



ISSN 2071-2898 (Print)  
ISSN 2071-2901 (Online)

**Бахвалов П.А.**

Моделирование течения в  
системах ротор–статор с  
осесимметричным статором  
рёберно-ориентированными  
схемами

**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Бахвалов П.А. Моделирование течения в системах ротор–статор с осесимметричным статором рёберно-ориентированными схемами // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2018. № 124. 16 с. doi:[10.20948/prepr-2018-124](https://doi.org/10.20948/prepr-2018-124)  
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2018-124>

**О р д е н а Л е н и н а**  
**ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ**  
**имени М.В.КЕЛДЫША**  
**Р о с с и й с к о й а к а д е м и и н а у к**

**П. А. Бахвалов**

**Моделирование течения в системах ротор–статор  
с осесимметричным статором  
рёберно-ориентированными схемами**

**Москва — 2018**

## **Бахвалов П. А.**

Моделирование течения в системах ротор–статор с осесимметричным статором рёберно-ориентированными схемами

Задачу внешнего обтекания системы ротор–статор, если статор является осесимметричным, можно решать на монолитной вращающейся сетке. При триангуляции поверхности статора он перестаёт быть осесимметричным и поэтому при вращении сетки возмущает покоящуюся среду. Для рёберно-ориентированных конечно-объёмных схем предлагается коррекция процедуры вычисления численных потоков, восстанавливающая кривизну поверхности статора и тем самым исключая паразитные возмущения.

**Ключевые слова:** рёберно-ориентированная схема, неструктурированная сетка, ротор–статор, метод коррекции потоков

## **Pavel Alexeevich Bakhvalov**

Flow simulation in rotor–stator systems with axisymmetric stator using edge-based schemes

Flow simulation in rotor–stator systems with axisymmetric stator can be implemented using a solid rotating mesh. After triangulation stator surface loses axial symmetry and perturbs the gas during rotation. In the framework of edge-based schemes we offer a correction of the numerical flux that recovers the axisymmetric shape of the body and thereby prevents spurious perturbations.

**Key words:** edge-based scheme, unstructured mesh, rotor–stator, flux correction method

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты 18-01-00445 (в части применения рёберно-ориентированных схем к задачам типа ротор–статор) и 16-31-60072 мол-а-дк (в части разработки метода коррекции потоков).

## **Оглавление**

Введение . . . . .	3
Конечно-объёмные схемы на движущихся сетках . . . . .	4
Рёберно-ориентированные схемы . . . . .	6
Определение сеточных скоростей . . . . .	8
Учёт кривизны . . . . .	9
Тестирование . . . . .	13
Заключение . . . . .	15
Список литературы . . . . .	15

## Введение

Численное моделирование активно применяется для исследования течений газа около систем тел, вращающихся друг относительно друга (обычно это ротор и статор). Таковыми, в частности, являются несущий винт вертолёта и фюзеляж, соосные винты, винт в кольце и компрессор турбореактивного двигателя. Оставаясь в рамках подхода, при котором граница расчётной области повторяет форму твёрдого тела (*body-fitted method*), для моделирования течения вокруг тел, движущихся друг относительно друга, невозможно использовать монолитную сетку. Поэтому в таких задачах обычно используются перекрывающиеся или скользящие сетки. Более редкой альтернативой являются погруженные граничные условия, уступающие *body-fitted* подходу при необходимости качественного разрешения пристеночной области.

Конфигурация «винт в кольце» выделяется из всех перечисленных выше задач тем, что статор (кольцо) может быть осесимметрическим. В невязком случае на твёрдой стенке ставятся условия непротекания (равенства нулю нормальной компоненты скорости). Поэтому, если кольцо осесимметрическое, задача не изменится, если оно будет вращаться вместе с лопастью. В вязком случае на твёрдой границе задаются все компоненты вектора скорости; на лопастях он равен  $\omega \times r$ , а на кольце равен нулю. Таким образом, статической монолитной сетки для решения этой задачи достаточно.

Рёберно-ориентированные схемы представляют собой особый класс конечно-объёмных схем с определением переменных в узлах. Примерами рёберно-ориентированных схем являются схемы с реконструкцией вдоль ребра (*Edge-Based Reconstruction, EBR*) [1, 2] и схемы на основе метода коррекции потоков (*Flux Correction method, FC*) [3–5]. Схемы EBR на равномерных решётчатых сетках вырождаются в конечно-разностные схемы высокого порядка, а на неструктурированных сетках, формально являясь конечно-объёмными схемами с линейной реконструкцией переменных, обеспечивают повышенную точность среди других схем этого класса. Метод коррекции потоков на произвольной неструктурированной сетке показывает до 3-го порядка точности в случае стационарного решения, а в неконсервативной модификации метода – и в случае нестационарного.

Для моделирования систем ротор–статор с осесимметричным статором рёберно-ориентированные схемы применялись в [6]. Используемая в этой работе расчётная методика на основе рёберно-ориентированных схем обладала следующим недостатком. Поскольку расчётная область представляет собой объединение тетраэдров, призм, пирамид и гексаэдров, граница расчётной области является многогранником. Если существует грань поверхности, нормаль к которой имеет ненулевую азимутальную компоненту, а на грани задано условие непротекания, то вращение многогранника будет создавать возмущения по

всем переменным. Если в задаче требуется корректно воспроизводить малые возмущения, например, акустическую волну, то эта ошибка, будучи пропорциональной фоновому полю, может превосходить физическое возмущение, что сделает использование такого метода расчёта недопустимым. Тот же эффект имеет место и в вязком случае, поскольку условие на поток плотности на твердой границе такое же, как и в невязком случае.

