



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Рогов Б.В., Брагин М.Д.

О сходимости метода
итерируемой приближенной
факторизации операторов
высокоточной бикомпактной
схемы для нестационарных
трехмерных уравнений
гиперболического типа

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Рогов Б.В., Брагин М.Д. О сходимости метода итерируемой приближенной факторизации операторов высокоточной бикомпактной схемы для нестационарных трехмерных уравнений гиперболического типа // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2018. № 132. 16 с. doi:[10.20948/prepr-2018-132](https://doi.org/10.20948/prepr-2018-132)
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2018-132>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Российской академии наук**

Б.В.Рогов, М.Д.Брагин

**О сходимости метода итерированной
приближенной факторизации
операторов высокоточной
бикомпактной схемы
для нестационарных трехмерных
уравнений гиперболического типа**

Москва — 2018

Рогов Б.В., Брагин М.Д.

О сходимости метода итерируемой приближенной факторизации операторов высокоточной бикомпактной схемы для нестационарных трехмерных уравнений гиперболического типа

В работе исследована сходимость метода итерируемой приближенной факторизации операторов бикомпактной схемы для численного решения нестационарных трехмерных уравнений гиперболического типа. В этом методе итерации проводятся с целью исключения из численного решения ошибки, связанной с приближенной факторизацией. Сходимость итераций изучена применительно к бикомпактной схеме четвертого порядка пространственной аппроксимации для нестационарного трехмерного линейного уравнения переноса с постоянными положительными коэффициентами. Доказано, что итерации сходятся при всех положительных числах Куранта по всем трем пространственным направлениям. Получена теоретическая оценка для скорости сходимости итераций. Проведен численный эксперимент, который подтвердил эту оценку при различных соотношениях между числами Куранта.

Ключевые слова: бикомпактные схемы, уравнения гиперболического типа, метод итерируемой приближенной факторизации, сходимость итераций

Boris Vadimovich Rogov, Mikhail Dmitrievich Bragin

On the convergence of the method of iterative approximate factorization of difference operators of high-order accurate bcompact scheme for nonstationary three-dimensional hyperbolic equations

The convergence of the iterative approximate factorization method for operators of the bcompact scheme for numerical solution of hyperbolic equations is investigated. In this method, iterations are made in order to eliminate the approximate factorization error from the numerical solution. Iterations convergence is studied in case of the bcompact scheme of fourth order in space for the non-stationary three-dimensional linear advection equation with constant positive coefficients. It is proved that iterations converge for all positive Courant numbers in all three space dimensions. A theoretical estimate for convergence rate of iterations is obtained. This estimate is confirmed in a numerical experiment for different relations between Courant numbers.

Key words: bcompact schemes, hyperbolic equations, iterative approximate factorization method, iterations convergence

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты 18-01-00857-а и 18-31-00045-мол_а.

Введение

В основе многих моделей, применяемых при решении задач физики и техники, лежат уравнения гиперболического типа. Они описывают процессы переноса, распространения волн и т.п. В последнее время наблюдается большой интерес к построению и развитию компактных схем для численного решения данных уравнений [1]. Это связано с ужесточением требований к надежности, точности, в том числе спектральной, и эффективности расчетов. Компактные схемы удовлетворяют всем перечисленным требованиям (см. [1]). На одинаковом шаблоне компактные схемы обладают более высоким порядком аппроксимации (см. [1]), нежели схемы, построенные классическим путем, т.е. аппроксимацией производных, входящих в дифференциальные уравнения, конечными разностями. Кроме того, схемы, сконструированные на компактном шаблоне, могут быть решены экономичными методами (см. [1]).

В последние годы для численного решения уравнений гиперболического типа первого порядка по пространственным переменным активно развивается специальный класс компактных схем – бикомпактные схемы [3-10]. Наследуя позитивные свойства компактных схем, они обладают лучшим спектральным разрешением [5-7] по сравнению с традиционными компактными схемами [1] того же и даже более высокого порядка аппроксимации. Бикомпактные схемы строятся методом прямых с использованием интегро-интерполяционного метода. Сначала выводятся полудискретные бикомпактные схемы, а затем обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ) этих схем интегрируются по времени обычно либо по правилу трапеций [5], либо с использованием А- и L-устойчивых диагонально-неявных схем Рунге-Кутты [2-4,6-10]. Важным отличием бикомпактных схем от других компактных схем является то, что пространственный шаблон в каждом пространственном направлении состоит только из двух целых узлов. Именно эта особенность дала название бикомпактным схемам. В их шаблоне могут присутствовать вспомогательные дробные узлы, симметрично расположенные относительно центра шаблона, при помощи которых порядок пространственной аппроксимации бикомпактной схемы можно повысить до любого четного порядка, большего двух [6]. При этом разностный порядок бикомпактной схемы по пространственной переменной, определяемый как разность между общим числом узлов в шаблоне и общим числом разностных уравнений в схеме, равен единице, т.е. совпадает с порядком аппроксимируемого дифференциального уравнения по этой же переменной. Получить полудискретные бикомпактные схемы можно двумя способами: либо привлекая дифференциальные следствия исходного дифференциального уравнения [3-5, 8-10] и используя интегро-интерполяционный метод, либо используя коллокационные полиномы [6, 7]. Из первого способа построения бикомпактных схем вытекают следующие их свойства: симметричность, консервативность, сохранение высокого порядка пространственной аппроксимации на существенно неравномерных сетках [3, 4].

Отметим еще одно важное преимущество бикомпактных схем над традиционными трехточечными компактными схемами того же четного порядка пространственной аппроксимации. Оно касается расчета разрывных решений уравнений гиперболического типа. В работе [10] показано, что бикомпактная схема четвертого порядка пространственной аппроксимации генерирует локальные немонотонности малой амплитуды вблизи контактного разрыва, в то время как традиционная компактная схема четвертого порядка аппроксимации генерирует протяженные зоны немонотонности около разрыва, причем амплитуда этих немонотонностей большая.

Экономичный способ реализации двумерных и трехмерных (2D и 3D) бикомпактных схем для решения систем нестационарных неоднородных квазилинейных уравнений гиперболического типа предложен в работах [8, 9]. Этот способ основан на приближенной факторизации операторов многомерной бикомпактной схемы совместно с итерациями, которые проводятся с целью исключения из численного решения ошибки, связанной с приближенной факторизацией. Отметим, что, во-первых, факторизация многомерных операторов бикомпактной схемы оказалась возможной благодаря ее симметрии относительно пространственных переменных и перестановочности одномерных разностных операторов. Во-вторых, максимальный порядок точности по времени, который можно получить путем классической приближенной факторизации, равен двум (см. вводные части в [8, 9]), а метод итерируемой приближенной факторизации [8, 9] позволяет сохранить порядок точности по времени у факторизованной схемы равным порядку точности у нефакторизованной схемы. В [8] рассмотрен метод итерируемой приближенной факторизации в 2D случае, а в [9] – в 2D и 3D случаях. Доказательство сходимости итераций в методе подробно изложено в [9] на примере нестационарного 2D скалярного однородного линейного уравнения переноса с положительными постоянными коэффициентами. Однако сходимость итераций в 3D случае исследована не была.

В настоящей работе на примере линейного уравнения переноса с положительными постоянными коэффициентами доказывается сходимость метода итерируемой приближенной факторизации в 3D случае. Способ доказательства отличается от того, что используется в работе [9], поэтому перед изложением нового способа доказательства в 3D случае он поясняется в 2D случае. Мотивацией рассмотрения 2D случая является также сравнение оценок скоростей сходимости итераций в 2D и 3D случаях.

