расчет сводится к моделированию замедления электронов, а столкновения фотонов становятся редкими событиями.

Рассмотрение многократных столкновений на шаге по времени устраняет данные проблемы. Несмотря на то что объем вычислений на шаге по времени может резко возрасти из-за необходимости многократной обработки столкновений некоторой части частиц, рассмотрение главного процесса не теряется на фоне менее значимых.

Предложен алгоритм моделирования рассеяния заряженных частиц, допускающий и многократные столкновения на временном шаге. Выполнены расчеты, подтверждающие эффективность метода.

## Список использованных источников

1 Карлсон Б., Белл Дж. Решение транспортного уравнения  $S_n$ -методом. – в кн.: Труды Второй международной конференции по мирному использованию атомной энергии. Женева, 1958. Избранные доклады иностранных ученых. т. 3, М.: Атомиздат, 1959.

2 Морозов В.Н. О решении кинетических уравнений с помощью  $S_n$ -метода. – В кн.: Теория и методы расчета ядерных реакторов. М.: Госатомиздат, 1962.

3 Гермогенова Т.А. Локальные свойства уравнений переноса. – М.: Наука, 1986.

4 Braun W., Hepp K. The Vlasov Dynamics and Its Fluctuations in the  $1/N$  Limit of Interacting Classical Particles. – Commun. math. Phys. 56, 1977.

5 Hockney R.W., Eastwood J.W. Computer Simulation Using Particles. – McGraw-Hill, New York, 1981.

6 Березин А.В., Воронцов А.С., Марков М.Б., Паротькин С.В., Захаров С.В. Моделирование предпробойной стадии газового разряда // Матем. моделирование, 2013, т. 25, № 3, С. 105-118.

7 Андрианов А.Н., Березин А.В., Воронцов А.С., Ефимкин К.Н., Зинченко В.Ф., Марков М.Б., Членов А.М. Моделирование пучка ускорителя ЛИУ-10 на параллельном компьютере // Матем. моделирование, 2010, т. 22, №2, С. 29-44.

8 Березин А.В., Крюков А.А., Плющенко Б.Д. Метод вычисления электромагнитного поля с заданным волновым фронтом // Матем. моделирование, 2011, т. 23, №3, С. 109-126.

9 Марков М.Б. Приближение однородного рассеяния электронов на траекториях // Матем. моделирование, 21:10 (2009), С. 132–142.

10 Андрианов А.Н., Березин А.В., Воронцов А.С., Ефимкин К.Н., Марков М.Б., Моделирование электромагнитных полей радиационного происхождения на многопроцессорных вычислительных системах // Матем. моделирование, 2008, т. 20, № 3, С. 98–114.

11 Марков М.Б., Паротькин С.В., Сысенко А.В. Метод частиц для модели электромагнитного поля потока электронов в газе // Матем. моделирование, 20:5 (2008), С. 35–54.

12 Березин А.В., Воронцов А.С., Жуковский М.Е., Марков М.Б., Паротькин С.В. Метод частиц для электронов в рассеивающей среде // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 55:9 (2015), С.1566–1578; Comput. Math. Math. Phys., 55:9 (2015), p.1534–1546 .

13 Официальный сайт The National Institute of Standards and Technology, NIST, <http://physics.nist.gov/>

14 Хаксли Л., Кромптон Р. Диффузия и дрейф электронов в газах. М.: Мир, 1977.