В настоящей работе предлагается метод, позволяющий посредством учёта кривизны границы исключить генерацию паразитных возмущений. Это достигается путём сохранения однородного поля физических переменных при расчёте покоящихся осесимметрических тел на вращающейся сетке. Предлагаемый метод применим одинаковым образом ко всем рёберно-ориентированным схемам. Рамки настоящей работы ограничены случаем уравнений Эйлера и их линеаризации, однако предлагаемый метод может быть успешно применён и для вязкого сжимаемого газа.

## Конечно-объёмные схемы на движущихся сетках

Будем рассматривать уравнения Эйлера для идеального газа

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathcal{F}(\mathbf{Q}) = 0, \quad \mathbf{r} \in \bar{G}, \quad (1)$$

где  $\mathbf{Q} = (\rho, \rho \mathbf{u}, E)^T$ ,  $E = \rho \mathbf{u}^2/2 + p/(\gamma - 1)$ , и

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} \rho \mathbf{u} \\ \rho \mathbf{u} \mathbf{u} + p \mathbf{I} \\ (E + p) \mathbf{u} \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Здесь  $\gamma$  – показатель адиабаты,  $\mathbf{I}$  – единичная матрица. Черта над  $G$  является частью обозначения, но не замыканием области.

Также будем рассматривать линеаризацию уравнений Эйлера на стационарном однородном фоновом поле  $\bar{\rho} = 1$ ,  $\bar{\mathbf{u}} = 0$ ,  $\bar{p} = 1/\gamma$ . Она имеет тот же вид (1), где  $\mathbf{Q} = (\rho', \mathbf{u}', p'/(\gamma - 1))^T$  и

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}' \\ p' \mathbf{I} \\ \mathbf{u}'/(\gamma - 1) \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Для произвольного (в т. ч. деформируемого) объёма  $K(t)$  уравнение (1) переписывается в интегральном виде

$$\frac{d}{dt} \int_{K(t)} \mathbf{Q} dV + \int_{\partial K(t)} (\mathcal{F}(\mathbf{Q}) - \mathbf{v} \mathbf{Q}) \cdot \mathbf{n} dS = 0, \quad (4)$$

где  $\mathbf{n}$  – внешняя единичная нормаль к границе объёма, а  $\mathbf{v}$  – её скорость. Для записи конечно-объёмной схемы расчётная область разбивается на ячейки  $K_i(t)$ , в которых определяются значения консервативных переменных  $\mathbf{Q}_i(t)$ . Объёмы ячеек обозначим через  $V_i(t)$ , а множество ячеек, имеющих общую границу ненулевой меры с  $K_i(t)$  – через  $N_1(i)$ . Множество граней ячейки  $K_i(t)$ , лежащих на границе расчётной области, обозначим через  $N_\Gamma(i)$ . С использованием этих обозначений полудискретная конечно-объёмная схема для (4) может быть представлена в общем виде

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{Q}_i(t)V_i(t)) + \sum_{j \in N_1(i) \cup N_\Gamma(i)} \mathbf{h}_{ij}(t)|\mathbf{n}_{ij}(t)| = 0, \quad (5)$$

Далее общую границу двух ячеек, имеющую ненулевую меру, будем называть **внутренним сегментом**, а граничные грани – **граничными сегментами**.

Для внутренних сегментов

$$\mathbf{n}_{ij} = \int_{\partial K_i \cap \partial K_j} \mathbf{n} dS,$$

где  $\mathbf{n}$  – единичная нормаль, ориентированная внешним образом к  $K_i$ . Поток  $\mathbf{h}_{ij}$  определяется из приближённого решения задачи о распаде разрыва, например,

$$\mathbf{h}_{ij} = \frac{\mathcal{F}(\mathbf{Q}_{ij}^-) + \mathcal{F}(\mathbf{Q}_{ij}^+)}{2} \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{ij} - v_{ij} \frac{\mathbf{Q}_{ij}^- + \mathbf{Q}_{ij}^+}{2} - \delta \mathbf{S} |\Lambda - v_{ij}| \mathbf{S}^{-1} \frac{\mathbf{Q}_{ij}^+ - \mathbf{Q}_{ij}^-}{2}, \quad (6)$$

где  $\tilde{\mathbf{n}}_{ij} = \mathbf{n}_{ij}/|\mathbf{n}_{ij}|$ ,  $\mathbf{Q}_{ij}^\pm$  – некоторым образом определённые реконструированные значения,

$$\mathbf{S} \Lambda \mathbf{S}^{-1} = \frac{d(\mathcal{F}(\mathbf{Q}) \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{ij})}{d\mathbf{Q}}(\mathbf{Q}_{ij}), \quad (7)$$

$\mathbf{Q}_{ij}$  – среднее по Роу от  $\mathbf{Q}_{ij}^\pm$ , а  $\delta$  – коэффициент диссипации, как правило, выбираемый равным 1. Величину  $v_{ij}$ , имеющую смысл нормальной компоненты скорости сегмента, определим ниже.