Исследование сходимости в двумерном случае

Для 2D скалярного однородного линейного уравнения переноса

$$L_2(u) \equiv \partial_t u + a \partial_x u + b \partial_y u = 0, \quad a = \text{const} > 0, \quad b = \text{const} > 0 \quad (1)$$

уравнения полудискретной бикомпактной схемы 4-го порядка пространственной аппроксимации могут быть получены интегрированием по 2D ячейке $[x_j, x_{j+1}] \times [y_k, y_{k+1}]$ и последующей аппроксимацией исходного уравнения (1), а также трех его независимых дифференциальных следствий

$$\partial_x L_2(u) = 0, \quad \partial_y L_2(u) = 0, \quad \partial_x \partial_y L_2(u) = 0,$$

где символ ∂_t обозначает $\partial/\partial t$, а символы ∂_x, ∂_y — $\partial/\partial x, \partial/\partial y$. Уравнения полудискретной бикомпактной схемы имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} A_0^y A_0^x (du/dt)_C + (aA_0^y \Lambda_1^x + b\Lambda_1^y A_0^x) u_C &= 0, \\ A_0^y \Lambda_1^x (du/dt)_C + (aA_0^y \Lambda_2^x + b\Lambda_1^y \Lambda_1^x) u_C &= 0, \\ \Lambda_1^y A_0^x (du/dt)_C + (a\Lambda_1^y \Lambda_1^x + b\Lambda_2^y A_0^x) u_C &= 0, \\ \Lambda_1^y \Lambda_1^x (du/dt)_C + (a\Lambda_1^y \Lambda_2^x + b\Lambda_2^y \Lambda_1^x) \hat{u}_C &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где $C = (j+1/2, k+1/2)$ — мультииндекс. Одномерные разностные операторы A_0^d , Λ_1^d , Λ_2^d ($d = x, y$) в уравнениях (2) для произвольной сеточной функции u даются формулами

$$\begin{aligned} A_0^x u_{j+1/2, k'} &= \frac{u_{j, k'} + 4u_{j+1/2, k'} + u_{j+1, k'}}{6}, \quad \Lambda_1^x u_{j+1/2, k'} = \frac{u_{j+1, k'} - u_{j, k'}}{h_{x, j+1/2}}, \\ \Lambda_2^x u_{j+1/2, k'} &= \frac{4(u_{j, k'} - 2u_{j+1/2, k'} + u_{j+1, k'})}{h_{x, j+1/2}^2}, \quad k' \in \{k, k+1/2, k+1\}, \\ A_0^y u_{j', k+1/2} &= \frac{u_{j', k} + 4u_{j', k+1/2} + u_{j', k+1}}{6}, \quad \Lambda_1^y u_{j', k+1/2} = \frac{u_{j', k+1} - u_{j', k}}{h_{y, k+1/2}}, \\ \Lambda_2^y u_{j', k+1/2} &= \frac{4(u_{j', k} - 2u_{j', k+1/2} + u_{j', k+1})}{h_{y, k+1/2}^2}, \quad j' \in \{j, j+1/2, j+1\}. \end{aligned} \quad (3)$$

где $h_{x, j+1/2} = x_{j+1} - x_j$ и $h_{y, k+1/2} = y_{k+1} - y_k$ — шаги по пространственным переменным x и y . В дальнейшем шаги $h_{x, j+1/2}$ и $h_{y, k+1/2}$ ради краткости записи обозначены как h_x и h_y . Отметим, что операторы $A_0^x, \Lambda_1^x, \Lambda_2^x$ попарно коммутируют с операторами $A_0^y, \Lambda_1^y, \Lambda_2^y$, что видно из их определения (3).

В качестве метода интегрирования по времени в полностью дискретной бикомпактной схеме используется либо одностадийное А-устойчивое правило трапеций, либо диагонально неявные многостадийные А- и L-устойчивые методы Рунге-Кутты высокого порядка аппроксимации. Эти методы интегрирования на каждой стадии сводятся к интегрированию уравнений полудискретной бикомпактной схемы неявным методом Эйлера со своим

стадийным временным шагом. Поэтому, не нарушая общности, рассмотрим базовую бикompактную схему

$$\begin{aligned}
(A_0^y A_0^x + \tau a A_0^y \Lambda_1^x + \tau b \Lambda_1^y A_0^x) \hat{u}_C &= A_0^y A_0^x u_C, \\
(A_0^y \Lambda_1^x + \tau a A_0^y \Lambda_2^x + \tau b \Lambda_1^y \Lambda_1^x) \hat{u}_C &= A_0^y \Lambda_1^x u_C, \\
(\Lambda_1^y A_0^x + \tau a \Lambda_1^y \Lambda_1^x + \tau b \Lambda_2^y A_0^x) \hat{u}_C &= \Lambda_1^y A_0^x u_C, \\
(\Lambda_1^y \Lambda_1^x + \tau a \Lambda_1^y \Lambda_2^x + \tau b \Lambda_2^y \Lambda_1^x) \hat{u}_C &= \Lambda_1^y \Lambda_1^x u_C,
\end{aligned} \tag{4}$$

где τ — шаг по времени, $\hat{u} = u^{n+1}$, $u = u^n$, n — номер временного слоя. Схема (4) получена путем аппроксимации временных производных в полудискретной бикompактной схеме (2) по неявному методу Эйлера.

Базовую бикompактную схему (4) можно записать в матрично-векторной форме

$$\mathbf{M} \mathbf{v} = \boldsymbol{\psi},$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 4/9 & 1/9 + 2\kappa_x/3 & 1/9 + 2\kappa_y/3 & 1/36 + \kappa_x/6 + \kappa_y/6 \\ -16\kappa_x/3 & 2/3 + 8\kappa_x/3 & -4\kappa_x/3 & 1/6 + 2\kappa_x/3 + \kappa_y \\ -16\kappa_y/3 & -4\kappa_y/3 & 2/3 + 8\kappa_y/3 & 1/6 + \kappa_x + 2\kappa_y/3 \\ 0 & -8\kappa_y & -8\kappa_x & 1 + 4\kappa_x + 4\kappa_y \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \hat{u}_{j+1/2, k+1/2} \\ \hat{u}_{j+1, k+1/2} \\ \hat{u}_{j+1/2, k+1} \\ \hat{u}_{j+1, k+1} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\psi} = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix},$$

где $\boldsymbol{\psi}$ - известный вектор-столбец, $\kappa_x = a\tau/h_x$, $\kappa_y = b\tau/h_y$ — числа Куранта.

Операторы, стоящие в левых частях уравнений (4), допускают приближенную факторизацию:

$$\begin{aligned}
A_0^y A_0^x + a\tau A_0^y \Lambda_1^x + b\tau \Lambda_1^y A_0^x &= B_1^y(b\tau) B_1^x(a\tau) - \tau^2 ab \Lambda_1^y \Lambda_1^x, \\
A_0^y \Lambda_1^x + a\tau A_0^y \Lambda_2^x + b\tau \Lambda_1^y \Lambda_1^x &= B_1^y(b\tau) B_2^x(a\tau) - \tau^2 ab \Lambda_1^y \Lambda_2^x, \\
\Lambda_1^y A_0^x + a\tau \Lambda_1^y \Lambda_1^x + b\tau \Lambda_2^y A_0^x &= B_2^y(b\tau) B_1^x(a\tau) - \tau^2 ab \Lambda_2^y \Lambda_1^x, \\
\Lambda_1^y \Lambda_1^x + a\tau \Lambda_1^y \Lambda_2^x + b\tau \Lambda_2^y \Lambda_1^x &= B_2^y(b\tau) B_2^x(a\tau) - \tau^2 ab \Lambda_2^y \Lambda_2^x,
\end{aligned} \tag{5}$$

где $B_1^d(s) = A_0^d + s\Lambda_1^d$, $B_2^d(s) = \Lambda_1^d + s\Lambda_2^d$, $d = x, y$.