Для граничных сегментов  $\mathbf{n}_{ij}$  также определяется как ориентированная площадь соответствующей поверхности:

$$\mathbf{n}_{ij} = \int_{\Gamma_{ij}} \mathbf{n} dS,$$

а поток зависит от типа граничного условия. В случае входной/выходной границы расчётной области поток также считается по формулам (6)–(7), причём  $Q_{ij}^- = Q_i$ , а  $Q_{ij}^+$  – некоторым образом определённое значение с внешней стороны расчётной области. Примеры выбора этих значений см. в [7]. В качестве  $Q_{ij}$  вместо среднего по Роу берётся  $Q_i$ .

В случае условий непротекания поток определяется по формуле  $h_{ij} = \mathcal{F}(\tilde{Q}_i) \cdot \tilde{n}_{ij} - v_{ij}\tilde{Q}_i$ , где  $\tilde{Q}_i$  – набор консервативных переменных, полученный из  $Q_i$  путём сохранения плотности и давления и замены нормальной компоненты скорости потока в узле  $u_i \cdot \tilde{n}_{ij}$  на скорость границы  $v_{ij}$ . Упрощая выражения, получаем

$$(h_{ij})_\rho = 0, \quad (h_{ij})_{\rho u} = p_i \tilde{n}_{ij}, \quad (h_{ij})_E = p_i v_{ij}. \quad (8)$$

Если расчётная сетка вращается без деформации с угловой скоростью  $\omega$ , то  $V_i$  перестаёт зависеть от  $t$ . В этом случае удобно использовать проекции векторов не на неподвижные, а на вращающиеся вместе сеткой оси [8]. Таким образом, в качестве консервативных переменных выбираются плотность, энергия и три проекции вектора импульса на вращающиеся оси; проекции вектора  $n_{ij}$  на эти оси не зависят от времени. В правую часть уравнения добавляется источник, отвечающий за поворот скоростей. В итоге вместо (5) имеем схему

$$V_i \frac{dQ_i(t)}{dt} + \sum_{j \in N_1(i) \cup N_\Gamma(i)} h_{ij}(t) |n_{ij}| = S_i(t), \quad (9)$$

где  $S_i = (0, \omega \times (\rho u)_i, 0)^T$ , а поток  $h_{ij}$  определяется формулой (6). Приводимые ниже расчёты проводятся в рамках (9).

## Рёберно-ориентированные схемы

Рёберно-ориентированные схемы являются особым классом конечно-объёмных схем, в которых значения консервативных переменных определяются в сеточных узлах, а потоки считаются вдоль рёбер и, возможно, диагоналей сетки.

Пусть в области  $\bar{G}$ , в которой задано уравнение, построена расчётная сетка, состоящая из треугольников и четырёхугольников в двумерном случае и тетраэдров, четырёхугольных пирамид, треугольных призм и гексаэдров в трёхмерном. Обозначим элементы сетки через  $T_k(t)$ . Обозначим объединение этих элементов через  $G(t) = \cup T_k(t)$ . Справедливо  $G(t) \subset \bar{G}(t)$ , но если область, в которой задано уравнение, содержит криволинейные границы, то заведомо  $\mu(\bar{G}(t) \setminus G(t)) \neq 0$ .

Для применения конечно-объёмного подхода расчётная область  $G(t)$  разбивается на ячейки (контрольные объёмы)  $K_i(t)$ , соответствующие сеточным узлам. Существуют разные способы построения контрольных объёмов.

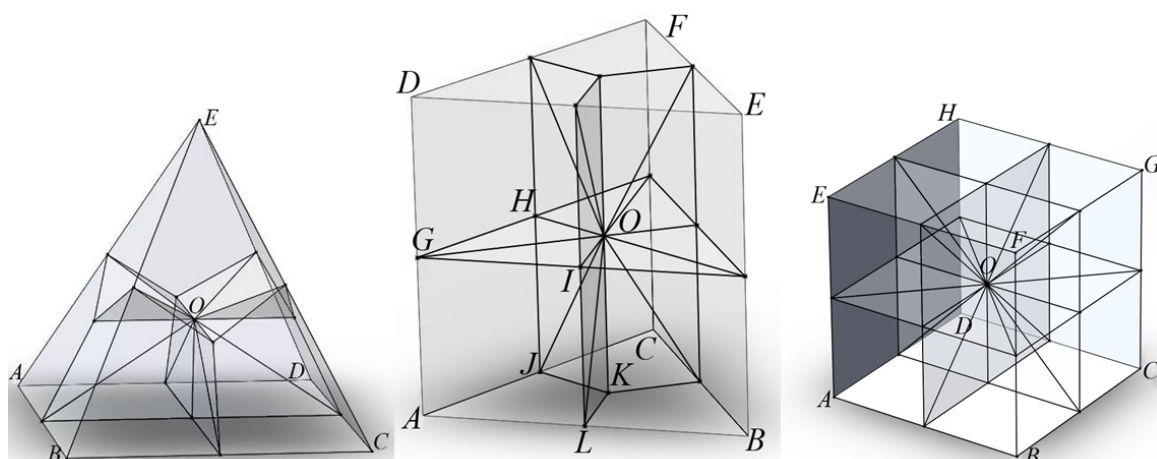


Рис. 1. Разбиение элементов гибридной сетки на части, входящие в прямые контрольные объёмы

В случае симплицальной обычно используются медианные ячейки. В случае гибридной сетки используются прямые или полупрозрачные ячейки [9]; оба этих типа объёмов в случае симплицальной сетки совпадают с медианными. В настоящей работе мы ограничимся случаем прямых контрольных объёмов. Их вершинами являются середины сеточных рёбер, центры сеточных граней и центры сеточных элементов. Радиус-векторы центров всех сеточных примитивов находятся как среднее арифметическое радиус-векторов всех вершин этого примитива и, вообще говоря, не совпадают с их центрами масс. Разбиения трёхмерных сеточных элементов на части, входящие в контрольные объёмы их вершин, изображены на рис. 1 (рисунок выполнен В. А. Вершковым).