Итерационный алгоритм решения уравнений базовой схемы (4), основанный на приближенной факторизации (5) разностных операторов бикompактной схемы, дается формулами

$$\begin{aligned}
B_1^y(b\tau)B_1^x(a\tau)\hat{u}^{(s+1)} &= A_0^y A_0^x u + \tau^2 ab \Lambda_1^y \Lambda_1^x \hat{u}^{(s)}, \\
B_1^y(b\tau)B_2^x(a\tau)\hat{u}^{(s+1)} &= A_0^y \Lambda_1^x u + \tau^2 ab \Lambda_1^y \Lambda_2^x \hat{u}^{(s)}, \\
B_2^y(b\tau)B_1^x(a\tau)\hat{u}^{(s+1)} &= \Lambda_1^y A_0^x u + \tau^2 ab \Lambda_2^y \Lambda_1^x \hat{u}^{(s)}, \\
B_2^y(b\tau)B_2^x(a\tau)\hat{u}^{(s+1)} &= \Lambda_1^y \Lambda_1^x u + \tau^2 ab \Lambda_2^y \Lambda_2^x \hat{u}^{(s)},
\end{aligned}$$

где s — номер итерации.

Этот алгоритм можно записать в матрично-векторном виде:

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_y \mathbf{M}_x \mathbf{v}^{(s+1)} &= \mathbf{M}_r \mathbf{v}^{(s)} + \boldsymbol{\psi}, \\
\mathbf{M}_y &= \begin{bmatrix} 2/3 & 0 & 1/6 + \kappa_y & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 1/6 + \kappa_y \\ -8\kappa_y & 0 & 1 + 4\kappa_y & 0 \\ 0 & -8\kappa_y & 0 & 1 + 4\kappa_y \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}_x = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/6 + \kappa_x & 0 & 0 \\ -8\kappa_x & 1 + 4\kappa_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 & 1/6 + \kappa_x \\ 0 & 0 & -8\kappa_x & 1 + 4\kappa_x \end{bmatrix}, \\
\mathbf{M}_r &= \kappa_x \kappa_y \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -8 & 4 \\ 0 & -8 & 0 & 4 \\ 64 & -32 & -32 & 16 \end{bmatrix},
\end{aligned} \tag{6}$$

где $\mathbf{M}_y \mathbf{M}_x - \mathbf{M}_r = \mathbf{M}$.

Матрицы $\mathbf{M}_x, \mathbf{M}_y, \mathbf{M}_r$ можно представить в виде следующих кронекеровых произведений матриц:

$$\mathbf{M}_x = \mathbf{E} \otimes \mathbf{P}_x, \quad \mathbf{M}_y = \mathbf{P}_y \otimes \mathbf{E}, \quad \mathbf{M}_r = \kappa_x \kappa_y \mathbf{R} \otimes \mathbf{R} = (\mathbf{P}_y - \mathbf{Q}) \otimes (\mathbf{P}_x - \mathbf{Q}), \tag{7}$$

где

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_d = \mathbf{Q} + \kappa_d \mathbf{R}, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -8 & 4 \end{bmatrix}.$$

Произведение матриц $\mathbf{M}_y, \mathbf{M}_x$ можно преобразовать следующим образом:

$$\mathbf{M}_y \mathbf{M}_x = (\mathbf{P}_y \otimes \mathbf{E})(\mathbf{E} \otimes \mathbf{P}_x) = \mathbf{P}_y \otimes \mathbf{P}_x. \tag{8}$$

Запишем итерационный метод (6) в рекуррентном виде

$$\mathbf{v}^{(s+1)} = \mathbf{S} \mathbf{v}^{(s)} + \boldsymbol{\xi}. \tag{9}$$

где матрица шага метода

$$\mathbf{S} = (\mathbf{M}_y \mathbf{M}_x)^{-1} \mathbf{M}_r. \tag{10}$$

С учетом формул (7), (8) матрица шага (10) итерационного метода может быть записана как кронекерово произведение двух матриц, каждая из которых связана только с одним пространственным направлением:

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= (\mathbf{P}_y \otimes \mathbf{P}_x)^{-1} [(\mathbf{P}_y - \mathbf{Q}) \otimes (\mathbf{P}_x - \mathbf{Q})] = (\mathbf{P}_y^{-1} \otimes \mathbf{P}_x^{-1}) [(\mathbf{P}_y - \mathbf{Q}) \otimes (\mathbf{P}_x - \mathbf{Q})] = \\ &= (\mathbf{E} - \mathbf{P}_y^{-1}\mathbf{Q}) \otimes (\mathbf{E} - \mathbf{P}_x^{-1}\mathbf{Q}) = (\mathbf{E} - \mathbf{T}_y) \otimes (\mathbf{E} - \mathbf{T}_x), \end{aligned} \quad (11)$$

где $\mathbf{T}_d = \mathbf{P}_d^{-1}\mathbf{Q}$, $d = x, y$.

Благодаря представлению (11) для матрицы \mathbf{S} ее собственные значения $\lambda(\mathbf{S})$ равны произведению собственных значений λ_x, λ_y матриц $\mathbf{E} - \mathbf{T}_y$, $\mathbf{E} - \mathbf{T}_x$

$$\lambda(\mathbf{S}) = \lambda_y \lambda_x, \quad (12)$$

где

$$\lambda_d = \frac{12\kappa_d^2 + (3 \pm i\sqrt{3})\kappa_d}{12\kappa_d^2 + 6\kappa_d + 1}, \quad d = x, y. \quad (13)$$

Модули комплексно сопряженных чисел λ_d (13) одинаковы и равны

$$|\lambda_d| = \frac{2\sqrt{3}\kappa_d}{\sqrt{12\kappa_d^2 + 6\kappa_d + 1}},$$

поэтому в силу равенства (12) спектральный радиус $\rho(\mathbf{S})$ матрицы шага \mathbf{S} равен

$$\rho(\mathbf{S}) = \frac{12\kappa_y \kappa_x}{\sqrt{(12\kappa_y^2 + 6\kappa_y + 1)(12\kappa_x^2 + 6\kappa_x + 1)}}. \quad (14)$$

Поскольку спектральный радиус стационарного итерационного процесса (9) меньше единицы при любых $\kappa_y > 0, \kappa_x > 0$, то итерации всегда сходятся.

Исследование сходимости в трехмерном случае

Для 3D однородного линейного уравнения переноса

$$L_3(u) \equiv \partial_l u + a\partial_x u + b\partial_y u + c\partial_z u = 0, \quad a = \text{const} > 0, \quad b = \text{const} > 0, \quad c = \text{const} > 0 \quad (15)$$

уравнения полудискретной бикомпактной схемы 4-го порядка пространственной аппроксимации могут быть получены интегрированием по 3D ячейке $[x_j, x_{j+1}] \times [y_k, y_{k+1}] \times [z_l, z_{l+1}]$ и последующей аппроксимацией исходного уравнения (15), а также семи его независимых дифференциальных следствий

$$\begin{aligned}\partial_x L_3(u) = 0, \partial_y L_3(u) = 0, \partial_z L_3(u) = 0, \partial_x \partial_y L_3(u) = 0, \\ \partial_x \partial_z L_3(u) = 0, \partial_y \partial_z L_3(u) = 0, \partial_x \partial_y \partial_z L_3(u) = 0.\end{aligned}$$

Уравнения полудискретной бикомпактной схемы имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}A_0^z A_0^y A_0^x (du/dt)_C + (aA_0^z A_0^y \Lambda_1^x + bA_0^z \Lambda_1^y A_0^x + c\Lambda_1^z A_0^y A_0^x) u_C &= 0, \\ A_0^z A_0^y \Lambda_1^x (du/dt)_C + (aA_0^z A_0^y \Lambda_2^x + bA_0^z \Lambda_1^y \Lambda_1^x + c\Lambda_1^z A_0^y \Lambda_1^x) u_C &= 0, \\ A_0^z \Lambda_1^y A_0^x (du/dt)_C + (aA_0^z \Lambda_1^y \Lambda_1^x + bA_0^z \Lambda_2^y A_0^x + c\Lambda_1^z \Lambda_1^y A_0^x) u_C &= 0, \\ \Lambda_1^z A_0^y A_0^x (du/dt)_C + (a\Lambda_1^z A_0^y \Lambda_1^x + b\Lambda_1^z \Lambda_1^y A_0^x + c\Lambda_2^z A_0^y A_0^x) u_C &= 0, \\ A_0^z \Lambda_1^y \Lambda_1^x (du/dt)_C + (aA_0^z \Lambda_1^y \Lambda_2^x + bA_0^z \Lambda_2^y \Lambda_1^x + c\Lambda_1^z \Lambda_1^y \Lambda_1^x) u_C &= 0, \\ \Lambda_1^z A_0^y \Lambda_1^x (du/dt)_C + (a\Lambda_1^z A_0^y \Lambda_2^x + b\Lambda_1^z \Lambda_1^y \Lambda_1^x + c\Lambda_2^z A_0^y \Lambda_1^x) u_C &= 0, \\ \Lambda_1^z \Lambda_1^y A_0^x (du/dt)_C + (a\Lambda_1^z \Lambda_1^y \Lambda_1^x + b\Lambda_1^z \Lambda_2^y A_0^x + c\Lambda_2^z \Lambda_1^y A_0^x) u_C &= 0, \\ \Lambda_1^z \Lambda_1^y \Lambda_1^x (du/dt)_C + (a\Lambda_1^z \Lambda_1^y \Lambda_2^x + b\Lambda_1^z \Lambda_2^y \Lambda_1^x + c\Lambda_2^z \Lambda_1^y \Lambda_1^x) u_C &= 0,\end{aligned}$$

где $C = (j+1/2, k+1/2, l+1/2)$ - мультииндекс. Одномерные разностные операторы A_0^d , Λ_1^d , Λ_2^d ($d = x, y, z$) аналогичны операторам (3). Например, оператор A_0^z определяется следующей формулой:

$$A_0^z u_{j',k',l+1/2} = \frac{u_{j',k',l} + 4u_{j',k',l+1/2} + u_{j',k',l+1}}{6}, \quad j' \in \{j, j+1/2, j+1\}, \quad k' \in \{k, k+1/2, k+1\}.$$

Полностью дискретная базовая бикомпактная схема имеет вид

$$\begin{aligned}(A_0^z A_0^y A_0^x + a\tau A_0^z A_0^y \Lambda_1^x + b\tau A_0^z \Lambda_1^y A_0^x + c\tau \Lambda_1^z A_0^y A_0^x) \hat{u}_C &= A_0^z A_0^y A_0^x u_C, \\ (A_0^z A_0^y \Lambda_1^x + a\tau A_0^z A_0^y \Lambda_2^x + b\tau A_0^z \Lambda_1^y \Lambda_1^x + c\tau \Lambda_1^z A_0^y \Lambda_1^x) \hat{u}_C &= A_0^z A_0^y \Lambda_1^x u_C, \\ (A_0^z \Lambda_1^y A_0^x + a\tau A_0^z \Lambda_1^y \Lambda_1^x + b\tau A_0^z \Lambda_2^y A_0^x + c\tau \Lambda_1^z \Lambda_1^y A_0^x) \hat{u}_C &= A_0^z \Lambda_1^y A_0^x u_C, \\ (\Lambda_1^z A_0^y A_0^x + a\tau \Lambda_1^z A_0^y \Lambda_1^x + b\tau \Lambda_1^z \Lambda_1^y A_0^x + c\tau \Lambda_2^z A_0^y A_0^x) \hat{u}_C &= \Lambda_1^z A_0^y A_0^x u_C, \\ (A_0^z \Lambda_1^y \Lambda_1^x + a\tau A_0^z \Lambda_1^y \Lambda_2^x + b\tau A_0^z \Lambda_2^y \Lambda_1^x + c\tau \Lambda_1^z \Lambda_1^y \Lambda_1^x) \hat{u}_C &= A_0^z \Lambda_1^y \Lambda_1^x u_C, \\ (\Lambda_1^z A_0^y \Lambda_1^x + a\tau \Lambda_1^z A_0^y \Lambda_2^x + b\tau \Lambda_1^z \Lambda_1^y \Lambda_1^x + c\tau \Lambda_2^z A_0^y \Lambda_1^x) \hat{u}_C &= \Lambda_1^z A_0^y \Lambda_1^x u_C, \\ (\Lambda_1^z \Lambda_1^y A_0^x + a\tau \Lambda_1^z \Lambda_1^y \Lambda_1^x + b\tau \Lambda_1^z \Lambda_2^y A_0^x + c\tau \Lambda_2^z \Lambda_1^y A_0^x) \hat{u}_C &= \Lambda_1^z \Lambda_1^y A_0^x u_C, \\ (\Lambda_1^z \Lambda_1^y \Lambda_1^x + a\tau \Lambda_1^z \Lambda_1^y \Lambda_2^x + b\tau \Lambda_1^z \Lambda_2^y \Lambda_1^x + c\tau \Lambda_2^z \Lambda_1^y \Lambda_1^x) \hat{u}_C &= \Lambda_1^z \Lambda_1^y \Lambda_1^x u_C.\end{aligned}\tag{16}$$

Операторы, стоящие в левых частях уравнений (16), допускают приближенную факторизацию