При определении  $Q_{ij}^- = Q_i$  и  $Q_{ij}^+ = Q_j$  схема (5), (6) совпадает с простейшей конечно-объёмной схемой на расчётной сетке, составленной из контрольных объёмов  $K_i$ . Схема (5), (6) называется **рёберно-ориентированной**, если на гладких решениях предраспадные значения  $Q_{ij}^\pm$  отличаются от  $(Q_i + Q_j)/2$  на величину порядка  $O(h^2)$ . Такой подход обеспечивает первый порядок аппроксимации в норме  $l_\infty$  на произвольной сетке, если используются медианные (на симплицальной сетке) или полупрозрачные (на гибридной сетке) контрольные объёмы.

Конкретный алгоритм определения  $Q_{ij}^\pm$  характеризует конкретную рёберно-ориентированную схему. В схеме Т. Barth [10] предраспадные значения определяются как

$$\begin{aligned} Q_{ij}^- &= Q_i + \frac{1}{2}(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) \cdot \nabla Q(\mathbf{r}_i), \\ Q_{ij}^+ &= Q_j + \frac{1}{2}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \cdot \nabla Q(\mathbf{r}_j), \end{aligned} \tag{10}$$



где  $\nabla Q$  в узле вычисляется как средний градиент по элементам, содержащим этот узел, с весом, равным объёму этого элемента. На симплицальной сетке всюду кроме граничных узлов этот алгоритм совпадает с формулой Грина – Гаусса

$$\nabla Q(\mathbf{r}_i) \approx \frac{1}{V_i} \sum_{j \in N_1(i)} \frac{Q_i + Q_j}{2} \mathbf{n}_{ij}, \quad (11)$$

где  $\mathbf{n}_{ij}$  считается с использованием медианных ячеек.

Метод коррекции потоков [3–5] также заключается в использовании формул (10), но узловые градиенты в них определяются не менее чем со вторым порядком аппроксимации. Если они точны на квадратичной функции, то и вся схема получается точной на квадратичной функции при использовании медианных (на гибридной сетке – полупрозрачных) ячеек. Например, градиенты могут вычисляться путём дифференцирования интерполяционного полинома 2-го порядка, полученного методом наименьших квадратов. В настоящей работе используется схожий по свойствам способ, детали которого мы не приводим ввиду их несущественности.

Альтернативой этим схемам являются схемы с квазиодномерной реконструкцией переменных, различные варианты которых см., например, в [1, 2].

## Определение сеточных скоростей

В формулу (6) для вычисления потока вдоль ребра входит величина  $v_{ij}$ , имеющая смысл нормальной компоненты скорости сегмента. Существует несколько вариантов для её определения. При выборе важно обеспечить выполнение геометрической консервативности, то есть сохранение однородного потока в области без стенок.

Наиболее простым способом является задание

$$v_{ij} = \frac{\dot{\mathbf{r}}_i + \dot{\mathbf{r}}_j}{2} \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{ij} = \boldsymbol{\omega} \times \frac{\mathbf{r}_i + \mathbf{r}_j}{2} \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{ij}. \quad (12)$$

В области без границ такой подход позволяет обеспечить геометрическую консервативность при использовании медианных / полупрозрачных ячеек. Когда сетка не деформируется, это следует из точности вычисления производной на линейной функции. При наличии границ требуется специальное определение скоростей граничных сегментов, чтобы сохранение однородного потока выполнялось и в граничных узлах. Правильные формулы могут быть получены из конечно-элементной интерпретации рёберно-ориентированных схем или путём достройки контрольного объёма в виртуальном элементе с внешней стороны границы [11]. Отметим, что в случае деформируемых сеток геометрическая консервативность при использовании этого подхода также выполняется, однако её доказательство не очевидно и выходит за рамки настоящей работы.

Другой, более универсальный способ заключается в определении скорости сегмента как интеграла по сегменту от скорости движения его точки:

$$v_{ij} = \frac{1}{|\mathbf{n}_{ij}|} \int_{\partial K_i \cap \partial K_j} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (13)$$

Для граничных сегментов формула аналогичная, интеграл берётся по граничной грани. При этом по построению обеспечивается геометрическая консервативность полудискретной схемы при сочетании различных ячеек, различных типов контрольных объёмов и при произвольном движении сетки. Этот подход можно рассматривать как частичный отказ от рёберно-ориентированного подхода в пользу обычной конечно-объёмной схемы.