$$\begin{aligned}
A_0^z A_0^y A_0^x + a\tau A_0^z A_0^y \Lambda_1^x + b\tau A_0^z \Lambda_1^y A_0^x + c\tau \Lambda_1^z A_0^y A_0^x &= B_1^z(c\tau) B_1^y(b\tau) B_1^x(a\tau) - \tau^2 I_1, \\
A_0^z A_0^y \Lambda_1^x + a\tau A_0^z A_0^y \Lambda_2^x + b\tau A_0^z \Lambda_1^y \Lambda_1^x + c\tau \Lambda_1^z A_0^y \Lambda_1^x &= B_1^z(c\tau) B_1^y(b\tau) B_2^x(a\tau) - \tau^2 I_2, \\
A_0^z \Lambda_1^y A_0^x + a\tau A_0^z \Lambda_1^y \Lambda_1^x + b\tau A_0^z \Lambda_2^y A_0^x + c\tau \Lambda_1^z \Lambda_1^y A_0^x &= B_1^z(c\tau) B_2^y(b\tau) B_1^x(a\tau) - \tau^2 I_3, \\
\Lambda_1^z A_0^y A_0^x + a\tau \Lambda_1^z A_0^y \Lambda_1^x + b\tau \Lambda_1^z \Lambda_1^y A_0^x + c\tau \Lambda_2^z A_0^y A_0^x &= B_2^z(c\tau) B_1^y(b\tau) B_1^x(a\tau) - \tau^2 I_4, \\
A_0^z \Lambda_1^y \Lambda_1^x + a\tau A_0^z \Lambda_1^y \Lambda_2^x + b\tau A_0^z \Lambda_2^y \Lambda_1^x + c\tau \Lambda_1^z \Lambda_1^y \Lambda_1^x &= B_1^z(c\tau) B_2^y(b\tau) B_2^x(a\tau) - \tau^2 I_5, \\
\Lambda_1^z A_0^y \Lambda_1^x + a\tau \Lambda_1^z A_0^y \Lambda_2^x + b\tau \Lambda_1^z \Lambda_1^y \Lambda_1^x + c\tau \Lambda_2^z A_0^y \Lambda_1^x &= B_2^z(c\tau) B_1^y(b\tau) B_2^x(a\tau) - \tau^2 I_6, \\
\Lambda_1^z \Lambda_1^y A_0^x + a\tau \Lambda_1^z \Lambda_1^y \Lambda_1^x + b\tau \Lambda_1^z \Lambda_2^y A_0^x + c\tau \Lambda_2^z \Lambda_1^y A_0^x &= B_2^z(c\tau) B_2^y(b\tau) B_1^x(a\tau) - \tau^2 I_7, \\
\Lambda_1^z \Lambda_1^y \Lambda_1^x + a\tau \Lambda_1^z \Lambda_1^y \Lambda_2^x + b\tau \Lambda_1^z \Lambda_2^y \Lambda_1^x + c\tau \Lambda_2^z \Lambda_1^y \Lambda_1^x &= B_2^z(c\tau) B_2^y(b\tau) B_2^x(a\tau) - \tau^2 I_8,
\end{aligned} \tag{17}$$

где

$$\begin{aligned}
B_1^d(s) &= A_0^d + s\Lambda_1^d, \quad B_2^d(s) = \Lambda_1^d + s\Lambda_2^d, \quad d = x, y, z, \\
I_1 &= abA_0^z \Lambda_1^y \Lambda_1^x + ac\Lambda_1^z A_0^y \Lambda_1^x + bc\Lambda_1^z \Lambda_1^y A_0^x + \tau abc \Lambda_1^z \Lambda_1^y \Lambda_1^x, \\
I_2 &= abA_0^z \Lambda_1^y \Lambda_2^x + ac\Lambda_1^z A_0^y \Lambda_2^x + bc\Lambda_1^z \Lambda_1^y \Lambda_1^x + \tau abc \Lambda_1^z \Lambda_1^y \Lambda_2^x, \\
I_3 &= abA_0^z \Lambda_2^y \Lambda_1^x + ac\Lambda_1^z \Lambda_1^y \Lambda_1^x + bc\Lambda_1^z \Lambda_2^y A_0^x + \tau abc \Lambda_1^z \Lambda_2^y \Lambda_1^x, \\
I_4 &= ab\Lambda_1^z \Lambda_1^y \Lambda_1^x + ac\Lambda_2^z A_0^y \Lambda_1^x + bc\Lambda_2^z \Lambda_1^y A_0^x + \tau abc \Lambda_2^z \Lambda_1^y \Lambda_1^x, \\
I_5 &= abA_0^z \Lambda_2^y \Lambda_2^x + ac\Lambda_1^z \Lambda_1^y \Lambda_2^x + bc\Lambda_1^z \Lambda_2^y \Lambda_1^x + \tau abc \Lambda_1^z \Lambda_2^y \Lambda_2^x, \\
I_6 &= ab\Lambda_1^z \Lambda_1^y \Lambda_2^x + ac\Lambda_2^z A_0^y \Lambda_2^x + bc\Lambda_2^z \Lambda_1^y \Lambda_1^x + \tau abc \Lambda_2^z \Lambda_1^y \Lambda_2^x, \\
I_7 &= ab\Lambda_1^z \Lambda_2^y \Lambda_1^x + ac\Lambda_2^z \Lambda_1^y \Lambda_1^x + bc\Lambda_2^z \Lambda_2^y A_0^x + \tau abc \Lambda_2^z \Lambda_2^y \Lambda_1^x, \\
I_8 &= ab\Lambda_1^z \Lambda_2^y \Lambda_2^x + ac\Lambda_2^z \Lambda_1^y \Lambda_2^x + bc\Lambda_2^z \Lambda_2^y \Lambda_1^x + \tau abc \Lambda_2^z \Lambda_2^y \Lambda_2^x.
\end{aligned}$$

Итерационный алгоритм решения уравнений базовой схемы, основанный на приближенной факторизации (17) разностных операторов, дается формулами

$$\begin{aligned}
B_1^z(c\tau) B_1^y(b\tau) B_1^x(a\tau) \hat{u}_C^{(s+1)} &= A_0^z A_0^y A_0^x u_C + \tau^2 I_1 \hat{u}_C^{(s)}, \\
B_1^z(c\tau) B_1^y(b\tau) B_2^x(a\tau) \hat{u}_C^{(s+1)} &= A_0^z A_0^y \Lambda_1^x u_C + \tau^2 I_2 \hat{u}_C^{(s)}, \\
B_1^z(c\tau) B_2^y(b\tau) B_1^x(a\tau) \hat{u}_C^{(s+1)} &= A_0^z \Lambda_1^y A_0^x u_C + \tau^2 I_3 \hat{u}_C^{(s)}, \\
B_2^z(c\tau) B_1^y(b\tau) B_1^x(a\tau) \hat{u}_C^{(s+1)} &= \Lambda_1^z A_0^y A_0^x u_C + \tau^2 I_4 \hat{u}_C^{(s)}, \\
B_1^z(c\tau) B_2^y(b\tau) B_2^x(a\tau) \hat{u}_C^{(s+1)} &= A_0^z \Lambda_1^y \Lambda_1^x u_C + \tau^2 I_5 \hat{u}_C^{(s)}, \\
B_2^z(c\tau) B_1^y(b\tau) B_2^x(a\tau) \hat{u}_C^{(s+1)} &= \Lambda_1^z A_0^y \Lambda_1^x u_C + \tau^2 I_6 \hat{u}_C^{(s)}, \\
B_2^z(c\tau) B_2^y(b\tau) B_1^x(a\tau) \hat{u}_C^{(s+1)} &= \Lambda_1^z \Lambda_1^y A_0^x u_C + \tau^2 I_7 \hat{u}_C^{(s)}, \\
B_2^z(c\tau) B_2^y(b\tau) B_2^x(a\tau) \hat{u}_C^{(s+1)} &= \Lambda_1^z \Lambda_1^y \Lambda_1^x u_C + \tau^2 I_8 \hat{u}_C^{(s)},
\end{aligned} \tag{18}$$

где s – номер итерации.

Алгоритм (18) можно записать в следующей матрично-векторной форме:

$$\mathbf{M}_z \mathbf{M}_y \mathbf{M}_x \mathbf{v}^{(s+1)} = \mathbf{M}_r \mathbf{v}^{(s)} + \boldsymbol{\psi}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \hat{u}_{j+1/2, k+1/2, l+1/2} \\ \hat{u}_{j+1, k+1/2, l+1/2} \\ \hat{u}_{j+1/2, k+1, l+1/2} \\ \hat{u}_{j+1, k+1, l+1/2} \\ \hat{u}_{j+1/2, k+1/2, l+1} \\ \hat{u}_{j+1, k+1/2, l+1} \\ \hat{u}_{j+1/2, k+1, l+1} \\ \hat{u}_{j+1, k+1, l+1} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\psi} = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \\ \psi_5 \\ \psi_6 \\ \psi_7 \\ \psi_8 \end{pmatrix}, \quad (19)$$

$$\mathbf{M}_z = \mathbf{P}_z \otimes \mathbf{E} \otimes \mathbf{E}, \quad \mathbf{M}_y = \mathbf{E} \otimes \mathbf{P}_y \otimes \mathbf{E}, \quad \mathbf{M}_x = \mathbf{E} \otimes \mathbf{E} \otimes \mathbf{P}_x,$$

$$\mathbf{M}_r = \kappa_y \kappa_x \mathbf{Q} \otimes \mathbf{R} \otimes \mathbf{R} + \kappa_z \kappa_x \mathbf{R} \otimes \mathbf{Q} \otimes \mathbf{R} + \kappa_z \kappa_y \mathbf{R} \otimes \mathbf{R} \otimes \mathbf{Q} + \kappa_z \kappa_y \kappa_x \mathbf{R} \otimes \mathbf{R} \otimes \mathbf{R},$$

где $\boldsymbol{\psi}$ - известный вектор-столбец, $\kappa_x, \kappa_y, \kappa_z = c\tau/h_z$ - числа Куранта, а матрицы \mathbf{P}_d ($d = x, y, z$), \mathbf{E} , \mathbf{Q} и \mathbf{R} определяются следующими формулами:

$$\mathbf{P}_d = \mathbf{Q} + \kappa_d \mathbf{R}, \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -8 & 4 \end{bmatrix}.$$

Произведение матриц, стоящих в левой части уравнения (19), можно преобразовать к такому виду

$$\mathbf{M}_z \mathbf{M}_y \mathbf{M}_x = \mathbf{P}_z \otimes \mathbf{P}_y \otimes \mathbf{P}_x,$$

а матрицу \mathbf{M}_r , стоящую в правой части уравнения (19), можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_r = & \mathbf{Q} \otimes (\mathbf{P}_y - \mathbf{Q}) \otimes (\mathbf{P}_x - \mathbf{Q}) + (\mathbf{P}_z - \mathbf{Q}) \otimes \mathbf{Q} \otimes (\mathbf{P}_x - \mathbf{Q}) + \\ & + (\mathbf{P}_z - \mathbf{Q}) \otimes (\mathbf{P}_y - \mathbf{Q}) \otimes \mathbf{Q} + (\mathbf{P}_z - \mathbf{Q}) \otimes (\mathbf{P}_y - \mathbf{Q}) \otimes (\mathbf{P}_x - \mathbf{Q}), \end{aligned} \quad (20)$$

Запишем итерационный метод (19) в рекуррентном виде

$$\mathbf{v}^{(s+1)} = \mathbf{S} \mathbf{v}^{(s)} + \boldsymbol{\xi}. \quad (21)$$

где матрица шага метода

$$\mathbf{S} = (\mathbf{M}_z \mathbf{M}_y \mathbf{M}_x)^{-1} \mathbf{M}_r = (\mathbf{P}_z \otimes \mathbf{P}_y \otimes \mathbf{P}_x)^{-1} \mathbf{M}_r = (\mathbf{P}_z^{-1} \otimes \mathbf{P}_y^{-1} \otimes \mathbf{P}_x^{-1}) \mathbf{M}_r. \quad (22)$$

С учетом формул (20), (22) матрица шага \mathbf{S} итерационного метода может быть преобразована к следующему виду:

$$\begin{aligned} \mathbf{S} = & \mathbf{T}_z \otimes (\mathbf{E} - \mathbf{T}_y) \otimes (\mathbf{E} - \mathbf{T}_x) + (\mathbf{E} - \mathbf{T}_z) \otimes \mathbf{T}_y \otimes (\mathbf{E} - \mathbf{T}_x) + \\ & + (\mathbf{E} - \mathbf{T}_z) \otimes (\mathbf{E} - \mathbf{T}_y) \otimes \mathbf{T}_x + (\mathbf{E} - \mathbf{T}_z) \otimes (\mathbf{E} - \mathbf{T}_y) \otimes (\mathbf{E} - \mathbf{T}_x) \end{aligned} \quad (23)$$

где $\mathbf{T}_d = \mathbf{P}_d^{-1} \mathbf{Q}$, $d = x, y, z$.

Как видно из формулы (23), матрица \mathbf{S} есть сумма четырех матриц размера 8×8 , каждая из которых является кронекеровым произведением трех матриц размера 2×2 . В свою очередь, собственные векторы-столбцы матриц размера 8×8 в правой части (23) являются кронекеровыми произведениями собственных векторов-столбцов матриц размера 2×2 [11, с.596]. Поскольку собственные векторы-столбцы матриц \mathbf{T}_d и $\mathbf{E} - \mathbf{T}_d$ ($d = x, y, z$) размера 2×2 совпадают, то совпадают и собственные векторы-столбцы всех четырех матриц размера 8×8 в правой части (23). Вследствие этого собственные значения $\lambda(\mathbf{S})$ матрицы шага \mathbf{S} равны сумме собственных значений четырех матриц размера 8×8 в правой части (23)

$$\begin{aligned} \lambda(\mathbf{S}) = & \lambda(\mathbf{T}_z \otimes (\mathbf{E} - \mathbf{T}_y) \otimes (\mathbf{E} - \mathbf{T}_x)) + \lambda((\mathbf{E} - \mathbf{T}_z) \otimes \mathbf{T}_y \otimes (\mathbf{E} - \mathbf{T}_x)) + \\ & + \lambda((\mathbf{E} - \mathbf{T}_z) \otimes (\mathbf{E} - \mathbf{T}_y) \otimes \mathbf{T}_x) + \lambda((\mathbf{E} - \mathbf{T}_z) \otimes (\mathbf{E} - \mathbf{T}_y) \otimes (\mathbf{E} - \mathbf{T}_x)) = \\ & = (1 - \lambda_z) \lambda_y \lambda_x + \lambda_z (1 - \lambda_y) \lambda_x + \lambda_z \lambda_y (1 - \lambda_x) + \lambda_z \lambda_y \lambda_x, \end{aligned} \quad (24)$$

где λ_d - собственные значения матрицы $\mathbf{E} - \mathbf{T}_d$ ($d = x, y, z$). При написании последнего равенства в формуле (24) было использовано свойство собственных значений матрицы, являющейся кронекеровым произведением матриц. Поскольку у матрицы $\mathbf{E} - \mathbf{T}_d$ имеются два комплексно сопряженных собственных значения

$$\lambda_d = \frac{12\kappa_d^2 + (3 \pm i\sqrt{3})\kappa_d}{12\kappa_d^2 + 6\kappa_d + 1}, \quad (25)$$

то число различных собственных значений, определяемых формулой (24), равно восьми у матрицы \mathbf{S} .