В случае деформируемой сетки дополнительной сложностью является необходимость выполнения геометрической консервативности на полностью дискретном уровне, то есть после дискретизации по времени. В общем случае непосредственное интегрирование по времени (5), нарушает её, поскольку под производной по времени стоит не  $\mathbf{Q}_i$ , а  $V_i(t)\mathbf{Q}_i$ , и этот недостаток нужно исправлять специальным образом, см., например, [12]. Однако если зависимость объёмов ячеек  $V_i(t)$  является полиномиальной (в т. ч. отсутствует), причём на полиномах соответствующей степени выбранный метод интегрирования по времени является точным, то этих проблем не возникает.

## Учёт кривизны

Предположим для простоты, что вся область  $\bar{G}$ , в которой решаются уравнения газовой динамики, представляет собой выпуклое тело вращения вокруг оси  $OZ$ . Будем называть её вертикальной, а все прямые и плоскости, перпендикулярные ей – горизонтальными. Пусть объединение всех сеточных элементов,  $G$ , также является выпуклым телом, причём пересечение  $\bar{G}$  с осью целиком лежит в  $G$  и все узлы, лежащие на  $\partial G$ , также лежат и на  $\partial \bar{G}$ . Пусть на всей границе  $\bar{G}$  заданы условия непротекания.

Чтобы избавиться от генерации паразитных волн из-за вращения многогранной поверхности, нужно учесть её кривизну. Для этого введём расширенные контрольные объёмы  $\bar{K}_i$  так, чтобы их объединение было осесимметрическим телом.

Итак, пусть  $G = \cup T_i = \cup K_i$  – исходная расчётная область. Тогда  $\partial K_i \cap \partial G$  – след ячейки  $K_i$  на границе расчётной области. Выпустим из каждой точки  $B \in \partial K_i \cap \partial G$  горизонтальный луч, направленный наружу из  $G$ , причём так, чтобы прямая, содержащая этот луч, пересекала ось  $OZ$ . Пусть этот луч пересекает  $\partial \bar{G}$  в точке  $C$ . Объединение всех таких отрезков  $BC$  будет объёмной фигурой; обозначим её через  $\hat{K}_i$ . Наконец, положим  $\bar{K}_i = K_i \cup \hat{K}_i$ .

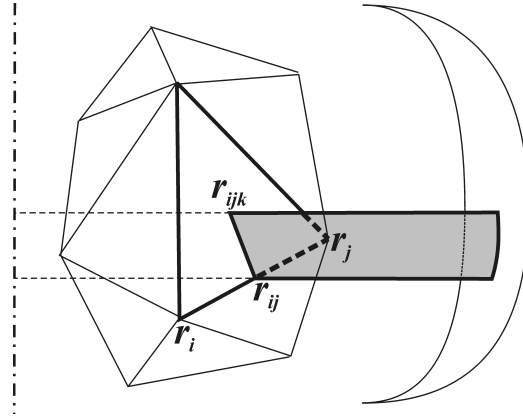


Рис. 2. Схема построения поверхности  $\partial\hat{K}_i \cap \partial\hat{K}_j$

Очевидно, что  $\cup \bar{K}_i = \bar{G}$ . Поверхность  $\partial\hat{K}_i \cap \partial\hat{K}_j$  изображена на рис. 2.

Для определения потока на сегменте по формуле (6) нужно знать ориентированную площадь сегмента  $\mathbf{n}_{ij}$ , его скорость  $v_{ij}$  и реконструированные значения  $Q_{ij}^\pm$ . Если подставить параметры невозмущённой среды  $\rho = const$ ,  $p = const$ ,  $\mathbf{u} = 0$  в разностную схему, включая граничные условия (8), мы получим следующие условия:

$$\sum_{j \in N_1(i) \cup N_\Gamma(i)} \mathbf{n}_{ij} = 0, \quad (14)$$

$$\sum_{j \in N_1(i)} v_{ij} |\mathbf{n}_{ij}| = 0. \quad (15)$$

$$\sum_{j \in N_1(i) \cup N_\Gamma(i)} v_{ij} |\mathbf{n}_{ij}| = 0. \quad (16)$$

Условие (14) возникает из уравнения импульса при неподвижной сетке. Условие (15) получается из рассмотрения уравнения неразрывности, а (16) – из уравнения импульса.

Условие (14) справедливо и при стандартном определении  $\mathbf{n}_{ij}$ , поэтому нет необходимости исправлять величины ориентированных площадей. Оставим их без изменения. Второе же уравнение при обычном определении  $v_{ij}$  нарушается. Положим  $v_{ij} = 0$  для граничных сегментов, лежащих на поверхности вращения, тогда условие (16) сводится к (15).

Чтобы теперь обеспечить (15), введём величины

$$\hat{v}_{ij} = \int_{\partial\hat{K}_i \cup \partial\hat{K}_j} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} dS. \quad (17)$$

Тогда при выборе скоростей

$$\bar{v}_{ij} = v_{ij} + \frac{\hat{v}_{ij}}{|\mathbf{n}_{ij}|}, \quad (18)$$

где  $v_{ij}$  определено (13), условие (15) будет выполняться:

$$\begin{aligned} \sum_{j \in N_1(i)} \bar{v}_{ij} |\mathbf{n}_{ij}| &= \sum_{j \in N_1(i)} (v_{ij} |\mathbf{n}_{ij}| + \hat{v}_{ij}) = \\ &= \sum_{j \in N_1(i)} \int_{\partial K_i \cap \partial K_j} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} dS + \int_{\partial \hat{K}_i \cap \partial \hat{K}_j} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} dS = \\ &= \int_{\bigcup_{j \in N_1(i)} \partial \bar{K}_i \cap \partial \bar{K}_j} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} dS = - \int_{\partial \bar{K}_i \setminus \partial \bar{G}} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} dS = 0. \end{aligned}$$

Последнее равенство справедливо, поскольку поверхность интегрирования является фрагментом поверхности, осесимметричной вокруг  $OZ$ , и, следовательно,  $\mathbf{n}$  лежит в плоскости, образованной  $\boldsymbol{\omega}$  и  $\mathbf{r}$ .