Отметим, что модули комплексно сопряженных чисел λ_d (25) одинаковы и равны

$$|\lambda_d| = \frac{2\sqrt{3}\kappa_d}{\sqrt{12\kappa_d^2 + 6\kappa_d + 1}}. \quad (26)$$

Вычислим квадрат модуля собственного значения $\lambda(\mathbf{S})$

$$\begin{aligned}
|\lambda(\mathbf{S})|^2 = \lambda(\mathbf{S})\bar{\lambda}(\mathbf{S}) = & (1-4\operatorname{Re}\lambda_z)|\lambda_y|^2|\lambda_x|^2 + (1-4\operatorname{Re}\lambda_y)|\lambda_z|^2|\lambda_x|^2 + \\
& + (1-4\operatorname{Re}\lambda_x)|\lambda_z|^2|\lambda_y|^2 + 4|\lambda_z|^2|\lambda_y|^2|\lambda_x|^2 + 2(\operatorname{Re}\lambda_z\operatorname{Re}\lambda_y + \operatorname{Im}\lambda_z\operatorname{Im}\lambda_y)|\lambda_x|^2 + \\
& + 2(\operatorname{Re}\lambda_z\operatorname{Re}\lambda_x + \operatorname{Im}\lambda_z\operatorname{Im}\lambda_x)|\lambda_y|^2 + 2(\operatorname{Re}\lambda_y\operatorname{Re}\lambda_x + \operatorname{Im}\lambda_y\operatorname{Im}\lambda_x)|\lambda_z|^2.
\end{aligned} \quad (27)$$

Используя формулы (25)-(27), найдем квадрат спектрального радиуса матрицы \mathbf{S}

$$\begin{aligned}
\rho^2(\mathbf{S}) = \max |\lambda(\mathbf{S})|^2 = \\
= \frac{1728\kappa_z\kappa_y\kappa_x \left[\kappa_z\kappa_y\kappa_x + \frac{1}{2}(\kappa_z\kappa_y + \kappa_z\kappa_x + \kappa_y\kappa_x) + \frac{1}{6}(\kappa_z + \kappa_y + \kappa_x) \right] + 144(\kappa_z^2\kappa_y^2 + \kappa_z^2\kappa_x^2 + \kappa_y^2\kappa_x^2)}{(12\kappa_z^2 + 6\kappa_z + 1)(12\kappa_y^2 + 6\kappa_y + 1)(12\kappa_x^2 + 6\kappa_x + 1)} \quad (28)
\end{aligned}$$

Из формулы (28) следует, что спектральный радиус матрицы шага стационарного итерационного процесса (21) меньше единицы при любых $\kappa_z > 0$, $\kappa_y > 0$, $\kappa_x > 0$, поэтому итерации всегда сходятся.

Из результатов, показанных на рис. 1, видно, что итерации в 3D случае сходятся медленнее, чем в 2D случае.

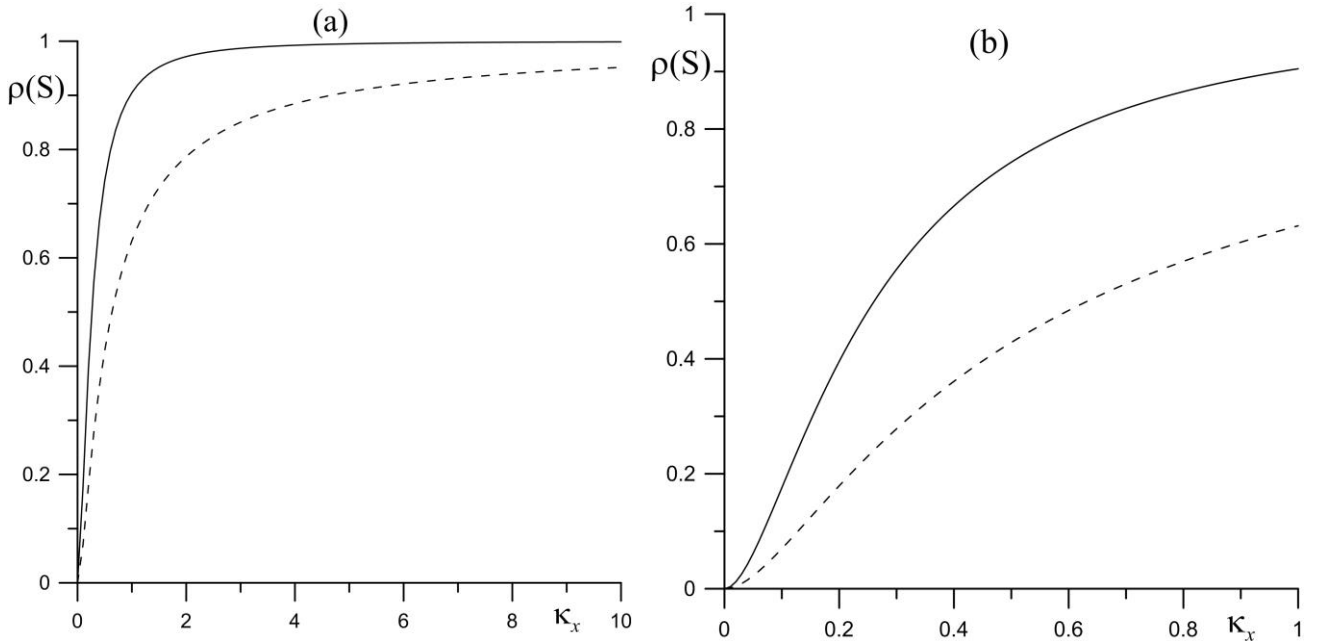


Рис. 1. Зависимость спектрального радиуса матрицы шага \mathbf{S} от числа Куранта в случае, когда $\kappa_x = \kappa_y = \kappa_z$ (а); увеличенный вид (б). Кривые: сплошная – 3D случай, штриховая – 2D случай.

Численный эксперимент

Численно исследуем сходимость итерационного метода (19), когда столбец

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \\ \psi_5 \\ \psi_6 \\ \psi_7 \\ \psi_8 \end{pmatrix} \text{ вычислен из условия, что точное решение } \begin{pmatrix} \hat{u}_{j+1/2,k+1/2,l+1/2} \\ \hat{u}_{j+1,k+1/2,l+1/2} \\ \hat{u}_{j+1/2,k+1,l+1/2} \\ \hat{u}_{j+1,k+1,l+1/2} \\ \hat{u}_{j+1/2,k+1/2,l+1} \\ \hat{u}_{j+1,k+1/2,l+1} \\ \hat{u}_{j+1/2,k+1,l+1} \\ \hat{u}_{j+1,k+1,l+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \text{ В качестве}$$

$$\text{начального приближения возьмем } \begin{pmatrix} \hat{u}_{j+1/2,k+1/2,l+1/2} \\ \hat{u}_{j+1,k+1/2,l+1/2} \\ \hat{u}_{j+1/2,k+1,l+1/2} \\ \hat{u}_{j+1,k+1,l+1/2} \\ \hat{u}_{j+1/2,k+1/2,l+1} \\ \hat{u}_{j+1,k+1/2,l+1} \\ \hat{u}_{j+1/2,k+1,l+1} \\ \hat{u}_{j+1,k+1,l+1} \end{pmatrix}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Убывание погрешности численного решения в норме $\|\cdot\|_{L_2}$ исследовано для разных соотношений между числами Куранта $\kappa_x, \kappa_y, \kappa_z$. На рис. 2 приведены результаты исследования. Из данных, представленных на этом рисунке, видно, что скорость сходимости итерационного процесса согласуется с полученной оценкой (28) для спектрального радиуса матрицы шага.

Заключение

В работе исследована сходимость метода итерируемой приближенной факторизации операторов бикompактной схемы 4-го порядка пространственной аппроксимации на примере 3D однородного линейного уравнения переноса с положительными постоянными коэффициентами. Доказано, что сходимость имеет место при всех положительных числах Куранта по всем трем пространственным направлениям.

Получена теоретическая оценка для скорости сходимости итераций в методе итерируемой приближенной факторизации. Проведен численный эксперимент, который подтвердил эту оценку при различных соотношениях между числами Куранта.