В двумерном случае (17) есть интеграл по отрезку; его значение равно  $\hat{v}_{ij} = \pm \omega_z R^2 \sin^2(\Delta\phi)/2$ , где  $R$  – радиус расчётной области (круга), а  $\Delta\phi$  – угол, под которым отрезок  $ij$  виден с оси вращения.

Покажем, как вычислить интеграл в (17) в трёхмерном случае. Рассмотрим вектор-функцию  $\mathbf{f}$  с компонентами  $f_x = f_y = 0$ ,  $f_z = (x^2 + y^2)/2$ . Тогда  $(\text{rot } \mathbf{f})_x = y$ ,  $(\text{rot } \mathbf{f})_y = -x$ ,  $(\text{rot } \mathbf{f})_z = 0$ . Таким образом,  $\text{rot } \mathbf{f} = -\mathbf{e}_z \times \mathbf{r}$ , где  $\mathbf{e}_z$  – единичный вектор в направлении оси  $OZ$ . По теореме Стокса получаем

$$\hat{v}_{ij} = -\omega_z \oint_{\partial(\partial \hat{K}_i \cup \partial \hat{K}_j)} (x^2 + y^2) dz,$$

причём обход производится по часовой стрелке, если смотреть от узла  $i$ . Направляющая поверхности  $\partial \hat{K}_i \cup \partial \hat{K}_j$ , как правило, состоит из двух отрезков, каждый из которых соединяет середину ребра  $ij$  с центром одного из граничных элементов, содержащих это ребро (радиус-вектор центра граничного элемента определяется как среднее арифметическое радиус-векторов его вершин). Обозначим их через  $\mathbf{r}_{ij}$  и  $\mathbf{r}_{ijk}$ ,  $k = 1, 2$ , соответственно. Эта пара отрезков также будет входить в контур интегрирования. Другой стороной контура будет кривая, являющаяся проекцией этой пары отрезков на  $\partial \bar{G}$ . Также в контур входят горизонтальные отрезки, интегралы по которым, очевидно, равны нулю.

Параметризуем  $k$ -й отрезок (а вместе с ним и его проекцию на поверхность вращения) следующим образом:

$$x = x_{ij}(1 - t) + x_{ijk}t; \quad y = y_{ij}(1 - t) + y_{ijk}t; \quad z = z_{ij}(1 - t) + z_{ijk}t.$$

Отсюда  $dz = (z_{ijk} - z_{ij})dt$ . Тогда интеграл по отрезку превращается в интеграл от квадратичной функции, и его можно точно вычислить, например, по формуле Симсона. С другой стороны, проекция отрезка лежит на поверхности вращения. В итоге,

$$\hat{v}_{ij} = -\omega_z \sum_{k=1,2} s_k \left( \rho_{ijk}(z_{ijk} - z_{ij}) - \int_{z=z_{ij}}^{z_{ijk}} R(z)^2 dz \right), \quad (19)$$

$$\rho_{ijk} = \frac{1}{6}(x_{ij}^2 + y_{ij}^2) + \frac{2}{3} \left( \left( \frac{x_{ij} + x_{ijk}}{2} \right)^2 + \left( \frac{y_{ij} + y_{ijk}}{2} \right)^2 \right) + \frac{1}{6}(x_{ijk}^2 + y_{ijk}^2), \quad (20)$$

а знак  $s$  определяется как знак смешанного произведения

$$s_k = \text{sign}(\mathbf{r}_{ijk} - \mathbf{r}_{ij}, \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i, \mathbf{r}_i). \quad (21)$$

В случае, невыпуклой области, если вектор  $\mathbf{r}_i$  составляет тупой угол с внешней нормалью к  $k$ -му граничному элементу, знак нужно заменить на противоположный.

Чтобы применить формулу (19) в расчёте, необходимо вычислить или аппроксимировать стоящий в ней интеграл. В случае цилиндрической поверхности он равен  $(z_{ijk} - z_{ij})R^2$ . В общем случае предположим, что в граничных сеточных узлах известна функция  $\mathcal{R} = \int_{z_0}^z R^2(z)dz$ . Нижний предел может быть выбран произвольно, т. е. функция  $\mathcal{R}$  определена с точностью до константы.

Если слагаемое, содержащее  $R(z)$ , опустить, то условие (15) будет выполняться, однако это, разумеется, привело бы к потере аппроксимации. Чтобы (15) сохранилось при наличии этого слагаемого, следовательно, нужно обеспечить

$$\sum_{j \in N_1(i) \cap \partial G} \sum_{k=1,2} \int_{z=z_{ij}}^{z_{ijk}} R(z)^2 dz = 0.$$

Для этого положим

$$\int_{z=z_{ij}}^{z_{ijk}} R(z)^2 dz \approx \mathcal{R}_{ijk} - \frac{\mathcal{R}_i + \mathcal{R}_j}{2},$$

где  $\mathcal{R}_{ijk}$  определяется как среднее арифметическое значений функции  $\mathcal{R}$  по всем (трём или четырём) узлам  $k$ -го граничного элемента, опирающегося на ребро  $ij$ . Подставляя, получаем окончательную формулу для добавки

$$\hat{v}_{ij} = -\omega_z \sum_{k=1,2} s_k \left( \rho_{ijk}(z_{ijk} - z_{ij}) - \mathcal{R}_{ijk} + \frac{\mathcal{R}_i + \mathcal{R}_j}{2} \right), \quad (22)$$

где  $\rho_{ijk}$  и  $s_k$  определены, соответственно, формулами (20) и (21), и итоговая скорость подсегмента определяется формулой (18).

Приведённая методика применима также и к невыпуклым областям. Если осесимметрическая поверхность, к которой применяется коррекция, является внутренней, а не внешней границей расчётной области, то при обходе вокруг неё функция  $\mathcal{R}$  приобретает добавку, равную объёму тела вращения. Это необходимо учитывать при выполнении арифметических действий над значениями функции  $\mathcal{R}$ .

В отличие от схем на деформируемой сетке, при монолитном вращении не происходит изменения величин контрольных объёмов. Поэтому геометрическая консервативность не теряется при непосредственной дискретизации полудискретных уравнений, например, методом Рунге – Кутты. Используемая схема для деформируемой сетки предполагает движение узлов по прямой в пределах шага по времени, в результате чего величины  $v_{ij}$  в ней отличаются от истинных на множитель  $\sin(\omega\tau)/(\omega\tau)$ . Если используется этот подход, то на этот множитель необходимо домножать и добавку  $\hat{v}_{ij}$ , в противном случае стационарность однородного фонового поля будет потеряна. В приводимых ниже тестах мы не будем рассматривать этот вариант.

## Тестирование

Рассмотрим задачу об акустической волне в невязком газе в цилиндрической области с периодическими условиями вдоль оси цилиндра и условием непротекания на его границе:  $u_r = 0$  при  $r = R$ . При малой амплитуде волны она описывается линеаризованными уравнениями, решением которых являются следующие поля пульсаций физических величин:

$$\begin{aligned} \rho'(z, r, \phi, t) &= p'(z, r, \phi, t) = A \frac{J_\nu(\varkappa r)}{J_\nu(\varkappa R)} \cos(kz + \nu\phi + \omega t), \\ u'_z(z, r, \phi, t) &= -A \frac{k J_\nu(\varkappa r)}{\omega J_\nu(\varkappa R)} \cos(kz + \nu\phi + \omega t), \\ u'_r(z, r, \phi, t) &= A \frac{\varkappa J'_\nu(\varkappa r)}{\omega J_\nu(\varkappa R)} \sin(kz + \nu\phi + \omega t), \\ u'_\phi(z, r, \phi, t) &= -A \frac{\nu J_\nu(\varkappa r)}{\omega r J_\nu(\varkappa R)} \cos(kz + \nu\phi + \omega t), \end{aligned} \quad (23)$$

где  $k$  – осевое волновое число,  $\varkappa = \lambda_m/R$ ,  $\omega = (\varkappa^2 + k^2)^{1/2}$  – частота,  $J_\nu(x)$  и  $J'_\nu(x)$  – функция Бесселя 1-го рода индекса  $\nu$  и её производная,  $\lambda_m$  –  $m$ -й нуль функции  $J'_\nu(x)$ . Радиус цилиндра положим равным  $R = 1$ , осевое волновое число  $k = \pi$ , азимутальное волновое число  $\nu = 2$ , радиальное волновое число  $m = 1$ . Амплитуду волны выберем равной  $A = 10^{-4}$ .

Начальные данные зададим формулами (23), в которые подставим  $t = 0$ . Расчёт будем проводить до времени  $t_{\max} = 10$ .

Вначале проведём этот тест в рамках линеаризованных уравнений Эйлера на фоновом поле  $\bar{\rho} = 1$ ,  $\bar{\mathbf{u}} = 0$ ,  $\bar{p} = 1/\gamma$ ,  $\gamma = 1.4$ . Расчёты проведём в четырёх постановках: а) на покоящейся сетке, б) на вращающейся сетке с “упрощённым” определением  $v_{ij}$  формулой (12), в) на вращающейся сетке с определением  $v_{ij}$  формулой (13) и г) на вращающейся сетке с уточнёнными значениями  $v_{ij}$  (22), (18). В постановках б), в) и г) угловую скорость вращения сетки зададим равной  $-\omega/\nu$ , что обеспечит стационарность точного решения относительно сетки.

Будем рассматривать два вида расчётных сеток: призматические, полученные экструзией треугольной сетки на крышке цилиндра, и неструктурированные тетраэдральные сетки. В случае призматических сеток будем использовать прямые контрольные объёмы [9], что равносильно использованию схемы для неструктурированной сетки в горизонтальной плоскости и конечно-разностной схемы для аппроксимации производной по  $z$ . Результаты на сетках с характерными длинами рёбер  $h = 0.1$  и  $h = 0.05$  сведены в таблицу 1.