Проведено сравнение скорости сходимости метода итерируемой приближенной факторизации в 2D и 3D случаях. Оно показало, что сходимость в 3D случае происходит медленнее, чем в 2D случае.

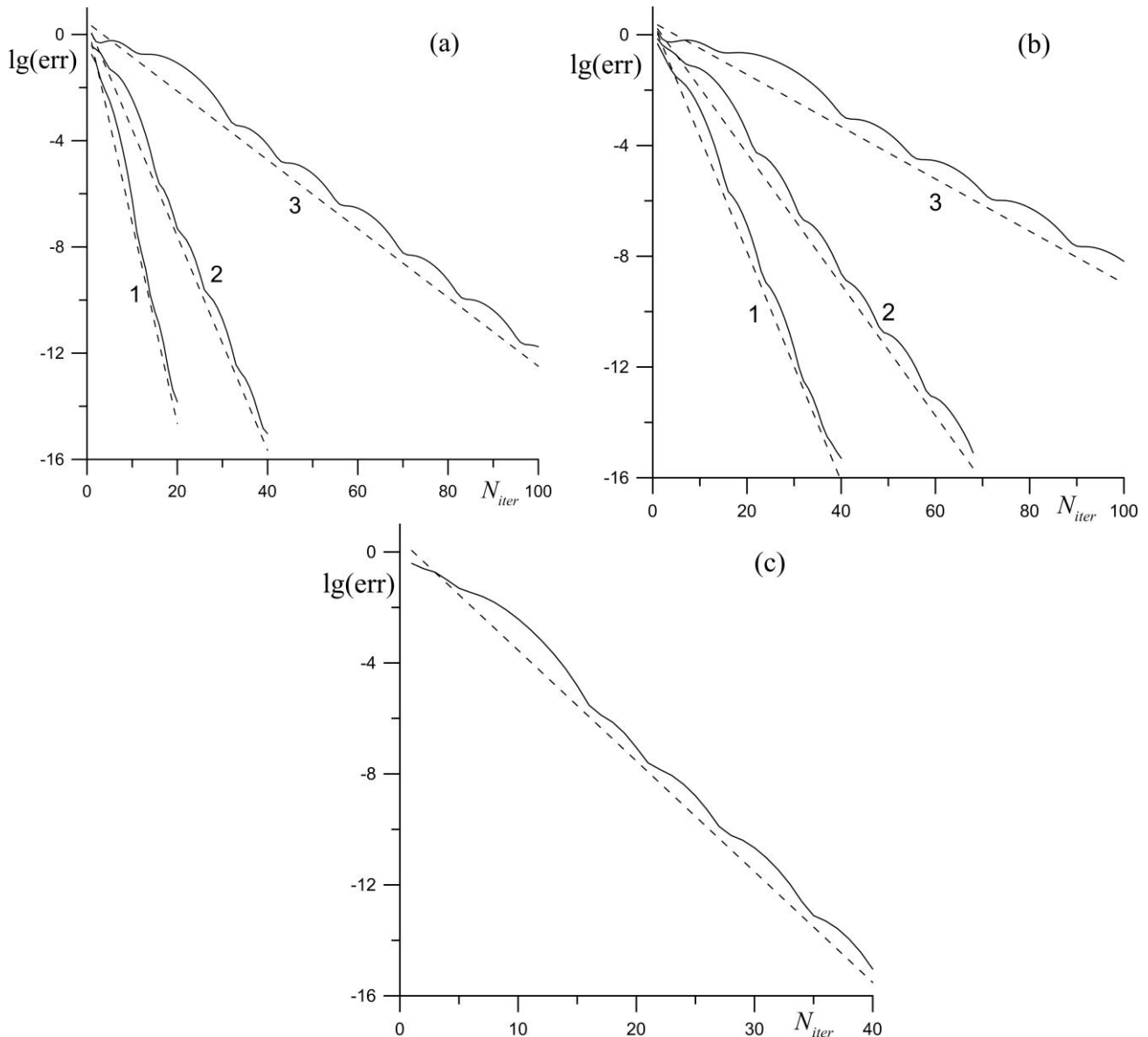


Рис. 2. Зависимость погрешности численного решения от числа итераций. Сплошные кривые соответствуют итерационному процессу (19), а штриховые кривые – идеальному итерационному процессу с коэффициентом подавления погрешности, равным $\rho(\mathbf{S})$, на каждой итерации. (а) $\kappa_x = \kappa_y = \kappa_z$: 1 - $\kappa_x = 0.1$, 2 - $\kappa_x = 0.2$, 3 - $\kappa_x = 0.5$, (б) $\kappa_x = \kappa_y, \kappa_z = 1.0$: 1 - $\kappa_x = 0.1$, 2 - $\kappa_x = 0.2$, 3 - $\kappa_x = 0.5$ и (с) $\kappa_x = 0.1, \kappa_y = 0.2, \kappa_z = 0.4$.

Библиографический список

1. Толстых А.И. Компактные и мультиоператорные аппроксимации высокой точности для уравнений в частных производных. – М.: Наука, 2015. – 350 с.
2. Рогов Б.В., Михайловская М.Н. Бикомпактные схемы четвертого порядка аппроксимации для гиперболических уравнений // Докл. АН. – 2010. – Т.430, №4. – С.470-474.

3. Михайловская М.Н., Рогов Б.В. Монотонные компактные схемы бегущего счета для систем уравнений гиперболического типа // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2012. – Т.52, №4. – С.672-695.

4. Рогов Б.В. Высокоточная монотонная компактная схема бегущего счета для многомерных уравнений гиперболического типа // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2013. – Т.53, №2. – С. 264-274.

5. Рогов Б.В., Брагин М.Д. О свойствах спектрального разрешения симметричных бикомпактных схем четвертого порядка аппроксимации // Докл. АН. - 2017. - Т.475, №2. - С. 140-144.

6. Чикиткин А.В., Рогов Б.В. Бикомпактная схема шестого порядка аппроксимации со свойством спектрального разрешения для уравнений гиперболического типа // Докл. АН. – 2017. – Т.476, №4. – С. 381–386.

7. Чикиткин А.В., Рогов Б.В. Оптимизированная бикомпактная схема шестого порядка аппроксимации с высоким спектральным разрешением для уравнений гиперболического типа // Докл. АН. – 2018. – Т. 478, № 6. – С.631-636.

8. Брагин М.Д., Рогов Б.В. Метод итерируемой приближенной факторизации операторов высокоточной бикомпактной схемы для систем многомерных неоднородных уравнений гиперболического типа // Докл. АН. – 2017. – Т. 473, № 3. – С. 263–267.

URL: <https://link.springer.com/article/10.1134/S1064562417020107>

9. Брагин М.Д., Рогов Б.В. Метод итерируемой приближенной факторизации операторов высокоточной бикомпактной схемы для систем многомерных неоднородных квазилинейных уравнений гиперболического типа // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2018. – Т.58, №3. – С.313-325.

10. Bragin M.D., Rogov B.V. On the exact dimensional splitting for a scalar quasilinear hyperbolic conservation law // In: Klingenberg C., Westdickenberg M. (eds) Theory, Numerics and Applications of Hyperbolic Problems I. HYP 2016. – Cham: Springer, 2018. – P.215-225. URL: https://doi.org/10.1007/978-3-319-91545-6_17.

11. Уоткинс Д. Основы матричных вычислений. Пер. с англ. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006. – 664 с.

Оглавление

Введение.....	3
Исследование сходимости в двумерном случае.....	4
Исследование сходимости в трехмерном случае.....	8
Численный эксперимент.....	13
Заключение.....	14
Библиографический список.....	15