Из таблицы 1 видно, что способ аппроксимации члена, отвечающего за движение сетки, существенным образом не влияет на точность счёта. То, что решение во вращающейся системе более точное, может быть объяснено тем, что в ней решение является стационарным. Отметим, что в случае неосесимметрического вращающегося тела задание на нём условий непротекания в рамках линеаризованных уравнений не имело бы физического смысла, так как однородное фоновое поле при этом не удовлетворяет поставленным граничным условиям.

Теперь проведём этот тест в рамках полных уравнений Эйлера. Результаты сведены в таблицу 2. Видно, что при отсутствии вращения (вариант а)) результаты решения полных уравнений почти не отличаются от решения линейных. То же справедливо и для варианта г), то есть при определении  $v_{ij}$  с учётом кривизны. Если же не учитывать кривизну поверхности, то шум, создаваемый в результате вращения многогранной области, по своей амплитуде многократно превышает акустическую волну.

Таблица 1

**Численная ошибка в рамках линейных уравнений**

тип сетки	$h$	Способ определения $w_{ij}$			
		(а)	(б)	(в)	(г)
призматическая	0.1	$3.64 \times 10^{-5}$	$3.23 \times 10^{-5}$	$3.48 \times 10^{-5}$	$2.94 \times 10^{-5}$
	0.05	$8.50 \times 10^{-6}$	$6.39 \times 10^{-6}$	$7.53 \times 10^{-6}$	$4.92 \times 10^{-6}$
тетраэдральная	0.1	$4.97 \times 10^{-5}$	$3.00 \times 10^{-5}$	$3.25 \times 10^{-5}$	$2.90 \times 10^{-5}$
	0.05	$1.41 \times 10^{-5}$	$6.34 \times 10^{-6}$	$7.48 \times 10^{-6}$	$5.84 \times 10^{-6}$

Таблица 2

**Численная ошибка в рамках нелинейных уравнений**

тип сетки	$h$	Способ определения $w_{ij}$			
		(а)	(б)	(в)	(г)
призматическая	0.1	$3.64 \times 10^{-5}$	$3.23 \times 10^{-5}$	$3.48 \times 10^{-5}$	$2.94 \times 10^{-5}$
	0.05	$8.50 \times 10^{-6}$	$6.41 \times 10^{-6}$	$7.53 \times 10^{-6}$	$4.95 \times 10^{-6}$
тетраэдральная	0.1	$4.97 \times 10^{-5}$	$3.35 \times 10^{-3}$	$2.89 \times 10^{-3}$	$2.90 \times 10^{-5}$
	0.05	$1.14 \times 10^{-5}$	$4.60 \times 10^{-3}$	$3.43 \times 10^{-3}$	$5.82 \times 10^{-6}$

## Заключение

Была предложена модификация рёберно-ориентированных схем, позволяющая исключить генерацию паразитных возмущений от осесимметрического тела во вращающейся системе координат. Она заключается в коррекции скоростей сегментов посредством учёта кривизны границы. При этом корректировать сами ориентированные площади сегментов нет необходимости.

## Список литературы

1. Abalakin I., Bakhvalov P., Kozubskaya T. Edge-based reconstruction schemes for unstructured tetrahedral meshes // International Journal for Numerical Methods in Fluids. 2016. Vol. 81. P. 331–356.
2. Бахвалов П. А., Козубская Т. К. Схема EBR-WENO для решения задач газовой динамики с разрывами на неструктурированных сетках // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. 2017. № 23. С. 1–32.
3. Katz Aaron, Sankaran Venkateswaran. An Efficient Correction Method to Obtain a Formally Third-Order Accurate Flow Solver for Node-Centered



- Unstructured Grids // J. Sci. Comput. New York, NY, USA, 2012. may. Т. 51, № 2. С. 375–393.
4. Pincock B. B., Katz A. High-order flux correction for viscous flows on arbitrary unstructured grids // AIAA paper No. 2011-1566. 2013.
  5. Бахвалов П. А., Козубская Т. К. Модификация схемы Flux Corrector для повышения точности решения нестационарных задач // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2015. № 69. С. 1–24. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2015-69>.
  6. Численное исследование аэродинамических и акустических свойств винта в кольце / Абалакин И. В., Аникин В. А., Бахвалов П. А. [и др.] // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. 2016. № 3. С. 130–145.
  7. Carlson J.-R. Inflow/Outflow Boundary Conditions with Application to FUN3D: Tech. Rep.: NASA/TM–2011-217181: NASA, 2011.
  8. Копьёв В. Ф., Титарев В. А., Беляев И. В. Разработка нового подхода к расчёту шума винтов с использованием суперкомпьютеров // Учёные записки ЦАГИ. 2014. № XLV. С. 78–106.
  9. Бахвалов П. А., Козубская Т. К. О построении рёберно-ориентированных схем, обеспечивающих точность на линейной функции, для решения уравнений Эйлера на неструктурированных сетках // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2017. Т. 57, № 4. С. 92–111.
  10. Barth T. J. Numerical aspects of computing high Reynolds number flows on unstructured meshes // AIAA Paper No. 91-0721. 1991.
  11. Nishikawa H. Accuracy-preserving boundary flux quadrature for finite-volume discretization on unstructured grids // Journal of computational physics. 2015. Vol. 281. P. 518–555.
  12. Koobus B., Farhat C. Second-order time-accurate and geometrically conservative implicit schemes for flow computations on unstructured dynamic meshes // Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 1999. no. 170. P. 103–129.